

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 222



Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 222 (2023)

Дата публикации 10 апреля 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

Н. И. Гусева
Е. Е. Букжалёв
А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 222

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«КЛАССИЧЕСКАЯ И СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ»,
ПОСВЯЩЕННОЙ 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
ПРОФЕССОРА ЛЕВОНА СЕРГЕЕВИЧА АТАНАСЯНА

(15 ИЮЛЯ 1921 г. — 5 ИЮЛЯ 1998 г.)

МОСКВА, 1–4 НОЯБРЯ 2021 г.

ЧАСТЬ 3



Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Геометрия почти 3-квази-сасакиевых многообразий второго рода (<i>С. В. Галаев</i>)	3
Геометрия циклических и антициклических пространств (<i>Н. И. Гусева</i>)	10
Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью (<i>П. Н. Клепиков, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова</i>)	19
О пределах потока Кэлера—Риччи на групповых компактификациях Фано (<i>Янь Ли, Чжэнь Е Ли</i>)	30
Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле. III (<i>В. М. Морозов, В. И. Каленова, М. Г. Раж</i>)	42
О метриках Эйнштейна трехмерных групп Ли с полусимметрической связностью (<i>А. А. Павлова, О. П. Хромова</i>)	64
О взаимных расположениях двух M -кривых степени 4 (<i>Н. Д. Пучкова</i>)	69
О геометрии голоморфных торсообразующих векторных полей на почти контактных метрических многообразиях (<i>А. Р. Рустанов, О. Е. Арсеньева, С. В. Харитонова</i>)	83
Об алгебре Ли дифференцирований йордановой алгебры билинейной симметрической формы (<i>А. Я. Султанов, М. В. Глебова</i>)	94
О расслоениях Вейля (<i>А. Я. Султанов, О. А. Монахова, Г. А. Султанова</i>)	100
Спонтанная кластеризация в марковских цепях. III. Алгоритмы Монте-Карло (<i>В. В. Учайкин, Е. В. Кожемякина</i>)	115
О канонической проективной связности Картана (<i>Ю. И. Шевченко, Е. В. Скрыдлова, А. В. Вялова</i>)	134
Алгебры Ли и специальные функции, связанные с изотропным конусом (<i>И. А. Шилин, Дж. Чой</i>)	141



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 3–9
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-3-9

УДК 514.76

ГЕОМЕТРИЯ ПОЧТИ 3-КВАЗИ-САСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ВТОРОГО РОДА

© 2023 г. С. В. ГАЛАЕВ

Аннотация. Определена структура почти 3-квази-сасакиева многообразия второго рода. Доказано, что на распределении нулевой кривизны почти квази-сасакиева многообразия с помощью связности с кососимметрическим кручением определяется структура почти 3-квази-сасакиева многообразия.

Ключевые слова: субриманово многообразие контактного типа, почти контактное метрическое многообразие, внутренняя связность, почти квази-сасакиево многообразие, кососимметрическая связность, почти 3-квази-сасакиева структура.

GEOMETRY OF ALMOST 3-QUASI-SASAKIAN MANIFOLDS OF THE SECOND KIND

© 2023 S. V. GALAEV

ABSTRACT. In this paper, we define the structure of an almost 3-quasi-Sasakian manifold of the second kind and prove that on a zero-curvature distribution of an almost quasi-Sasakian manifold, the structure of an almost 3-quasi-Sasakian manifold is determined by a connection with skew-symmetric torsion.

Keywords and phrases: sub-Riemannian manifold of contact type, almost contact metric manifold, interior connection, almost quasi-Sasakian manifold, skew-symmetric connection, almost 3-quasi-Sasakian structure.

AMS Subject Classification: 53C17

1. Введение. В настоящее время активно исследуются почти 3-контактные метрические структуры, как первого, так и второго рода. В первом случае размерность многообразия, несущего соответствующую структуру, равна $n = 4m + 3$, во втором случае — равна $n = 4m + 1$ (см. [9, 11]). Почти 3-контактные метрические структуры первого рода определены Y. Y. Kuo в 1970 г. [20]. Однако структурами первого рода они были названы позже, в статье I. Sato в 1973 г. [21]. В той же статье I. Sato назвал структуры, определенные S. Hashimoto в 1964 г. [18], почти 3-контактными метрическими структурами второго рода. В обоих случаях на гладком многообразии определяются три почти контактные структуры, совместимые с римановой метрикой. В то же время, структура первого рода включает три структурных векторных поля, а структура второго рода — одно структурное векторное поле Рибба. Почти 3-контактные метрические структуры первого рода устроены более сложно, чем структуры второго рода, но именно структуры первого рода вызывают больший интерес со стороны геометров. Важность изучения почти 3-контактных метрических структур первого рода подробно обсуждается в работах I. Agricola [6–9]. Там же активно обсуждается проблема поиска связности на многообразиях с почти 3-контактной метрической структурой более предпочтительной, чем связность Леви-Чивиты.

Среди многочисленных направлений в изучении почти 3-контактных метрических структур обоих родов выделяется область исследования структур с различными классами образующих их

почти контактных метрических структур [8, 12]. Обратимся, в частности, к работам В. Cappelletti-Montano [12–14]. Автор подробно исследует геометрию 3-квази-сасакиевых многообразий первого рода. В настоящей работе вводится понятие почти квази-сасакиева многообразия (AQS-многообразия). Почти квази-сасакиева структура (AQS-структура) в отличие от квази-сасакиевой структуры (QS-структуры) является почти нормальной структурой [5]. Почти нормальные структуры естественным образом возникают на распределениях нулевой кривизны субримановых многообразий контактного типа [4]. Почти квази-сасакиево многообразие M определяется как почти нормальное почти контактное метрическое многообразие с замкнутой фундаментальной формой, для которого выполняется условие $d\eta(\xi, \cdot) = 0$. На AQS-многообразии определена единственная метрическая связность ∇^N с кососимметрическим кручением. Задание связности ∇^N позволяет определить на распределении D многообразия M как на тотальном пространстве векторного расслоения почти 3-контактную метрическую структуру второго рода [1, 3, 5]. В настоящей работе доказывается, что определяемая на распределении AQS-многообразия M почти 3-контактная метрическая структура является почти 3-квази-сасакиевой структурой, если распределение многообразия M имеет нулевую кривизну.

2. AQS-многообразия, оснащенные канонической кососимметрической связностью.

Пусть M — гладкое риманово многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем субримановой структурой (M, ξ, η, g, D) контактного типа, где η и ξ — 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^\perp$ (см. [4]).

Карту $k(x^i)$ ($i, j, k = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n - 1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \xi$ (см. [4]). Пусть $P: TM \rightarrow D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $k(x^i)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = e_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D : $D = \text{Span}(e_a)$.

Для адаптированных карт $k(x^i)$ и $k'(x'^i)$ выполняются следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{a'}), \quad x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Тензорное поле t типа (p, q) называется допустимым к распределению D или трансверсальным, если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются ξ или η . Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Из равенства $[e_a, e_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$, следует, что условие $d\eta(\xi, X) = 0$ эквивалентно справедливости равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ связность Леви-Чивиты и $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ — ее коэффициенты. Воспользовавшись равенством

$$2\tilde{\Gamma}_{ij}^m = g^{km}(e_i g_{jk} + e_j g_{ik} - e_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}) + \Omega_{ij}^m,$$

убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. Коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности Леви-Чивиты субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = -\partial_n \Gamma_a^n, \quad \tilde{\Gamma}_{nn}^a = g^{ab} \partial_n \Gamma_b^n,$$

где

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}(e_b g_{cd} + e_c g_{bd} - e_d g_{bc}), \quad \psi_a^b = g^{bc} \omega_{ac}, \quad C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}, \quad C_a^b = g^{bc} C_{ac}.$$

Здесь эндоморфизм $\psi: TM \rightarrow TM$ определяется из равенства $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Выполняются также следующие соотношения: $C(X, Y) = \frac{1}{2}(L_\xi g)(X, Y)$, $g(CX, Y) = C(X, Y)$. Как видно из последних равенств, символом C в зависимости от ситуации обозначаются тензоры разных валентностей.

N -связность ∇^N определяется на субримановом многообразии, наделенном эндоморфизмом $N: TM \rightarrow TM$ касательного расслоения многообразия M ($N\xi = 0$, $N(D) \subset D$) как связность, следующим образом выражающаяся через связность Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}_X Y$:

$$\nabla_X^N Y = \tilde{\nabla}_X Y + (\tilde{\nabla}_X \eta)(Y)\xi - \eta(Y)\tilde{\nabla}_X \xi - \eta(X)(\tilde{\nabla}_\eta \eta)(Y)\xi - \eta(X)(C + \psi - N)Y.$$

Непосредственно проверяется, что в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты G_{jk}^i связности ∇_X^N имеют вид

$$G_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(e_b g_{cd} + e_c g_{bd} - e_d g_{bc}), \quad G_{na}^b = N_a^b, \quad G_{na}^n = -\partial_n \Gamma_a^n.$$

Предложение 2 (см. [17]). *Линейная связность ∇^N , заданная на субримановом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда $N = 2\psi$.*

Ранг субримановой структуры полагается равным $2p$, если $(d\eta)^p \neq 0$, $\eta \wedge (d\eta)^p = 0$, и равным $2p + 1$, если $\eta \wedge (d\eta)^p \neq 0$, $(d\eta)^{p+1} = 0$. Легко проверяется, что ранг субримановой структуры равен $2p + 1$ тогда и только тогда, когда $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. В случае, когда $N = 2\psi$, связность ∇^N будем называть канонической связностью.

Заметим, что каноническая связность в случае субримановой структуры четного ранга не является метрической связностью. Действительно,

$$\nabla_n^N g_{na} = -G_{na}^n = \partial_n \Gamma_a^n.$$

Пусть теперь M — почти контактное метрическое многообразие размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем структурой $(M, \xi, \eta, \varphi, g, D)$. Здесь φ — тензор типа $(1, 1)$, называемый структурным эндоморфизмом, ξ и η — вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

- (i) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$,
- (ii) $\eta(\xi) = 1$,
- (iii) $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Здесь $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M .

Гладкое распределение $D = \ker(\eta)$ называется распределением почти контактной структуры. В качестве следствия условий (i)–(iii) получаем:

- (i') $\varphi\xi = 0$,
- (ii') $\eta \circ \varphi = 0$,
- (iii') $\eta(X) = g(X, \xi)$, $X \in \Gamma(TM)$.

Кососимметрический тензор $\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^\perp = \text{Span}(\xi)$, ортогональное распределению D , называется оснащением распределения D . Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$.

Многообразие Сасаки — контактное метрическое многообразие, удовлетворяющее дополнительному условию

$$N_\varphi^{(1)} = N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0, \tag{1}$$

где

$$N_\varphi(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

— тензор Нейенхейса эндоморфизма φ . Выполнение условия (1) означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Назовем почти контактное метрическое многообразие почти контактным кэлеровым многообразием [5, 17], если выполняются следующие условия:

$$d\Omega = 0, \quad \tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \xi = 0.$$

Многообразие, для которого выполняется условие $N_\varphi = N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$ названо нами почти нормальным многообразием. Легко проверяется, что почти нормальное почти контактное метрическое многообразие является нормальным многообразием тогда и только тогда, когда $d\eta = \varphi^* d\eta$.

Пусть $P: TM \rightarrow D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 3. Для любого почти контактного метрического многообразия выполняется следующее равенство $PN_\varphi^{(1)} = \tilde{N}_\varphi$.

Заметим, что из предложения 3 следует справедливость соотношения

$$N_\varphi^{(1)}(X, Y) = \tilde{N}_\varphi(X, Y) + 2(d\eta(X, Y) - d\eta(\varphi X, \varphi Y))\xi.$$

Внутренней линейной связностью ∇ (см. [4]) на многообразии с почти контактной метрической структурой называется отображение

$$\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) $\nabla_{f_1 X + f_2 Y} = f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y$,
- (ii) $\nabla_X f Y = (Xf)Y + f \nabla_X Y$,
- (iii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{e_a} e_b = \Gamma_{ab}^c e_c$. Из равенства $e_a = A_a^{a'} e_{a'}$, где

$$A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a},$$

обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^{c'} \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^{c'} e_a A_b^{c'}.$$

Отсюда, в частности, следует, что производные $\partial_n \Gamma_{ac}^d$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Рассмотрим два простейших примера контактных кэлеровых многообразий.

Пример 1. Пусть $M = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 : y \neq 0\}$ — гладкое многообразие размерности 5, оснащенное почти контактной метрической структурой $(M, \xi, \eta, \varphi, g, D)$. Здесь использованы следующие обозначения:

- (a) $D = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, где

$$e_1 = \partial_1 - y\partial_5, \quad e_2 = \partial_2, \quad e_3 = \partial_3, \quad e_4 = \partial_4,$$

$(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5)$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^5$,

- (b) $\xi = \partial_5$,
- (c) $\eta = dz + ydx$,
- (d) $\varphi e_1 = e_3, \varphi e_2 = e_4, \varphi e_3 = -e_1, \varphi e_4 = -e_2, \varphi \xi = 0$,
- (e) базис $(e_1, e_2, e_3, e_4, \xi)$ состоит из ортонормированных векторов.

Непосредственно проверяется, что почти контактное метрическое многообразие M не является нормальным, но является почти нормальным многообразием. Действительно,

$$N_\varphi^{(1)}(e_1, e_2) = \varphi^2[e_1, e_2] + [e_3, e_4] - \varphi[e_3, e_2] - \varphi[e_1, e_4] + 2d\eta(e_1, e_2)\xi = \varphi^2\xi - \eta(\xi)\xi = -\xi.$$

С другой стороны,

$$\tilde{N}_\varphi(e_1, e_2) = 2d\eta(e_3, e_4)\xi = 0.$$

Для рассматриваемой структуры выполняется равенство

$$d\eta(\xi, X) = 0, \quad X \in \Gamma(TM).$$

Таким образом, $\omega = d\eta$ в рассматриваемом примере является допустимым тензорным полем, к которому применима внутренняя связность ∇ (см. [4]). При этом $\nabla \omega = 0$. Пусть, далее, ψ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Координатное представление эндоморфизма ψ выглядит следующим образом: $\psi_a^b = g^{bc} \omega_{ac}$.

Пример 2. В этом примере рассматривается то же самое многообразие M с той лишь разницей, что

$$e_1 = \partial_1 - yz\partial_5, \quad \eta = dz + yz dx.$$

Однако, в отличие от предыдущего случая, условие $d\eta(\xi, \cdot) = 0$ не выполняется. Действительно,

$$2d\eta(\xi, e_1) = -\eta([\xi, e_1]) = y \neq 0.$$

Назовем почти контактное метрическое многообразие почти квази-сасакиевым многообразием (AQS-многообразием), если выполняются следующие условия:

$$d\Omega = 0, \quad \tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^*d\eta \otimes \xi = 0, \quad d\eta(\xi, \cdot) = 0.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Почти контактная метрическая структура является почти квази-сасакиевой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = g((\psi \circ \varphi)Y, X)\xi - \eta(Y)(\varphi \circ \psi)(X) - \eta(X)(\varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi)Y.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть M — AQS-многообразие. Покажем, что выполняется приведенное выше равенство. Воспользуемся равенством, которое выполняется для любого почти контактного метрического многообразия:

$$\begin{aligned} 2g((\tilde{\nabla}_X \varphi)Y, Z) &= 3(d\Omega(X, \varphi Y, \varphi Z) - d\Omega(X, Y, Z)) + g(N_\varphi^{(1)}(Y, Z), \varphi X) + \\ &+ 2N_\varphi^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 2(d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y)). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$d\Omega = 0, \quad \tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^*d\eta \otimes \xi = 0, \quad d\eta(\xi, \cdot) = 0,$$

получаем:

$$g((\tilde{\nabla}_X \varphi)Y, Z) = \eta(X)(g((\psi \circ \varphi)Y, Z) + d\eta(Y, \varphi Z)) + g(d\eta(\varphi Y, X)\xi, Z) + d\eta(X, \varphi Z)\eta(Y).$$

Отсюда и следует доказываемое равенство. Для доказательства *достаточности* удобно воспользоваться адаптированными координатами. $\square$

Следующие предложения являются непосредственными следствиями теоремы 1.

Предложение 4. *Почти контактная метрическая структура является квази-сасакиевой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = g(AY, X)\xi - \eta(Y)AX, \quad A = \varphi \circ \psi.$$

Предложение 5. *Почти квази-сасакиево многообразие является квази-сасакиевым многообразием тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

- (i) $d\eta = \varphi^*d\eta$,
- (ii) $\varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi = 0$,
- (iii) $g(X, AY) = g(AX, Y)$, $A = \varphi \circ \psi$.

Пусть $(M, \xi, \eta, \varphi, g, D)$ — заданная на многообразии M почти квази-сасакиева структура и пусть ∇^N — каноническая связность. Из предложения 5 вытекает следующий факт.

Предложение 6. *Почти квази-сасакиево многообразие является квази-сасакиевым многообразием тогда и только тогда, когда $\nabla^N \varphi = 0$.*

3. Почти 3-квази-сасакиевы структуры. Рассмотрим на гладком многообразии M размерности $n = 4m + 1$ почти контактную метрическую 3-структуру второго рода $(M, \xi, \eta, \varphi_\alpha, D)$, где $\alpha = 1, 2, 3$ (см. [10]). Назовем 3-структуру $(M, \xi, \eta, \varphi_\alpha, D)$ почти квази-сасакиевой 3-структурой, если для каждого по отдельности α структура $(M, \xi, \eta, \varphi_\alpha, D)$ — почти квази-сасакиева структура.

Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D \rightarrow M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D .

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $k(x^\alpha)$ на многообразии M сверхкарту $\tilde{k}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D , где x^{n+a} —

координаты допустимого вектора в базисе $\mathbf{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию такого объекта $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a})$, что $HD = \text{Span}(\varepsilon_a)$, где

$$\varepsilon_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}.$$

В случае, когда

$$G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+c},$$

связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD , и $N: D \rightarrow D$ — поле допустимого тензора типа $(1, 1)$. N -продолженной связностью назовем такую связность в векторном расслоении (D, π, M) , определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, что $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\mathbf{u})$, где

$$\mathbf{u}_X = \varepsilon - (NX)^v, \quad \varepsilon = \partial_n, \quad X \in D,$$

$(NX)^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\varepsilon_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\mathbf{u}$ получает координатное представление

$$\mathbf{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}.$$

Всякому векторному полю $X \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии M , обычным образом соответствует его горизонтальный лифт X^h , при этом $X^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда X — допустимое векторное поле: $X \in \Gamma(D)$.

Векторные поля

$$(\varepsilon_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \quad \mathbf{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$$

определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \quad \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + N_b^a x^{n+b} dx^n)$$

— соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_a, \varepsilon_b] &= 2\omega_{ba} \mathbf{u} + x^{n+d} (2\omega_{ba} N_d^c + R_{bad}^c) \partial_{n+c}, \\ [\varepsilon_a, \mathbf{u}] &= x^{n+d} (\partial_n \Gamma_{ad}^c - \nabla_a N_d^c) \partial_{n+c}, \\ [\varepsilon_a, \partial_{n+b}] &= \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad [\mathbf{u}, \partial_{n+a}] = N_a^c \partial_{n+c}. \end{aligned}$$

Здесь

$$R_{abc}^d = 2\mathbf{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e$$

— компоненты тензора Схоутена

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X, Y]} Z - P[Q[X, Y], Z].$$

Определим на распределении D почти контактную 3-структуру $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \mathbf{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+b}, \quad J(X^h) = X^v, \quad J(X^v) = -X^h, \quad J(\mathbf{u}) = 0, \\ J_1(X^h) &= -(\varphi X)^h, \quad J_1(X^v) = (\varphi X)^v, \quad J_1(\mathbf{u}) = 0, \quad J_2 = J_1 J, \quad X \in \Gamma(D). \end{aligned}$$

Проводя необходимые вычисления в адаптированных координатах, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть M — почти квази-сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны. Тогда структура $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \mathbf{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$, где

$$\tilde{g}(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b), \quad \tilde{g}(\mathbf{u}, \varepsilon_b) = \tilde{g}(\mathbf{u}, \partial_{n+b}) = 0, \quad \tilde{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$$

является почти 3-квази-сасакиевой структурой второго рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бужушева А. В., Галаев С. В. Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2017. — № 48. — С. 32–41.
2. Бужушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 4. — С. 10–18.
3. Галаев С. В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — 16, № 3. — С. 263–272.
4. Галаев С. В. Классификация продолженных би-метрических структур на распределениях ненулевой кривизны субримановых многообразий// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2018. — 18, № 3. — С. 263–273.
5. Галаев С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны// Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 8. — С. 42–52.
6. Agricola I., Ferreira A. C. Einstein manifolds with skew torsion// Q. J. Math. — 2014. — 65, № 3. — P. 717–741.
7. Agricola I., Becker-Bender J., Kim H. Twistorial eigenvalue estimates for generalized Dirac operators with torsion// Adv. Math. — 2013. — 243. — P. 296–329.
8. Agricola I., Friedrich T. 3-Sasakian manifolds in dimension seven, their spinors and G_2 -structures// J. Geom. Phys. — 2010. — 60, № 2. — P. 326–332.
9. Agricola I., Ferreira A. C. Einstein manifolds with skew torsion// Quart. J. Math. — 2014. — 65. — P. 717–741.
10. Attarchi H. 3-Kenmotsu manifolds// Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 3. — P. 320–325.
11. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution// Bull. Transilvania Univ. Brasov. Ser. III. Math. Inform. Phys. — 2011. — 4 (53), № 2. — P. 13–22.
12. Cappelletti-Montano B., Nicola A. 3-Sasakian manifolds, 3-cosymplectic manifolds and Darboux theorem// J. Geom. Phys. — 2007. — 12. — P. 2509–2520.
13. Cappelletti-Montano B., Nicola A., Dileo G. 3-quasi-Sasakian manifolds// Ann. Global Anal. Geom. — 2008. — 33, № 4. — P. 397–409.
14. Cappelletti-Montano B., Nicola A., Dileo G. The geometry of 3-quasi-Sasakian manifolds// Int. J. Math. — 2000. — 20, № 9. — P. 1081–1105.
15. Friedrich T., Ivanov S. Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory// Asian J. Math. — 2002. — 6. — P. 303–336.
16. Galaev S. V. Admissible hyper-complex pseudo-Hermitian structures// Lobachevskii J. Math. — 2018. — 39, № 1. — P. 71–76.
17. Galaev S. V. Intrinsic geometry of almost contact kahlerian manifolds// Acta Math. Acad. Paedagog. Nyiregyhaziensis. — 2015. — 31, № 1. — P. 35–46.
18. Hashimoto S. On differentiable manifold with almost quaternion contact structure// Tensor (New Ser.). — 1964. — 15. — P. 258–268.
19. Kashiwada T. A note on a Riemannian space with Sasakian 3-structure// Natl. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. — 1971. — 22. — P. 1–2.
20. Kuo Y. Y. On almost contact 3-structure// Tôhoku Math. J. — 1970. — 22. — P. 325–332.
21. Sato I. On a structure similar to Sasakian 3-structure// Tôhoku Math. J. — 1973. — 25, № 4. — P. 405–415.

Галаев Сергей Васильевич

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского

E-mail: sgalaev@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 10–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-10-18

УДК 512.6

ГЕОМЕТРИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ И АНТИЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

© 2023 г. Н. И. ГУСЕВА

Аннотация. Рассматриваются пространства, геометрия которых определяется формами, не являющимися квадратичными. Эти формы связаны с циклическими и антициклическими линейными алгебрами. Приводятся линейные преобразования, сохраняющие такие формы, и указаны инварианты этих преобразований, аналогичные расстоянию между точками и углу между векторами.

Ключевые слова: пространство с полилинейной формой, циклическая алгебра, циклическое пространство, антициклическое пространство.

GEOMETRY OF CYCLIC AND ANTICYCLIC SPACES

© 2023 N. I. GUSEVA

ABSTRACT. We consider spaces whose geometry is determined by forms that are not quadratic. These forms are related to cyclic and anticyclic linear algebras. We describe linear transformations that preserve these forms and indicate invariants of these transformations similar to the distance between points and the angle between vectors.

Keywords and phrases: space with a multilinear form, cyclic algebra, cyclic space, anticyclic space.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 16S38

Евклидовы и псевдоевклидовы пространства представляют собой аффинные пространства, снабжённые некоторой квадратичной формой, которая называется *фундаментальной* и задаёт метрическую структуру пространства. Движениями таких пространств являются линейные преобразования, сохраняющие фундаментальную форму.

Непосредственным обобщением евклидовых и псевдоевклидовых пространств будут аффинные пространства, с не квадратичными фундаментальными формами. Такие пространства естественно называть *почти евклидовыми*. Некоторые из них по своим свойствам напоминают евклидовы или псевдоевклидовы пространства, другие же имеют геометрию, которая кардинально отличается от привычных нам геометрических структур.

Геометрия пространств с неквадратичной фундаментальной формой не привлекала особого внимания геометров по двум причинам. Во-первых, из-за сложности определения в таких пространствах тех или иных геометрических величин, а во-вторых, пространства с не квадратичной фундаментальной формой не находили достаточно значимых приложений. На это указывал ещё Бернгард Риман, который первым допустил возможность изучения многообразий с не квадратичной фундаментальной формой. В своей знаменитой работе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» он писал: «Случай, который можно было бы назвать следующим по простоте, соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвёртой степени из дифференциального выражения четвёртой степени. Исследование этого более общего типа многообразий, правда, не потребовало бы введения каких-либо существенно новых принципов, но связано было бы со значительной потерей времени и едва ли позволило бы представить

учение о многообразиях в особо своеобразном освещении; притом результаты не смогли бы быть сформулированы геометрически. Поэтому я позволю себе ограничиться многообразиями, для которых линейный элемент задаётся как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени» [8].

Между тем приложения геометрии к теоретической физике в XX веке поставило вопрос об изучении пространственно-временных многообразий, геометрия которых порождается не квадратичной фундаментальной формой, хотя такие исследования касались весьма ограниченного набора не квадратичных форм [4].

С точки зрения Ф. Клейна, геометрия на некотором множестве определяется какой-либо группой, действующей на этом множестве. И потому, чтобы на аффинном пространстве построить почти евклидову геометрию с той или иной не квадратичной формой, надо найти группу преобразований, сохраняющих эту форму. И задача отыскания таких групп преобразований далеко не тривиальная, а лучше сказать, в общем случае неподъёмная, в отличие от групп преобразований, сохраняющих квадратичные формы [6].

Однако есть обширный класс не квадратичных форм, для которых сравнительно просто найти группу сохраняющих их линейных преобразований. Такие формы связаны с некоторыми линейными алгебрами, а сохраняющие их преобразования ищутся среди линейных алгебраических функций.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ — какой-либо базис линейного пространства алгебры $\mathbf{A}_n$ над полем $\mathbb{R}$, и пусть c_{kh}^r — структурные константы, вычисленные в этом базисе, т.е.

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = c_{kh}^r \mathbf{e}_r.$$

Рассмотрим линейное алгебраическое уравнение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, которое в выбранном базисе будет иметь вид

$$(a^k \mathbf{e}_k) \cdot (x^h \mathbf{e}_h) = b^r \mathbf{e}_r \quad \text{или} \quad a^k x^h c_{kh}^r \mathbf{e}_r = b^r \mathbf{e}_r;$$

тогда определитель системы линейных уравнений

$$a^k c_{kh}^r x^h = b^r,$$

эквивалентных линейному алгебраическому уравнению $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, будем называть *левым детерминантом* элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_n$ и обозначать $\Delta_L(\mathbf{a})$.

Аналогично вводится в рассмотрение *правый детерминант* $\Delta_R(\mathbf{a})$ элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_n$ — определитель системы линейных уравнений

$$a^h c_{kh}^r x^k = b^r,$$

эквивалентной линейному алгебраическому уравнению $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Для коммутативных алгебр справедливо равенство

$$\Delta_L(\mathbf{b}) = \Delta_R(\mathbf{b}) = \Delta(\mathbf{b}).$$

Пусть в алгебре $\mathbf{A}_n$ выполняется *условие мультипликативности детерминантов*, т.е.

$$\Delta_L(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \Delta_L(\mathbf{x})\Delta_L(\mathbf{y}) \quad \text{или} \quad \Delta_R(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \Delta_R(\mathbf{x})\Delta_R(\mathbf{y}). \quad (1)$$

Тогда $\Delta_L(\mathbf{x})$ или $\Delta_R(\mathbf{x})$ текущего элемента алгебры можно взять в качестве неквадратичной фундаментальной формы, а линейные алгебраические функции $\mathbf{x}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$ или $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$, где $\Delta_L(\mathbf{b}) = 1$ или $\Delta_R(\mathbf{b}) = 1$, дадут нам движения линейного пространства этой алгебры. В этом случае геометрия линейного пространства алгебры $\mathbf{A}_n$ будет называться *детерминантной*.

Покажем, что для ассоциативных алгебр детерминанты

$$\Delta_L(\mathbf{a}) = \det(a^k c_{kh}^r) \quad \text{и} \quad \Delta_R(\mathbf{a}) = \det(a^h c_{kh}^r)$$

произвольного элемента ассоциативной алгебры $\mathbf{A}_n$ являются мультипликативными функциями, т.е. для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}_n$

$$\Delta_L(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \Delta_L(\mathbf{a})\Delta_L(\mathbf{b}) \quad \text{и} \quad \Delta_R(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \Delta_R(\mathbf{a})\Delta_R(\mathbf{b}).$$

Для доказательства мультипликативного свойства левого детерминанта заметим, что в силу ассоциативности умножения в алгебре $\mathbf{A}_n$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}),$$

тогда, с одной стороны,

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} = (a^k b^h c_{kh}^r \mathbf{e}_r) \cdot (x^l \mathbf{e}_l) = a^k b^h c_{kh}^r c_{rl}^m x^l \mathbf{e}_m,$$

с другой стороны,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) = (a^k \mathbf{e}_k) \cdot (b^h c_{hl}^r x^l \mathbf{e}_r) = a^k b^h c_{hl}^r c_{kr}^m x^l \mathbf{e}_m,$$

то есть

$$\Delta_L(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \det(a^k b^h c_{kh}^r c_{rl}^m) = \det(a^k b^h c_{hl}^r c_{kr}^m) = \det(b^h c_{hl}^r) \det(a^k c_{kr}^m) = \Delta_L(\mathbf{b}) \Delta_L(\mathbf{a}).$$

Аналогично доказывается мультипликативное свойство правых детерминантов элементов ассоциативной алгебры. Заметим ещё, что если ассоциативная алгебра к тому же коммутативна, то правый и левый детерминанты очевидно совпадают, и мы говорим просто о детерминанте элементов такой алгебры.

Таким образом, каждая ассоциативная алгебра на своём линейном пространстве порождает некоторую геометрию, в которой роль фундаментальной формы играет левый (правый) детерминант текущего элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{A}_n$, а движениями будут линейные преобразования пространства алгебры, порождаемые линейными алгебраическими функциями $\mathbf{x}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$, при условии, что $\Delta_L(\mathbf{a}) = \Delta_L(\mathbf{b}) = 1$ (или $\Delta_R(\mathbf{a}) = \Delta_R(\mathbf{b}) = 1$).

Это сразу следует из мультипликативности:

$$\Delta_L(\mathbf{x}') = \Delta_L(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = \Delta_L(\mathbf{a}) \Delta_L(\mathbf{x}) = \Delta_L(\mathbf{x}).$$

При этом заметим, что множество элементов $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_n$, для которых $\Delta_L(\mathbf{a}) = 1$, образуют подгруппу $\mathbf{G}_L(\mathbf{A}_n)$ группы всех обратимых элементов алгебры $\mathbf{A}_n$ и, следовательно, преобразования линейного пространства алгебры, порождаемые линейными функциями $\mathbf{x}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ при условии $\Delta_L(\mathbf{a}) = 1$, образуют группу движений геометрической структуры с фундаментальной формой $\Delta_L(\mathbf{x})$.

Аналогично, на линейном пространстве ассоциативной алгебры $\mathbf{A}_n$ можно определить и геометрическую структуру, фундаментальной формой для которой будет правый детерминант $\Delta_R(\mathbf{x})$, а движения в этой геометрии будут определяться линейными алгебраическими функциями $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}$, при условии, что $\Delta_R(\mathbf{a}) = 1$.

Заметим ещё, что линейные алгебры можно рассматривать и над полем комплексных чисел. При этом мультипликативность детерминантов остаётся справедливой (так как при доказательстве нигде не использовалось предположение, что $a^k, b^h, c_{kh}^r \in \mathbb{R}$). И для линейных пространств, получаемых овеествлением линейных комплексных пространств ассоциативных алгебр над полем комплексных чисел, в качестве фундаментальной формы можно принять модуль левого или правого детерминанта, поскольку модуль комплексного числа обладает свойством мультипликативности.

Детерминантную геометрию можно определить и на неассоциативных алгебрах, если детерминант элементов этих алгебр будет мультипликативной функцией. Примером этому служат алгебры октав и антиоктав.

Простейшие детерминантные геометрии реализуются на *циклических алгебрах* $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$, где $\mathbf{e}$ порождающий элемент группы $\mathbb{Z}_m$, т.е. $\mathbf{e}^m = 1$.

Каждому элементу $\mathbf{x} = x_0 + x_1 \mathbf{e} + x_2 \mathbf{e}^2 + \dots + x_{m-1} \mathbf{e}^{m-1} \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ ставится в соответствие вектор m -мерного линейного (или центроаффинного) пространства с координатами $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{R}$, в качестве *фундаментальной формы* степени m взят *детерминант* этого элемента

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & \dots & x_1 \\ x_1 & x_0 & \dots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_0 \end{vmatrix}.$$

Такие определители называются *циркулянтами* и для них справедливо следующее тождество [7]

$$\begin{aligned}\Delta_m(\mathbf{x}) &= \prod_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \alpha_m^{nk} x_n \right) = \\ &= (x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}) (x_0 + \alpha_m x_1 + \alpha_m^2 x_2 + \dots + \alpha_m^{m-1} x_{m-1}) \times \\ &\quad \times (x_0 + \alpha_m^2 x_1 + \alpha_m^4 x_2 + \dots + \alpha_m^{m-2} x_{m-1}), \quad (2)\end{aligned}$$

где

$$\alpha_m = \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \equiv \sqrt[m]{-1}$$

— комплексный примитивный корень m -й степени из минус единицы.

Для доказательства рассмотрим определитель Вандермонда, составленный из степеней комплексного числа α_m :

$$V(\alpha_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{m-2} & \alpha_m^{m-1} \\ 1 & \alpha_m^2 & \alpha_m^4 & \dots & \alpha_m^{m-4} & \alpha_m^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_m^{m-2} & \alpha_m^{m-4} & \dots & \alpha_m^4 & \alpha_m^2 \\ 1 & \alpha_m^{m-1} & \alpha_m^{m-2} & \dots & \alpha_m^2 & \alpha_m \end{vmatrix}$$

и умножим его на детерминант произвольного элемента $\mathbf{x} \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$:

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & x_{m-2} & \dots & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{m-1} & \dots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & x_{m-3} & \dots & x_0 \end{vmatrix}.$$

В результате получим

$$V(\alpha_m) \Delta_m(\mathbf{x}) = \Delta_m(\mathbf{x}) =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{m-1} x_k & \sum_{k=0}^{m-1} x_k & \sum_{k=0}^{m-1} x_k & \dots & \sum_{k=0}^{m-1} x_k \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k & \alpha_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k & \alpha_m^2 \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k & \dots & \alpha_m^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k & \alpha_m^2 \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k & \alpha_m^4 \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k & \dots & \alpha_m^{m-2} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k & \alpha_m^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k & \alpha_m^{m-2} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k & \dots & \alpha_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k \end{vmatrix} = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{m-1} x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k \right) \dots \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k \right) V(\alpha_m); \end{aligned}$$

так как

$$V(\alpha_m) = \prod_{p>q} (\alpha_m^p - \alpha_m^q) \neq 0,$$

то

$$\Delta_m(x) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^k x_k \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{2k} x_k \right) \dots \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_m^{(m-1)k} x_k \right).$$

Мультипликативность циркулянтов

$$\Delta_m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \Delta_m(\mathbf{a}) \Delta_m(\mathbf{b})$$

Чтобы найти преобразование, сохраняющее форму $\Delta_m(\mathbf{x})$, рассмотрим экспоненту от элемента $\xi_1 \mathbf{e} + \xi_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \xi_{m-1} \mathbf{e}^{m-1}$. Как показал М. П. Бурлаков [1], для

$$\Delta_m(\exp(\xi \mathbf{e})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi \mathbf{e})^n}{n!} = E_0^m(\xi) + \mathbf{e} E_1^m(\xi) + \mathbf{e}^2 E_2^m(\xi) + \dots + \mathbf{e}^m E_m^m(\xi)$$

справедливо тождество:

$$\Delta_m(\exp(\xi \mathbf{e})) = \begin{vmatrix} E_0^m(\xi) & E_{m-1}^m(\xi) & E_{m-2}^m(\xi) & \dots & E_1^m(\xi) \\ E_1^m(\xi) & E_0^m(\xi) & E_{m-1}^m(\xi) & \dots & E_2^m(\xi) \\ E_2^m(\xi) & E_1^m(\xi) & E_0^m(\xi) & \dots & E_3^m(\xi) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{m-1}^m(\xi) & E_{m-2}^m(\xi) & E_{m-3}^m(\xi) & \dots & E_0^m(\xi) \end{vmatrix} = 1,$$

то есть

$$\Delta_m(\exp(\xi_1 \mathbf{e} + \xi_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \xi_{m-1} \mathbf{e}^{m-1})) = 1, \quad (3)$$

и потому линейные преобразования

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \exp(\xi_1 \mathbf{e} + \xi_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \xi_{m-1} \mathbf{e}^{m-1}) \quad (4)$$

сохраняют фундаментальную форму, т.е. $\Delta_m(\mathbf{x}') = \Delta_m(\mathbf{x})$.

Очевидно, величина

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt[m]{\Delta_m(\mathbf{x})} \quad (5)$$

инвариантна относительно преобразований (4). Её можно принять за *линейную меру* вектора $\mathbf{x}$, аналогичную длине вектора в евклидовой и псевдоевклидовой геометрии. Эту величину естественно назвать *циклической длиной* вектора $\mathbf{x}$, и при $m = 2$ она совпадает с псевдоевклидовой длиной.

Что касается угловой меры для пар векторов, то для того, чтобы её определить, надо рассмотреть аналог сферы в евклидовом пространстве. Гиперповерхность (в центроаффинном пространстве) с уравнением

$$\Delta_m(\mathbf{x}) \equiv \prod_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \alpha_m^{nk} x_n \right) = r^m$$

называется *циклическим сфероидом* радиуса r , и если $r = 0$, то сфероид будет называться *изотропным*.

Из (2) видно, что изотропный сфероид представляет собой некоторое объединение изотропных гиперплоскостей, назовём их *перегородками*, и изотропных плоскостей размерности $m - 2$, их будем называть туннелями [2]. При этом перегородки делят пространство циклической алгебры на области, где детерминант вектора сохраняет свой знак. Количество перегородок и туннелей зависит от размерности циклических пространств. Пространства размерности $m = 2n + 1$ имеют одну перегородку и n туннелей; а пространства размерности $m = 2n$ имеют по две перегородки и $n - 1$ туннелей.

Например, при $m = 2$ будем иметь псевдоевклидову плоскость, для которой

$$\Delta_2(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2,$$

т.е. изотропный сфероид (псевдоевклидова окружность нулевого радиуса) представляет собой две пересекающиеся линии с уравнениями $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$, это и есть перегородки, которые всю псевдоевклидову плоскость делят на четыре квадранта. Туннелем будет нульмерная точка начала координат.

В случае $m = 3$

$$\Delta_3(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2 = (x_0 + x_1 + x_2) \frac{(x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_0)^2}{2},$$

поэтому в трёхмерном циклическом пространстве существует одна перегородка — плоскость с уравнением $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ и один туннель — прямая с уравнением $x_0 = x_1 = x_2$ и т. д.

Обозначим $\mathbb{R}_0(\mathbb{Z}_m)$ ту часть пространства циклической алгебры, в которой находится единица и детерминант сохраняет свой знак. Тогда любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0(\mathbb{Z}_m)$ можно *однозначно* записать так:

$$\mathbf{x} = \sqrt[m]{\Delta(\mathbf{x})} \exp(\xi_1 \mathbf{e} + \xi_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \xi_{m-1} \mathbf{e}^{m-1}). \quad (6)$$

Такая запись векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0(\mathbb{Z}_m)$ аналогична *тригонометрической* записи комплексных чисел, и она даёт основание для определения *циклического угла* между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_0(\mathbb{Z}_m)$: если

$$\mathbf{x} = \sqrt[m]{\Delta(\mathbf{x})} \exp(\xi_1 \mathbf{e} + \xi_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \xi_{m-1} \mathbf{e}^{m-1}) \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \sqrt[m]{\Delta(\mathbf{y})} \exp(\eta_1 \mathbf{e} + \eta_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \eta_{m-1} \mathbf{e}^{m-1}),$$

то в качестве циклического угла $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ берётся элемент

$$\eta - \xi \equiv (\eta_1 - \xi_1) \mathbf{e} + (\eta_2 - \xi_2) \mathbf{e}^2 + \dots + (\eta_{m-1} - \xi_{m-1}) \mathbf{e}^{m-1}. \quad (7)$$

Таким образом, движения циклических пространств, задаваемые линейными функциями

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \exp(\xi_1 \mathbf{e} + \xi_2 \mathbf{e}^2 + \dots + \xi_{m-1} \mathbf{e}^{m-1}),$$

представляют собой *циклические повороты* на циклический угол ϕ .

Циклические углы можно определить в любых областях, на которые перегородки делят циклическое пространство, умножая векторы этих областей на базисные элементы алгебры.

Вещественные циклические алгебры $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ можно рассматривать как подалгебры комплексных циклических алгебр $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$. При этом формулы (2) и (3) остаются справедливыми и для комплексных циклических алгебр. Алгебра $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ помимо подалгебры $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ содержит ещё одну вещественную подалгебру $\tilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m) \subset \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, порождённую элементом $\mathbf{i} = \alpha_{2m} \mathbf{e}$, где

$$\alpha_{2m} = \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{m}\right),$$

так что $\mathbf{i}^m = -1$. Алгебру $\tilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ называют *антициклической*, и для неё естественно справедливы тождества (2) и (3). Поэтому на линейном пространстве алгебры $\tilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ можно ввести геометрию, аналогичную циклической геометрии. При этом в такой *антициклической* геометрии длины и углы определяются по тем же формулам (5) и (7), как и в циклической геометрии.

Как показала Л. Б. Выжгина, для алгебр $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ и $\tilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ имеют место следующие изоморфизмы (см. [3]):

$$\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}_{k-1}, & \text{при } m = 2k, \\ \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}_k, & \text{при } m = 2k + 1; \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}_k, & \text{при } m = 2k, \\ \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}_k, & \text{при } m = 2k + 1. \end{cases}$$

Поэтому имеет смысл отдельно от циклических геометрий рассматривать лишь чётномерные антициклические геометрии.

Как видно из (2), в антициклических алгебрах чётной размерности всегда $\Delta_{2n}(\mathbf{x}) \geq 0$, и потому в таких алгебрах нет перегородок, а «тригонометрическая» форма записи (6) в них едина сразу для всех неизотропных векторов.

Однако в этих пространствах имеется n туннелей, образующих изотропный сфероид. Например, в случае, когда $n = 1$, имеем евклидову плоскость с $\Delta_2(\mathbf{x}) = x_0^2 + x_1^2$, на которой нет ни перегородок, ни туннелей.

Если же $n = 2$ и $\mathbf{x} = x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{i}^2 + x_3 \mathbf{i}^3 = x_0 + x_1 \alpha_8 \mathbf{e} + x_2 \alpha_8^2 \mathbf{e}^2 + x_3 \alpha_8^3 \mathbf{e}^3$, а

$$\alpha_8 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \alpha_8 \mathbf{e},$$

и тогда

$$\begin{aligned}
\Delta_4(\mathbf{x}) &= \begin{vmatrix} x_0 & \alpha_8^3 x_3 & \alpha_8^2 x_2 & \alpha_8 x_1 \\ \alpha_8 x_1 & x_0 & \alpha_8^3 x_3 & \alpha_8^2 x_2 \\ \alpha_8^2 x_2 & \alpha_8 x_1 & x_0 & \alpha_8^3 x_3 \\ \alpha_8^3 x_3 & \alpha_8^2 x_2 & \alpha_8 x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \\
&= \left(x_0 + \alpha_8 x_1 + \alpha_8^2 x_2 + \alpha_8^3 x_3 \right) \left(x_0 + \alpha_4 \alpha_8 x_1 + \alpha_4^2 \alpha_8^2 x_2 + \alpha_4^3 \alpha_8^3 x_3 \right) \times \\
&\quad \times \left(x_0 + \alpha_4^2 \alpha_8 x_1 + \alpha_4^4 \alpha_8^2 x_2 + \alpha_4^6 \alpha_8^3 x_3 \right) \left(x_0 + \alpha_4^3 \alpha_8 x_1 + \alpha_4^6 \alpha_8^2 x_2 + \alpha_4^9 \alpha_8^3 x_3 \right) = \\
&= \left(x_0 + \alpha_8 x_1 + \alpha_8^2 x_2 + \alpha_8^3 x_3 \right) \left(x_0 + i \alpha_8 x_1 - \alpha_8^2 x_2 - i \alpha_8^3 x_3 \right) \times \\
&\quad \times \left(x_0 - \alpha_8 x_1 + \alpha_8^2 x_2 - \alpha_8^3 x_3 \right) \left(x_0 - i \alpha_8 x_1 - \alpha_8^2 x_2 + i \alpha_8^3 x_3 \right) = \\
&= \left((x_0 + \alpha_8^2 x_2)^2 - (\alpha_8 x_1 + 1 + \alpha_8^2 x_3)^2 \right) \times \\
&\quad \times \left((x_0 - \alpha_8^2 x_2) + i(\alpha_8 x_1 - \alpha_8^3 x_3) \right) \left((x_0 - \alpha_8^2 x_2) - i(\alpha_8 x_1 - \alpha_8^3 x_3) \right) = \\
&= \left((x_0 + \alpha_8^2 x_2)^2 - (\alpha_8 x_1 + \alpha_8^3 x_3)^2 \right) \left((x_0 - \alpha_8^2 x_2)^2 + (\alpha_8 x_1 - \alpha_8^3 x_3)^2 \right) = \\
&= \left((x_0 + i x_2)^2 - i(x_1 + i x_3)^2 \right) \left((x_0 - i x_2)^2 + i(x_1 - i x_3)^2 \right) = \\
&= \left(x_0^2 - x_2^2 + 2i x_0 x_2 - i x_1^2 + i x_3^2 + 2x_1 x_3 \right) \left(x_0^2 - x_2^2 - 2i x_0 x_2 + i x_1^2 - i x_3^2 + 2x_1 x_3 \right) = \\
&= \left((x_0^2 - x_2^2 + 2x_1 x_3) - i(x_1^2 - x_3^2 - 2x_0 x_2) \right) \left((x_0^2 - x_2^2 + 2x_1 x_3) + i(x_1^2 - x_3^2 - 2x_0 x_2) \right) = \\
&= (x_0^2 - x_2^2 + 2x_1 x_3)^2 + (x_1^2 - x_3^2 - 2x_0 x_2)^2,
\end{aligned}$$

здесь было учтено, что $\alpha_8^2 = i$.

Найдем туннели. Имеем

$$\Delta_4(\mathbf{x}) = ((x_0 + i x_2)^2 - i(x_1 + i x_3)^2)((x_0 - i x_2)^2 + i(x_1 - i x_3)^2) = 0,$$

но

$$((x_0 - i x_2)^2 + i(x_1 - i x_3)^2) = \overline{((x_0 + i x_2)^2 - i(x_1 + i x_3)^2)},$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\Delta_4(\mathbf{x}) = 0 &\leftrightarrow ((x_0 + i x_2)^2 - i(x_1 + i x_3)^2) = 0, \\
(x_0 + i x_2)^2 - i(x_1 + i x_3)^2 &= (x_0 + i x_2)^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 (x_1 + i x_3)^2 = 0,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} (x_0 + i x_2) - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) (x_1 + i x_3) = 0, \\ (x_0 + i x_2) + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) (x_1 + i x_3) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{2}(x_0 + i x_2) - (1+i)(x_1 + i x_3) = 0, \\ \sqrt{2}(x_0 + i x_2) + (1+i)(x_1 + i x_3) = 0, \end{cases}$$

то есть

$$(1+i)(x_1 + x_3) = (x_1 - x_3) + i(x_1 + x_3),$$

поэтому

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_0 + i\sqrt{2}x_2 - (x_1 - x_3) - i(x_1 + x_3) = 0, \\ \sqrt{2}x_0 + i\sqrt{2}x_2 + (x_1 - x_3) + i(x_1 + x_3) = 0, \end{cases}$$

или

$$\left[\begin{cases} \sqrt{2}x_0 - (x_1 - x_3) = 0, \\ \sqrt{2}x_0 - (x_1 + x_3) = 0, \\ \sqrt{2}x_0 + (x_1 - x_3) = 0, \\ \sqrt{2}x_0 + (x_1 + x_3) = 0. \end{cases} \right.$$

Отсюда видно, что в четырёхмерном антициклическом пространстве имеется два двумерных туннеля с уравнениями

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_0 - (x_1 - x_3) = 0, \\ \sqrt{2}x_2 - (x_1 + x_3) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2}x_0 + (x_1 - x_3) = 0, \\ \sqrt{2}x_2 + (x_1 + x_3) = 0. \end{cases}$$

Циклические и антициклические геометрии можно считать обобщением евклидовой и псевдоевклидовой планиметрий, так как эти планиметрии реализуются на алгебрах двойных вещественных чисел и комплексных чисел, представляющих простейшие циклическую и антициклическую алгебры. Поэтому естественно, что в циклических и антициклических пространствах можно определить длину и угол, аналогично тому, как это происходит на псевдоевклидовой и евклидовой плоскости. Однако циклические и антициклические пространства, размерность которых больше двух, от евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей отличаются тем, что в этих пространствах возникают любопытные геометрии на сферах, а также на некоторых других поверхностях, например, на гиперплоскостях

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1 \quad \text{или} \quad x_0 - x_1 + \dots + (-1)^n x_n = 1.$$

Кроме геометрии вещественных циклических и антициклических пространств, можно рассматривать и геометрию на комплексных циклических алгебрах $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$. В этом случае фундаментальной формой на вещественном $2m$ -мерном пространстве будет модуль детерминанта текущего элемента, который очевидно обладает *свойством мультипликативности*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлаков М. П. Гамильтоновы алгебры. Элементарный очерк. — М.: Граф Пресс, 2017.
2. Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И. Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Изд-во «Ким», 2020.
3. Вишневецкий В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Гамильтоновы алгебры. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985.
4. Гарасько Г. И. Начала финслеровой геометрии для физиков. — М.: ТЕТРА, 2009.
5. Гусева Н. И., Бурлаков М. П., Бурлаков И. М. Элементарная геометрия в пространствах над алгебрами. — М.: Интеллект-Центр, 2017.
6. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»)// в кн.: Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей (Норден А. П., ред.). — М.: ГИТТЛ, 1950.
7. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Лань, 2010.
8. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии// в кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации (Куранский Е., ред.). — М.: Мир, 1979. — С. 18–33.

Гусева Надежда Ивановна

Московский педагогический государственный университет,

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва

E-mail: ngus12@mail.ru



ИНВАРИАНТНЫЕ СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ЛИ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

© 2023 г. П. Н. КЛЕПИКОВ, Е. Д. РОДИОНОВ, О. П. ХРОМОВА

Аннотация. В работе исследуются инвариантные солитоны Риччи на трехмерных унимодулярных группах Ли с полусимметрической связностью. Доказано, что на некоторых трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и полусимметричной связностью, отличной от связности Леви-Чивиты, существуют нетривиальные инвариантные солитоны Риччи. Получена полная классификация нетривиальных инвариантных солитонов Риччи и соответствующих полусимметрических связностей на трехмерных унимодулярных группах Ли.

Ключевые слова: инвариантный солитон Риччи, группа Ли, левоинвариантная (псевдо)риманова метрика, полусимметрическая связность.

INVARIANT RICCI SOLITONS ON METRIC LIE GROUPS WITH A SEMISYMMETRIC CONNECTION

© 2023 P. N. KLEPIKOV, E. D. RODIONOV, O. P. KHROMOVA

ABSTRACT. In this paper, we examine invariant Ricci solitons on three-dimensional unimodular Lie groups with a semisymmetric connection. We prove that nontrivial invariant Ricci solitons exist on some three-dimensional Lie groups with a left-invariant (pseudo) Riemannian metric and a semisymmetric connection different from the Levi-Civita connection. A complete classification of nontrivial invariant Ricci solitons and the corresponding semisymmetric connections on three-dimensional Lie groups is obtained.

Keywords and phrases: invariant Ricci soliton, Lie group, left-invariant (pseudo) Riemannian metric, semisymmetric connection.

AMS Subject Classification: 53B20, 53C30, 53C50

1. Предварительные сведения. Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X, \quad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является метрической и впервые описана Э. Картаном в [8]. Класс метрических связностей, определяемых данным образом, содержит связность Леви-Чивиты и играет важную роль в исследованиях по римановой геометрии (см. [4–6, 8, 11–16]).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00111 «Псевдоримановы многообразия с ограничениями на тензор Риччи»).

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна следующая теорема

Теорема 1 (см. [6, 11]). Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие с полусимметрической связностью. Тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π , определяемая равенством $\pi(X) = g(X, V)$ для любого векторного поля X на M , замкнута, т.е. $d\pi = 0$.

Определение 1. Метрика g полного риманова многообразия (M, g) называется солитоном Риччи, если она удовлетворяет уравнению

$$r = \Lambda g + L_P g, \quad (2)$$

где r — тензор Риччи метрики g , $L_P g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля P , константа $\Lambda \in \mathbb{R}$. Если $M = G/H$ — однородное пространство, то однородная риманова метрика, удовлетворяющая (2), называется однородным солитоном Риччи, а если $M = G$ — группа Ли, и поле P левоинвариантно — инвариантным солитоном Риччи.

Замечание. Векторное поле V неявно входит в уравнение (2), а в случае $V = 0$ получаем классическое определение солитона Риччи. Заметим также, что производная Ли имеет вид: $L_P g(X, Y) = Pg(X, Y) + g([X, P], Y) + g(X, [Y, P])$. Если солитон Риччи инвариантен, то $L_P g(X, Y) = g([X, P], Y) + g(X, [Y, P])$ для произвольных инвариантных полей X и Y .

Определение 2. Метрика g (псевдо)риманова многообразия (M, g) называется тривиальным солитоном Риччи, если $L_P g = \tau g$ при некоторой константе $\tau \in \mathbb{R}$.

Заметим, что ранее инвариантные солитоны Риччи изучались Л. Цербо, П. Н. Клепиковым и Д. Н. Оскорбиным [1, 9].

Теорема 2 (см. [9]). Для любой конечномерной унимодулярной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и связностью Леви-Чивиты все инвариантные солитоны Риччи тривиальны.

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Фиксируем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ левоинвариантных векторных полей в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V , с помощью которого определим на G полусимметрическую связность ∇ .

Согласно (1) компоненты связности ∇ задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - g_{sj} V^s \delta_i^k,$$

где

$$(\Gamma^g)_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks} (c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$$

— компоненты связности Леви-Чивиты ∇^g , $\|g^{ks}\|$ — матрица обратная к $\|g_{ks}\|$, δ_i^k — символ Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r . В базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ их компоненты соответственно есть

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Пусть P — левоинвариантное векторное поле. Тогда (2) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij} - P^k (c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}), \quad (3)$$

где r_{ij} — компоненты тензора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, g_{ij} — компоненты метрического тензора, P^k — координаты левоинвариантного векторного поля, c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В дальнейшем под «метрической группой Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ » будем понимать группу Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью, которую порождает левоинвариантное векторное поле $V \in \mathfrak{g}$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1 (см. [2]). *Если метрическая группа Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ удовлетворяет уравнению солитона Риччи, то в произвольном базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполняется соотношение*

$$V^i g_{ij} c_{kt}^j = 0; \quad (4)$$

или в инвариантной форме

$$g(V, [X, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь c_{kt}^j — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые разложением $[e_k, e_t] = c_{kt}^j e_j$.

Лемма 2 (см. [2]). *Инвариантный солитон Риччи тривиален тогда и только тогда, когда выполняется*

$$P^k(c_{ki}^s g_{sj} + c_{kj}^s g_{si}) = \tau g_{ij}. \quad (5)$$

Рассмотрим далее трехмерный случай. Следующая классификация для трехмерных метрических групп Ли была получена в [3, 7, 10].

Теорема 3. *Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

Случай A_1 :

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_1 ;

Случай A_2 :

$$[e_1, e_2] = (1 - \alpha_2) e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - (1 + \alpha_2) e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_3 ;

Случай A_3 :

$$[e_1, e_2] = e_1 - \alpha_1 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_1 e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

с времениподобным e_3 ;

Случай A_4 :

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с времениподобным e_1 и $\alpha_2 \neq 0$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть (G, g, ∇) — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и полусимметрической связностью ∇ , отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда среди таких групп Ли существуют группы, допускающие нетривиальные инвариантные солитоны Риччи. При этом все нетривиальные инвариантные солитоны Риччи групп Ли (G, g, ∇) исчерпываются следующим списком:*

Случай A_1 :

$$\Lambda = (V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0) \quad P = \left(\frac{V^1}{2}, 0, 0 \right), \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} V^1 \neq 0.$$

Случай A_2 :

$$\Lambda = -\frac{\alpha_1^2}{2}, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = \left(-\frac{\alpha_1}{2}, P^2, -P^2 \right), \quad \alpha_2 = \alpha_1 \neq 0, \quad P^2 \in \mathbb{R};$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (-\alpha_2, 0, 0), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0;$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, -V^3, V^3), \quad P = \left(\frac{(V^3)^2}{2}, -P^3, -P^3 \right), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad P^3 \in \mathbb{R}, \quad V^3 \neq 0.$$

Случай $\mathcal{A}_3$:

$$\Lambda = -\frac{\alpha_1^2}{2}, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (\alpha_1, -1, -1), \quad \alpha_1 \in \mathbb{R};$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, V^2, V^2), \quad P = (0, P^2, P^2), \quad \alpha_1 = 0, \quad P^2 = -1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}(V_2)^2, \quad V^2 \notin \{-2, 0, 1\}.$$

Случай $\mathcal{A}_4$:

$$\Lambda = V^3 f, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (0, 0, P^3), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad f = 1 - V^3 - \alpha_2,$$

$$V^3 = \pm \sqrt{1 + \alpha_2^2};$$

$$\Lambda = 2V^3 - 2, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (0, 0, P^3), \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

$$V^3 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3}), \quad P^3 \neq 0;$$

$$\Lambda = 2V^3 - 2, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (P^2, P^2, P^3), \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0,$$

$$V^3 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3}), \quad P^3 \neq 0;$$

$$\Lambda = 2V^3 - 2, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (-P^2, P^2, P^3), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0,$$

$$V^3 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3}), \quad P^3 \neq 0.$$

2. Инвариантные солитоны Риччи трехмерных унимодулярных метрических групп

Ли. В данном разделе докажем теорему 4. Для этого рассмотрим систему уравнений (3), определяющую инвариантных солитонов Риччи; систему уравнений (4), определяющую симметричность тензора Риччи, а также систему уравнений (5) — условие тривиальности инвариантного солитона. Заметим, что в силу тензорного вида левой и правой частей уравнения (3) все вычисления достаточно провести для базиса теоремы 3.

2.1. Случай $\mathcal{A}_1$. Условие (4) имеет вид $V^1\alpha_1 = 0$, $V^2\alpha_2 = 0$, $V^3\alpha_3 = 0$, поэтому имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, 0)$;
- (ii) $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;
- (iii) $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$;
- (iv) $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$;
- (v) $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$;
- (vi) $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$;
- (vii) $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$;
- (viii) $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

Рассмотрим данные случаи последовательно.

(i) В данном случае вектор V тривиален и полусимметрическая связность является связностью Леви-Чивиты. При этом решениями системы уравнений (3) являются следующие инвариантные солитоны:

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\alpha_3^2, \quad -\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (P^1, P^2, P^3);$$

$$\Lambda = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (P^1, 0, 0);$$

$$\Lambda = 0, \quad \alpha_1 = -\alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = 0, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (0, P^2, 0);$$

$$\Lambda = 0, \quad \alpha_1 = -\alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (0, 0, P^3).$$

Условие (5) тривиальности солитона в рассматриваемом случае имеет вид:

$$P^1(\alpha_3 - \alpha_2) = 0, \quad P^2(\alpha_1 + \alpha_3) = 0, \quad P^3(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \quad \tau = 0.$$

Очевидно, что все найденные в этом случае инвариантные солитоны удовлетворяют данному условию (т.е. являются тривиальными). При этом $\tau = 0$.

(ii) В этом случае $V = (V^1, 0, 0)$, $V^1 \neq 0$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда системы (3) и (5) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V^1(\alpha_2 - \alpha_3) &= P^1(\alpha_2 - \alpha_3), \quad \frac{1}{2}(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) + (V^1)^2 = \Lambda, \quad \frac{1}{2}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2) + (V^1)^2 = \Lambda, \\ \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3)^2 &= \Lambda, \quad 0 = P^2\alpha_3, \quad 0 = P^3\alpha_2, \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$P^1(\alpha_3 - \alpha_2) = 0, \quad P^2\alpha_3 = 0, \quad P^3\alpha_2 = 0, \quad \tau = 0. \quad (7)$$

Решением системы равенств (6) является

$$\Lambda = (V^1)^2, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad \alpha_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}V^1, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad P = \left(\frac{V^1}{2}, 0, 0 \right).$$

Очевидно, что оно не удовлетворяет (7), поскольку в рассматриваемом случае $V^1 \neq 0$ и, значит, найденный солитон не является тривиальным.

(iii) В этом случае $V = (0, V^2, 0)$, $V^2 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$ и система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V^2(\alpha_1 + \alpha_3) &= P^2(\alpha_1 + \alpha_3), \quad \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) + (V^2)^2 = -\Lambda, \quad \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) - (V^2)^2 = \Lambda, \\ \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3)^2 &= \Lambda, \quad 0 = P^1\alpha_3, \quad 0 = P^3\alpha_1, \end{aligned} \quad (8)$$

Разность второго и третьего уравнений приводит к противоречию с условием $(V^2)^2 = -\Lambda \neq 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае инвариантных солитон Риччи не существует.

(iv) Данный случай рассматривается аналогично (iii) и не содержит инвариантных солитонов.

(v) Пусть теперь $V = (V^1, V^2, 0)$, $V^1V^2 \neq 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V^1\alpha_3 &= P^1\alpha_3, \quad \frac{1}{2}V^2\alpha_3 = P^2\alpha_3, \quad V^1V^2 = 0, \\ \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 + (V^2)^2 &= -\Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 = \Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^2)^2 = \Lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

Данная система равенств не имеет решений, поскольку в рассматриваемом случае $V^1V^2 \neq 0$.

(vi) В этом случае $V = (0, V^2, V^3)$, $V^2V^3 \neq 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и система уравнений (3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V^3\alpha_1 &= P^3\alpha_1, \quad \frac{1}{2}V^2\alpha_1 = P^2\alpha_1, \quad V^2V^3 = 0, \\ \frac{1}{2}\alpha_1^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 &= -\Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^3)^2 = \Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^2)^2 = \Lambda, \end{aligned} \quad (10)$$

Данная система равенств не имеет решений, поскольку в рассматриваемом случае $V^2V^3 \neq 0$.

(vii) Рассуждениями, аналогичными (v), заключаем, что в данных случаях инвариантных солитонов Риччи не существует.

(viii) Пусть теперь $V = (V^1, V^2, V^3)$, $V^1V^2V^3 \neq 0$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned} V^2V^3 &= 0, \quad V^1V^3 = 0, \quad V^1V^2 = 0, \\ (V^1)^2 - (V^2)^2 &= \Lambda, \quad (V^1)^2 - (V^3)^2 = \Lambda, \quad (V^2)^2 + (V^3)^2 = -\Lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

Данная система равенств не имеет решений, поскольку в рассматриваемом случае $V^1V^2V^3 \neq 0$.

2.2. *Случай $\mathcal{A}_2$.* Условие (4) имеет вид

$$V^1\alpha_1 = 0, \quad V^2 - V^3(\alpha_2 - 1) = 0, \quad V^2(1 + \alpha_2) + V^3 = 0.$$

поэтому имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, 0)$;
- (ii) $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;
- (iii) $V = (0, -V^3, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$;
- (iv) $V = (V^1, -V^3, V^3)$ и $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

В случае (i) вектор V тривиален и полусимметрическая связность является связностью Леви-Чивиты. При этом решениями системы уравнений (3) являются следующие инвариантные солитоны:

$$\begin{aligned} \Lambda &= -\frac{1}{2}\alpha_1^2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = \left(-\frac{\alpha_1}{2}, P^2, -P^2\right); \\ \Lambda &= 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (-\alpha_2, 0, 0). \end{aligned}$$

Условие (5) тривиальности солитона в рассматриваемом случае имеет вид

$$P^1 = 0, \quad \pm 2P^1 = \tau, \quad P^2(\alpha_1 - \alpha_2) + P^3 = 0, \quad P^3(1 + \alpha_2 - \alpha_1) + P^2 = 0, \quad \tau = 0. \quad (12)$$

Очевидно, что первый из полученных инвариантных солитонов при $\alpha_1 = 0$ и $\tau = 0$ будет удовлетворять (12) и иметь вид

$$\Lambda = 0, \quad \tau = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3, \quad P^2 \in \mathbb{R}, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (0, P^2, -P^2). \quad (13)$$

Второй инвариантный солитон будет удовлетворять (12) только при $\alpha_2 = 0$. Стоит отметить, что при этом он будет содержаться в (13) для $P^2 = 0$.

В случае (ii) $V = (V^1, 0, 0)$, $V^1 \neq 0$, $\alpha_1 = 0$ и система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned} \Lambda &= 0, \quad P^2 + P^3(1 + \alpha_2) = 0, \quad P^2(\alpha_2 - 1) - P^3 = 0, \\ V^1 - 2\alpha_2 &= 2P^1, \quad V^1 + (V^1)^2 - 2\alpha_2 = -\Lambda + 2P^1, \quad V^1 - (V^1)^2 - 2\alpha_2 = \Lambda + 2P^1. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычитая последнее уравнение системы из предпоследнего, получим

$$2(V^1)^2 = -2\Lambda.$$

Отсюда, учитывая первое уравнение (14) и тот факт, что в рассматриваемом случае $V^1 \neq 0$, заключаем, что система равенств (14) решений не имеет.

В случае (iii) $V = (0, -V^3, V^3)$, $V^3 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$, а системы уравнений (3) и (5) соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha_1^2 &= \Lambda, \quad \frac{1}{2}\alpha_1 V^3 = P^2(1 + \alpha_1) + P^3, \quad \frac{1}{2}\alpha_1 V^3 = P^3(\alpha_1 - 1) - P^2, \\ (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1 &= -\Lambda + 2P^1, \quad (V^3)^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1 = \Lambda + 2P^2, \quad (V^2)^3 + \alpha_1 = 2P^2. \end{aligned} \quad (15)$$

и

$$\tau = 0, \quad P^1 = 0, \quad -2P^1 = \tau, \quad 2P^1 = \tau, \quad P^2(1 + \alpha_1) + P^3 = 0, \quad P^3(\alpha_1 - 1) - P^2 = 0. \quad (16)$$

Решением системы равенств (15) является

$$\Lambda = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad V = (0, -V^3, V^3), \quad P = \left(\frac{(V^3)^2}{2}, -P^3, P^3\right).$$

Непосредственной подстановкой в (16) проверяем, что данный солитон не будет тривиален, поскольку в рассматриваемом случае $V^3 \neq 0$.

В случае (iv) $V = (V^1, -V^3, V^3)$, $V^1 V^3 \neq 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned} \Lambda &= 0, \quad V^1 = -P^2 - P^3, \quad V^1 + (V^3)^2 = 2P^2, \\ V^1 - (V^1)^2 + (V^3)^2 &= \Lambda + 2P^1, \quad V^1 + (V^1)^2 + (V^3)^2 = -\Lambda + 2P^1. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычитая из последнего уравнения системы предпоследнее, получим

$$2(V^1)^2 = -2\Lambda.$$

Отсюда, учитывая первое уравнение (17) и тот факт, что в рассматриваемом случае $V^1 \neq 0$, заключаем, что система равенств (17) решений не имеет.

2.3. *Случай $\mathcal{A}_3$.* Условие (4) имеет вид

$$\alpha_1 V^2 + V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^3 + V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^1 + V^2 - V^3 = 0,$$

поэтому имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, 0)$;
- (ii) $V = (0, V^2, V^2)$ и $\alpha_1 = 0$.

(i) В данном случае вектор V тривиален и полусимметрическая связность является связностью Леви-Чивиты. При этом системы уравнений (3) и (5) примут соответственно вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 = P^1, \quad P^2 + P^3 = -2, \quad \alpha_1^2 = -2\Lambda - 4P^2 + 4P^3, \\ 4 + \alpha_1^2 = -2\Lambda - 4P^3, \quad 4 - \alpha_1^2 = 2\Lambda - 4P^2. \end{aligned} \quad (18)$$

и

$$P^1 = 0, \quad 2P^2 = \tau, \quad -2P^3 = \tau, \quad -2P^2 + 2P^3 = \tau, \quad P^3 + P^2 = 0. \quad (19)$$

Решением (18) является инвариантный солитон

$$\Lambda = -\frac{\alpha_1^2}{2}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (\alpha_1, -1, -1).$$

Этот солитон не является тривиальным, так как не удовлетворяет последнему равенству из (19).

(ii) $V = (0, V^2, V^2)$, $V^2 \neq 0$ и $\alpha_1 = 0$. При этом системы (3) и (5) примут вид

$$\begin{aligned} P^1 = 0, \quad 2 - V^2 - (V^2)^2 = -P^2 - P^3, \quad 2P^2 - 2P^3 = -\Lambda, \\ 2 - V^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 = \Lambda - 2P^2, \quad 2 - V^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 = -\Lambda + 2P^3. \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$P^1 = 0, \quad 2P^2 = \tau, \quad -2P^3 = \tau, \quad -2P^2 + 2P^3 = \tau, \quad P^3 + P^2 = 0. \quad (21)$$

Решением (20) является инвариантный солитон

$$\Lambda = 0, \quad P^1 = 0, \quad P^2 = P^3 = -1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}(V_2)^2.$$

Непосредственной подстановкой в (21) убеждаемся, что найденный инвариантный солитон является тривиальным при $V^2 = -2$ или $V^2 = 1$, т.е. имеет один из следующих видов:

$$\begin{aligned} \Lambda = 0, \quad \tau = 0, \quad V = (0, -2, -2), \quad P = (0, 0, 0); \\ \Lambda = 0, \quad \tau = 0, \quad V = (0, 1, 1), \quad P = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

2.4. *Случай $\mathcal{A}_4$.* Условие (4) имеет вид

$$V^2 \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 V^2 - \alpha_2 V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^1 + V^2 = 0,$$

поэтому имеет место один из следующих случаев:

- (i) $V = (0, 0, V^3)$, $\alpha_2 \neq 0$;
- (ii) $V = (V^1, -V^1 \alpha_1, V^3)$, $\alpha_2 = -(\alpha_1)^2 \neq 0$, $\alpha_3 = 0$.

(i) В данном случае система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned} P^1 \alpha_1 - P^2 = 0, \quad P^1 \alpha_2 + P^2 \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 = -P^2 \alpha_3, \quad -\alpha_2^2 - \alpha_2 V^3 - 1 + V^3 = \Lambda, \\ -\alpha_2 + 2\alpha_2 V^3 - V^3 + (V^3)^2 + \alpha_2^2 = -\Lambda + 2P^3 \alpha_2, \\ \alpha_2 - \alpha_2 V^3 + 2V^3 - (V^3)^2 - 1 = \Lambda - 2P^1 \alpha_3 + 2P^3. \end{aligned} \quad (22)$$

Ее решениями являются следующие инвариантные солитоны:

$$\begin{aligned} \Lambda &= V^3(1 - V^3 - \alpha_2), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}, \\ V &= \left(0, 0, \pm \sqrt{1 + \alpha_2^2}\right), \quad P = \left(0, 0, -\frac{1}{2}(1 - V^3 - \alpha_2)\right); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2V^3 - 2, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = -1, \\ V &= \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (0, 0, P^3); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2V^3 - 2, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \\ V &= \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (P^2, P^2, P^3); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2V^3 - 2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \\ V &= \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (-P^2, P^2, P^3). \end{aligned} \quad (26)$$

Запишем теперь условие (5):

$$\begin{aligned} \tau &= 0, \quad P^2\alpha_3 = 0, \quad 2P^3\alpha_2 = \tau, \quad -P^1\alpha_1 + P^2 = 0, \\ P^1\alpha_2 + P^2\alpha_1 &= 0, \quad 2P^1\alpha_3 - 2P^3 = \tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\alpha_2 \neq 0$, то из первого и третьего уравнений системы делаем вывод о тривиальности P^3 . Исходя из этого для первого инвариантного солитона получаем, что $V^3 = 1 + \alpha_2$ и из вида V^3 заключаем $(V^3)^2 = (1 + \alpha_2)^2 = 1 + (\alpha_2)^2$. Данное равенство приводит к противоречию с условием $\alpha_2 \neq 0$. Таким образом, данный инвариантный солитон не является тривиальным.

Рассмотрим теперь инвариантные солитоны (24)–(26), для которых (27) и равенство $P^3 = 0$ влечет, что $V^3 = 0$ или $V^3 = 1$, и соответствующие инвариантные солитоны имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau &= 0, \quad \Lambda = -2, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = -1, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (0, 0, 0); \\ \tau &= 0, \quad \Lambda = 0, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = -1, \quad V = (0, 0, 1), \quad P = (0, 0, 0); \\ \tau &= 0, \quad \Lambda = -2, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (P^2, P^2, 0); \\ \tau &= 0, \quad \Lambda = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = (0, 0, 1), \quad P = (P^2, P^2, 0); \\ \tau &= 0, \quad \Lambda = -2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = (0, 0, 0), \quad P = (-P^2, P^2, 0); \\ \tau &= 0, \quad \Lambda = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = (0, 0, 1), \quad P = (-P^2, P^2, 0). \end{aligned}$$

(ii) В данном случае система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned} V^1(\alpha_1^2 - V^3) &= P^1\alpha_1^2 - P^2\alpha_1, \quad V^1\alpha_1(1 - V^3) = P^1\alpha_1 - P^2, \\ (V^1)^2 - \alpha_1^2(1 - V^3) - (1 - V^3)^2 &= \Lambda + 2P^3, \\ \alpha_1^2(1 + V^1)^2 - V^3 + (V^3 - \alpha_1^2)^2 &= -\Lambda - 2P^3\alpha_1^2, \\ \alpha_1^2(V^3 - (V^1)^2 - \alpha_1^2) - 1 + V^3 + (V^1)^2 &= \Lambda. \end{aligned} \quad (28)$$

Ее решениями являются следующие инвариантные солитоны:

$$\begin{aligned} \Lambda &= 2V^3 - 2, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (P^2, P^2, P^3); \\ \Lambda &= 2V^3 - 2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad V = \left(0, 0, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8P^3})\right), \quad P = (-P^2, P^2, P^3). \end{aligned}$$

Данные инвариантные солитоны содержатся в списке солитонов, полученных в случае (i). Теорема доказана.

3. Инвариантные солитоны Риччи трехмерных неунимодулярных метрических групп Ли. В данном разделе приведем результат, аналогичный теореме 4, для трехмерных неунимодулярных метрических групп Ли. Соответствующая классификация базисов трехмерных метрических групп Ли получена в [3, 7, 10].

Теорема 5. Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

Случай $\mathcal{A}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_1 \sin \alpha_3 e_1 - \alpha_2 \cos \alpha_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 \cos \alpha_3 e_1 + \alpha_2 \sin \alpha_3 e_2,$$

с времениподобным e_3 и $\sin \alpha_3 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$;

Случай $\mathcal{B}$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 - \alpha_4 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с ненулевыми $\langle e_2, e_2 \rangle = -\langle e_1, e_3 \rangle = 1$ и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

Случай $\mathcal{C}_1$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 + \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

Случай $\mathcal{C}_2$:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_2 e_1 - \alpha_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$.

В построенном базисе, рассуждая по аналогии с теоремой 4, получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть (G, g, ∇) — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левинвариантной лоренцевой метрикой g и полусимметрической связностью ∇ , отличной от связности Леви-Чивиты. Тогда все нетривиальные инвариантные солитоны Риччи групп Ли (G, g, ∇) исчерпываются следующим списком:

Случай $\mathcal{A}$:

$$\Lambda = 2(V^3)^2 \neq 0, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (0, P^2, V^3), \quad \alpha_1 = \delta V^3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}, \quad \delta = \pm 1.$$

$$\Lambda = 2(V^3)^2 \neq 0, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (P^1, 0, V^3), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \delta V^3, \quad \alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}, \quad \delta = \pm 1.$$

$$\Lambda = -\frac{2(V^3)^3(\sin^2(\alpha_3)V^3 - 2\sin^2(\alpha_3)P^3 + \cos^2(\alpha_3)V^3 - V^3)}{\sin^2(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)^2}, \quad V = (0, 0, V^3), \quad P = (0, 0, P^3),$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{(V^3)^2}{\sin(\alpha_3)(V^3 - 2P^3)}, \quad V^3 P^3 \neq 0.$$

$$\Lambda = (V^3)^2 + \delta V^3 \alpha_1 + \delta V^3 \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}, \quad V = (0, 0, V^3),$$

$$P = \left(0, 0, \frac{1}{2}V^3 + \frac{1}{2}\delta\alpha_1 + \frac{1}{2}\delta\sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}\right),$$

$$\alpha_2 = \sqrt{(V^3)^2 - \alpha_1^2}, \quad \alpha_3 = \delta \frac{\pi}{2}, \quad \delta = \pm 1, \quad V^3 \neq -\delta\alpha_1.$$

Случай $\mathcal{B}$:

$$V = (V^1, 0, 0), \quad P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)^2 \alpha_2^2 - \Lambda \alpha_1^2}{4\alpha_2^3}, \frac{\Lambda \alpha_1}{2\alpha_2^2}, -\frac{\Lambda}{2\alpha_2}\right),$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_2, \quad \alpha_4 = 0, \quad \Lambda \neq 0, \quad V^1 \neq -\alpha_2.$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad P = \left(\frac{(V^1 + \alpha_2)(V^1 + \alpha_3 - \alpha_2)\alpha_2\alpha_3}{2\alpha_2\alpha_3^2}, 0, 0\right),$$

$$\alpha_4 = 0, \quad V^1 \notin \{-\alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3\}.$$

$$\begin{aligned} \Lambda = 0, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad P = \left(\frac{V^1(\alpha_3 + V^1) - 2P^2\alpha_1}{2\alpha_3}, P^2, 0 \right), \\ \alpha_2 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad V^1 \notin \{0, -\alpha_3\}. \\ \Lambda = 0, \quad V = \left(-\frac{V^2\alpha_1}{\alpha_3}, V^2, 0 \right), \quad P = \left(\frac{\alpha_1((V^2)^2\alpha_1 - 2P^2\alpha_3^2)}{2\alpha_3^3}, P^2, -\frac{(V^2)^2}{\alpha_3} \right), \\ \alpha_2 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad V^2\alpha_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Случай $\mathcal{C}_1$:

$$\begin{aligned} \Lambda = -2\alpha_3^2 \neq 0, \quad V = (0, 0, -\alpha_3), \quad P = (0, P^2, -\alpha_3). \\ \Lambda = -2\alpha_2^2 \neq 0, \quad V = (0, 0, -\alpha_2), \quad P = (P^1, 0, -\alpha_2), \quad \alpha_1 = 0. \end{aligned}$$

Случай $\mathcal{C}_2$:

$$\begin{aligned} \Lambda = -2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + 2\alpha_2\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2}, \quad V = \left(0, 0, \delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2} \right), \\ P = \left(0, 0, \frac{1}{2}\delta\sqrt{2\alpha_2^2 - 2\alpha_3^2} - \alpha_2 \right), \\ \alpha_1 = \alpha_3, \quad \delta = \pm 1. \\ \Lambda = 4\alpha_2^2, \quad V = \left(\delta_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2\alpha_2}, \delta_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2\alpha_2}\delta_1(1 + \sqrt{2}), 0 \right), \\ P = \left(\delta_2(2 + \sqrt{2})\alpha_2\sqrt{2\sqrt{2} - 2} - P^2\delta_1\sqrt{2} - P^2\delta_1, P^2, -2\alpha_2 \right), \quad \alpha_1 = \delta_1(1 + \sqrt{2})\alpha_2, \\ \alpha_3 = \alpha_2\delta_1(1 - \sqrt{2}), \quad \delta_1 = \pm 1, \delta_2 = \pm 1. \end{aligned}$$

Замечание. Используя полученные результаты, нетрудно построить аналогичные примеры нетривиальных инвариантных солитонов Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью в случае более высоких размерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клепиков П. Н., Оскорбин Д. Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Изв. Алт. гос. ун-та. — 2015. — 85, № 1/2. — С. 115–122.
2. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. Об инвариантных солитонах Риччи на трехмерных метрических группах Ли с полусимметрической связностью // Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 8. — С. 80–85.
3. Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Мат. тр. — 2006. — 9, № 1. — С. 130–168.
4. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differ. Geom. Appl. — 2016. — 46. — P. 130–147.
5. Agricola I., Thier C. The geodesics of metric connections with vectorial torsion // Ann. Glob. Anal. Geom. — 2004. — 26. — P. 321–332.
6. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. Pure Appl. Math. — 1985. — 16, № 7. — P. 736–740.
7. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // 2007. — 57. — P. 1279–1291.
8. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ec. Norm. Sup. — 1925. — 42. — P. 17–88.
9. Cerbo L. F. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. — 2014. — 14, № 2. — P. 225–237.
10. Cordero L. A., Parker P. E. Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups // Rend. Mat. — 1997. — 17. — P. 129–155.
11. De U. C., De B. K. Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold // Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. — 1995. — 54. — P. 111–117.

12. *Muniraja G.* Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur's theorem// Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2008. — 3, № 25. — P. 1223–1232.
13. *Murathan C., Özgür C.* Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions// Proc. Estonian Acad. Sci. — 2008. — 57, № 4. — P. 210–216..
14. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection// Rev. Roum. Math. Pure Appl. — 1970. — 15. — P. 1579–1586.
15. *Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., Uysal S. A.* On a semi-symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold// Eur. J. Pure Appl. Math. — 2011. — 4, № 2. — P. 152–161.
16. *Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal S. A., Yilmaz H. B.* Some vector fields on a riemannian manifold with semi-symmetric metric connection// Bull. Iran. Math. Soc. — 2012. — 38, № 2. — P. 479–490.

Клепиков Павел Николаевич
Алтайский государственный университет
E-mail: klepikov.math@gmail.com

Родионов Евгений Дмитриевич
Алтайский государственный университет
E-mail: edr2002@mail.ru

Хромова Олеся Павловна
Алтайский государственный университет
E-mail: khromova.olesya@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 30–41
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-30-41

УДК 512.7+514.7

О ПРЕДЕЛАХ ПОТОКА КЭЛЕРА—РИЧЧИ НА ГРУППОВЫХ КОМПАКТИФИКАЦИЯХ ФАНО

© 2023 г. ЯНЬ ЛИ, ЧЖЭНЬ Е ЛИ

Аннотация. Пусть G — связная комплексная редуктивная группа. В статье приведен обзор результатов о полустабильном пределе $\mathbb{Q}$ -компактификации Фано и характеристика минимизаторов инвариантов Футаки. При помощи алгебраической единственности построено предельное пространство потока Кэлера—Риччи на групповых компактификациях Фано ранга 2.

Ключевые слова: солитон Кэлера—Риччи, поток Кэлера—Риччи, $\mathbb{Q}$ -компактификация Фано, K -стабильность.

ON THE LIMITS OF KÄHLER—RICCI FLOW ON FANO GROUP COMPACTIFICATIONS

© 2023 YAN LI, ZHENYE LI

ABSTRACT. Let G be a connected, complex reductive group. In this paper, we review the results on semistable limit of $\mathbb{Q}$ -Fano compactifications and the characterization of minimizers of Futaki invariants. Using the algebraic uniqueness, we construct the limiting space of the Kähler–Ricci flow on Fano group compactifications of rank 2.

Keywords and phrases: Kähler–Ricci soliton, Kähler–Ricci flow, $\mathbb{Q}$ -Fano compactification, K -stability.

AMS Subject Classification: 14Jxx, 53E30

1. Введение. Изучение предельного поведения нормированного потока Кэлера—Риччи на многообразии Фано является давней проблемой. Нормированный поток Кэлера—Риччи представляет собой эволюционное уравнение кэлеровых метрик в первом классе Черна $2\pi c_1(M)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\mathrm{Ric}(\omega(t)) + \omega(t), \quad \omega(0) = \omega_0 \in 2\pi c_1(M), \quad (1)$$

где ω_0 и $\omega(t)$ — исходная кэлерова метрика и решение уравнения (1) соответственно. Цао показал (см. [11, Sec. 1]), что уравнение (1) всегда имеет глобальное решение $\omega(t)$ для всех $t \geq 0$. Для сходимости решений уравнения (1) Тянь—Чжу доказал (см. [29, 30]) следующее утверждение: если M допускает солитон Кэлера—Риччи, то $\omega(t)$ сходится к нему. Однако в общем случае $\omega(t)$ может не иметь предела на M . Известная гипотеза Гамильтона—Тяня, недавно доказанная в [6, 13, 27] (см. [24, Sec. 9]), утверждает, что любая последовательность $\{(M, \omega(t_i))\}_{i \in \mathbb{N}_+}$, $t_i \rightarrow +\infty$, содержит подпоследовательность, сходящуюся к пространству длин $(M_\infty, \omega_\infty)$ в топологии Громова—Хаусдорфа, а $(M_\infty, \omega_\infty)$ — гладкий солитон Кэлера—Риччи вне замкнутого подмножества S (вещественной) коразмерности не менее 4. Более того, эта подпоследовательность локально сходится к

Работа выполнена при частичной поддержке гранта NSFC 12101043 и Программы исследовательского фонда Пекинского технологического института для молодых ученых.

регулярной части $(M_\infty, \omega_\infty)$ в топологии Чигера—Громова. Отсюда следует, что в процессе сходимости комплексная структура M может иметь такой скачок, что в новой комплексной структуре будет существовать солитон Кэлера—Риччи (см. [17, 24]).

Поиск этого предельного пространства представляет большой интерес, особенно когда M_∞ не изоморфно M . Тянь и Чжан доказали (см. [27]), что M_∞ должно быть $\mathbb{Q}$ -многообразием Фано, сингулярное множество которого совпадает с S . Чэнь, Сунь и Ван (см. [14]) описали общую картину поиска предела M_∞ потока (1) с помощью геометрической теории инвариантов.

В общем случае M может вырождаться в M_∞ с две ступени: сначала происходит «полустабильное вырождение», а затем — «полистабильное вырождение». Более того, солитонное векторное поле на M_∞ в точности индуцируется $\mathbb{C}^*$ -действиями «полустабильного вырождения». Недавно Хань и Ли доказали (см. [19]), что «полустабильное вырождение» представляет собой единственную специальную $\mathbb{R}$ -тестовую конфигурацию, минимизирующую H -инвариант, введенный в [26]. Кроме того, центральный слой является (модифицированным) K -полустабильным (ср. [19, Theorem 1.2]); в дальнейшем будем называть его «*полустабильным пределом*». Как только это «полустабильное вырождение» зафиксировано, «полистабильное вырождение» его центрального слоя однозначно определяется с помощью абстрактной теории, построенной в [21] (ср. [19, Sec. 8]).

В этой заметке напомним результаты [22] и покажем, как явно построить это предельное пространство на $\mathbb{Q}$ -групповых компактификациях Фано. Предложенный нами подход состоит в том, чтобы классифицировать эквивариантные нормальные $\mathbb{R}$ -тестовые конфигурации с помощью комбинаторных данных групповых компактификаций, а затем явно вычислять H -инвариант. Таким образом мы находим полустабильный предел. Наконец, мы проанализируем полустабильные пределы в случаях, когда $\text{rank}(G) = 2$, и приведем явную конструкцию полистабильного вырождения.

2. Предварительные сведения.

2.1. Фильтрации и H -инвариант.

Фильтрации. Пусть M — проективное многообразие, L — очень обильное линейное расслоение на M , так что $|L|$ дает вложение Кодаиры M в проективное пространство. Однородное координатное кольцо (кольцо Кодаиры) кольца M есть

$$R(M, L) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} R_k,$$

где $R_k = H^0(M, L^k)$. Следуя терминологии [2] сформулируем следующее определение.

Определение 1. Фильтрация $\mathcal{F}$ кольца R — это семейство подпространств $\{\mathcal{F}^s R_k\}_{s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}}$ пространства $R(M, L) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} R_k$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) семейство $\mathcal{F}$ является убывающим: $\mathcal{F}^{s_1} R_k \subset \mathcal{F}^{s_2} R_k$ для всех $s_1 \geq s_2$ и $k \in \mathbb{N}$;
- (2) $\mathcal{F}$ является непрерывным слева: $\mathcal{F}^s R_k = \bigcap_{t < s} \mathcal{F}^t R_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$;
- (3) $\mathcal{F}$ линейно ограничен: существуют такие константы $c_\pm \in \mathbb{Z}$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mathcal{F}^s R_k = 0 \quad \forall s > c_+ k \quad \text{и} \quad \mathcal{F}^s R_k = R_k \quad \forall s < c_- k;$$

- (4) семейство $\mathcal{F}$ мультипликативно:

$$\mathcal{F}^{s_1} R_{k_1} \cdot \mathcal{F}^{s_2} R_{k_2} \subset \mathcal{F}^{s_1 + s_2} R_{k_1 + k_2}$$

для всех $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ и $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Gamma(\mathcal{F}, k)$ — множество значений s , при которых фильтрация R_k разрывна. Положим

$$\Gamma_+(\mathcal{F}) := \bigcup_k (\Gamma(\mathcal{F}, k) - \min \Gamma(\mathcal{F}, k)) \quad (2)$$

и обозначим через $\Gamma(\mathcal{F})$ абелеву группу, порожденную $\Gamma_+(\mathcal{F})$. Каждой фильтрации $\mathcal{F}$ поставим в соответствие две градуированные алгебры:

(1) алгебру Риса

$$R(\mathcal{F}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigoplus_{s \in \Gamma(\mathcal{F}) + \min \Gamma(\mathcal{F}, k)} t^{-s} \mathcal{F}^s R_k, \quad (3)$$

(2) ассоциированное градуированное кольцо фильтрации $\mathcal{F}$,

$$\mathrm{Gr}(\mathcal{F}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigoplus_{s \in \Gamma(\mathcal{F}) + \min \Gamma(\mathcal{F}, k)} t^{-s} (\mathcal{F}^s R_k / \mathcal{F}^{>s} R_k). \quad (4)$$

Без ограничения общности нормируем $\mathcal{F}$ так, чтобы $\min \Gamma(\mathcal{F}, k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Существует важный класс фильтраций, называемый $\mathbb{R}$ -тестовыми конфигурациями, который можно рассматривать как обобщение обычной ($\mathbb{Z}$ -) тестовой конфигурации, введенной в [17].

Определение 2. Если алгебра Риса $R(\mathcal{F})$ конечно порождена, будем говорить, что фильтрация $\mathcal{F}$ является $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурацией (M, L) . В этом случае кольцо $\mathrm{Gr}(\mathcal{F})$ также конечно порождено. Проективная схема

$$\mathcal{X}_0 := \mathrm{Proj}(\mathrm{Gr}(\mathcal{F}))$$

называется центральным слоем фильтрации $\mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ является $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурацией, абелева группа $\Gamma(\mathcal{F})$, порожденная (2), имеет конечный ранг, который обозначим через $r_{\mathcal{F}}$. Тогда тотальное пространство $\mathcal{X}$ фильтрации $\mathcal{F}$ есть

$$\mathcal{X} = \mathrm{Proj}_{\mathbb{C}^{r_{\mathcal{F}}}}(R(\mathcal{F})).$$

Кроме того, $\Gamma(\mathcal{F})$ -градуировка $\mathrm{Gr}(\mathcal{F})$ соответствует (возможно, вещественному) голоморфному векторному полю X на $\mathcal{X}_0$, которое порождает действие тора ранга $r_{\mathcal{F}}$ (тор обозначим через $\mathbb{T}$). Примем соглашение, что $\exp(tX)$ -действие имеет (вещественный) вес t^s на $(\mathcal{F}^s R_k / \mathcal{F}^{>s} R_k)$ -фрагменте в (4).¹ Векторное поле X называется векторным полем, индуцированным фильтрацией $\mathcal{F}$.

Замечание 3. Если $\mathrm{rank}(\Gamma(\mathcal{F})) = 1$, можно вложить $\Gamma(\mathcal{F})$ в $\mathbb{Z}$. Приведенная выше $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация — это нормальная ($\mathbb{Z}$ -) тестовая конфигурация, введенная в [17, определение 2.1.1].

Существует важный подкласс нормальных $\mathbb{R}$ -тестовых конфигураций.

Определение 4. Если $L = K_M^{-1}$, то $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация $\mathcal{F}$ называется специальной, если центральный слой $\mathcal{X}_0$ является $\mathbb{Q}$ -многообразием Фано и $\mathrm{Gr}(\mathcal{F})$ изоморфно кольцу Кодaira $R(\mathcal{X}_0, -K_{\mathcal{X}_0})$ кольца $\mathcal{X}_0$.

H-инвариант. Для $\mathbb{Q}$ -многообразия Фано M (см. [26]) введем H -инвариант специальных тестовых конфигураций (M, K_M^{-1}) . Хань и Ли (см. [19]) недавно обобщили его на произвольную $\mathbb{R}$ -тестовую конфигурацию $\mathcal{F}$ для (M, K_M^{-1}) .

Напомним определение из [19, Sec. 2.5]. Во-первых, любой $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурации $\mathcal{F}$ поставим в соответствие два неархимедовых функционала. Пусть $M_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{div}}$ — множество $\mathbb{Q}$ -дивизориальных нормирований M . Обозначим через $\phi_{\mathcal{F}}$ и ϕ_0 соответственно неархимедову метрику фильтрации $\mathcal{F}$ и тривиальную тестовую конфигурацию (ср. [10, Sec. 6]). Положим

$$L^{\mathrm{NA}}(\mathcal{F}) := \inf_{v \in M_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{div}}} (A_M(v) + (\phi_{\mathcal{F}} - \phi_0)(v)),$$

где $A_M(\cdot)$ — лог-дискрепантность дивизора M . Также обозначим через $\Delta(\mathcal{F}^{(t)})$ тело Окунькова линейного ряда

$$\mathcal{F}^{(t)} := \{\mathcal{F}^{tk} R_k\}_{k \in \mathbb{N}_+}$$

(ср. [19, Sec. 2.4]). Согласно определению 1(3), видим, что если $t \ll 0$, $\Delta(\mathcal{F}^{(t)})$ есть просто тело Окунькова Δ многообразия (M, K_M^{-1}) , введенное в [1], и $\Delta(\mathcal{F}^{(t)}) = \{O\}$ для $t \gg 1$. Зададим функцию $G_{\mathcal{F}} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$G_{\mathcal{F}}(z) := \sup\{t | z \in \Delta(\mathcal{F}^{(t)})\}, \quad z \in \Delta,$$

¹Это соглашение отличается от [19, определение 2.12] знаком.

и положим

$$S^{\text{NA}}(\mathcal{F}) := -\ln \left(\frac{n!}{V} \int_{\Delta} e^{-G_{\mathcal{F}}(z)} dz \right).$$

H -Инвариант определяется следующим образом.

Определение 5. Пусть $\mathcal{F}$ — $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация многообразия (M, K_M^{-1}) . Тогда H -инвариант $\mathcal{F}$ равен

$$H(\mathcal{F}) := L^{\text{NA}}(\mathcal{F}) - S^{\text{NA}}(\mathcal{F}). \quad (5)$$

В [19, Example 2.32] было доказано, что (5) совпадает с определением на специальных тестовых конфигурациях (см. [26]).

2.2. Групповые компактификации. Пусть G — комплексная связная редуктивная группа, являющаяся комплексификацией связной компактной группы Ли K . Поляризованное нормальное проективное $G \times G$ -многообразие (M, L) называется поляризованной G -компактификацией, если M имеет открытую плотную орбиту, изоморфную $G \times G / \text{diag}(G) (\cong G)$ и L является $G \times G$ -линеаризованным обильным ($\mathbb{Q}$ -) линейным расслоением. Если антиканоническое линейное расслоение K_M^{-1} обильно и $L = K_M^{-1}$, M называют $\mathbb{Q}$ -Фано G -компактификацией. Подробности о групповых компактификациях см. в [3]

Зафиксируем максимальный компактный тор T в K и обозначим через $\mathfrak{t}$ его алгебру Ли. Тогда комплексификация $T^{\mathbb{C}}$ является максимальным комплексным тором в G . Обозначим через Φ систему корней в $(G, T^{\mathbb{C}})$, через $\Phi_+ \subset \Phi$ — выбранное множество положительных корней, а через $\mathfrak{M}$ решетку характеров группы G . Для поляризованной G -компактификации (M, L) замыкание Z многообразия $T^{\mathbb{C}}$ в M вместе с $L|_Z$ является поляризованным торическим многообразием. Действительно, $L|_Z$ является $WT^{\mathbb{C}}$ -линеаризованным. Многогранник, ассоциированный с (M, L) , определяется как ассоциированный многогранник для $(Z, L|_Z)$ (см. [5, Sec. 2.1]). Это W -инвариантный строго выпуклый рациональный многогранник в $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{t}^*$. Кроме того, мы можем расширить форму Киллинга на $\mathfrak{t}^*$ до W -инвариантного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Обозначим через $\mathfrak{t}_+^* \subset \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$ соответствующую положительную камеру Вейля в Φ_+ ,

$$\mathfrak{t}_+^* := \{y \in \mathfrak{t}^* \mid \langle \alpha, y \rangle \geq 0 \ \forall \alpha \in \Phi_+\}.$$

Это фундаментальная область действия W на $\mathfrak{t}^*$. Положительная часть $P_+ P$ определяется как $P_+ = P \cap \mathfrak{t}_+^*$ и называется *многогранником моментов* (M, L) . Существует биективное соответствие между поляризованными G -компактификациями и W -инвариантными строго выпуклыми рациональными многогранниками в $\mathfrak{M}$ (см. [5, Sec. 2] и [3]). Фактически P_+ кодирует структуру представлений $G \times G$ в пространстве голоморфных сечений тензорных степеней L :

$$R_k \cong \bigoplus_{\lambda \in kP_+ \cap \mathfrak{M}} \text{End}(V_{\lambda}),$$

где V_{λ} — неприводимое G -представление старшего веса λ и

$$\text{End}(V_{\lambda}) \cong V_{\lambda} \otimes V_{\lambda}^*.$$

Закон умножения в кольце Кодаиры

$$R(M, L) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} R_k$$

найден в [3, Sec. 7].

2.3. Солитон Кэлера—Риччи. Пусть M — n -мерное многообразие Фано. Напомним, что солитон Кэлера—Риччи на M — это пара (X, ω) , где X — голоморфное векторное поле на M , а ω — кэлерава метрика в $2\pi c_1(M)$, удовлетворяющая условию

$$\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = L_X(\omega), \quad (6)$$

где $L_X(\cdot)$ — производная Ли вдоль X . Если $X = 0$, солитон Кэлера—Риччи становится метрикой Кэлера—Эйнштейна. Если M является $\mathbb{Q}$ -многообразием Фано, то *слабым солитоном Кэлера—Риччи* называется такая пара (X, ω) , что соотношение (6) выполняется на регулярном множестве M и

$$\int_M \omega^n = (K_M^{-1})^n.$$

Теорема единственности (см. [28]) утверждает, что солитон Кэлера—Риччи на компактном комплексном многообразии, если он существует, должен быть единственным по модулю $\mathrm{Aut}(M)$. Кроме того, X лежит в центре алгебры Ли максимальной редуктивной подгруппы $\mathrm{Aut}_r(M) \subset \mathrm{Aut}(M)$.

Существование (слабого) солитона Кэлера—Риччи на $\mathbb{Q}$ -многообразии Фано тесно связано с модифицированной K -стабильностью. Понятие модифицированной K -стабильности было введено в [8] и [32, Sec. 1] для гладких многообразий Фано, а затем обобщено на $\mathbb{Q}$ -многообразия Фано с klt особенностями (см., например, [7, 18, 19] и ссылки в этих работах). Грубо говоря, это понятие определяется знаком некоторых функционалов (например, инвариантов Футаки или неархимедовых функционалов Мабучи—Динга и т. п.) тестовых конфигураций.

Однако проверка модифицированной K -стабильности обычно оказывается бесконечным процессом. Для практических целей часто используют более слабое $\mathbb{G}$ -эквивариантное понятие модифицированной K -стабильности для редуктивной подгруппы $\mathbb{G}$ группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(M)$.

В эквивариантной постановке рассматриваются только $\mathbb{G}$ -эквивариантные тестовые конфигурации, а на многообразиях с большой симметрией эквивариантные тестовые конфигурации часто могут быть исчерпаны конечномерным процессом, например, комбинаторным критерием модифицированной K -стабильности для сферических многообразий (включая групповые компактификации; (см. [4, 5, 16])).

Эквивалентность между модифицированной K -стабильностью и существованием солитонов Кэлера—Риччи имеет место для любого многообразия Фано; это было показано в [12, 25] для случаев Кэлера—Эйнштейна и в [15] для солитонных случаев.

Действительно, эквивалентность модифицированной K -стабильности и эквивариантной модифицированной K -стабильности на гладких многообразиях Фано также доказана в [15]. Однако на $\mathbb{Q}$ -многообразиях Фано с особенностями существование обычно требует более сильного условия (эквивариантной) модифицированной равномерной K -стабильности; эквивалентность такой стабильности и существования была недавно изучена в [18, 20].

3. Основные результаты. Чтобы найти минимизатор H -инварианта, установим параметризацию всех $G \times G$ -эквивариантных нормальных $\mathbb{R}$ -тестовых конфигураций. Предположим, что $\mathcal{F}$ является $G \times G$ -эквивариантной фильтрацией на R . Тогда по определению 1(1)-(2) и факту эквивариантности имеем

$$\mathcal{F}^s R_k = \bigoplus_{s_\lambda^{(k)} \geq s} \mathrm{End}(V_\lambda);$$

здесь с каждым $\mathrm{End}(V_\lambda)$ ассоциировано число $s_\lambda^{(k)}$. Рассмотрим абелеву группу $\Gamma(\mathcal{F})$, определенную (2). Соответствующая алгебра Риса (3) редуцируется к

$$R(\mathcal{F}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigoplus_{s \in \Gamma(\mathcal{F})} \bigoplus_{\lambda \in \overline{kP_+} \cap \mathfrak{M}, s_\lambda^{(k)} \geq s} t^{-s} \mathrm{End}(V_\lambda). \quad (7)$$

В таком случае $\mathcal{F}$ является $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурацией тогда и только тогда, когда алгебра Риса (7) конечно порождена. Кроме того, она нормальна, если $R(\mathcal{F})$ — нормальное кольцо.

Следующий классификационный результат был доказан в [22, Sec. 4].

Теорема 6. Пусть (M, L) — поляризованная G -компактификация с многогранником моментов P_+ . Тогда для любой $\hat{G}$ -эквивариантной нормальной $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурации $\mathcal{F}$ компактификации (M, L) существует W -инвариантная вогнутая кусочно линейная функция f на $\overline{P}$, области линейности которой состоят из таких рациональных многогранников в $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$, что $\min f = 0$ и

$$s_{\lambda}^{(k)} = \max\{s \in \Gamma(\mathcal{F}) \mid s \leq kf(\frac{\lambda}{k})\} \quad \forall \lambda \in \overline{kP_+} \cap \mathfrak{M} \text{ and } k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Кроме того, $s_{\lambda}^{(k)} = kf(\lambda/k)$, если $1/k\lambda$ является вершиной областей линейности f .

Обратно, пусть даны произвольные f и $r_0 \in N_+$, для которых области линейности функции $r_0f(\cdot/r_0)$ в r_0P_+ состоят из целочисленных многогранников в $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\Gamma_{r_0}(\text{Vert}(f))$ абелеву группу, порожденную

$$\left\{ r_0f\left(\frac{1}{r_0\lambda}\right) \mid \lambda \text{ является вершиной области линейности } f \right\}.$$

Тогда для любой конечно порожденной абелевой группы Γ , содержащей $\Gamma_{r_0}(\text{Vert}(f))$, существует $\hat{G}$ -эквивариантная нормальная $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация $\mathcal{F}$ из (M, L) с $\Gamma(\mathcal{F}) \subset \Gamma$ и точками разрыва $s_{\lambda}^{(k)}$, удовлетворяющая (9) для всех $k \in \mathbb{N}_+$.

Замечание 7. Если f рационально, можно взять k в качестве наименьшего натурального числа, так что множество

$$\{k(\lambda, s) \mid 0 \leq s \leq f(\lambda), \lambda \in \overline{P_+}\}$$

является целочисленным многогранником и $\Gamma = \mathbb{Z}$. Тогда теорема 8 сводится к теореме классификации $\hat{G}$ -эквивариантных нормальных $\mathbb{Z}$ -тестовых конфигураций (на основе [4, Sec. 4.2]; см. также [5, Sec. 2.4]).

Используя теорему 6, изучим центральный слой через его кольцо Кодайры (4).

Теорема 8 (см. [22, Theorem 4.4]). Пусть (M, L) — поляризованная G -компактификация с многогранником моментов P_+ . Тогда для любой $G \times G$ -эквивариантной нормальной $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурации $\mathcal{F}$ компактификации (M, L) с приведенным центральным слоем существует такая W -инвариантная вогнутая кусочно линейная функция $f \geq \min f = 0$ на $\overline{P}$, области линейности которой состоят из рациональных многогранников в $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}}$, что

$$s_{\lambda}^{(k)} = kf(\frac{\lambda}{k}) \quad \forall \lambda \in \overline{kP_+} \cap \mathfrak{M} \text{ и } k \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

и наоборот.

Замечание 9. В дальнейшем для простоты будем называть функцию f в формуле (9) функцией, связанной с $\mathcal{F}$.

Замечание 10. Если отбросить предположение о том, что алгебра Риса нормальна, теорема 6 может оказаться неверной. Например, пусть $G = SL_2(\mathbb{C})$. Тогда можно отождествить $\mathfrak{a}^*$ с $\mathbb{R}$, а единственный положительный корень α с точкой $2 \in \mathbb{R}$. Единственная компактификация Фано группы G имеет многогранник $P_+ = [0, 3]$. Положим $\Gamma = \mathbb{Z}$,

$$s_0^{(1)} = 1, \quad s_1^{(1)} = 0, \quad s_2^{(1)} = 1, \quad s_3^{(1)} = 0$$

а остальные $s_m^{(k)}$, $k, m \in \mathbb{N}$, заданы формулой

$$s_{\lambda}^{(k)} = \max \left\{ \sum_{i=1}^k s_{\mu_i}^{(1)} \mid \mu_i \in \overline{P_+} \cap \mathfrak{M}, \text{End}(V_{\lambda}) \subset \text{End}(V_{\mu_1}) \cdots \text{End}(V_{\mu_k}) \right\} \geq 0.$$

Можно непосредственно проверить, что это определяет G -эквивариантную, не являющуюся нормальной, $\mathbb{R}$ -тестовую конфигурацию $\mathcal{F}$, для которой соотношение (9) нарушается. Нормализация $\mathcal{F}$ — это просто тривиальная тестовая конфигурация.

На самом деле, чтобы найти минимизатор H -инварианта, достаточно рассмотреть только $G \times G$ -эквивариантные специальные $\mathbb{R}$ -тестовые конфигурации. Это следует из теорем единственности [19] для гладких многообразий Фано и [9] для общих $\mathbb{Q}$ -многообразий Фано. Перечислим имеющиеся аргументы: согласно [9, Теорема 1.2] H -инвариант допускает единственный минимизатор $\mathcal{F}_{\min}$ среди фильтраций, который действительно является специальной $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурацией. Поскольку $\hat{G}$ действует на множестве фильтраций, $\mathcal{F}_{\min}$ должен быть $G \times G$ -эквивариантным.

Нам понадобится следующий результат классификации эквивариантных специальных $\mathbb{R}$ -тестовых конфигураций. Напомним, что центральный слой специальной $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурации редуцирован и неприводим. Из теоремы 8 вытекает следующий результат.

Следствие 11 (см. [22, Corollary 4.6]). *Пусть (M, L) — поляризованная G -компактификация. Тогда для любого $\Lambda \in \overline{\mathfrak{t}_+}$ существует такая $\hat{G}$ -эквивариантная специальная $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация $\mathcal{F}_\Lambda(M, L)$, что центральный слой $\mathcal{X}_0$ является компактификацией $\hat{G}$ -сферического однородного пространства и допускает действие тора $\overline{\exp(t\Lambda)} \subset \hat{G}$. Обратно, для любой $\hat{G}$ -эквивариантной специальной $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурации $\mathcal{F}(M, L)$ существует такой $\Lambda \in \overline{\mathfrak{a}_+}$, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\Lambda$.*

Классификационная теорема (теорема 6 позволяет доказать следующее утверждение (см. [22, Sec. 5]).

Теорема 12 (см. [22, Theorem 5.3]). *Пусть (M, L) — поляризованная G -компактификация с многогранником моментов P_+ , а $\mathcal{F} — $G \times G$ -эквивариантная нормальная $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация (M, L) , связанная с функцией f . Тогда$*

$$H(\mathcal{F}_f) \geq \ln \left(\frac{1}{V} \int_{P_+} e^{-f(y) + f(2\rho)} \pi(y) dy \right)$$

с точностью до аддитивной равномерной константы, и равенство выполняется, если $\mathcal{F}$ является специальной.

Набросок доказательства. Вычислим члены $S^{\text{NA}}(\cdot)$ и L^{NA} , введенные выше, используя (9). Заметим, что тело Окунькова сферического многообразия является расслоением над P_+ , так что на каждом $\lambda \in \overline{P_+} \cap \frac{1}{k}\mathfrak{M}$ слой является многогранником Гельфанда—Цетлина неприводимого представления $\text{End}(V_{k\lambda})$ (в силу линейности многогранника Гельфанда—Цетлина конструкция корректна для различных вариантов выбора k ; см. [1]). Следовательно,

$$\Delta(\mathcal{F}^{(t)}) \subset \{z = (\lambda, z') \in \Delta \mid f(\lambda) \geq t\},$$

и равенство выполняется, если центральный слой редуцирован (т.е. выполняется (9)). Следовательно,

$$G_{\mathcal{F}}(z) \leq \sup \{t \mid z = (\lambda, z') \in \Delta, f(\lambda) \geq t\} = f(\lambda)$$

при $z = (\lambda, z') \in \Delta_\lambda \subset \Delta$, и равенство выполняется, если $\mathcal{F}$ имеет редуцированный центральный слой. Таким образом,

$$S^{\text{NA}}(\mathcal{F}) \leq -\ln \left(\frac{1}{V} \int_{P_+} e^{-f(\lambda)} \pi(\lambda) d\lambda \right) + \ln \prod_{\alpha \in \Phi_+} \langle \alpha, \rho \rangle^2, \quad (10)$$

и равенство выполняется, если $\mathcal{F}$ имеет редуцированный центральный слой.

Для вычисления $L^{\text{NA}}(\cdot)$ используем конструкцию аппроксимирующей последовательности из [19, Sec. 2.2] (см. также [22, Sec. 4.2]). Иными словами, можно построить последовательность $\mathbb{Z}$ -конфигураций $\{\mathcal{F}_p\}_{p \in \mathbb{N}_+}$, ассоциированную с функциями $\{f_p\}_{p \in \mathbb{N}_+}$,¹ где f_p сходится к f равномерно. По lct-формуле Бермана (см. [33, Sec. 4.3]) получаем $L^{\text{NA}}(\mathcal{F}_p) = f_p(2\rho)$. Согласно [19,

¹Функция, ассоциированная с $G \times G$ -эквивариантной $\mathbb{Z}$ -тестовой конфигурацией, определяется в смысле замечания 7. В этом случае $s_\lambda^{(k)} = [kf(\lambda/k)]$ для $\lambda \in \overline{kP_+} \cap \mathbb{M}$, $k \in \mathbb{N}$.

Remarks 2.29, 3.32], имеем

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} L^{\text{NA}}(\mathcal{F}_p) \leq L^{\text{NA}}(\mathcal{F}),$$

причем равенство выполняется, если $\mathcal{F}$ определяется нормированием на G . Обратим внимание, что специальная $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация определяется нормированием. Комбинируя с (10), получаем требуемое утверждение. $\square$

Возьмем опорную функцию ℓ вогнутой функции f в точке 2ρ . Поскольку f является W -инвариантной и вогнутой, имеем $\nabla \ell \in (-\mathfrak{t}_+)$. Рассмотрим специальную $\mathbb{R}$ -тестовую конфигурацию $\mathcal{F}_{-\ell}$ и ее H -инвариант

$$H(\mathcal{F}_{-\ell}) = \ln \left(\frac{1}{V} \int_{P_+} e^{-\ell(y) + \ell(2\rho)} \pi dy \right).$$

С другой стороны, поскольку

$$\ell(y) - \ell(2\rho) \geq f(y) - f(2\rho),$$

очевидно, что

$$H(\mathcal{F}_{-\ell}) = \ln \left(\frac{1}{V} \int_{P_+} e^{-\ell(y) + \ell(2\rho)} \pi(y) dy \right) \leq \ln \left(\frac{1}{V} \int_{P_+} e^{-f(y) + f(2\rho)} \pi(y) dy \right) \leq H(\mathcal{F}).$$

Следовательно, для любой $G \times G$ -эквивариантной нормальной $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурации можно построить специальную $G \times G$ -эквивариантную $\mathbb{R}$ -тестовую конфигурацию с меньшим H -инвариантом. Снова видим, что минимизатор H -инварианта среди эквивариантных тестовых конфигураций является специальным.

Легко видеть, что функционал

$$\mathcal{H}(\Lambda) := V \cdot e^{H(\mathcal{F}_\Lambda)} = \int_{P_+} e^{\Lambda(y-2\rho)} \pi(y) dy$$

является правильной выпуклой функцией от Λ . Следовательно, минимизатор $H(\cdot)$ должен быть достигнут на некотором $\Lambda_0 \in \mathfrak{t}_+$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Следствие 13 (см. [22, Proposition 5.7]). *Существует единственный элемент $\Lambda_0 \in \mathfrak{t}_+$ такой, что соответствующая $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ является специальной $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурацией, и*

$$H(\mathcal{F}_{\Lambda_0}) \leq H(\mathcal{F})$$

для всех $G \times G$ -эквивариантных нормальных $\mathbb{R}$ -тестовых конфигураций $\mathcal{F}$. Более того, $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ является «полуустойчивым вырождением» для M .

Заметим, что центральный слой $\mathcal{X}_0$ в $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ является нормальным. Следовательно, он является $G \times G$ -сферическим многообразием. Сферические данные $\mathcal{X}_0$ можно определить в соответствии с [22, Sec. 3], используя аппроксимирующий прогресс (см. [?, Sec. 3] и [19, Sec. 2.2]), который можно реализовать с помощью $\mathbb{Z}$ -тестовой конфигурации. Для этого возмущим элемент Λ_0 до рационального Λ'_0 , так что $\mathcal{F}_{\Lambda'_0}$ будет $\mathbb{Z}$ -конфигурацией, центральный слой которой также есть $\mathcal{X}_0$. Обратим внимание, что согласно [19, Sec. 2.2] (см. также [19, pp. 9-10]) Λ'_0 следует выбирать в алгебре Ли $\overline{\exp(t\Lambda_0)}$.

С другой стороны, доминирующая камера Вейля $\mathfrak{t}_+$ представляет собой конус, граница которого состоит из стенок Вейля

$$W_\alpha := \{x \in \mathfrak{t} \mid \alpha(x) = 0\},$$

где α — простой корень из G . Предположим, что Λ_0 удовлетворяет условию

$$\alpha_i(\Lambda_0) = 0 \tag{11}$$

для простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_{i_0}$

$$\alpha_i(\Lambda_0) > 0 \tag{12}$$

для остальных простых корней $\alpha_{i_0+1}, \dots, \alpha_r$. Поскольку Λ'_0 лежат в алгебре Ли однопараметрической подгруппы $\overline{\exp(t\Lambda_0)}$, она также удовлетворяет условиям (11)–(12). Сферическая подгруппа в $\mathcal{X}_0$ может быть определена с помощью [22, Proposition 3.3]. Согласно стандартному расчету [31, Sec. 24] конус нормирования $\mathcal{X}_0$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{V}(\mathcal{X}_0) := \{x \mid \alpha_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, i_0\}.$$

С другой стороны, из (4) сразу получаем, что многогранник моментов $(\mathcal{X}_0, K_{\mathcal{X}_0}^{-1})$ также равен P_+ . Условие того, что Λ_0 — минимум, дает

$$\mathbf{b}(\Lambda_0) := \int_{P_+} y_i e^{\Lambda_0(y)} \pi dy / \int_{P_+} e^{\Lambda_0(y)} \pi dy \in 2\rho + \overline{\mathcal{V}(\mathcal{X}_0)}^\vee. \quad (13)$$

Согласно [16, Theorem 5.3], (13) эквивалентно свойству $(\mathcal{X}_0, \Lambda_0)$ быть $\hat{G}$ -эквивариантно модифицированной K -полустабильной.

Предложение 14 (см. [22, Proposition 5.6]). *Предположим, что $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ минимизирует $H(\mathcal{F}_\Lambda)$, так что Λ_0 удовлетворяет условию (11)–(12). Если (13) является строгим, т.е.*

$$\mathbf{b}(\Lambda_0) \in 2\rho + \text{Int}(\mathcal{V}(\mathcal{X}_0)^\vee), \quad (14)$$

то $\mathcal{X}_0$ является модифицированным K -полистабильным, а поток Кэлера–Риччи (??) на M сходится к $(\mathcal{X}_0, \Lambda_0)$.

Доказательство состоит в проверке модифицированной $G \times G$ -равномерной K -стабильности $(\mathcal{X}_0, \Lambda_0)$ при условии (14) (подробности см. в доказательстве [22, Proposition 5.6]).

Замечание 15. Имеются два экстремальных случая: если Λ_0 лежит в линейной части $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ камеры Вейля $\mathfrak{t}_+$, то соответствующая $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ действительно есть тестовая конфигурация произведения. В этом случае $\mathcal{X}_0$ совпадает с M и является модифицированным K -полустабильным относительно векторного поля Λ_0 . Если Λ_0 лежит внутри камеры Вейля $\mathfrak{t}_+$, то центральный слой $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{F}_{\Lambda_0}$ является орисферическим многообразием (см. [2, Sec. 4] и [16, Sec. 3.4.2]). Заметим, что орисферическое многообразие всегда допускает солитон Кэлера–Риччи. Следовательно, $\mathcal{X}_0$ является предельным пространством (1). Отметим также, что любое торическое многообразие Фано принадлежит обоим случаям, поэтому он всегда допускает солитон Кэлера–Риччи.

4. Пример: случаи ранга 2. В этом разделе применим следствие 13 в случаях, когда $\text{rank}(G) = 2$, для нахождения полустабильного предела $\mathbb{Q}$ -Фано G -компактификации. Затем, используя недавний результат из [23], вычислим полистабильное вырождение этого предела и получим предельное пространство (1). Нас особенно интересует случай, когда формула (14) не имеет места.

Предположим, что G — комплексная редуктивная группа ранга 2. Пусть M — $\mathbb{Q}$ -Фано G -компактификация с многогранником моментов P_+ . Согласно следствию 13, $H(\mathcal{F}_{\Lambda_0})$ является единственным минимумом Λ_0 в замкнутой положительной камере Вейля $\mathfrak{t}_+$. Соответствующий центральный слой $\mathcal{X}_0$ является $G \times G$ -сферическим многообразием Фано с многогранником моментов P_+ . Далее оно модифицируется как K -полустабильное относительно векторного поля Λ_0 . Это эквивалентно тому, что функционал

$$\mathcal{L}_{\Lambda_0}(u) := \int_{P_+} \langle \nabla u, y - 2\rho \rangle e^{\Lambda_0(y)} \pi dy \quad (15)$$

неотрицателен для всех u в

$$\mathcal{C}_{1,W} := \left\{ u : P^* \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ является } W\text{-инвариантной,} \right. \\ \left. \text{выпуклой и непрерывной в } P^* \text{ и } \int_{\partial P_+} u \pi d\sigma_0 < +\infty \right\}. \quad (16)$$

Здесь через P^* мы обозначаем объединение $\text{Int}(P)$ и относительной внутренней его гиперграней. Весовая функция имеет вид

$$\pi(y) = \prod_{\alpha \in \Phi_+} \langle \alpha, y \rangle^2;$$

$d\sigma_0$ — стандартная мера Лебега на ∂P . Кроме того, $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(\cdot)$ обращается в нуль для любых W -инвариантных аффинных функций на P_+ (см. [16, 23]).

Возможны два случая:

Случай А: $\mathcal{X}_0$ является модифицированным K -стабильным относительно векторного поля Λ_0 . В этом случае полистабильное вырождение $\mathcal{X}_0$ будет тривиальным. На самом деле $\mathcal{X}_0$ допускает солитонную метрику Кэлера—Риччи с солитонным векторным полем Λ_0 (ср. [16, Theorem A] и примеры в [22, Sec. 6]).

Случай В: $\mathcal{X}_0$ является строго модифицированным K -полустабильным относительно векторного поля Λ_0 . Как и в [23, лемма 5.1], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 16. *M строго K -полустабильна тогда и только тогда, когда существует такой фундаментальный вес $\varpi \in \mathfrak{t}_+$ относительно Φ_+ , что $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(\ell_{\varpi}) = 0$ для выпуклой функции*

$$\ell_{\varpi}(y) := \max_{w \in W} \{ \langle w(\varpi), y \rangle \}, \quad y \in P. \quad (17)$$

Построим полистабильное вырождение в случае В следующим образом.

Предложение 17. *Пусть G — комплексная редуктивная группа ранга 2. Пусть M — $\mathbb{Q}$ -Фано G -компактификация с многогранником моментов $\dot{E}P_+$. Предположим, что полустабильное вырождение $\mathcal{F}_{\Lambda_0}$ имеет строго модифицированный K -полустабильный центральный слой $\mathcal{X}_0$ относительно $\Lambda_0 \in \mathfrak{t}_+$. Тогда $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(u) = 0$ в том и только том случае, когда u лежит в*

$$\hat{\mathcal{C}}^0 := \{u \mid u \text{ аффинна в } P_+\}.$$

Существует единственное полистабильное вырождение $\mathcal{F}_$, которое вырождает $\mathcal{X}_0$ в $\mathbb{Q}$ -орисферическое многообразие Фано $\mathcal{X}_*$. В частности, $\mathcal{X}_*$ является модифицированным K -стабильным.*

Доказательство. Согласно последней части замечания 15б G не может быть тором. Следовательно, его корневая система содержит по крайней мере одну пару корней. Кроме того, Λ_0 не может лежать внутри $\mathfrak{t}_+$. Возможны два случая:

Случай 1: $\Phi = \{\pm\alpha\}$ содержит в точности одну пару корней. В этом случае, $\Lambda_0 \perp \alpha$ лежит в центре $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$;

Случай 2: $\Phi_+ = \{\alpha, \alpha'\}$ состоит из двух простых корней. В этом случае

$$\mathfrak{t}_+ = \text{Span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \{\alpha^\vee, \alpha'^\vee\}.$$

Поскольку $\Lambda_0 \in \partial \mathfrak{t}_+$, можно считать без ограничения общности, что $\Lambda_0 = c\alpha'^\vee$ для некоторого $c > 0$. Снова имеем $\Lambda_0 \perp \alpha$.

Согласно [22, Sec. 3], в обоих случаях сферическая система корней $\mathcal{X}_0$ равна $\{\pm\alpha\}$. Обозначим через

$$s_\alpha(y) = y - 2 \frac{\langle \alpha, y \rangle}{|\alpha|^2} \alpha$$

отражение относительно α . Тогда единственным нетривиальным элементом в малой группе Вейля $\mathcal{X}_0$ является s_α . Положим $\hat{P} := P_+ \cup s_\alpha(P_+)$. Нетрудно проверить, что $\hat{P}_+$ является s_α -инвариантным выпуклым многогранником. Пусть $\hat{P}^*$ — объединение $\text{Int}(\hat{P})$ с относительной внутренностью всех его гиперграней. Аналогично (16) введем

$$\hat{\mathcal{C}}_{1, s_\alpha} := \left\{ u : \hat{P}^* \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ является } s_\alpha\text{-инвариантной,} \right. \\ \left. \text{выпуклой и непрерывной в } \hat{P}^* \text{ и } \int_{\partial P_+} u \pi d\sigma_0 < +\infty \right\}.$$

Напомним, что $\mathcal{X}_0$ является модифицированным K -полустабильным. Согласно [23, Lemma 5.1], функционал $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(\cdot)$, определенный (15), неотрицателен на $\hat{\mathcal{C}}_{1,s_\alpha}$ и обращается в нуль на любой s_α -инвариантной аффинной функции на P_+ .

С другой стороны, поскольку $\mathcal{X}_0$ является строго модифицированным K -полустабильным, существует некоторая s_α -инвариантная выпуклая функция u_0 на $\hat{P}$, не являющаяся аффинной. Согласно [23, Proposition 3.5], u_0 удовлетворяет однородному уравнению Монжа—Ампера на $\hat{P}$. Используя аргументы из [23, Proposition 5.4], заключаем, что

$$u_0 = \ell_{\alpha^\vee}$$

определяется с помощью (17), с точностью до аддитивной s_α -инвариантной аффинной функции. Отсюда заключаем, что $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u \in \hat{\mathcal{C}}^0$.

Отметим, что для любой $u \in \hat{\mathcal{C}}^0$ $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация, связанная с u , совпадает с $\mathbb{R}$ -тестовой конфигурацией $\mathcal{F}_{\alpha^\vee}$, связанной с $\ell_{\alpha^\vee}$. Можно непосредственно проверить, что эта $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация $\mathcal{F}_{\alpha^\vee}$ имеет орисферический центральный слой $\mathcal{X}_{\alpha^\vee}$ (см. [2, Sec. 4] или [22, Proposition 3.2]). Тогда модифицированная K -стабильность $\mathcal{X}_{\alpha^\vee}$ относительно Λ_0 следует из того, что $\mathcal{L}_{\Lambda_0}(\cdot)$ обращается в нуль на $\hat{\mathcal{C}}^0$.

С другой стороны, согласно следствию 11, эквивариантная $\mathbb{R}$ -тестовая конфигурация с неприводимым центральным слоем должна быть ассоциирована с некоторой функцией $u \in \hat{\mathcal{C}}^0$. Отсюда ясно, что с точностью до подкручивания полистабильное отрицание равно $\mathcal{F}_* = \mathcal{F}_{\alpha^\vee}$. $\square$

Замечание-вопрос. Окончательный предел $\mathcal{X}_*$ на самом деле является предельным пространством (1) на M . Он допускает солитон Кэлера—Риччи относительно векторного поля Λ_0 . Единственность Λ_0 и $\mathcal{F}_*$ влечет алгебраическую единственность предела, доказанную в [19], однако пока не известно, существует ли какой-либо пример, принадлежащий случаю В и имеющий нетривиальное полистабильное вырождение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ожуньков А. Ю. Замечание о полиноме Гильберта сферического многообразия // Функц. анал. прилож. — 1997. — 31, № 2. — С. 82–85.
2. Попов В. Л. Стягивание действий редуктивных алгебраических групп // Мат. сб. — 1986. — 130 (172), № 3 (7). — С. 310–334.
3. Тимашев Д. А. Эквивариантные компактификации редуктивных групп // Мат. сб. — 2003. — 194, № 4. — С. 119–146.
4. Alexeev V. A., Brion M. Stable reductive varieties, II: Projective case // Adv. Math. — 2004. — 184. — P. 382–408.
5. Alexeev V. A., Katzarkov L. V. On K-stability of reductive varieties // Geom. Funct. Anal. — 2005. — 15. — P. 297–310.
6. Bamler R. Convergence of Ricci flows with bounded scalar curvature // Ann. Math. — 2018. — 188. — P. 753–831.
7. Berman R., Boucksom S., Eyssidieux P., Guedj V., and Zeriahi A. Kähler–Einstein metrics and the Kähler–Ricci flow on log Fano varieties // J. Reine Angew. Math. — 2019. — 751. — P. 27–89.
8. Berman R., Witt-Nystrom D. Complex optimal transport and the pluripotential theory of Kähler–Ricci solitons / arXiv:1401.8264 [math DG].
9. Blum H., Liu Y.-Ch., Xu Ch.-Y., Zhuang Z.-Q. The existence of the Kähler–Ricci soliton degeneration / arXiv:2103.15278 [math AG].
10. Boucksom S., Hisamoto T., Jonsson M. Uniform K-stability, Duistermaat–Heckman measures and singularities of pairs // Ann. Inst. Fourier. — 2017. — 67. — P. 743–841.
11. Cao H. Deformation of Kähler metrics to Kähler–Einstein metrics on compact Kähler manifolds // Invent. Math. — 1985. — 81. — P. 359–372.
12. Chen X.-X., Donaldson S., Sun S. Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds, I–III // J. Am. Math. Soc. — 2015. — 28. — P. 183–278.
13. Chen X.-X., Wang B. Space of Ricci flows. Part B: Weak compactness of the flows // J. Differ. Geom. — 2020. — 116. — P. 1–123.

14. *Chen X.-X., Sun S., Wang B.* Kähler–Ricci flow, Kähler–Einstein metric, and K-stability// *Geom. Topol.* — 2018. — 22. — P. 3145–3173.
15. *Datar V., Székelyhidi G.* Kähler–Einstein metrics along the smooth continuity method// *Geom. Funct. Anal.* — 2016. — 26. — P. 975–1010.
16. *Delcroix T.* K-Stability of Fano spherical varieties// *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*. — 2020. — 53. — P. 615–662.
17. *Donaldson S.* Scalar curvature and stability of toric varieties// *J. Differ. Geom.* — 2002. — 62. — P. 289–348.
18. *Han J., Li Ch.* On the Yau–Tian–Donaldson conjecture for generalized Kähler–Ricci soliton equations/ [arXiv:2006.00903 \[math.DG\]](#).
19. *Han J.-Y., Li Ch.* Algebraic uniqueness of Kähler–Ricci flow limits and optimal degenerations of Fano varieties// [arXiv:2009.01010 \[math.DG\]](#).
20. *Li Ch.* G -uniform stability and Kähler–Einstein metrics on Fano varieties// *Invent. Math.* — 2022. — 227. — P. 661–744.
21. *Li Ch., Wang X.-W., Xu Ch.-Y.* Algebricity of metric tangent cones and equivariant K-stability// *J. Am. Math. Soc.* — 2021. — 34. — P. 1175–1214.
22. *Li Y., Li Zh.-Y.* Equivariant $\mathbb{R}$ -test configurations and semistable limits of $\mathbb{Q}$ -Fano group compactifications/ [arXiv:2103.06439 \[math.DG\]](#).
23. *Li Y., Zhou B.* K-stability and polystable degenerations of polarized spherical varieties/ [arXiv:2111.04269 \[math.DG\]](#).
24. *Tian G.* Kähler–Einstein metrics with positive scalar curvature// *Invent. Math.* — 1997. — 130. — P. 1–37.
25. *Tian G.* K-stability and Kähler–Einstein metrics// *Commun. Pure Appl. Math.* — 2015. — 68. — P. 1085–1156.
26. *Tian G., Zhang Sh.-J., Zhang Zh.-L., Zhu X.-H.* Perelman’s entropy and Kähler–Ricci flow on a Fano Manifold// *Trans. Am. Math. Soc.* — 2013. — 365. — P. 6669–6695.
27. *Tian G., Zhang Zh.-L.* Regularity of Kähler–Ricci flows on Fano manifolds// *Acta Math.* — 2016. — 216. — P. 127–176.
28. *Tian G., Zhu X.-H.* Uniqueness of Kähler–Ricci solitons// *Acta Math.* — 2000. — 184. — P. 271–305.
29. *Tian G., Zhu X.-H.* Convergence of the Kähler–Ricci flow// *J. Am. Math. Sci.* — 2006. — 17. — P. 675–699.
30. *Tian G., Zhu X.-H.* Convergence of the Kähler–Ricci flow on Fano manifolds// *J. Reine Angew Math.* — 2013. — 678. — P. 223–245.
31. *Timashev D. A.* Homogenous Spaces and Equivariant Embeddings. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
32. *Wang F., Zhou B., Zhu X.-H.* Modified Futaki invariant and equivariant Riemann–Roch formula// *Adv. Math.* — 2016. — 286. — P. 1205–1235.
33. *Yao Y.* Mabuchi solitons and relative Ding stability of toric Fano varieties/ [arXiv:1701.04016 \[math.DG\]](#).

Yan Li

School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing, China

E-mail: liyan.kitai@yandex.ru

ZhenYe Li

College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing, China

E-mail: lizhenye@pku.edu.cn



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 42–63
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-42-63

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. III

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Математическими моделями рассматриваемых задач являются системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Представлен строгий аналитический подход к изучению этой проблемы, который позволяет эффективно и корректно строить алгоритмы стабилизации. Метод основан на приводимости нестационарных систем, описывающих указанные задачи, к стационарным системам. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Настоящая статья является третьей частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 71–85. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 221. — С. 71–92.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоритмы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. III

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

ABSTRACT. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Mathematical models of the problems considered are systems of differential equations with periodic coefficients. We present a rigorous analytical approach to this problem, which allows efficient and correct construction of stabilization algorithms. The method is based on the reducibility of nonstationary systems that describe these problems to stationary systems. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. This paper is the third part of the work. The first part is: *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory.* — 2023. — 220. — P. 71–85. The second part is: *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory.* — 2023. — 221. — P. 71–92.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3. Стабилизация стационарных движений спутника в геомагнитном поле	43
3.1. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных моментов . .	44
3.2. Стабилизация положения равновесия при помощи моментов сил Лоренца	53
Список литературы	60

ГЛАВА 3

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА
В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В этой главе рассматриваются вопросы стабилизации стационарных движений спутника около центра масс при помощи управляющих магнитных моментов различной природы, выражения для которых представлены в главе 1.

Вопрос о стабилизации стационарных движений тем или иным способом представляет практический интерес. Один из таких способов основан на электродинамическом взаимодействии спутника с магнитным полем Земли. Магнитные системы ориентации, использующие электродинамическое взаимодействие, широко применяются в практике космических исследований.

Во время движения спутника по круговой орбите принятое в работе выражение для магнитной индукции геомагнитного поля изменяется периодически с периодом, равным периоду обращения спутника по орбите. Поэтому уравнения управляемого движения, линеаризованного в окрестности стационарных движений, представляют собой линейную систему, нестационарную по управлению. Ниже показано, что эти системы относятся к определенному классу ЛНС, которые допускают их конструктивное преобразование к стационарным системам большего порядка. Этот подход к исследованию систем указанного класса представлен в главе 2 и здесь применяется к решению задач управления ориентацией спутника при помощи магнитных моментов.

Предлагаемый подход состоит из четырех этапов.

1. Построить конструктивное преобразование исходной нестационарной системы к стационарной системе большей размерности.
2. Провести анализ управляемости полученной стационарной системы.
3. При наличии управляемости построить для стационарной системы алгоритм управления в виде линейной обратной связи, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Этот алгоритм можно строить либо назначая постоянные коэффициенты управления, которые обеспечат наперед заданные корни характеристического уравнения замкнутой системы, либо строя оптимальный алгоритм на основе квадратичного критерия качества на бесконечном интервале времени, что позволит также получить линейную обратную связь с постоянными коэффициентами.
4. Осуществить обратный переход к исходным переменным нестационарной системы, вводя дополнительные переменные таким образом, чтобы преобразование к переменным стационарной системы было невырожденным.

Использование алгоритмов стабилизации для стационарных систем имеет ряд достоинств.

1. Управление строится в виде обратной связи с постоянными коэффициентами. Это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость приведенной стационарной системы.
2. Процесс построения управления достаточно хорошо алгоритмизирован. В частности, для получения результата при использовании оптимального алгоритма следует задать лишь параметры оптимизируемого функционала.

В этой главе представлено решение ряда задач стабилизации стационарных движений спутника. Управление трехосной ориентацией спутника в окрестности его положения относительного

равновесия при помощи собственного магнитного момента, создаваемого магнитными катушками, рассмотрено в разделе 3.1, стабилизация при помощи моментов лоренцевых сил описана в разделе 3.2. Совместное использование указанных моментов рассмотрено в разделе 3.3. Задача стабилизации регулярных прецессий рассмотрена в разделе 3.4.

Краткое рассмотрение задачи определения ориентации спутника по измерениям, доставляемым магнитометром, содержится в разделе 3.5.

Моделирование алгоритмов стабилизации для всех рассмотренных задач проводилось при помощи стандартного пакета Matlab 7.1. Для демонстрации работоспособности предложенных алгоритмов рассматривались задачи стабилизации стационарных движений спутников с различными механическими и геометрическими параметрами при их движении по орбитам с различными наклонными [1, 48, 49, 63].

В Приложении рассмотрено применение предложенного подхода при использовании более полной модели геомагнитного поля.

3.1. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СПУТНИКА ПРИ ПОМОЩИ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ

Задача стабилизации положения относительного равновесия спутника состоит в том, чтобы построить управление, обеспечивающее его асимптотическую устойчивость. При решении этой задачи будем основываться на линеаризованных уравнениях движения.

3.1.1. Линеаризованные уравнения движения. Управляющий момент создается за счет взаимодействия внутреннего магнитного момента спутника, снабженного магнитными катушками, с геомагнитным полем (1.1.6). Выражение для линеаризованного момента представляется в виде (1.1.13). Линеаризованные уравнения управляемого движения (1.1.15) в данном случае имеют вид

$$\ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 = \mu_0 [2\beta_1 u_2 s\tau + \beta_4 u_3], \quad (3.1.1)$$

$$\ddot{x}_3 + d_3 \dot{x}_1 - \kappa_3 x_3 = -\mu_0 [\beta_5 u_1 + \beta_3 u_2 c\tau], \quad (3.1.2)$$

$$\ddot{x}_2 - \kappa_2 x_2 = \mu_0 [-2\beta_2 u_1 s\tau + \beta_2 u_3 c\tau].$$

Здесь

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_2, \quad x_2 = \theta_3, \quad x_3 = \theta_1; \\ d_1 &= \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3; \\ \kappa_1 &= 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2 = 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2}, \quad \kappa_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}; \\ \beta_j &= \frac{sI}{J_j} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \beta_4 = \frac{cI}{J_1}, \quad \beta_5 = \frac{cI}{J_3}. \end{aligned}$$

Подсистемы (3.1.1), (3.1.2) связаны только через управления. Систему (3.1.1), (3.1.2) можно представить в виде системы первого порядка

$$\dot{\xi} = A_\xi \xi + B_\xi(\tau)u, \quad (3.1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{(6 \times 1)} &= \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \xi^{(1)} = [x_1 \quad x_3 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_3]^\top, \quad \xi^{(2)} = [x_2 \quad \dot{x}_2]^\top, \\ A_\xi &= \text{diag}(A^{(1)}, A^{(2)}), \quad B_\xi(\tau) = \begin{bmatrix} B^{(1)}_{(4 \times 3)} \\ B^{(2)}_{(2 \times 3)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Эту систему удобно представить в виде двух подсистем

$$\dot{\xi}^{(1)} = A^{(1)} \xi^{(1)} + B_\xi^{(1)} u; \quad (3.1.4)$$

$$\dot{\xi}^{(2)} = A^{(2)}\xi^{(2)} + B_{\xi}^{(2)}u; \quad (3.1.5)$$

где матрицы имеют вид

$$A_{(4 \times 4)}^{(1)} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & D \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_3), \quad D = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{\xi} = \begin{bmatrix} B_{\xi}^{(1)} \\ B_{\xi}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B_{\xi}^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_1 s\tau & \beta_4 \\ -\beta_5 & -\beta_3 c\tau & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\xi}^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2\beta_2 s\tau & 0 & \beta_2 c\tau \end{bmatrix}.$$

Здесь O_2 — нулевая матрица.
(2×2)

В Приложении 3.6.2 приведены нелинейные уравнения движения по экватору с точностью до членов второго порядка включительно.

3.1.2. Приведение к стационарной системе. Системы (3.1.1), (3.1.2) (соответственно (3.1.4), (3.1.5)) относятся к классу ЛНС, содержащих управление, которые допускают приведение к стационарным системам в расширенном пространстве состояний (см. гл. 2). Матрицы коэффициентов при управлении в указанных системах уравнений имеют вид

$$B(\tau) = B_{01}c\tau + B_{02}s\tau + B_{03}, \quad (B_{0k} = \text{const}).$$

Коэффициенты матриц $B(\tau)$ в уравнениях системы (3.1.4) являются элементами вектора

$$f^{(1)}(\tau) = [\cos \tau, \sin \tau, 1]^T,$$

а в уравнениях системы (3.1.5) — элементами вектора

$$f^{(2)}(\tau) = [\cos \tau, \sin \tau]^T,$$

которые удовлетворяют следующим уравнениям

$$\dot{f}^{(i)} = S_i f^{(i)} \quad (i = 1, 2); \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь удобно ввести новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 8$) в скалярной форме по формулам

$$x_1 = y_1 c\tau + y_3 s\tau + y_5, \quad x_3 = y_2 c\tau + y_4 s\tau + y_6, \quad x_2 = y_7 c\tau + y_8 s\tau. \quad (3.1.6)$$

Дважды дифференцируя эти соотношения, подставляя их в систему (3.1.1), (3.1.2) и приравнявая коэффициенты при функциях $\cos \tau$, $\sin \tau$, 1, получим системы, соответствующие системе (2.2.13)

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - \bar{\kappa}_1 y_1 - d_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 - d_1 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \bar{\kappa}_3 y_2 + d_3 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + d_3 y_3 &= -\mu_0 \beta_3 u_2, \\ \ddot{y}_3 - \bar{\kappa}_1 y_3 - d_1 \dot{y}_4 - 2\dot{y}_1 + d_1 y_2 &= 2\mu_0 \beta_1 u_2, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_4 - \bar{\kappa}_3 y_4 + d_3 \dot{y}_3 - 2\dot{y}_2 - d_3 y_1 &= 0, \\ \ddot{y}_5 - \kappa_1 y_5 - d_1 \dot{y}_6 &= \mu_0 \beta_4 u_3, \\ \ddot{y}_6 - \kappa_3 y_6 + d_3 \dot{y}_5 &= -\mu_0 \beta_5 u_1, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_7 - \bar{\kappa}_2 y_7 + 2\dot{y}_8 &= \mu_0 \beta_2 u_3, \\ \ddot{y}_8 - \bar{\kappa}_2 y_8 - 2\dot{y}_7 &= -2\mu_0 \beta_2 u_1, \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i + 1 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Стационарная система состоит из двух независимых систем (3.1.7) и (3.1.8), (3.1.9), в которые входят управления u_2 и u_1 , u_3 соответственно.

Замечание 3.1. Ранг матрицы коэффициентов при магнитных моментах в системе (3.1.1), (3.1.2)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta_1 s\tau & \beta_4 \\ -\beta_5 & -\beta_3 c\tau & 0 \\ -2\beta_2 s\tau & 0 & \beta_2 c\tau \end{bmatrix}$$

равен двум. Поэтому среди управлений u_1, u_2, u_3 лишь два независимых.

3.1.3. Управляемость. Управляемость в рассматриваемой задаче можно исследовать как исходя из нестационарной системы (3.1.1), (3.1.2), так и анализируя стационарные системы (3.1.7)–(3.1.9).

3.1.3.1. Управляемость стационарной системы. Рассмотрим стационарную систему (3.1.7)–(3.1.9). Компоненты исходного вектора состояния x_1, x_2, x_3 выражаются через переменные $y_1, \dots, y_8$. Если система (3.1.8), (3.1.9) относительно переменных $y_5, \dots, y_8$, содержащих информацию о всех компонентах вектора состояния x_1, x_2, x_3 , управляема при помощи управлений u_1, u_3 , то систему (3.1.7), включающую в себя переменные $y_1, \dots, y_4$, рассматривать нет необходимости. В таком случае будем считать, что $y_i(\tau) = 0$ ($i = 1, \dots, 4$) и $u_2 = 0$. Тогда из формул (3.1.6) следует

$$x_1 = y_5, \quad x_3 = y_6, \quad x_2 = y_7 c\tau + y_8 s\tau. \quad (3.1.10)$$

Предположим, что орбита спутника не является ни экваториальной, ни полярной, т. е. $sI \neq 0$, $cI \neq 0$. Предполагая, что $u_2 = 0$ и не рассматривая систему (3.1.7), исследуем управляемость стационарной системы (3.1.8), (3.1.9).

Согласно [7], стационарная система неуправляема, если в ней существует интеграл, не зависящий от наличия управлений. Умножим второе уравнение системы (3.1.8) на $2\beta_2$, четвертое уравнение на $-\beta_5$ и сложим, $\beta_5 \bar{\kappa}_2 y_8 - 2\beta_2 \kappa_3 y_6 = 0$. Откуда следует, что при выполнении условий $\bar{\kappa}_2 = 0, \kappa_3 = 0$, т. е.

$$J_1 = J_2 = \frac{3}{2} J_3 \quad (3.1.11)$$

в системе (3.1.8) существует не зависящий от наличия управления u_1 интеграл

$$2\beta_2(\dot{y}_6 + d_3 y_5) + \beta_5(\dot{y}_8 - 2y_7) = \text{const}.$$

Умножим первое уравнение системы (3.1.9) на β_2 , третье уравнение на $-\beta_4$ и сложим. Тогда в этой системе существует не зависящий от наличия управления u_3 интеграл

$$\beta_2(\dot{y}_5 - d_1 y_6) - \beta_4(\dot{y}_7 + 2y_8) = \text{const},$$

если выполняется условие $\beta_2 \kappa_1 y_5 - \beta_4 \bar{\kappa}_2 y_7 = 0$ или

$$\kappa_1 = 0, \quad \bar{\kappa}_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad J_2 = J_3 = \frac{3}{4} J_1. \quad (3.1.12)$$

Итак, если условия (3.1.11) или (3.1.12) не выполняются, то стационарная система (3.1.8), (3.1.9) управляема.

Как уже указывалось в главе 2, приведенные стационарные системы являются избыточными по отношению к исходной системе. Если стационарная система управляема, то управляема и исходная нестационарная система. Однако неуправляемость стационарной системы может и не повлечь неуправляемость исходной нестационарной системы.

3.1.3.2. Управляемость нестационарной системы. Как и выше, при анализе управляемости стационарной системы полагаем, что $u_2 = 0$.

Нестационарная система (3.1.4), (3.1.5), согласно критерию [7], управляема, если можно указать такую точку τ^* , в которой

$$\text{rank } U(\tau^*) = 6, \quad (3.1.13)$$

$$U(\tau) = [W_1(\tau) \quad \dots \quad W_6(\tau)],$$

$$W_1(\tau) = B_\xi(\tau), \quad W_k(\tau) = A_\xi(\tau)W_{k-1}(\tau) - \dot{W}_{k-1}(\tau) \quad (k = 2, \dots, 6),$$

$$B_\xi = \begin{bmatrix} B_\xi^{(1)} \\ B_\xi^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B_\xi^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_4 \\ 0 & \beta_5 \end{bmatrix}, \quad B_\xi^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2\beta_2 s\tau & \beta_2 c\tau \end{bmatrix}.$$

Матрица $U(\tau)$ имеет вид

$$U(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_4 & -d_1\beta_5 & 0 & 0 & l_{26}\beta_4 \\ 0 & 0 & -\beta_5 & 0 & 0 & -d_3\beta_4 & l_{45}\beta_5 & 0 \\ 0 & \beta_4 & -d_1\beta_5 & 0 & 0 & l_{26}\beta_4 & l_{27}\beta_5 & 0 \\ -\beta_5 & 0 & 0 & -d_3\beta_4 & l_{45}\beta_5 & 0 & 0 & l_{48}\beta_4 \\ 0 & 0 & -2\beta_2 s\tau & \beta_2 c\tau & 4\beta_2 c\tau & 2\beta_2 s\tau & 2l_{57}\beta_2 s\tau & l_{58}\beta_2 c\tau \\ -2\beta_2 s\tau & \beta_2 c\tau & 2\beta_2 c\tau & \beta_2 s\tau & 2l_{65}\beta_2 s\tau & l_{66}\beta_2 c\tau & 2l_{67}\beta_2 c\tau & l_{68}\beta_2 s\tau \end{bmatrix}$$

$$l_{26} = -d_1 d_3 + \kappa_1, \quad l_{45} = d_1 d_3 - \kappa_3, \quad l_{48} = -d_3(l_{26} + \kappa_3),$$

$$l_{65} = -l_{66} = 1 - \kappa_2, \quad l_{27} = d_1(l_{45} - \kappa_1), \quad l_{57} = 2 + l_{65},$$

$$l_{67} = l_{68} = 2\kappa_2 - l_{65}, \quad l_{58} = l_{66} - 2.$$

Можно показать, что первые пять столбцов матрицы управляемости $U(\tau)$ линейно независимы при любых значениях параметров. Шестой столбец матрицы $U(\tau)$ является линейной комбинацией первых пяти только при выполнении условия (3.1.12). Ранг матрицы $U(\tau)$, составленной из первых пяти столбцов и седьмого при условии (3.1.11) равен шести.

Таким образом, нестационарная система (3.1.1), (3.1.2) управляема при любых значениях моментов инерции спутника, несмотря на то, что соответствующая стационарная система не является полностью управляемой.

Замечание 3.2. Как указывалось в [20], в работе [77] сформулированы лишь достаточные условия управляемости системы (3.1.1), (3.1.2) для любой неэкваториальной орбиты, имеющие вид

$$J_3 \neq J_2, \quad J_2(J_1 - J_2 + J_3) \neq 6J_3(J_3 - J_1). \quad (3.1.14)$$

Если тензор инерции спутника, например, — шаровой ($J_1 = J_2 = J_3$), то условия управляемости (3.1.13) выполнены, т. е. управляемость имеет место, несмотря на то, что условия (3.1.14) нарушаются.

Если орбита экваториальная ($I = 0$), то система (3.1.2), (3.1.3) становится стационарной: $\beta_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), и система неуправляема.

Если орбита полярная ($I = \pi/2$), то система (3.1.1), (3.1.2) расщепляется на две независимые группы: уравнения для переменных x_1, x_3 с управлениями u_2 ; уравнения для x_2 с управлениями u_1, u_3 . Применяя критерий [13], нетрудно получить, что система уравнений относительно переменных x_1, x_3 управляема, а система относительно переменной x_2 управляема при наличии хотя бы одного из управлений u_1 или u_3 .

3.1.4. Алгоритмы стабилизации. Одна из основных идей предлагаемого метода состоит в использовании стационарной системы для построения стабилизирующего управления. Алгоритм строится на основе стационарной системы (3.1.8), (3.1.9).

Для построения алгоритма стабилизации удобнее представить систему (3.1.8), (3.1.9) в форме Коши, вводя переменные

$$\begin{aligned} z_1 &= y_5, & z_2 &= y_6, & z_3 &= \dot{y}_5, & z_4 &= \dot{y}_6, \\ z_5 &= y_7, & z_6 &= y_8, & z_7 &= \dot{y}_7, & z_8 &= \dot{y}_8. \end{aligned}$$

которые удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{z} = A_z z + B_z U, \quad U = [u_1 \quad u_3]^\top, \quad (3.1.15)$$

$$A_z = \text{diag}(A_{z1}, A_{z2}); \quad A_{z1} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ K_1 & -D_1 \end{bmatrix}, \quad A_{z2} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ K_2 & -D_2 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_3), \quad K_2 = \text{diag}(\bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}_2), \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_z = \begin{bmatrix} O_2 \\ B_1 \\ O_2 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & \beta_4 \\ -\beta_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 \\ -2\beta_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача стабилизации стационарной управляемой системы (3.1.15) состоит в том, чтобы построить управление U , обеспечивающее стремление к нулю компонент вектора состояния $z(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Стабилизирующее управление $U(\tau)$ строится в виде обратной связи по состоянию $U(\tau) = -K_z z(\tau)$, а матрица коэффициентов управления $K_z = \text{const}$ выбирается из условия минимума квадратичного функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\infty [z^\top(\tau) Q z(\tau) + U^\top(\tau) \Gamma U(\tau)] d\tau.$$

Здесь $Q(8 \times 8)$ — неотрицательно определенная, $\Gamma(2 \times 2)$ — положительно определенная — постоянные матрицы.

Оптимальное управление имеет вид [2, 11, 25, 54] (см. гл. 2, раздел 2.1)

$$U(\tau) = -K_z z(\tau), \quad K_z = \Gamma^{-1} B_z P. \quad (3.1.16)$$

Матрица $P(8 \times 8)$ является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$P A_z + A_z^\top P - P B_z \Gamma^{-1} B_z^\top P + Q = 0.$$

Синтезированное управляющее воздействие является функцией переменных $z(\tau)$ стационарной системы (3.1.15) более высокого порядка, чем исходная нестационарная система (3.1.4), (3.1.5). Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор $z(\tau)(8 \times 1)$ через исходный вектор состояния $\xi(6 \times 1) = [x_1 \ x_3 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_3 \ x_2 \ \dot{x}_2]^\top$ и некоторый дополнительный вектор.

Дополним вектор ξ вектором $\xi_d = [\xi_7 \ \xi_8]^\top$ так, чтобы матрица T преобразования

$$\bar{\xi} = T z \left(\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi_d \end{bmatrix} \right) \quad (3.1.17)$$

была невырожденной.

Компоненты вектора $\bar{\xi}$ связаны с компонентами вектора состояния $z(\tau)$ стационарной системы (3.1.15) соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 = \xi_1 = z_1, \quad x_3 = \xi_2 = z_2, \quad \dot{x}_1 = \xi_3 = z_3, \quad \dot{x}_3 = \xi_4 = z_4, \\ x_2 = \xi_5 = z_5 c\tau + z_7 s\tau, \quad \dot{x}_2 = \xi_6 = z_6 c\tau + z_8 s\tau, \\ \xi_7 = -z_5 s\tau + z_7 c\tau, \quad \xi_8 = -z_6 s\tau + z_8 c\tau. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Матрицу преобразования запишем в виде

$$T(\tau) = \text{diag}(T_1, T_2), \quad T_1 = E_4, \quad T_2(\tau) = \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 \\ -s\tau E_2 & c\tau E_2 \end{bmatrix}.$$

Вектор ξ удовлетворяет системе уравнений первого порядка (3.1.4), (3.1.5). Уравнения для дополнительного вектора, согласно (2.3.12), имеют вид

$$\dot{\xi}_d = A^{(2)} \xi_d + B_d(\tau) U, \quad B_d(\tau) = \mu_0 \begin{bmatrix} -2\beta_2 c\tau & \beta_2 s\tau \end{bmatrix}. \quad (3.1.19)$$

Тогда уравнение для вектора $\bar{\xi}$ можно записать в виде

$$\dot{\bar{\xi}} = \bar{A}_\xi \bar{\xi} + \bar{B}_\xi(\tau) U, \quad (3.1.20)$$

$$\bar{A}_\xi = \text{diag}(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(2)}), \quad \bar{B}_\xi = \begin{bmatrix} B^{(1)}(\tau) \\ B^{(2)}(\tau) \\ B_d(\tau) \end{bmatrix}.$$

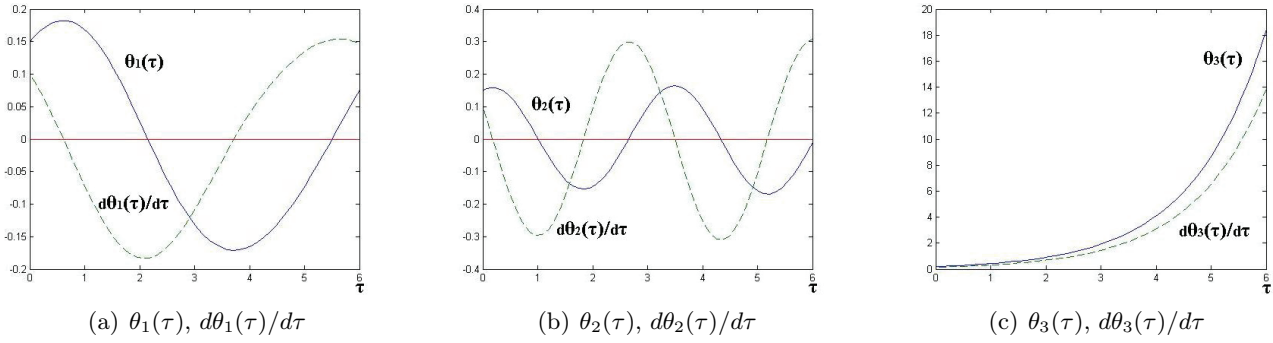


Рис. 3.1. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) в отсутствие управления.

Нестационарная система (3.1.20) включает в себя исходную систему (3.1.4), (3.1.5) в качестве подсистемы. Управление (3.1.16), построенное для стационарной системы (3.1.15), при помощи выражений (3.1.18) можно ввести в систему (3.1.20) в виде

$$U = -K_z T^{-1}(\tau) \bar{\xi}.$$

Замкнутая этим управлением система имеет вид

$$\dot{\bar{\xi}} = (\bar{A}_\xi - \bar{B}_\xi(\tau) K_z T^{-1}(\tau)) \bar{\xi}. \quad (3.1.21)$$

Решения $\bar{\xi}(\tau)$ системы (3.1.21), содержащие компоненты исходного вектора $\xi(\tau)$, стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, в силу выбора матрицы K_z , так как компоненты вектора ξ связаны с компонентами вектора z ограниченным преобразованием (3.1.18).

3.1.5. Моделирование. Целью проведения моделирования предложенных алгоритмов являлась демонстрация их работоспособности в различных ситуациях. Поэтому рассматривались алгоритмы стабилизации стационарных движений спутников с различными геометрическими и механическими параметрами — спутников, относительное равновесие которых в отсутствие управлений является не асимптотически устойчивым, а также спутников с неустойчивым положением относительного равновесия.

При моделировании алгоритмов стабилизации коэффициенты вычислялись с использованием стандартной программы LQR для стационарных систем.

Параметр, определяющий величину собственного магнитного момента

$$\mu_0 = \frac{\mu_E}{\mu}, \quad \mu_E = 7,812 \cdot 10^6 \text{ км}^3 \cdot \text{кг} \times \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}, \quad \mu = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3 \text{с}^{-2}.$$

Начальные отклонения значений углов 0,15, 0,15, 0,2, начальные значения отклонений скоростей в безразмерном времени: 0,1, 0,1, 0,15.

На рисунках 3.1, 3.2 представлены результаты моделирования алгоритма стабилизации для спутника с параметрами: $J_1 = 2,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_2 = 5,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_3 = 3,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ [63] (неустойчивое положение относительного равновесия). Спутник движется по орбите с углом наклона $I = 60^\circ$. Время орбитального периода $\tau = 2\pi$, что соответствует $\approx 1,5$ ч.

Матрицы в квадратичном функционале приняты в виде

$$Q = \alpha E_8, \quad \Gamma = \gamma E_2,$$

где величины $\alpha = 1,0$, $\gamma = 1,0$.

Для сравнения представлено поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) в отсутствие управления ($u_i = 0$) и при наличии стабилизирующего управления ($u_i \neq 0$). Сплошными линиями описывается поведение углов, пунктирными — скоростей.

На рисунках 3.3–3.6 приведены результаты моделирования поведения углов при реализации алгоритма стабилизации для спутника с параметрами $J_1 = 3,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_2 = 5,8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_3 =$

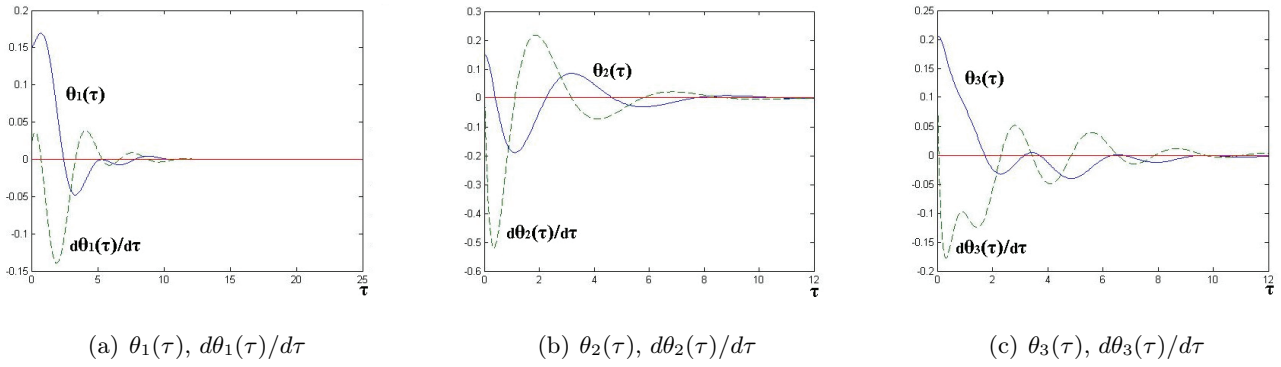


Рис. 3.2. Поведение переменных $\theta_i, d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) при наличии стабилизирующего управления.

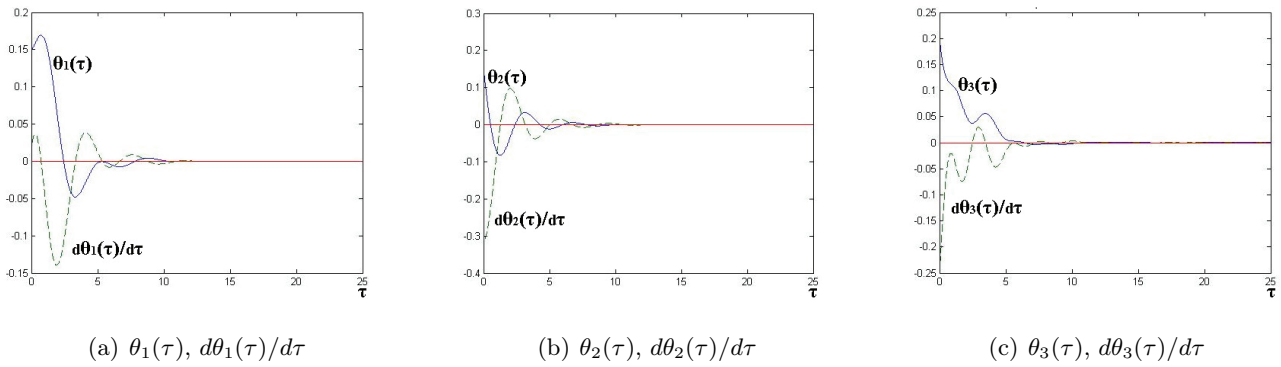


Рис. 3.3. Поведение переменных $\theta_i, d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) при $I = 60^\circ$.

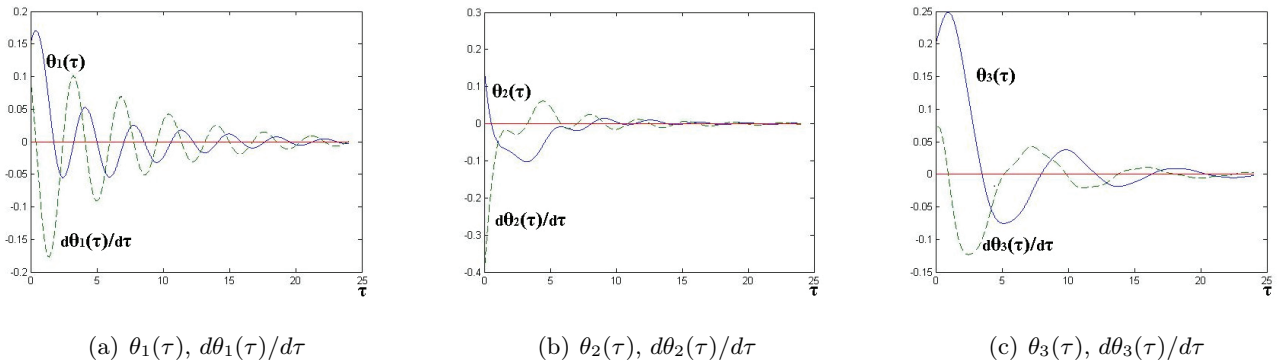
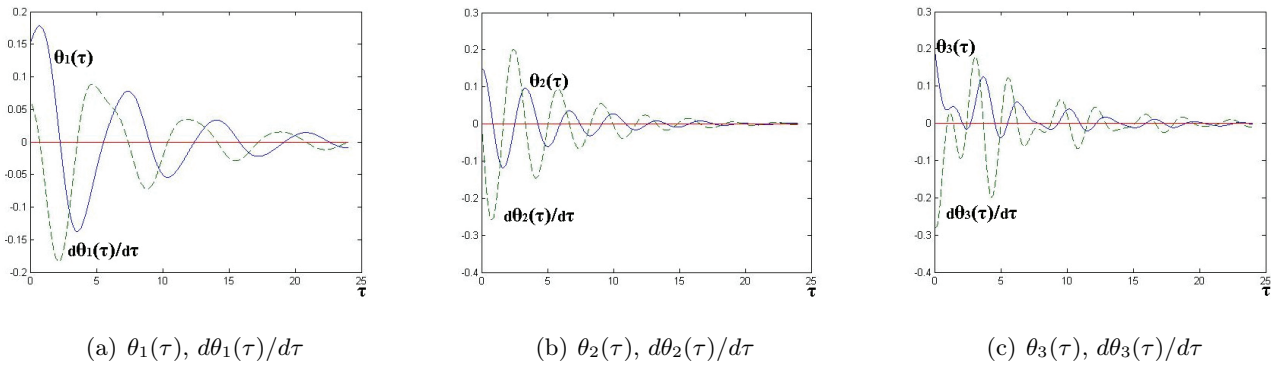
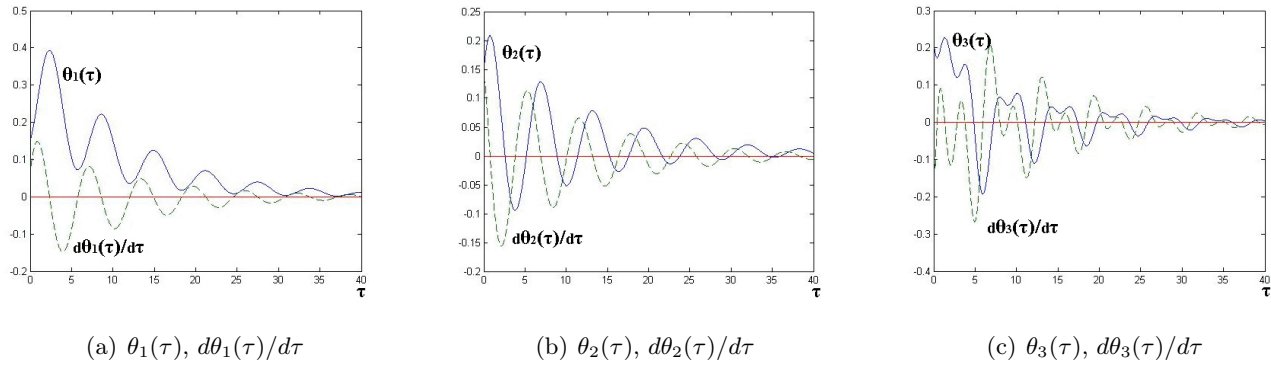


Рис. 3.4. Поведение переменных $\theta_i, d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) при $I = 15^\circ$.

2,5 кг·м² [52]. Такие параметры удовлетворяют условиям устойчивого положения относительного равновесия спутника.

Для анализа поведения стабилизируемых переменных вблизи нарушения условий управляемости проводилось моделирование при движении спутника вблизи экваториальной и полярной орбит. Представлено поведение отклонений углов и угловых скоростей для различных углов наклона орбиты: $I = 60^\circ$, $I = 15^\circ$, $I = 82,5^\circ$.

Рис. 3.5. Поведение переменных $\theta_i, d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) при $I = 82,5^\circ$.Рис. 3.6. Поведение переменных $\theta_i, d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$), $J_1 = J_2 = J_3$, $I = 97,8^\circ$.

Из сравнения рисунков 3.1 и 3.3 следует, что для принятого алгоритма стабилизации процесс затухания колебаний переменных до заданных значений практически не зависит от характера устойчивости относительного равновесия спутника. Процесс стабилизации практически завершился к моменту времени $\tau = 20 \approx 4,5$ ч.

Анализ приведенных графиков показывает, что время процесса стабилизации увеличивается при движении по орбитам, близким к экваториальным или полярным.

На рисунке 3.6 приведены результаты моделирования алгоритма стабилизации в том случае, когда тензор инерции ИСЗ — шаровой, и орбита близка полярной. Значения параметров спутника: $J_1 = J_2 = J_3 = 130 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ [47]; наклон орбиты $I = 97,8^\circ$; параметры функционала Φ : $\alpha = 1,0$, $\gamma = 0,0001$.

В этом случае время стабилизации и амплитуда переходных процессов увеличиваются.

Проведенное подробное математическое моделирование подтвердило эффективность предложенной методики решения задачи стабилизации.

3.1.6. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил. Аэродинамические моменты оказывают существенное влияние на движение спутника около центра масс на низких орбитах (до 700 км). Задача стабилизации относительного равновесия при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил рассматривалась в [22, 65, 74].

Будем предполагать, что кроме гравитационного момента на спутник действует также восстанавливающий аэродинамический момент, выражение для которого принимается в традиционном виде (1.1.12).

Положение относительного равновесия (1.1.9) сохраняется и при наличии аэродинамического момента.

Управляющий момент, как и выше в п. 1.1.1, создается за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника с магнитным полем Земли (3.1.1).

Выражение для аэродинамического момента $\mathbf{M}_a$ в линеаризованных уравнениях принимается в виде (1.1.13) [74] $\mathbf{M}_a = C_a \omega_0^2 [0 \ \theta_3 \ \theta_1]^\top$, коэффициент C_a зависит от аэродинамических характеристик спутника.

3.1.6.1. Линеаризованные уравнения. В этом случае линеаризованные уравнения управляемого движения (1.1.16) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 &= \mu_0 [2\beta_1 u_2 s\tau + \beta_4 u_3]; \\ \ddot{x}_3 + d_3 \dot{x}_1 - \kappa_3^* x_3 &= -\mu_0 [\beta_5 u_1 + \beta_3 u_2 c\tau]; \\ \ddot{x}_2 - \kappa_2^* x_2 &= \mu_0 [-2\beta_2 u_1 s\tau + \beta_2 u_3 c\tau]; \\ x_1 &= \theta_2, \quad x_2 = \theta_3, \quad x_3 = \theta_1; \\ d_1 &= \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3; \\ \kappa_1 &= 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2^* = 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2} + \frac{C_a}{J_2}, \quad \kappa_3^* = \frac{J_1 - J_2}{J_3} + \frac{C_a}{J_3}; \\ \beta_j &= \frac{sI}{J_j} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \beta_4 = \frac{cI}{J_1}, \quad \beta_5 = \frac{cI}{J_3}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Преобразование (3.1.16) приводит систему (3.1.22) к следующей стационарной системе

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - \bar{\kappa}_1 y_1 - d_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 - d_1 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \bar{\kappa}_3^* y_2 + d_3 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + d_3 y_3 &= -\mu_0 \beta_3 u_2, \\ \ddot{y}_3 - \bar{\kappa}_1 y_3 - d_1 \dot{y}_4 - 2\dot{y}_1 + d_1 y_2 &= 2\mu_0 \beta_1 u_2, \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_4 - \bar{\kappa}_3^* y_4 + d_3 \dot{y}_3 - 2\dot{y}_2 - d_3 y_1 &= 0, \\ \ddot{y}_5 - \kappa_1 y_5 - d_1 \dot{y}_6 &= \mu_0 \beta_4 u_3, \\ \ddot{y}_6 - \kappa_3^* y_6 + d_3 \dot{y}_5 &= -\mu_0 \beta_5 u_1, \\ \ddot{y}_7 - \bar{\kappa}_2^* y_7 + 2\dot{y}_8 &= \mu_0 \beta_2 u_3, \\ \ddot{y}_8 - \bar{\kappa}_2^* y_8 - 2\dot{y}_7 &= -2\mu_0 \beta_2 u_1. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Здесь $\bar{\kappa}_i = \kappa_i + 1$ ($i = 1, 3$); $\bar{\kappa}_i^* = \kappa_i^* + 1$ ($i = 2, 3$).

Система (3.1.23), (3.1.24) отличается от ранее рассмотренной системы (3.1.7)–(3.1.9) лишь выражениями для коэффициентов $\bar{\kappa}_i^*$.

Стационарная система (3.1.23), (3.1.24) состоит из двух независимых подсистем, в которые входят управления u_2 и u_1 , u_3 соответственно.

3.1.6.2. Управляемость. Если считать, что $u_2 = 0$, то систему (3.1.23), как и выше, рассматривать не требуется (переменные $y_1, \dots, y_4$ вводить не нужно).

Исследуя управляемость стационарной системы (3.1.24) тем же способом (как и выше в п. 2.1.1) из условия существования интегралов, не зависящих от управлений, нетрудно показать, что имеют место следующие условия неуправляемости

$$J_1 = \frac{1}{4}(2J_2 + 3J_3), \quad C_a = \frac{1}{4}(2J_2 - 3J_3), \quad (3.1.25)$$

$$J_2 = J_3, \quad C_a = 3J_1 - 4J_3. \quad (3.1.26)$$

Управляемость нестационарной системы (3.1.22) исследуется так же, как и выше, и матрица управляемости имеет вид (3.1.13), где

$$\begin{aligned} l_{26} &= -d_1 d_3 + \kappa_1, \quad l_{45} = d_1 d_3 - \kappa_3^*, \quad l_{48} = -d_3(l_{26} + \kappa_3^*), \\ l_{65} &= -l_{66} = 1 - \kappa_2^*, \quad l_{27} = d_1(l_{45} - \kappa_1), \quad l_{57} = 2 + l_{65}, \end{aligned}$$

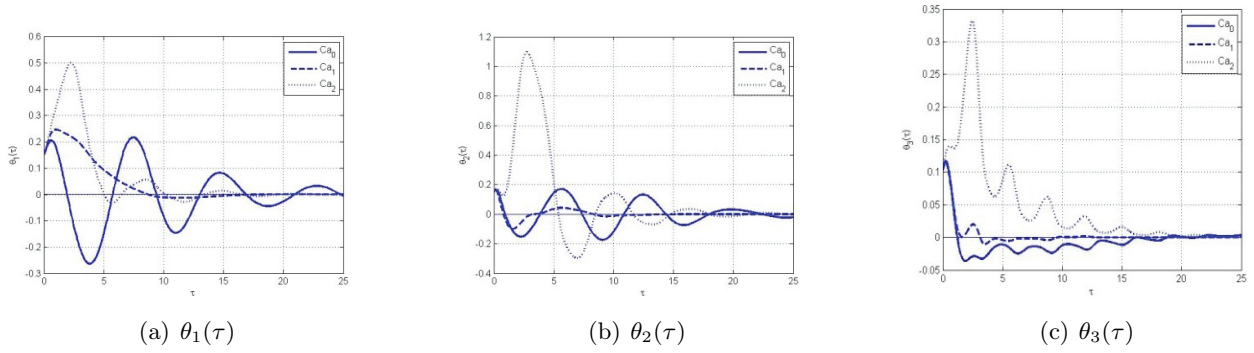


Рис. 3.7. Влияние аэродинамического момента на процесс стабилизации углов θ_i ($i = 1, 2, 3$).

$$l_{67} = l_{68} = 2\kappa_2^* - l_{65}, \quad l_{58} = l_{66} - 2.$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что условиями неуправляемости исходной нестационарной системы (3.1.22) являются условия

$$J_2 = J_3 = 3J_1, \quad C_a = -9J_1. \quad (3.1.27)$$

При отсутствии аэродинамических сил ($C_a = 0$) эти условия не выполняются, тогда (как уже указывалось в [20]), система (3.1.22) управляема при любых значениях моментов инерции спутника.

Замечание 3.3 (см. [20]). В работе [74] указаны лишь достаточные условия управляемости системы (3.1.22).

3.1.6.3. Моделирование. Алгоритм стабилизации был построен на основании приведенной стационарной системы (3.1.24), и в соответствии с ним было проведено математическое моделирование. Цель моделирования — показать влияние величины аэродинамического момента на процесс стабилизации.

Рассматривалась стабилизация малого спутника с параметрами $J_1 = 0,036 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_2 = 0,09 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_3 = 0,088 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ [74].

Угол наклона орбиты $I = 51,6^\circ$. Высота орбиты 415 км.

Начальные значения отклонений углов 0,15, 0,15, 0,2, безразмерных угловых скоростей 0,1, 0,1, 0,15.

Матрицы, определяющие функционал Φ приняты в том же, как и в п. 2.3.1, виде $Q = \alpha E_8$, $\Gamma = \gamma E_2$. Здесь величины $\alpha = 0,0014$; $\gamma = 2100,0$.

Для сравнения величины аэродинамического момента введем характерное значение $C_{a*} = 3,0(J_3 - J_1)$, сопоставимое с максимальным значением гравитационного момента.

На рисунках 3.7, 3.8 представлено поведение переменных углов и угловых скоростей ($\theta_i, d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$)) для различных значений величины аэродинамического момента: $C_{a0} = 0$, $C_{a1} = 0,5C_*$, $C_{a2} = C_{a*}$.

Из рисунков видно, что величина аэродинамического момента практически не сказывается на времени сходимости, но существенно влияет на амплитуду переходного процесса.

3.2. Стабилизация положения равновесия при помощи моментов сил Лоренца

Рассмотрим задачу стабилизации относительного равновесия спутника (1.1.10) при использовании электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил, действующих на заряженную часть его поверхности.

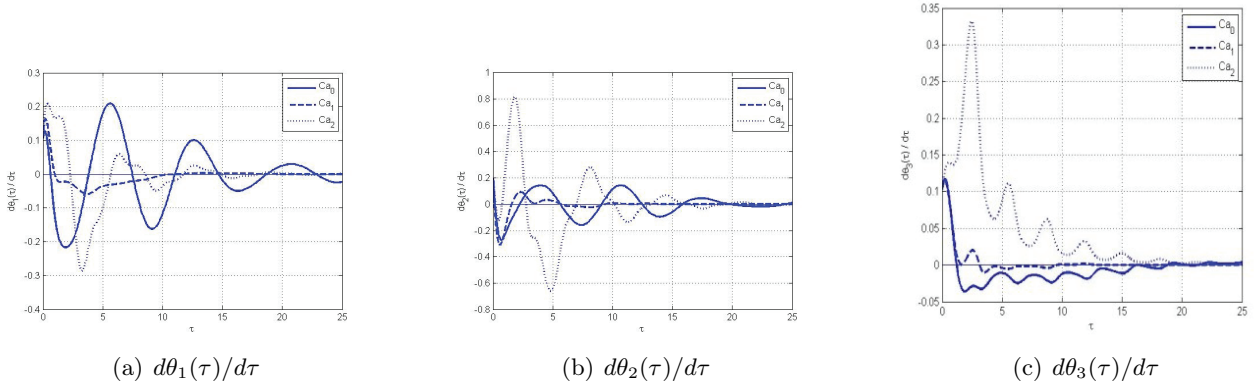


Рис. 3.8. Влияние аэродинамического момента на процесс стабилизации угловых скоростей $d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$).

3.2.1. Линеаризованные уравнения. Во время движения спутника взаимодействие заряда экрана с геомагнитным полем Земли приводит к возникновению сил Лоренца. Главный момент этих сил относительно центра масс спутника определяется по формуле (1.1.7). Выражение для линеаризованного момента имеет вид (1.1.14)

$$M_{m1}^q = \mu_0(-b_1 v_2 + b_2 v_3 s\tau), \quad M_{m2}^q = \mu_0 \tilde{b}_1 v_1, \quad M_{m3}^q = \mu_0 \tilde{b}_2 v_3 s\tau. \quad (3.2.1)$$

Величины $v_1 = x_q$, $v_2 = y_q$, $v_3 = z_q$ (координаты центра электрического заряда относительно центра масс) считаются управляющими параметрами.

Линеаризованные уравнения движения (1.1.15), управляемого моментом лоренцевых сил $\mathbf{M}_m^q$, в этом случае имеют вид

$$\ddot{x}_1 - d_1 \dot{x}_3 - \kappa_1 x_1 = \mu_0(-b_1 v_2 + b_2 v_3 s\tau), \quad (3.2.2)$$

$$\ddot{x}_3 + d_3 \dot{x}_1 - \kappa_3 x_3 = \mu_0 \tilde{b}_2 v_1 s\tau,$$

$$\ddot{x}_2 - \kappa_2 x_2 = \mu_0 \tilde{b}_1 v_1. \quad (3.2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_2, \quad x_2 = \theta_3, \quad x_3 = \theta_1; \\ d_1 &= \frac{d}{J_1}, \quad d_3 = \frac{d}{J_3}, \quad d = J_2 - J_1 - J_3; \\ \kappa_1 &= 4 \frac{J_3 - J_2}{J_1}, \quad \kappa_2 = 3 \frac{J_3 - J_1}{J_2}, \quad \kappa_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_3}; \\ b_1 &= \frac{qR\omega_0 cI}{J_1}, \quad b_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_1}; \\ \tilde{b}_1 &= \frac{qR\omega_0 cI}{J_2}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{2qR\omega_0 sI}{J_3}. \end{aligned}$$

Представим систему (3.2.2), (3.2.3) в виде системы первого порядка, которую удобно записать в виде двух подсистем

$$\dot{\xi}^{(1)} = A^{(1)} \xi^{(1)} + B_{\xi}^{(1)} v, \quad (3.2.4)$$

$$\dot{\xi}^{(2)} = A^{(2)} \xi^{(2)} + B_{\xi}^{(2)} v. \quad (3.2.5)$$

Здесь

$$\xi^{(1)} = [x_1 \quad x_3 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_3]^\top, \quad \xi^{(2)} = [x_2 \quad \dot{x}_2]^\top,$$

$$A_{(4 \times 4)}^{(1)} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ A_{21} & D \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_3), \quad D = \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ -d_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_\xi^{(1)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & b_2 s \tau \\ \tilde{b}_2 s \tau & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\xi^{(2)} = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подсистемы (3.2.2), (3.2.3), а также (3.2.4), (3.2.5) связаны только через управление.

Системы (3.2.2) и (3.2.4) относятся к классу нестационарных систем, содержащих управление, которые (как и в разделе 1.1), допускают приведение к стационарным системам в расширенном пространстве состояний. Системы (3.2.3) и (3.2.5) стационарны.

3.2.2. Приведение к стационарной системе. Для преобразования системы (3.2.2) к стационарной системе введем новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 6$) по формулам

$$x_1 = y_1 s \tau + y_3 s \tau + y_5, \quad x_3 = y_2 s \tau + y_4 s \tau + y_6. \quad (3.2.6)$$

Дважды дифференцируя эти соотношения, подставляя их в систему (3.2.2) и приравнявая коэффициенты при функциях $\cos \tau$, $\sin \tau$, 1, получим

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - \bar{\kappa}_1 y_1 - d_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 - d_1 y_4 &= 0, \\ \ddot{y}_2 - \bar{\kappa}_3 y_2 + d_3 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + d_3 y_3 &= 0, \\ \ddot{y}_3 - \bar{\kappa}_1 y_3 - d_1 \dot{y}_4 - 2\dot{y}_1 + d_1 y_2 &= \mu_0 b_2 v_3, \\ \ddot{y}_4 - \bar{\kappa}_3 y_4 + d_3 \dot{y}_3 - 2\dot{y}_2 - d_3 y_1 &= -\mu_0 \tilde{b}_2 v_1, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_5 - \kappa_1 y_5 - d_1 \dot{y}_6 &= -\mu_0 b_1 v_2, \\ \ddot{y}_6 - \kappa_3 y_6 + d_3 \dot{y}_5 &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\ddot{y}_7 - \kappa_2 y_7 = \mu_0 \tilde{b}_1 v_1 \quad (x_2 = y_7). \quad (3.2.9)$$

Здесь $\bar{\kappa}_1 = \kappa_1 + 1$, $\bar{\kappa}_3 = \kappa_3 + 1$. Стационарная система (3.2.7)–(3.2.9) состоит из двух независимых систем (3.2.7), (3.2.9) и (3.2.8), в которые входят управления v_1 , v_3 и v_2 соответственно.

3.2.3. Управляемость. Будем полагать, что круговая орбита спутника не является ни полярной ($I \neq \pi/2$), ни экваториальной ($I \neq 0$), так как при этих условиях коэффициенты в матрице при управлениях равны нулю.

Как и в разделе 3.1, будем исследовать сначала управляемость стационарной системы (3.2.7)–(3.2.9).

Из рассмотрения уравнения (3.2.9) следует, что введение управления v_1 необходимо, так как при его отсутствии переменная $y_7 = x_2$, очевидно, неуправляема.

Ранг матрицы коэффициентов при управлении в системе (3.2.7)–(3.2.9) равен двум. Будем считать, что $v_2 = 0$, тогда, положив $y_5 \equiv 0$, $y_6 \equiv 0$, будем рассматривать систему (3.2.7), (3.2.9).

В системе (3.2.7) есть интегралы, не зависящие от наличия управлений, если выполнено одно из условий:

1. $d = 0$ и $\bar{\kappa}_1 = 0$ или $J_2 = J_1 + J_3$, $4(J_3 - J_2) + J_1 = 0$;
2. $d = 0$ и $\bar{\kappa}_3 = 0$ или $J_2 = J_1 + J_3$.

Первое условие физически нереализуемо, второе условие является достаточным условием неуправляемости системы (3.2.7) и имеет вид

$$J_2 = J_1 + J_3. \quad (3.2.10)$$

Для анализа управляемости нестационарной системы (3.2.4), (3.2.5) удобно перейти к двойственной системе и проанализировать ее наблюдаемость

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\kappa_1 \xi_3, \quad \dot{\xi}_2 = -\kappa_3 \xi_4, \quad \dot{\xi}_3 = -\xi_1 + d_3 \xi_4, \quad \dot{\xi}_4 = -\xi_2 - d_1 \xi_3, \\ \dot{\xi}_5 &= -\kappa_2 \xi_6, \quad \dot{\xi}_6 = -\xi_5, \quad \sigma_1 = \tilde{b}_2 \xi_4 s \tau + \tilde{b}_1 \xi_6, \quad \sigma_2 = b_2 \xi_3 s \tau. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

При анализе наблюдаемости можно считать, что $\bar{\sigma}_2 = \xi_3$.

Рассмотрим сначала измерение $\bar{\sigma}_2 = \xi_3$.

Если $d \neq 0$, $\kappa_3 \neq 0$, можно ввести переменные $\eta_1 = \xi_3$, $\eta_2 = -\xi_1 + d_3\xi_4$, $\eta_3 = \xi_2$, $\eta_4 = \xi_4$, которые подчиняются системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= (\kappa_1 - d_1d_3)\eta_1 - d_3\eta_3, \\ \dot{\eta}_3 &= -\kappa_3\eta_4, & \dot{\eta}_4 &= -d_1\eta_1 - \eta_3, \\ \bar{\sigma}_2 &= \eta_1.\end{aligned}$$

Очевидно, что эта система наблюдаема по измерению $\bar{\sigma}_2$. Поскольку переменная ξ_4 наблюдаема, можно модифицировать измерение σ_1 и построить новое измерение $\bar{\sigma}_1 = \xi_6$. Тогда легко видеть, что переменные ξ_5 , ξ_6 наблюдаются.

Пусть теперь $d = 0$, т. е. выполнено условие (3.2.10). В этом случае по измерению $\bar{\sigma}_2 = \xi_3$ определяются лишь ξ_1 , ξ_3 , а по измерению σ_1 наблюдаются все остальные переменные.

Пусть $\kappa_3 = 0$. По измерению $\bar{\sigma}_2 = \xi_3$ определяются лишь ξ_3 , $-\xi_1 + d_3\xi_4$, ξ_2 . А по измерению σ_1 наблюдаются все остальные переменные, если $\kappa_2 + 1 \neq 0$.

Таким образом, нестационарная система (3.2.11) наблюдаема, а следовательно, система (3.2.4), (3.2.5) управляема, если не выполняются оба условия $\kappa_3 = 0$, $\kappa_2 + 1 = 0$. Система (3.2.4), (3.2.5) неуправляема, если

$$J_1 = J_2 = \frac{3}{2}J_3. \quad (3.2.12)$$

3.2.4. Алгоритм стабилизирующего управления. Алгоритм стабилизации строится на основании приведенной стационарной системы (3.2.7), (3.2.9), которая является управляемой, за исключением случая (3.2.10). (Далее, как и выше, считаем, что $v_2 = 0$).

Переменные исходной нестационарной системы $\xi^{(1)}$ (3.2.4) связаны с переменными стационарной системы $z^{(1)}$ соотношениями

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} &= F^\top(\tau)z^{(1)}, & F^\top(\tau) &= \begin{bmatrix} c\tau E_2 & s\tau E_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & c\tau E_2 & s\tau E_2 \end{bmatrix}, \\ \dot{F}^\top &= F^\top S^\top, & S^\top &= \text{diag}(S_1, S_1), & S_1 &= \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ -E_2 & O_2 \end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Переменные $z^{(1)}(8 \times 1)$ подчиняются следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{z}^{(1)} &= \bar{A}^{(1)}z^{(1)} + B^{(1)}v, & v &= [v_1 \ v_3]^\top, \\ \bar{A}^{(1)} &= \begin{bmatrix} A_{11} & E_4 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; & A_{11} &= \begin{bmatrix} O_2 & -E_2 \\ E_2 & O_2 \end{bmatrix}, & A_{21} &= \text{diag}(\kappa_1, \kappa_3, \kappa_1, \kappa_3), & A_{22} &= \begin{bmatrix} D & -E_2 \\ E_2 & D \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ -d_3 & 0 \end{bmatrix}, & B^{(1)} &= \begin{bmatrix} O_2 \\ O_2 \\ O_2 \\ B_2 \end{bmatrix}, & B_2 &= \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & -b_2 \\ \tilde{b}_2 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Стационарная система, для которой строится алгоритм стабилизации, состоит из двух независимых подсистем, связанных через управление: системы 8-го порядка (3.2.14) и системы относительно вектора $z^{(2)}(2 \times 1)$, ($z^{(2)} \equiv \xi_2$):

$$\dot{z}^{(2)} = A^{(2)}z^{(2)} + B^{(2)}v, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Введем вектор

$$z = \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \end{bmatrix},$$

который подчиняется стационарной системе

$$\dot{z} = A_z z + B_z v, \quad A_z = \text{diag}(\bar{A}^{(1)}, A^{(2)})B_z = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (3.2.16)$$

Задача стабилизации стационарной управляемой системы (3.2.16) состоит в том, чтобы построить управление v , обеспечивающее стремление к нулю компонент ее вектора состояния z при $\tau \rightarrow \infty$.

Стабилизирующее управление строится в виде обратной связи по состоянию $v(\tau) = -K_z z(\tau)$, а матрица коэффициентов управления $K_z(2 \times 10) = \text{const}$ выбирается из условия минимума квадратичного функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [z^{\top}(\tau) Q z(\tau) + v^{\top}(\tau) \Gamma v(\tau)] d\tau.$$

Здесь $Q(10 \times 10)$ — неотрицательно и $\Gamma(2 \times 2)$ — положительно определенные постоянные матрицы соответственно.

Оптимальное управление имеет вид

$$v(\tau) = -K_z z(\tau), \quad K_z = \Gamma^{-1} B_z^{\top} P. \quad (3.2.17)$$

Матрица $P(10 \times 10)$ является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$P A_z + A_z^{\top} P - P B_z \Gamma^{-1} B_z^{\top} P + Q = 0.$$

Синтезированное управляющее воздействие является функцией переменных $z(\tau)$ стационарной системы (3.2.16) более высокого порядка, чем исходная нестационарная система (3.2.4), (3.2.5). Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор z размерности (10×1) через исходный вектор состояния, состоящий из вектора $\xi^{(1)}(4 \times 1)$, вектора $\xi^{(2)}(2 \times 1)$. Для того чтобы это преобразование было невырожденным, необходимо ввести дополнительный вектор

$$\xi_d = F_d^{\top}(\tau) z^{(1)}, \quad F_d^{\top}(\tau) = F^{\top}(\tau), \quad S^{\top} = \begin{bmatrix} -s\tau E_2 & c\tau E_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & -s\tau E_2 & c\tau E_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\zeta = T z, \quad \zeta = \begin{bmatrix} \xi^{(1)} \\ \xi_d \\ \xi^{(2)} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} F^{\top} & O \\ \begin{smallmatrix} (4 \times 8) \\ F_d^{\top} \\ (4 \times 8) \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} (4 \times 2) \\ O \\ (4 \times 2) \end{smallmatrix} \\ O & E_2 \\ \begin{smallmatrix} (2 \times 8) \end{smallmatrix} & \end{bmatrix} \quad (z^{(2)} \equiv \xi_2). \quad (3.2.18)$$

Уравнение для дополнительного вектора ξ_d имеет вид

$$\dot{\xi}_d = A^{(1)} \xi_d + B_d(\tau) v, \quad B_d(\tau) = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -b_2 c \tau \\ \tilde{b}_2 c \tau & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2.19)$$

Тогда уравнение для вектора $\zeta(10 \times 1)$ можно записать в виде

$$\dot{\zeta} = A_{\zeta} \zeta + B_{\zeta}(\tau) v, \quad (3.2.20)$$

$$A_{\zeta} = \text{diag}(A^{(1)}, A^{(1)}, A^{(2)}), \quad B_{\zeta} = \begin{bmatrix} B_{\xi}^{(1)}(\tau) \\ B_d(\tau) \\ B_{\xi}^{(2)}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Нестационарная система (3.2.20) включает в себя исходную систему (3.2.4), (3.2.5) в качестве подсистемы. Управление (3.2.17), построенное для стационарной системы (3.2.16), можно вводить в систему (3.2.20), используя выражения (3.2.18), в виде

$$v = -K_z T^{-1}(\tau) \zeta. \quad (3.2.21)$$

Замкнутая этим управлением система имеет вид

$$\dot{\zeta} = (A_{\zeta} - B_{\zeta}(\tau) K_z T^{-1}(\tau)) \zeta. \quad (3.2.22)$$

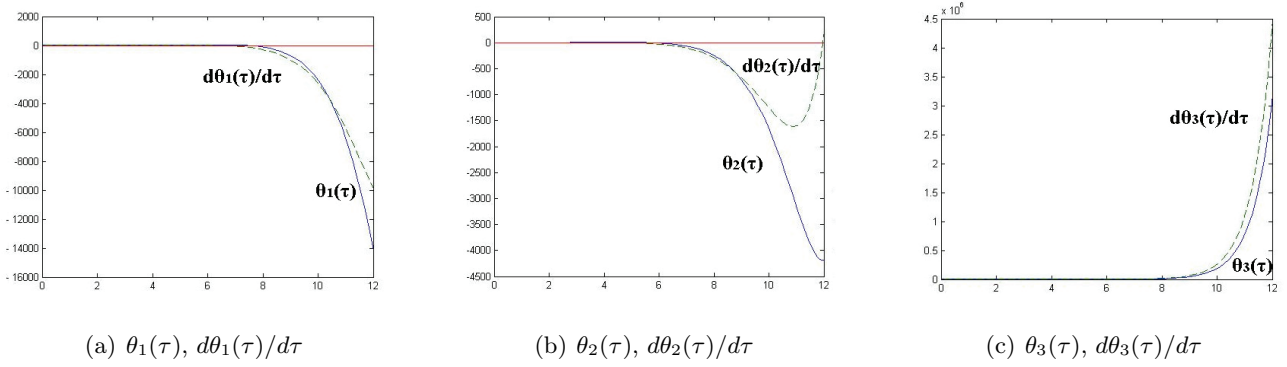


Рис. 3.9. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) в отсутствие управления ($v_i = 0$).

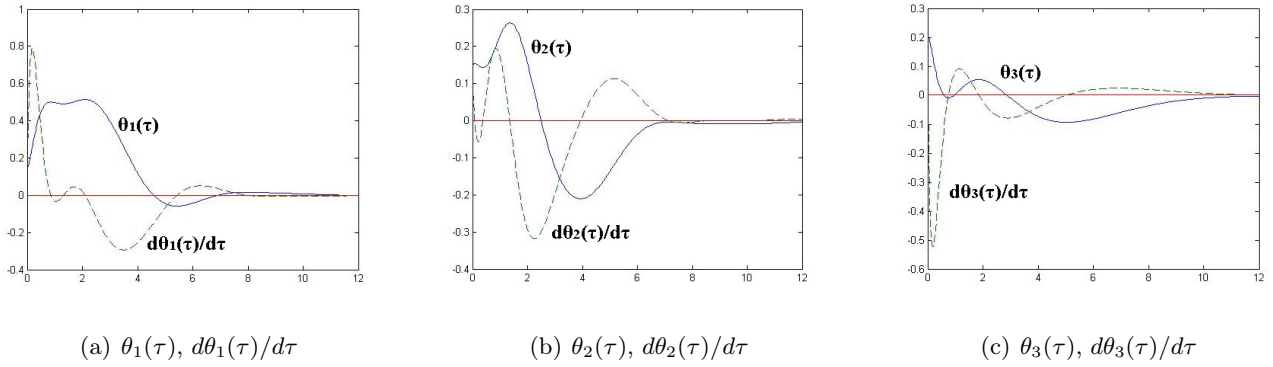


Рис. 3.10. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) при наличии управления ($v_i \neq 0$).

Решения $\zeta(\tau)$ системы (3.2.22), содержащие компоненты исходного вектора $\xi^{(1)}(\tau)$, $\xi^{(2)}(\tau)$, стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ в силу выбора матрицы K_z , так как компоненты вектора ζ связаны с компонентами вектора z ограниченным преобразованием (3.2.18).

3.2.5. Моделирование. Проводилось моделирование решения задачи стабилизации относительного равновесия спутника (3.2.20) при помощи моментов сил Лоренца. Алгоритмы стабилизации строились на основе стационарной системы (3.2.16) десятого порядка.

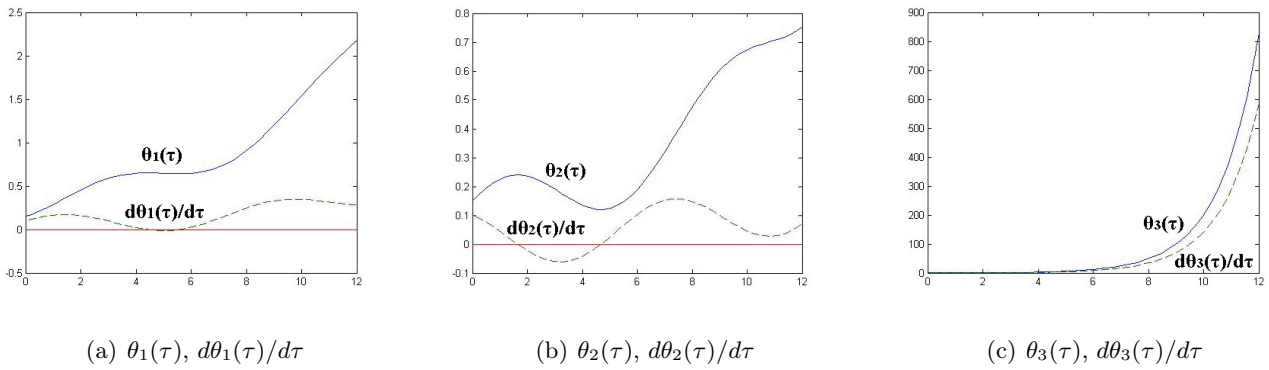
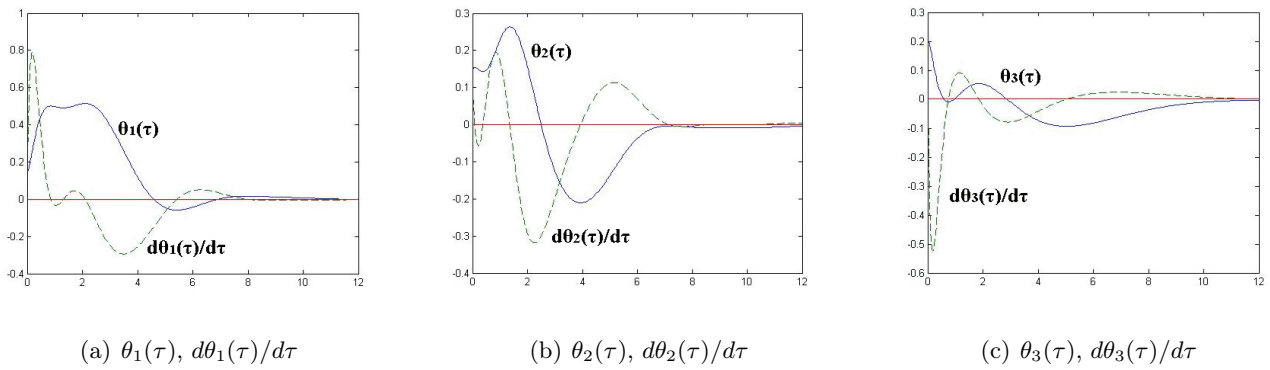
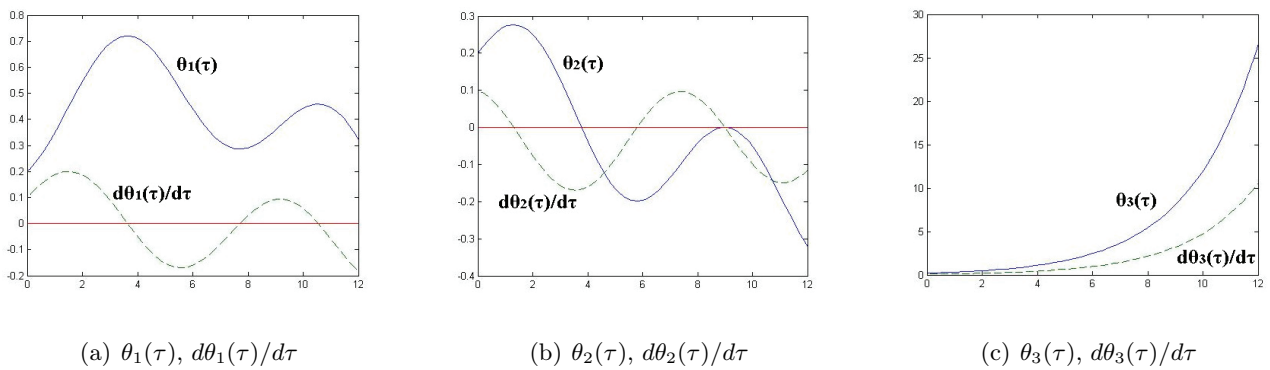
Задача стабилизации рассматривалась для различных значений параметров спутников [40, 48] и различных наклонов орбит. Коэффициенты управления вычислялись с использованием стандартной программы LQR для стационарных систем. Матрицы, входящие в квадратичный функционал, были приняты в виде $Q = \alpha E_{10}$; $\Gamma = \gamma E_2$.

Начальные значения отклонения углов 0,15, 0,15, 0,2; отклонения значений угловых безразмерных скоростей 0,1, 0,1, 0,15.

В коэффициентах b_i , $\tilde{b}_i$ матрицы B_ζ при управлении в уравнениях (3.2.20) значение величины заряда, согласно [40] $q = 5,0 \cdot 10^{-3} A \times c$.

На рисунках 3.9–3.14 представлены результаты моделирования поведения компонент вектора состояния при наличии и отсутствии управления; в отсутствие управления рисунки 3.9, 3.11, 3.13; при наличии управления вида (3.2.21) — рисунки 3.9, 3.12, 3.14. Сплошными линиями описывается поведение углов, пунктирными — скоростей.

На рисунках 3.9, 3.10 представлено поведение компонент вектора состояния для значений параметров спутника: $J = [1000, 0, 600, 0, 1400, 0]$ кгм² [40]; угол наклона орбиты $I = 60^\circ$; значения параметров функционала: $\alpha = 100, 0$, $\gamma = 1,0 \cdot 10^{11}$.

Рис. 3.11. Поведение переменных $\theta_i, d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) в отсутствие управления ($v_i = 0$).Рис. 3.12. Поведение переменных $\theta_i, d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) при наличии управления ($v_i \neq 0$).Рис. 3.13. Поведение переменных $\theta_i, d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) в отсутствие управления ($v_i = 0$).

На рисунках 3.11, 3.12 представлены результаты моделирования поведения переменных вектора состояния для спутника с характеристиками: $J = [115, 120, 135]$ кгм² [48]; движение по орбите, близкой к полярной ($I = 97,8^\circ$); параметры функционала $\alpha = 10,0$, $\gamma = 1,0 \cdot 10^{11}$.

На рисунках 3.13, 3.14 представлены результаты моделирования для спутника с характеристиками, близкими к шару: $J_1 = [1000, 950, 1050]$ кгм² [48]; движение по орбите, близкой к экваториальной ($I = 10^\circ$); параметры функционала $\alpha = 100,0$, $\gamma = 1,0 \cdot 10^{11}$.

Время затухания переходных процессов порядка двух орбитальных периодов.

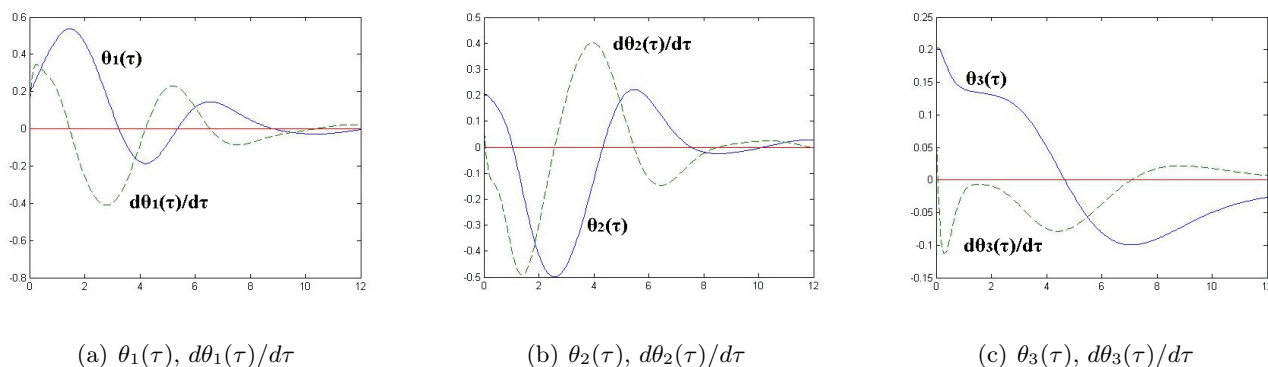


Рис. 3.14. Поведение переменных θ_i , $d\theta_i/d\tau$ ($i = 1, 2, 3$) при наличии управления ($v_i \neq 0$).

Моделирование показало эффективность предлагаемых алгоритмов стабилизации для различных комбинаций значений моментов инерции спутника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. — 2012. — № 2. — С. 79–90.
2. Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А. Лекции по механике управляемых систем. — М.: Курс, 2018.
3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
5. Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.
6. Дубошин Г. Н. О вращательном движении искусственных небесных тел // Бюлл. ИТА АН СССР. — 1960. — 7, № 7. — С. 511–520.
7. Каленова В. И., Морозов В. М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
8. Каленова В. И., Морозов В. М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением // Прикл. мат. мех. — 2012. — 76, № 4. — С. 576–588.
9. Каленова В. И., Морозов В. М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — С. 6–15.
10. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 521–547.
11. Калман Р. Е., Фалб П., Арbib М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. Кондурарь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара // Прикл. мех. техн. физ. — 1960. — 36, № 5. — С. 890–901.
13. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
14. Лурье А. А. Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
15. Морозов В. М. Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов // Космич. исслед. — 1967. — 5, № 5. — С. 727–732.
16. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов // Космич. исслед. — 1969. — 7, № 3. — С. 395–401.
17. Морозов В. М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1968. — № 6. — С. 109–111.
18. Морозов В. М. Устойчивость движения космических аппаратов // в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНТИ, 1971. — С. 1–83.
19. Морозов В. М., Каленова В. И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космич. исслед. — 2020. — 58, № 3. — С. 199–207.

20. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. — 2021. — 59, № 5. — С. 393–407.
21. Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. — 2021. — 85, № 4. — С. 436–453.
22. Морозов В. М., Каленова В. И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. — 2022. — 60, № 3. — С. 246–253.
23. Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С. Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
24. Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — 3, № 2 (28). — С. 73–86.
25. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
26. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
27. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. — 2000. — 38, № 3. — С. 296–306.
28. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНТИ, 1978.
29. Сарычев В. А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Физматлит, 2009. — С. 111–126.
30. Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 1985.
31. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. — 2003. — 41, № 1. — С. 69–79.
32. Хентов А. А. Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.
33. Хентов А. А. Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. — 1968. — 6, № 5. — С. 793–795.
34. Черноусько Ф. Л. Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. — 1964. — 28, № 1. — С. 155–157.
35. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// Adv. Space Res. — 2018. — 62. — P. 142–151.
36. Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A. Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// Nonlinear Dyn. — 2015. — 82. — P. 1493–1505.
37. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// Aerospace Sci. Techn. — 2020. — № 3. — P. 1–12.
38. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// IEEE Access. — 2021. — 9. — 132623–132630.
39. Antipov K. A., Tikhonov A. A. Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the N th approximation// Geomagnetism and Aeronomy. — 2013. — 53, № 2. — P. 271–281.
40. Antipov K. A., Tikhonov A. A. On satellite electrodynamic attitude stabilization// Aerospace Sci. Techn. — 2014. — 33. — P. 92–99.
41. Bin Zhou Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// Automatica. — 2015. — 60. — P. 145–154.
42. Brewer J. W. Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// IEEE Trans. Circ. Syst. — 1978. — CAS-25, № 9. — P. 772–781.
43. Chang A. An algebraic characterization of controllability// IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — AC-10, № 1. — P. 112–113.
44. Cubas J., de Ruiter A. Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// Acta Astronaut. — 2020. — 169. — P. 108–123.
45. Cubas J., Farrahi A., Pindado S. Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// J. Guid. Control Dynam. — 2015. — 38. — P. 1947–1958.
46. Frik M. A. Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// AIAA J. — 1970. — 8, № 10. — P. 1780–1785.

47. *Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M.* Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// Asian J. Control. — 2017. — 19, № 6. — P. 2028–2041.
48. *Giri D. K. and Sinha M.* Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// J. Guid. Control Dynam. — 2014. — 37, № 6. — P. 1946–1960.
49. *Giri D. K., Sinha M.* Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// J. Inst. Eng. India. Ser. C. — 2016. — 97. — P. 279–290.
50. *Hautus M. L. J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. — 1969. — 72. — P. 443–448.
51. *Huang X., Yan Y.* Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2017. — 40, № 12. — P. 1–8.
52. *Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V.* Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// Acta Astronaut. — 2017. — 132. — P. 103–110.
53. *Kalenova V. I., Morozov V. M.* Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// Aerospace. Sci. Technol. — 2020. — 106. — 106105.
54. *Kalman R. E.* Lectures on Controllability and Observability. — Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
55. *Laub A. J., Arnold W. F.* Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// IEEE Trans. Automat. Control. — 1984. — 29, № 2. — P. 163–165.
56. *Likins P. W.* Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// J. Astronaut. Sci. — 1965. — 12, № 1. — P. 18–24.
57. *Morozov V. M., Kalenova V. I.* Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 020003.
58. *Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E.* Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// J. Guid. Control Dynam. — 2016. — 39. — P. 437–449.
59. *Nababi M., Barati M.* Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// Appl. Math. Model. — 2017. — 46. — P. 365–381.
60. *Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V.* Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// Acta Astronaut. — 2018. — 144. — P. 171–180.
61. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// Progr. Aerospace Sci. — 2019. — 109. — 100546.
62. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// Acta Astronaut. — 2015. — 110. — P. 279–286.
63. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I.* Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// Acta Astronaut. — 2015. — 116. — P. 74–68.
64. *Psiaki M.* Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// J. Guid. Control Dynam. — 2001. — 24, № 2. — P. 386–394.
65. *Psiaki M. L.* Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// J. Guid. Control Dynam. — 2004. — 27. — P. 347–355.
66. *Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K.* Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// J. Guid. Control Dynam. — 1990. — 13, № 3. — P. 506–514.
67. *Psiaki M. L., Oshman Y.* Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic field measurements// J. Guid. Control Dynam. — 2003. — 26, № 2. — P. 244–252.
68. *Sarychev V. A., Mirer S. A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2000. — 76, № 1. — P. 55–68.
69. *Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2007. — 97, № 4. — P. 267–287.
70. *Searcy J. D., Pernicka H. J.* Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// J. Guid. Control Dynam. — 2012. — 35, № 6. — P. 1693–1701.
71. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// Control Eng. Pract. — 2005. — 13. — P. 357–371.
72. *Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// Aerospace Sci. Technol. — 2018. — 76. — P. 91–104.

73. *Sukhov E.* Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1925. — 012013.
74. *Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R.* Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// IEEE Trans. Control Syst. Techn. — 2018. — 27, № 3. — P. 1047–1059.
75. *Tortora P., Oshman Y., Santoni F.* Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// J. Guid. Control Dynam. — 2004. — 27, № 3. — P. 365–373.
76. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. — Dordrecht: D. Reidel, 1978.
77. *Yang Y.* Controllability of spacecraft using only magnetic torques// IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst. — 2016. — 52, № 2. — P. 955–962.
78. *Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L.* Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// Aerospace Sci. Techn. — 2017. — 60. — P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Каленова Вера Ильинична

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: kalenova44@mail.ru

Рак Михаил Геннадьевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: mihailrak@mail.ru



О МЕТРИКАХ ЭЙНШТЕЙНА ТРЕХМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

© 2023 г. А. А. ПАВЛОВА, О. П. ХРОМОВА

Аннотация. В работе исследуются уравнения Эйнштейна на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью.

Ключевые слова: метрика Эйнштейна, группа Ли, левоинвариантная лоренцева метрика, полусимметрическая связность.

ON THE EINSTEIN METRICS OF THREE-DIMENSIONAL LIE GROUPS WITH A SEMISYMMETRIC CONNECTION

© 2023 A. A. PAVLOVA, O. P. KHROMOVA

ABSTRACT. In this paper, we study the Einstein equations on three-dimensional unimodular Lie groups with a left-invariant Lorentzian metric and a semisymmetric connection.

Keywords and phrases: Einstein metric, Lie group, left-invariant Lorentzian metric, semisymmetric connection.

AMS Subject Classification: 53B20, 53C30, 53C50

1. Предварительные сведения. Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X, \quad (1)$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [8], и называется полусимметрической связностью или связностью с векторным кручением (с точностью до направления).

Класс метрических связностей, определяемых данным образом, содержит связность Леви-Чивиты и играет важную роль в исследованиях по римановой геометрии (см. [4–6, 10, 13–17]).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \\ r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y).$$

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим.

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) с полусимметрической связностью ∇ называется эйнштейновым, если тензор r_{ij} удовлетворяет одному из следующих уравнений (см. [11, 12]):

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij}; \quad (\mathcal{A})$$

$$r_{ij} = \Lambda(x) g_{ij}; \quad (\mathcal{B})$$

$$r_{(ij)} = \Lambda g_{ij}; \quad (\mathcal{C})$$

$$r_{(ij)} = \Lambda(x) g_{ij}, \quad (\mathcal{D})$$

где $r_{(ij)}$ — симметрическая часть тензора Риччи, Λ — константа, $\Lambda(x)$ — функция на многообразии.

Рассмотрим уравнение типа (C) на группах Ли. Будем предполагать, что $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Фиксируем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ левоинвариантных векторных полей в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V , с помощью которого определим на G полусимметрическую связность ∇ .

Согласно (1) компоненты связности ∇ задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - g_{sj} V^s \delta_i^k,$$

где $(\Gamma^g)_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks} (c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$ — компоненты связности Леви-Чивиты ∇^g , $\|g^{ks}\|$ — матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$, δ_i^k — символ Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r . В базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ их компоненты соответственно есть

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Рассмотрим далее трехмерный случай. Переобозначим структурные константы алгебры Ли в соответствии со следующей теоремой [3, 7, 9].

Теорема 1. Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:

1. Случай $\mathcal{A}_1$:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_1 ;

2. Случай $\mathcal{A}_2$:

$$[e_1, e_2] = (1 - \alpha_2) e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - (1 + \alpha_2) e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_3 ;

3. Случай $\mathcal{A}_3$:

$$[e_1, e_2] = e_1 - \alpha_1 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_1 e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

с времениподобным e_3 ;

4. Случай $\mathcal{A}_4$:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с времениподобным e_1 и $\alpha_2 \neq 0$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть (G, g, ∇) — трехмерная унимодулярная группа Ли с левинвариантной лоренцевой метрикой g и полусимметрической связностью ∇ , удовлетворяющая уравнению

$$r_{ij} + r_{ji} = \Lambda g_{ij}. \quad (2)$$

Тогда константа Эйнштейна, полусимметрическая связность и структурные константы алгебры Ли группы Ли (G, g, ∇) входят в следующий список:

Случай $\mathcal{A}_1$:

$$\Lambda = -\alpha_3^2, \quad V = (0, 0, V^3), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha_3^2 - (V^3)^2}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad V^3 \in \mathbb{R}; \quad (\mathcal{A}_{11})$$

$$\Lambda = \alpha_3 \alpha_1 + (V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2} \alpha_3 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_3^2 - 4(V^1)^2}, \quad (\mathcal{A}_{12})$$

$$\alpha_2 = \alpha_3, \quad |\alpha_3| \geq |V^1|;$$

$$\Lambda = -\alpha_3 \alpha_2 - (V^2)^2, \quad V = (0, V^2, 0), \quad \alpha_1 = -\alpha_3, \quad (\mathcal{A}_{13})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \alpha_3 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_3^2 + 4(V^2)^2}, \quad \alpha_3, V^2 \in \mathbb{R}.$$

Случай $\mathcal{A}_2$:

$$\Lambda = -\alpha_1^2, \quad V = (0, V^2, -V^2), \quad \alpha_2 = \alpha_1 \geq 0, \quad V^2 = \pm \sqrt{\alpha_1}; \quad (\mathcal{A}_{21})$$

$$\Lambda = -4(V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad \alpha_1 = 2V^1, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}V^1 \in \mathbb{R}; \quad (\mathcal{A}_{22})$$

$$\Lambda = -\frac{1}{4}(V^1)^2, \quad V = (V^1, V^2, -V^2), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}V^1 \leq 0, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2}V^1, \quad V^2 = \pm 3\sqrt{-\frac{V^1}{2}}. \quad (\mathcal{A}_{23})$$

Случай $\mathcal{A}_3$:

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, 1, 1), \quad \alpha_1 = 0; \quad (\mathcal{A}_{31})$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, -2, -2), \quad \alpha_1 = 0. \quad (\mathcal{A}_{32})$$

Случай $\mathcal{A}_4$:

$$\Lambda = -4, \quad V = (0, 0, 0), \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}; \quad (\mathcal{A}_{41})$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, 0, 1), \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}; \quad (\mathcal{A}_{42})$$

$$\Lambda = 4\alpha_2, \quad V = (V^1, V^2, 0), \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha_2 V^1}{V^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(V^2)^2} < 0, \quad (\mathcal{A}_{43})$$

$$\alpha_3 = 0, \quad V^1 = \pm \sqrt{-\alpha_2};$$

$$\Lambda = -8/9, \quad V = (\pm 2/3, 0, 1/3), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -2/3, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}. \quad (\mathcal{A}_{44})$$

Обратное утверждение также справедливо.

2. Доказательство основной теоремы. Для доказательства теоремы 2 запишем систему уравнений (2) в базисе теоремы 1, используя формулы для нахождения компонент тензора Риччи через структурные константы алгебры Ли, которые представлены выше в случае произвольной группы Ли. Рассмотрим последовательно все случаи теоремы 1.

2.1. Случай $\mathcal{A}_1$. Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{aligned} 2V^2V^3 + V^1(\alpha_2 - \alpha_3) &= 0, \\ 2V^1V^3 - V^2(\alpha_1 + \alpha_3) &= 0, \\ 2V^1V^2 + V^3(\alpha_1 + \alpha_2) &= 0, \\ (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2(V^2)^2 - \alpha_3^2 + 2(V^1)^2 &= \Lambda, \\ (\alpha_1 + \alpha_3)^2 - 2(V^3)^2 - \alpha_2^2 + 2(V^1)^2 &= \Lambda, \\ (\alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(V^2)^2 - \alpha_1^2 - 2(V^3)^2 &= \Lambda. \end{aligned}$$

Решая данную систему равенств, находим

$$\begin{aligned}\Lambda &= -\alpha_3^2, \quad V = (0, 0, V^3), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha_3^2 - (V^3)^2}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad V^3 \in \mathbb{R}; \\ \Lambda &= \alpha_3\alpha_1 + (V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3^2 - 4(V^1)^2}, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad |\alpha_3| \geq |V^1|; \\ \Lambda &= -\alpha_3\alpha_2 - (V^2)^2, \quad V = (0, V^2, 0), \quad \alpha_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3^2 + 4(V^2)^2}, \quad \alpha_3, V^2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2.2. *Случай $\mathcal{A}_2$.* Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{aligned}2\alpha_1 + 2V^1 - 4\alpha_2 - 2V^2V^3 &= 0, \\ V^2(\alpha_2 - \alpha_1) - 2V^1V^3 - V^2 - V^3 &= 0, \\ V^3(\alpha_1 - \alpha_2) + 2V^1V^2 - V^2 - V^3 &= 0, \\ -\alpha_1^2 + 2(V^3)^2 - 2(V^2)^2 &= \Lambda, \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2V^1 - \alpha_1^2 + 2(V^2)^2 + 2\alpha_2\alpha_1 + 2(V^1)^2 &= -\Lambda, \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2V^1 + \alpha_1^2 + 2(V^3)^2 - 2\alpha_2\alpha_1 - 2(V^1)^2 &= \Lambda.\end{aligned}$$

Решая данную систему равенств, находим

$$\begin{aligned}\Lambda &= -\alpha_1^2, \quad V = (0, V^2, -V^2), \quad \alpha_2 = \alpha_1 \geq 0, \quad V^2 = \pm\sqrt{\alpha_1}; \\ \Lambda &= -4(V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad \alpha_1 = 2V^1, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}V^1 \in \mathbb{R}; \\ \Lambda &= -\frac{1}{4}(V^1)^2, \quad V = (V^1, V^2, -V^2), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}V^1 \leq 0, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2}V^1, \quad V^2 = \pm 3\sqrt{-\frac{V^1}{2}}.\end{aligned}$$

2.3. *Случай $\mathcal{A}_3$.* Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{aligned}-2\alpha_1 - V^1 + 2V^1V^2 &= 0, \\ 2\alpha_1 + V^1 - 2V^1V^3 &= 0, \\ 4 - V^2 - 2V^2V^3 - V^3 &= 0, \\ -4 - \alpha_1^2 + 2(V^3)^2 + 2V^3 - 2(V^1)^2 &= \Lambda, \\ -4 + \alpha_1^2 + 2(V^2)^2 + 2V^2 + 2(V^1)^2 &= -\Lambda, \\ 2V^2 - \alpha_1^2 + 2(V^3)^2 - 2V^3 - 2(V^2)^2 &= \Lambda.\end{aligned}$$

Решая данную систему равенств, находим

$$\begin{aligned}\Lambda &= 0, \quad V = (0, 1, 1), \quad \alpha_1 = 0; \\ \Lambda &= 0, \quad V = (0, -2, -2), \quad \alpha_1 = 0.\end{aligned}$$

2.4. *Случай $\mathcal{A}_4$.* Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{aligned}-V^1(\alpha_2 + V^3) - V^2\alpha_1 - V^1V^3 &= 0, \\ V^2(-1 + V^3) + V^1\alpha_1 + V^2V^3 &= 0, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2\alpha_1 - 2V^1V^2 - \alpha_3V^2 &= 0, \\ -2\alpha_2 + 4V^3\alpha_2 - 2V^3 + 2(V^3)^2 + 2\alpha_2^2 + 2(V^2)^2 &= -\Lambda, \\ 2\alpha_2 - 2V^3\alpha_2 + 4V^3 - 2(V^3)^2 - 2 + 2(V^1)^2 &= \Lambda, \\ -2\alpha_2^2 - 2V^3\alpha_2 - 2(V^2)^2 - 2 + 2V^3 + 2(V^1)^2 &= \Lambda.\end{aligned}$$

где $\alpha_2 \neq 0$. Решая данную систему равенств, находим

$$\begin{aligned}\Lambda &= -4, \quad V = (0, 0, 0), \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}; \\ \Lambda &= 0, \quad V = (0, 0, 1), \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R};\end{aligned}$$

$$\Lambda = 4\alpha_2, \quad V = (V^1, V^2, 0), \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha_2 V^1}{V^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(V^2)^2} < 0, \\ \alpha_3 = 0, \quad V^1 = \pm \sqrt{-\alpha_2}; \\ \Lambda = -8/9, \quad V = (\pm 2/3, 0, 1/3), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -2/3, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что уравнения Эйнштейна типа (А) на локально однородных (псевдо)римановах многообразиях с полусимметрической связностью изучались в [1, 2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с векторным кручением // Мат. заметки СВФУ. — 2021. — 28, № 4. — С. 30–47.
2. Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П. Уравнения Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением // Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 181. — С. 41–53.
3. Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н. Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Мат. тр. — 2006. — 9, № 1. — С. 130–168.
4. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differ. Geom. Appl. — 2016. — 46. — P. 130–147.
5. Agricola I., Thier C. The geodesics of metric connections with vectorial torsion // Ann. Glob. Anal. Geom. — 2004. — 26. — P. 321–332.
6. Barua B., Ray A. Kr. Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. Pure Appl. Math. — 1985. — 16, № 7. — P. 736–740.
7. Calvaruso G. Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. — 2007. — 57. — P. 1279–1291.
8. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. — 1925. — 42. — P. 17–88.
9. Cordero L. A., Parker P. E. Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups // Rend. Mat. — 1997. — 17. — P. 129–155.
10. De U. C., De B. K. Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold // Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. — 1995. — 54. — P. 111–117.
11. Klemm D. S., Ravera L. Einstein manifolds with torsion and nonmetricity // Phys. Rev. D. — 2020. — 101. — 044011.
12. Maralbhave Y. B., Muniraja G. Semi-symmetric metric connections, Einstein manifolds and projective curvature tensor // Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2010. — 5, № 20. — P. 991–999.
13. Muniraja G. Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur's theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2008. — 3, № 25. — P. 1223–1232.
14. Murathan C., Özgür C. Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions // Proc. Estonian Acad. Sci. — 2008. — 57, № 4. — P. 210–216.
15. Yano K. On semi-symmetric metric connection // Rev. Roum. Math. Pure Appl. — 1970. — 15. — P. 1579–1586.
16. Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., Uysal S. A. On a semi-symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold // Eur. J. Pure Appl. Math. — 2011. — 4, № 2. — P. 152–161.
17. Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal S. A., Yilmaz H. B. Some vector fields on a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection // Bull. Iran. Math. Soc. — 2012. — 38, № 2. — P. 479–490.

Павлова Анна Александровна

Алтайский государственный университет, Барнаул

E-mail: anya.0596@mail.ru

Хромова Олеся Павловна

Алтайский государственный университет, Барнаул

E-mail: khromova.olesya@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 69–82
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-69-82

УДК 512.772, 515.165.4

О ВЗАИМНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЯХ ДВУХ M -КРИВЫХ СТЕПЕНИ 4

© 2023 г. Н. Д. ПУЧКОВА

Аннотация. Рассматривается задача топологической классификации взаимных расположений в вещественной проективной плоскости двух M -кривых степени 4. На изучаемые расположения наложены условие максимальности (овал одной из этих кривых имеет 16 попарно различных общих точек с овалом другой из них) и условие комбинаторного характера, выделяющее специальный тип таких расположений. Перечислены попарно различные топологические модели расположений этого типа, удовлетворяющие топологическим следствиям теоремы Безу. Таких моделей оказалось более 2000. Приведены примеры кривых степени 8, реализующих некоторые из этих моделей, и доказано, что 1728 моделей не могут быть реализованы кривыми степени 8. Доказательства нереализуемости проводятся методом Оревкова, основанным на применении теории кос и зацеплений.

Ключевые слова: плоская вещественная алгебраическая кривая, распадающаяся кривая, квазиположительная коса, метод Оревкова, неравенство Мурасуги–Тристрама, условие Фокса–Милнора.

ON MUTUAL ARRANGEMENTS OF TWO M -CURVES OF DEGREE 4

© 2023 N. D. PUCHKOVA

ABSTRACT. We consider the problem of topological classification of mutual arrangements in the real projective plane of two M -curves of degree 4. We study arrangements under the maximality condition (the oval of one of these curves has 16 pairwise distinct common points with the oval of the other curve) and some combinatorial condition to select a special type of such arrangements. We list pairwise different topological models of arrangements of this type that satisfy the topological consequences of Bezout's theorem. There are more than 2000 such models. Examples of curves of degree 8 realizing some of these models are given; we prove that 1728 models cannot be realized by curves of degree 8. Proofs of the nonrealizability are performed out by Orevkov's method based on the theory of braids and links.

Keywords and phrases: plane real algebraic curve, decomposable curve, quasi-positive braid, Orevkov's method, Murasugi–Tristram inequality, Fox–Milnor condition.

AMS Subject Classification: 14P25, 14H99

1. Введение. Задача топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых сформулирована в первой части 16-й проблемы Гильберта. На данный момент завершена классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

Наряду с изучением неособых кривых в последние десятилетия интенсивно изучаются распадающиеся кривые. Топологическая классификация распадающихся кривых степени 6 при некоторых условиях максимальности и общего положения была найдена Г. М. Полотовским в 1977 г. (см. [4]); аналогичная задача о кривых степени 7 почти завершена, ею занималась большая группа

авторов (А. Б. Корчагин, Г. М. Полотовский, С. Ю. Оревков, Е. И. Шустин и др., библиографические ссылки см. в [1]). Данная статья посвящена изучению взаимных расположений в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ двух неособых M -кривых степени 4, находящихся в общем положении. Далее в работе вводится определенный тип таких расположений, рассмотрением которого ограничиваемся ввиду большого числа всех подлежащих исследованию возможностей.

Автор благодарит Г. М. Полотовского за предложенную задачу и помощь в работе.

2. Постановка задачи. Через C_k будем обозначать вещественную проективную алгебраическую кривую степени k , т.е. однородный многочлен степени k с вещественными коэффициентами от трёх переменных, а через $\mathbb{R}C_k$ — множество вещественных точек кривой C_k , т.е. множество точек вещественной проективной плоскости, в которых многочлен C_k обращается в нуль.

Пусть многочлен C_8 распадается в произведение двух многочленов степени 4: $C_8 = C_4 \cdot \tilde{C}_4$, т.е. $\mathbb{R}C_8 = \mathbb{R}C_4 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_4$. Данная работа посвящена топологической классификации троек

$$(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_8, \mathbb{R}C_4) \quad (1)$$

при следующих условиях:

- (i) Кривые C_4 и $\tilde{C}_4$ являются M -кривыми, т.е. каждая из них состоит в $\mathbb{R}P^2$ из четырёх попарно не пересекающихся овалов (двусторонне вложенных в проективную плоскость топологических окружностей), лежащих вне друг друга.
- (ii) Общие вещественные точки кривых C_4 и $\tilde{C}_4$ попарно различны и их число максимально, т.е. $\#(\mathbb{R}C_4 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_4) = 16$.
- (iii) Все эти 16 точек лежат на одном овале кривой C_4 и на одном овале кривой $\tilde{C}_4$.

Назовём *топологической моделью* распадающейся кривой рассматриваемого вида (для краткости ниже — просто «модель») набор восьми топологических окружностей, которые вложены в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне и которые ведут себя с точки зрения числа и расположения общих точек так, как две кривые степени 4 при условиях (i)–(iii) выше. Наша задача — выяснить, какие модели могут быть реализованы как объединение двух M -кривых степени 4, а какие — нет.

Как уже было отмечено выше, ограничимся только изучением специального вида пересечения ветвей, который введём с помощью следующих двух определений.

Определение 1. Пусть овал O целиком лежит в аффинной плоскости.⁰ Рассмотрим незамкнутую дугу без самопересечений, тоже целиком лежащую в аффинной плоскости и пересекающую овал O в восьми попарно различных точках. Эту дугу будем называть *образующей дугой*. При достаточно малом ε граница ε -окрестности этой дуги представляет собой другой овал, который пересекает исходный овал O в 16 попарно различных точках. Этот второй овал будем называть *змеёй*, а такое взаимное расположение двух овалов будем называть пересечением ветвей типа *змея, обвивающаяся вокруг овала*.

Определение 2. Если в условиях определения 1 один (а значит, и второй) конец образующей дуги лежит в неориентируемой компоненте дополнения к овалу O и из этого конца можно «уйти на бесконечность» (т.е. соединить его с граничной окружностью модели проективной плоскости), не пересекая овал O и образующую дугу, то отвечающую такой дуге змею назовём *змеёй со свободным концом*.

Таким образом, полный список ограничений, выделяющий класс кривых, рассматриваемых в этой работе, состоит из условий максимальности и общего положения (i)–(iii) и из предположения, что пересечение овалов имеет тип «змея со свободным концом, обвивающаяся вокруг овала». (Условие свободного конца змеи, введённое определением 2, наложено для уменьшения количества рассматриваемых возможностей. Случай змей без свободного конца будет рассмотрен в другой работе.)

Пусть имеется кривая степени 8, распадающаяся в произведение двух кривых степени 4, удовлетворяющая всем наложенным ограничениям. В дальнейшем кривую степени 4, один из овалов

⁰Для овала M -кривой степени 4 этого всегда можно добиться, выбрав в качестве одной из осей координат в проективной плоскости слегка сдвинутую двойную касательную к этой кривой.

которой есть змея, будем называть кривой номер 1, а кривую степени 4, вокруг овала которой обвивается змея, будем называть кривой номер 2. Овалы, на которых нет точек пересечения (в нашем случае таких овалов шесть: три овала кривой номер 1 и три овала кривой номер 2), называются свободными. Напомним, что в силу условия (i) овалы, принадлежащие кривой с одним номером, лежат вне друг друга.

Занумеруем на овале⁰ кривой номер 2 подряд 8 точек — точек пересечения овала с образующей дугой. Тогда расположение образующей дуги относительно пересекаемого ею овала можно кодировать подстановкой порядка 8, запись которой в виде цикла получается выписыванием номеров точек на овале, проходимых при движении по образующей дуге от одного её конца до второго.

Как обычно делается при решении подобных задач, классификация троек вида (1) разбивается на три этапа:

- I. Перечисление моделей, удовлетворяющих наложенным условиям.
- II. Запреты допустимых в силу п. I моделей.
- III. Реализация незапрещённых моделей алгебраическими кривыми рассматриваемого вида.

Будем доказывать запреты с помощью теоремы Безу и с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений.

3. Перечисление допустимых подстановок. Нетрудно заметить, что для каждого расположения, отвечающего подстановке со вторым элементом 2 (3, 4), найдётся симметричное расположение, которому отвечает подстановка со вторым элементом 8 (соответственно, 7, 6) (см. рис. 1), поэтому достаточно рассмотреть только подстановки со вторым элементом ≤ 5 .

Если двум разным подстановкам соответствуют гомеоморфные расположения кривых, то оставим подстановку, которая меньше в смысле лексикографического порядка.

С помощью устранения точек пересечения (эти устранения независимы в силу теоремы Брюзотти; см., например, [3]) докажем, что расположения, отвечающие некоторым подстановкам, не могут быть реализованы кривой степени 8. Например, кривая на рис. 3, получаемая устранением точек пересечения на рис. 2, имеет гнездо⁰ веса 3 и гнездо веса 2 с различными внешними овалами; известно, что такое расположение овалов не может быть реализовано кривой степени 8 (в силу противоречия теореме Безу при пересечении с прямой), поэтому нереализуемо и расположение, изображённое на рис. 2.

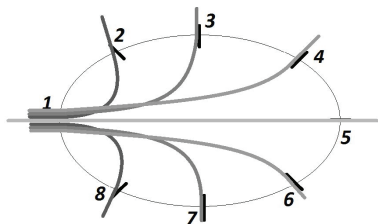


Рис. 1

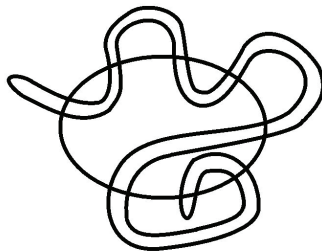


Рис. 2

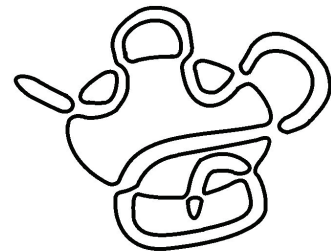


Рис. 3

Применением описанного приёма доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Полный список подстановок, отвечающих попарно различным образующим дугам для моделей расположений двух кривых степени 4 типа «змея со свободным концом, обвивающаяся вокруг овала», не противоречащих теореме Безу, состоит из следующих подстановок:*

⁰Здесь и ниже, где это не должно привести к недоразумениям, допускаем для краткости вольность речи, говоря вместо «на модели овала» просто «на овале».

⁰Гнездом веса s называется набор из s овалов, последовательно окружающих друг друга.

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), | 7. (1, 2, 3, 6, 5, 4, 7, 8), | 13. (1, 2, 6, 5, 4, 7, 8, 3), | 19. (1, 4, 3, 2, 8, 7, 6, 5) |
| 2. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7), | 8. (1, 2, 3, 6, 5, 4, 8, 7), | 14. (1, 2, 6, 7, 8, 5, 4, 3). | 20. (1, 4, 5, 6, 7, 8, 2, 3) |
| 3. (1, 2, 3, 4, 5, 8, 7, 6), | 9. (1, 2, 3, 6, 7, 8, 5, 4), | 15. (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8) | 21. (1, 4, 5, 8, 7, 6, 2, 3) |
| 4. (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 5), | 10. (1, 2, 3, 8, 7, 4, 5, 6), | 16. (1, 2, 8, 7, 6, 5, 4, 3) | |
| 5. (1, 2, 3, 4, 7, 6, 5, 8), | 11. (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 3), | 17. (1, 4, 3, 2, 6, 7, 8, 5) | |
| 6. (1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5), | 12. (1, 2, 5, 6, 7, 4, 3, 8), | 18. (1, 4, 3, 2, 7, 6, 5, 8) | |

4. Перечисление возможных расположений свободных овалов. Покажем, как определяются допустимые известными ограничениями возможности для расположения свободных овалов, рассмотрев конкретный пример — змею, отвечающую подстановке (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7) (см. рис. 4).

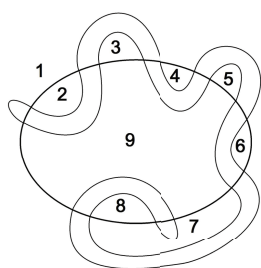


Рис. 4

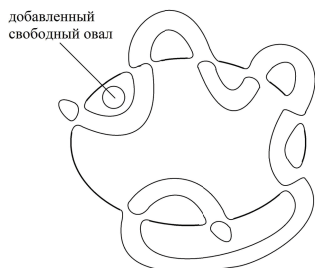


Рис. 5

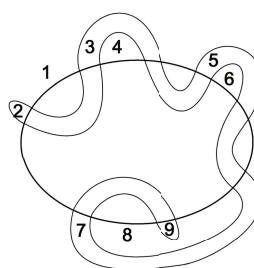


Рис. 6

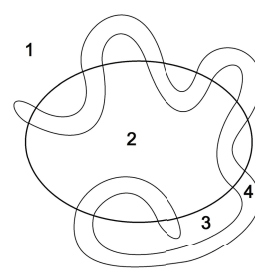


Рис. 7

Найдем сначала все возможные области для расположения овалов кривой номер 1. Напомним, что эти овалы должны располагаться вне друг друга и вне змей.

Дополнение к пересекающимся овалам вне змей состоит из 9 областей. Пронумеруем эти области (см. рис. 4) и будем смотреть, допустимо ли расположение в них свободных овалов. Так, в области с номером 2 свободный овал лежать не может: устраняя точки пересечения так, как показано на рис. 5, получим расположение с гнёздами веса 2 и веса 3 с разными внешними овалами, чего не может быть у кривой степени 8. Совершенно аналогично доказывается невозможность расположения свободного овала кривой номер 1 в областях 3–6, 8.

Аналогично найдем возможные области для расположения овалов кривой с номером 2. Снова имеем 9 областей для свободных овалов, которые пронумерованы на рис. 6. Также с помощью теоремы Брюзотти убеждаемся, что свободные овалы не могут лежать в областях 2–6 и 9.

Подведём итог: допустимо распределение свободных овалов только между четырьмя областями, пронумерованными на рис. 7, причем в области 2 могут располагаться только овалы кривой номер 1, в области 4 — только овалы кривой номер 2, а в областях 1 и 3 — как овалы кривой номер 1, так и овалы кривой номер 2 (но вне друг друга). Все логически возможные распределения шести свободных овалов по этим областям приведены в таблице 1, где количество овалов кривых номер 1 и номер 2 обозначается числами с соответствующими этим номерам индексами.

5. Запреты с помощью теории кос и зацеплений. Ниже описывается применение метода Оревкова, основанного на использовании теории кос и зацеплений. Этот метод был предложен С. Ю. Оревковым в [6], примеры применения этого метода можно найти также в других работах (см., например, [1, 2]), поэтому наше изложение будет по возможности кратким.

Опять покажем применение метода на конкретном примере той же змеи, отвечающей подстановке (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7).

Изобразим исследуемое расположение так, как показано на рис. 8. Здесь «змея» — овал, нарисованный тонкой линией, а обозначение областей цифрами такое же, как на рис. 7.

Выберем в проективной плоскости точку P , не лежащую на кривой, так, чтобы каждая прямая пучка прямых с центром в этой точке пересекала нашу кривую не менее, чем в $8 - 2 = 6$ точках, и нашлась бы прямая l_M («максимальная»), пересекающая эту кривую в 8 точках (см.

Таблица 1

№	1	2	3	4
1	$3_1 3_2$			
2	$3_1 2_2$		1_2	
3	$3_1 2_2$			1_2
4	$3_1 1_2$		2_2	
5	$3_1 1_2$			2_2
6	$3_1 1_2$		1_2	1_2
7	3_1		3_2	
8	3_1		2_2	1_2
9	3_1		1_2	2_2
10	3_1			3_2
11	$2_1 3_2$	1_1		
12	$2_1 2_2$	1_1	1_2	
13	$2_1 2_2$	1_1		1_2
14	$2_1 1_2$	1_1	2_2	
15	$2_1 1_2$	1_1		2_2
16	$2_1 1_2$	1_1	1_2	1_2
17	2_1	1_1	3_2	
18	2_1	1_1	2_2	1_2
19	2_1	1_1	1_2	2_2
20	2_1	1_1		3_2
21	$2_1 3_2$		1_1	
22	$2_1 2_2$		$1_1 1_2$	
23	$2_1 2_2$		1_1	1_2
24	$2_1 1_2$		$1_1 2_2$	
25	$2_1 1_2$		1_1	2_2
26	$2_1 1_2$		$1_1 1_2$	1_2
27	2_1		$1_1 3_2$	
28	2_1		$1_1 2_2$	1_2
29	2_1		$1_1 1_2$	2_2
30	2_1		1_1	3_2
31	$1_1 3_2$	2_1		
32	$1_1 2_2$	2_1	1_2	
33	$1_1 2_2$	2_1		1_2

№	1	2	3	4
34	$1_1 1_2$	2_1	2_2	
35	$1_1 1_2$	2_1		2_2
36	$1_1 1_2$	2_1	1_2	1_2
37	1_1	2_1	3_2	
38	1_1	2_1	2_2	1_2
39	1_1	2_1	1_2	2_2
40	1_1	2_1		3_2
41	$1_1 3_2$		2_1	
42	$1_1 2_2$		$2_1 1_2$	
43	$1_1 2_2$		2_1	1_2
44	$1_1 1_2$		$2_1 2_2$	
45	$1_1 1_2$		2_1	2_2
46	$1_1 1_2$		$2_1 1_2$	1_2
47	1_1		$2_1 3_2$	
48	1_1		$2_1 2_2$	1_2
49	1_1		$2_1 1_2$	2_2
50	1_1		2_1	3_2
51	$1_1 3_2$	1_1	1_1	
52	$1_1 2_2$	1_1	$1_1 1_2$	
53	$1_1 2_2$	1_1	1_1	1_2
54	$1_1 1_2$	1_1	$1_1 2_2$	
55	$1_1 1_2$	1_1	1_1	2_2
56	$1_1 1_2$	1_1	$1_1 1_2$	1_2
57	1_1	1_1	$1_1 3_2$	
58	1_1	1_1	$1_1 2_2$	1_2
59	1_1	1_1	$1_1 1_2$	2_2
60	1_1	1_1	1_1	3_2
61	3_2	3_1		
62	2_2	3_1	1_2	
63	2_2	3_1		1_2
64	1_2	3_1	2_2	
65	1_2	3_1		2_2
66	1_2	3_1	1_2	1_2

№	1	2	3	4
67		3_1	3_2	
68		3_1	2_2	1_2
69		3_1	1_2	2_2
70		3_1		3_2
71	3_2	2_1	1_1	
72	2_2	2_1	$1_1 1_2$	
73	2_2	2_1	1_1	1_2
74	1_2	2_1	$1_1 2_2$	
75	1_2	2_1	1_1	2_2
76	1_2	2_1	$1_1 1_2$	1_2
77		2_1	$1_1 3_2$	
78		2_1	$1_1 2_2$	1_2
79		2_1	$1_1 1_2$	2_2
80		2_1	1_1	3_2
81	3_2	1_1	2_1	
82	2_2	1_1	$2_1 1_2$	
83	2_2	1_1	2_1	1_2
84	1_2	1_1	$2_1 2_2$	
85	1_2	1_1	2_1	2_2
86	1_2	1_1	$2_1 1_2$	1_2
87		1_1	$2_1 3_2$	
88		1_1	$2_1 2_2$	1_2
89		1_1	$2_1 1_2$	2_2
90		1_1	2_1	3_2
91	3_2		3_1	
92	2_2		$3_1 1_2$	
93	2_2		3_1	1_2
94	1_2		$3_1 2_2$	
95	1_2		3_1	2_2
96	1_2		$3_1 1_2$	1_2
97			$3_1 3_2$	
98			$3_1 2_2$	1_2
99			$3_1 1_2$	2_2
100			3_1	3_2

рис. 8). Такой пучок будем называть максимальным. Разрежем модель плоскости $\mathbb{R}P^2$ по прямой l_M и склеим половинки по частям граничной окружности, учитывая отождествление её диаметрально противоположных точек (см. рис. 9). Таким образом, l_M будет новой «бесконечно удалённой прямой», т.е. будет изображаться границей круга на новой модели.

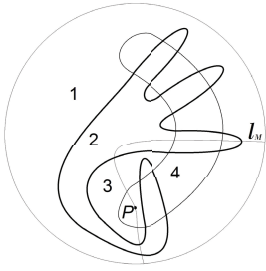


Рис. 8

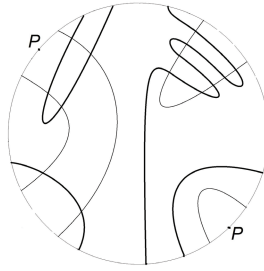


Рис. 9

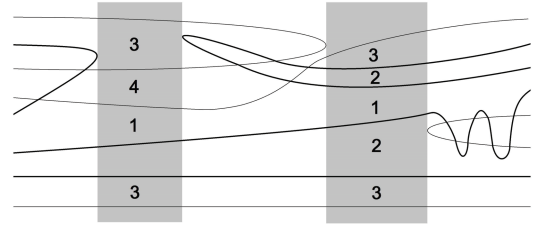


Рис. 10

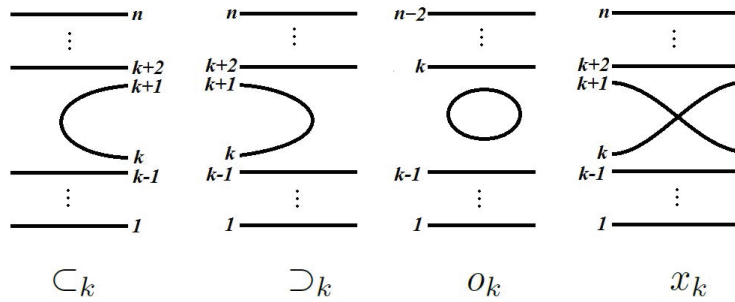


Рис. 11

Изобразим рис. 9 в виде «развёртки» (у С. Ю. Орекова — термин «послойное расположение»), изображённой на рис. 10 (теперь точка P — «бесконечно удалённая на вертикальной оси OY »).

В закрашенных на рис. 10 вертикальных полосах где-то должны располагаться 6 свободных овалов, которые при движении прямой пучка (вертикальной прямой на рис. 10) пересекаются поочерёдно (в силу теоремы Безу). Цифры в этих полосах соответствуют номерам областей на рис. 8. В левой полосе могут быть только овалы кривой номер 2, в правой — только овалы кривой номер 1.

Следуя С. Ю. Орекову, развёртки будем кодировать с помощью так называемого X -кода, который получается последовательным выписыванием символов $\subset_k, \supset_k, x_k, k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, при движении вдоль развёртки слева направо; эти символы кодируют расположения кривой в окрестности критических прямых пучка (тех прямых, которые касаются кривой или проходят через двойную точку кривой) в соответствии с рис. 11. Символ o_k заменяет последовательность символов $\subset_k \supset_k$ и отвечает расположению свободного овала в полосе над $(k-1)$ -й линией («в k -м слое»), считая снизу.

В частности, развёртка рис. 10 описывается X -кодом

$$x_4 x_5 \supset_6 \dots \subset_6 x_5 x_6 x_4 x_5 \supset_7 \dots \subset_3 x_4 x_3 x_3 x_4 x_4 x_3 x_3 x_4,$$

где вместо многоточий должны располагаться символы, показывающие расположение свободных овалов в закрашенных полосах в соответствии с возможностями, перечисленными в таблице 1. При этом надо перебрать все возможные распределения трёх овалов в левой закрашенной на рис. 10 полосе и трёх овалов в правой закрашенной полосе с учётом порядка прохождения овалов при движении слева направо. Чтобы провести такой перебор, введём в дополнение к обозначениям рис. 11 параметры a_i, b_j и т. д., обозначающие число свободных овалов в q -й снизу горизонтальной полосе, где q — значение индекса.

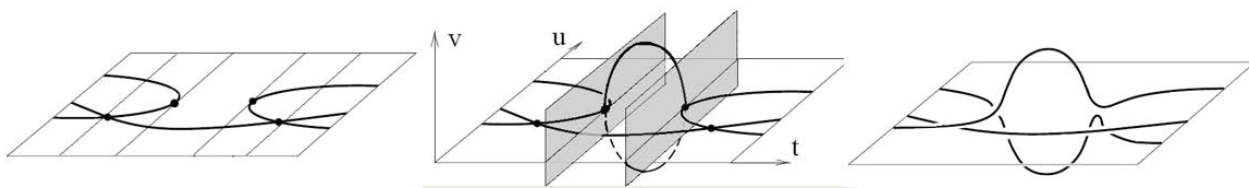


Рис. 12. Построение косы: развёртка — комплексификация — возмущение.

Каждой модели ставится в соответствие коса из 8 нитей, которая получается возмущением пересечения комплексификации развёртки и комплексификации пучка прямых (см. рис. 12, подробности в [6]). В [6] приведены правила, позволяющие по X -коду записать эту косу в виде слова из стандартных образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_7$ группы B_8 кос из 8 нитей⁰.

Известно (см. [7]), что если коса из n нитей, соответствующая гипотетической топологической модели кривой степени n , не является квазиположительной⁰, то эта модель не может быть реализована как множество вещественных точек кривой степени n . В качестве проверки на квазиположительность будем, следуя С. Ю. Оревкову, использовать следующую теорему.

Теорема 1 (неравенство Мурасуги—Тристрама). Пусть $b = \prod \sigma_i^{k_i} \in B_m$ — коса из m нитей, где σ_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$, — стандартные образующие группы кос из m нитей, и L — замыкание косы b . Если коса b квазиположительна, то выполняется неравенство

$$\eta = |\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где $\sigma(b) = \sigma(L) = \sigma(V + V^T)$ — сигнатура; $n(b) = n(L) = 1 + n(V + V^T)$ — дефект; V — матрица Зейферта; $e(b) = \sum k_i$ — алгебраическая степень косы b (т.е. сумма всех показателей степеней в разложении косы b по образующим группы B_m).

Проверка выполнения неравенства Мурасуги—Тристрама даже для одной модели расположения пересекающихся овалов требует выполнения вычислений, которые нельзя провести вручную: во-первых, из-за большого числа возможных наборов значений параметров $a_i, b_j, \dots$; во-вторых, из-за необходимости вычисления собственных чисел большого количества матриц Зейферта, имеющих достаточно большой размер. Мы пользовались программой, написанной М. А. Гуциным в 2003 г., которая генерирует список всех возможных наборов неотрицательных значений параметров $a_i, b_j, \dots$ и для каждого такого набора вычисляет левую часть неравенства Мурасуги—Тристрама. Эта программа неоднократно использовалась в подобных исследованиях.

Ход и результаты вычислений для рассматриваемой подстановки иллюстрирует таблица 2. На вход программы подаётся X -код с параметрами $a_i, b_j, \dots$ и сумма значений этих параметров, т.е. число $6 - \nu$, где ν — количество букв «о» в X -коде. Во втором столбце таблицы 2 это число указывается в квадратных скобках после частей X -кода, показывающих порядок и положение свободных овалов: до точки с запятой — для левой закрашенной полосы на рис. 10, после точки с запятой — для правой. При этом значения индексов записаны без опускания их на полстроки. Программа выдаёт список наборов параметров, для которых неравенство Мурасуги—Тристрама не выполняется. В третьей колонке таблицы 2 проставлен 0 в тех случаях, когда такие наборы параметров обнаружены, т.е. $\eta = 0$ (в остальных случаях $\eta > 0$). В рассматриваемом примере таких наборов параметров оказалось 31 (см. таблицу 3 ниже).

⁰Эта коса определяется однозначно (с точностью до сопряжённости в группе кос) и строится непосредственно по вещественной модели в силу наложенного выше условия максимальности пучка. Если условие максимальности не выполнено, то метод Оревкова тоже применим, однако требует трудного перебора возможных переплетений нитей в мнимой области.

⁰Коса из n нитей называется квазиположительной, если её можно записать в виде $\prod_{j=1}^k \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1}$, где ω_j , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, — некоторые слова в алфавите $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\}$.

Таблица 2

Номера строк в таблице 1	Параметры и овалы в X-коде	η
1, 2, 4, 7, 21, 22, 24, 27, 41, 42, 44, 47, 91, 92, 94, 97	a2b4c6; d2e4f6 [6]	0
3, 6, 8, 23, 26, 28, 43, 46, 48, 93, 96, 98	a2b4c6o5d4e6; f2g4h6 [5]	
5, 9, 25, 29, 45, 49, 95, 99	a2b4c6o5d4e6o5f4g6; h2i4j6 [4]	
10, 30, 50, 100	a2b4c6o5d4e6o5f4g6o5h4i6; j2k4l6 [3]	
11, 12, 14, 17, 51, 52, 54, 57, 81, 82, 84, 87	a2b4c6; d2e4o3f2g4h6 [5] a2b4c6; d4e6o5f2g4h6 [5]	0
13, 16, 18, 53, 56, 58, 83, 86, 88	a2b4c6o5d4e6; f2g4o3h2i4j6 [4] a2b4c6o5d4e6; f4g6o5h2i4j6 [4]	
15, 19, 55, 59, 85, 89	a2b4c6o5d2e4f6o5g4h6; i2j4k6o3l2m4 [3] a2b4c6o5d2e4f6o5g4h6; i2j4k6o5l4m6 [3]	
20, 60, 90	a2b4c6o5d4e6o5f4g6o5h4i6; j2k4o3l2m4n6 [2] a2b4c6o5d4e6o5f4g6o5h4i6; j4k6o5l2m4n6 [2]	
31, 32, 34, 37, 71, 72, 74, 77	a2b4c6; d2e4o3f2g4o3h2i4j6 [4] a2b4c6; d2e4f6o3o5g2h4i6 [4] a2b4c6; d4e6o5f4g6o5h2i4j6 [4]	0
33, 36, 38, 73, 76, 78	a2b4c6o5d4e6; f2g4o3h2i4o3j2k4l6 [3] a2b4c6o5d4e6; f2g4h6o3o5i2j4k6 [3] a2b4c6o5d4e6; f4g6o5h4i6o5j2k4l6 [3]	0
35, 39, 75, 79	a2b4c6o5d4e6o5f4g6; h2i4o3j2k4o3l2m4n6 [2] a2b4c6o5d4e6o5f4g6; h2i4j6o3o5k2l4m6 [2] a2b4c6o5d4e6o5f4g6; h4i6o5j4k6o5l2m4n6 [2]	0
40, 65	a3b5o4c3d5; e3f5 [5] a3b5; c3d5o4e3f5 [5]	
61, 62, 64, 67	a2b4c6; d2e4o3f2g4o3h2i4o3j2k4l6 [3] a2b4c6; d2e4o3f2g4h6o3o5i2j4k6 [3] a2b4c6; d4e6o5f2g4h6o3o5i2j4k6 [3] a2b4c6; d6e4o5f6g4o5h6i4o5j2k4l6 [3]	0
63, 66, 68	a2b4c6o5m4n6; d2e4o3f2g4o3h2i4o3j2k4l6 [2] a2b4c6o5l4m6; d2e4o3f2g4h6o3o5i2j4k6 [2] a2b4c6o5l4m6; d4e6o5f2g4h6o3o5i2j4k6 [2] a2b4c6o5m4n6; d6e4o5f6g4o5h6i4o5j2k4l6 [2]	0
69, 80	o2a5; b3c5 [5] a5o6b5; c3d5 [5] a5; b3o2c3d5 [5] a5; b5o6c3d5 [5]	
70	a5; b3c5 [6]	

Таблица 3

№ в табл. 1	Параметры	Результат	№ в табл. 1	Параметры	Результат
64	$b = 1, c = 2$	+	76	$b = 1, c = 1, f = 1$	+
68	$c = 2$	—		$c = 1, d = 1, f = 1$	—
	$c = 1, n = 1$	—		$b = 1, e = 1, f = 1$	+
	$n = 2$	—		$d = 1, e = 1, f = 1$	—
74	$b = 1, c = 2, d = 1$	+		$b = 1, c = 1, h = 1$	—
	$b = 1, c = 2, f = 1$	+		$c = 1, d = 1, h = 1$	—
	$b = 1, c = 2, h = 1$	+		$b = 1, e = 1, h = 1$	+
75	$b = 1, h = 1$	+		$d = 1, e = 1, h = 1$	—
	$d = 1, h = 1$	—		$b = 1, c = 1, j = 1$	—
	$f = 1, h = 1$	—		$c = 1, d = 1, j = 1$	—
	$b = 1, j = 1$	—		$b = 1, e = 1, j = 1$	+
	$d = 1, j = 1$	—		$d = 1, e = 1, j = 1$	—
	$f = 1, j = 1$	—	84	$b = 1, c = 2, f = 2$	+
	$b = 1, l = 1$	—	87	$c = 1, d = 2, f = 2$	—
	$d = 1, l = 1$	—	94	$b = 1, c = 2, d = 3$	+
	$f = 1, l = 1$	—			

Следуя С. Ю. Оревкову, расположения, удовлетворяющие неравенству Мурасуги—Тристрама, попытаемся запретить с помощью условия Фокса—Милнора.

Теорема 2 (условие Фокса—Милнора). Пусть $b \in B_n$ — квазиположительная коса, L — её замыкание и $\Delta_L(t)$ — многочлен Александера зацепления L . Если $e(b) = n - 1$, то должен существовать такой многочлен $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, что $\Delta_L(t) = f(t)f(t^{-1})$. Если $e(b) < n - 1$, то должно выполняться равенство $\Delta_L(t) = 0$.

Утверждение 1. Чтобы многочлен Александера удовлетворял условию Фокса—Милнора, необходимо, чтобы $\Delta_L(-1)$ было квадратом целого числа.

Утверждение 2. Если разложение многочлена на неприводимые множители содержит симметричный многочлен в нечётной степени, то $\Delta_L(t)$ не представляется в виде $\Delta_L(t) = f(t)f(t^{-1})$.

В 2016 г. И. М. Борисов дополнил программу Гущина: в случаях, когда вычисления дают $\eta = 0$, программа производит проверку выполнения условия Фокса—Милнора. Программа Борисова применялась в [1, 2]. В нашем случае эта программа запретила 20 вариантов распределения свободных овалов; см. таблицу 3, в первом столбце которой указан номер строки из таблицы 1, во втором столбце — суммы значений одноимённых параметров в X -коде, т.е.

$$b = \sum_k b_k$$

и т. п., а в третьем столбце — результат проверки выполнения условия Фокса—Милнора: «+» — условие выполняется, «—» — не выполняется. В итоге остались незапрещёнными 6 расположений, показанных на рис. 13, вопрос о реализуемости которых остаётся открытым.

Аналогичным образом исследовались остальные 20 подстановок из списка леммы 1. Заметим, что во всех случаях, кроме подробно описанного выше, условия Фокса—Милнора не дали новых ограничений после применения неравенства Мурасуги—Тристрама.

В таблице 4 во второй колонке после подстановки указан выбор центра P пучка, а в третьей колонке — соответствующий X -код без параметров. Центр пучка всегда выбирался вне свободных овалов, причём либо внутри змеи и вне несвободного овала кривой номер 2 — такой выбор

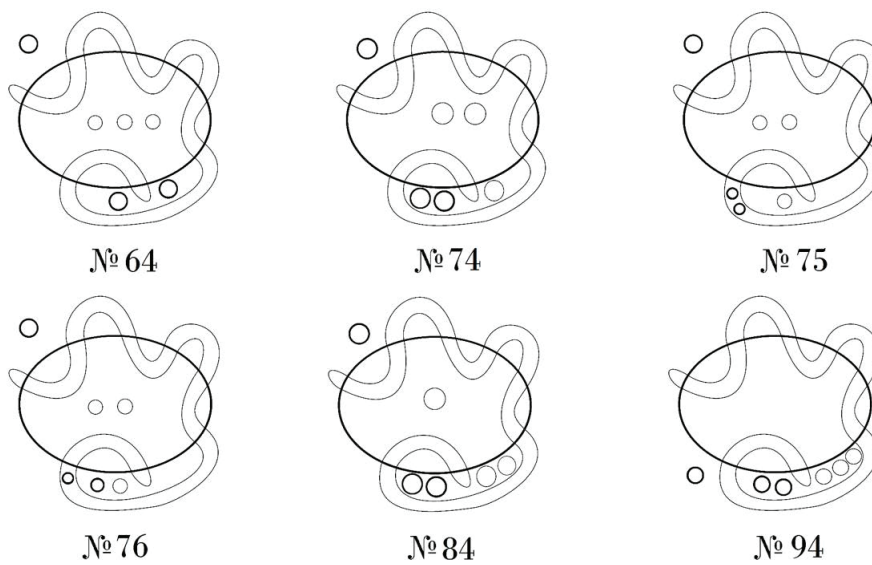


Рис. 13

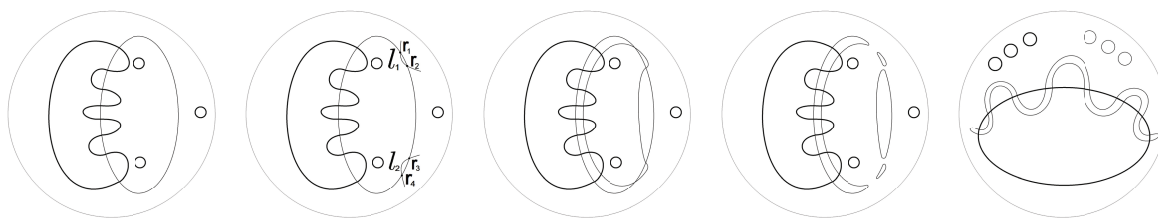


Рис. 14

Рис. 15

Рис. 16

Рис. 17

Рис. 18

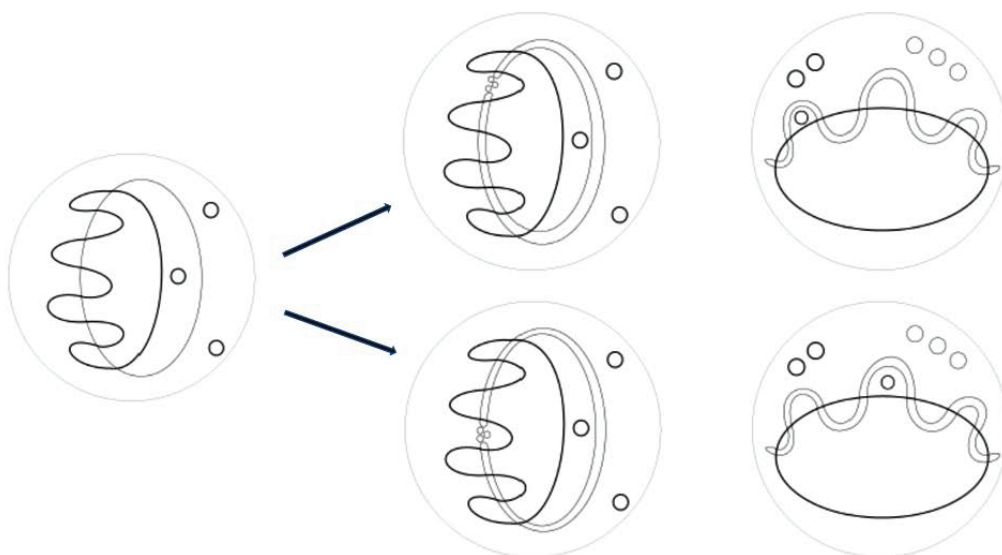


Рис. 19

Таблица 4

№	Подстановка	X-код	#
1	(12345678)	Не удалось найти максимальный пучок.	
2	(12345687)A7	$x_4x_5 \supset_6 \dots \subset_6 x_5x_6x_4x_5 \supset_7 \dots \subset_3 x_4x_3x_3x_4x_4x_3x_3x_4$	100
3	(12345876)	Не удалось найти максимальный пучок.	367
4	(12346785)A5	$x_3x_4x_2x_3 \supset_4 \dots x_4 \dots x_5 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_1x_3x_2 \supset_3 \dots \subset_4 x_5x_4x_4x_5$	120
5	(12347658)A56	$x_5x_4x_4x_5 \supset_4 \dots \subset_1 x_7x_6x_6x_7x_3x_2x_4x_3 \supset_2 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3$	124
6	(12348765)B56	$\supset_4 \dots \subset_2 x_1x_2x_3x_4x_4x_3x_3x_4x_4x_3x_6x_7x_7x_6x_6x_7 \supset_4 \dots \subset_3$	100
7	(12365478)B45	$\supset_4 \dots x_4 \dots x_5 \dots \subset_4 x_3x_4x_4x_3x_3x_4x_2x_3x_3x_2 \supset_1 \dots \subset_4 x_5x_4x_6$	124
8	(12365487)B45	$x_6x_7 \supset_3 \dots \subset_4 x_3x_4x_4x_3x_3x_4x_2x_3x_3x_2 \supset_1 \dots \subset_4 x_5x_6x_6x_6$	100
9	(12367854)A67	$x_4x_3 \supset_4 \dots x_4 \dots \subset_6 x_5x_6 \supset_7 \dots \subset_4 x_5x_6x_4x_5x_7 \supset_4 \dots x_4 \dots \subset_5$ $x_6x_5x_4x_7x_1$	40
10	(12387456)	Не удалось найти максимальный пучок.	86
11	(12456783)B34	$x_1x_2x_2x_1x_5x_6x_4x_5 \supset_7 \dots \subset_4 x_7x_6x_6x_7x_3x_2x_4x_3 \supset_4 \dots \subset_2$	115
12	(12567438)A34	$x_3x_2x_4x_3x_1x_2 \supset_3 \dots x_2 \dots x_1 \dots x_5 \dots x_4 \dots x_4 \dots x_5 \dots \subset_4$ $x_5x_6x_4x_5 \supset_4 \dots \subset_4$	139
13	(12654783)B56	$x_3x_4x_2x_3 \supset_2 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3 \supset_4 \dots \subset_7 x_5x_4x_6x_5x_5x_6x_4x_5$	64
14	(12678543)A45	$\supset_3 \dots \subset_4 x_5x_4x_6x_7x_5x_6 \supset_5 \dots x_4 \dots x_5 \dots \subset_4 x_3x_4x_4x_3x_1x_2x_2x_1 \supset_2$ $\dots \subset_4$	100
15	(12765438)B67	$x_5x_6x_6x_5x_5x_6x_4x_5 \supset_7 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3 \supset_4 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3$	124
16	(12876543)B56	$x_4x_3 \supset_4 \dots \subset_2 x_3x_2x_4x_3x_1x_2 \supset_3 \dots \subset_5 x_6x_6x_7x_7x_7x_6 \supset_6 \dots \subset_6 x_5x_4$	100
17	(14326785)A34	$x_1x_5x_4x_6x_5 \supset_6 \dots \subset_2 x_7x_6x_1x_2x_6x_7 \supset_3 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3$	64
18	(14327658)A34	$x_7x_6x_6x_7x_3x_2x_4x_3 \supset_2 \dots \subset_2 x_3x_4x_2x_3 \supset_1 \dots \subset_4 x_5x_4x_6x_5$	64
19	(14328765)A34	$x_7x_6x_6x_7x_2x_3 \supset_4 \dots \subset_2 x_3x_4x_2x_3 \supset_1 \dots \subset_6 x_5x_6x_6x_5x_5x_6$	100
20	(14567823)B56	$\supset_2 \dots \subset_2 x_3x_4x_2x_1x_3x_2 \supset_3 \dots \subset_5 x_6x_7x_5x_4x_6x_4 \supset_5 \dots \subset_6 x_5x_4x_6x_5$	100
21	(14587623)B56	$x_1x_2x_2x_1x_6x_5 \supset_4 \dots \subset_4 x_5x_4x_5x_4x_7x_6 \supset_5 \dots \subset_2 x_3x_2x_6x_7$	64

обозначается буквой A , — либо вне змей и внутри несвободного овала кривой номер 2 — такому выбору отвечает буква B . Запись As обозначает, что точка P выбиралась внутри двугульной компоненты связности дополнения к пересекающимся овалам, на границе которой лежит точка с номером s , а запись Ast — что точка P лежит в четырёхугольной компоненте связности этого дополнения, на границах которой лежат точки с номерами s и t . Запись вида Bpq означает, что центр P выбирался внутри несвободного обвала кривой 2 в области, в границу которой входит часть дуги (p, q) этого овала, не содержащая других занумерованных точек. В последней колонке указано число подлежащих рассмотрению возможных распределений свободных овалов, т.е. длина соответствующей таблицы вида таблицы 1.

6. Построения кривых. Д. Гильберт построил в [5] взаимное расположение кривых степеней 2 и 4, представленное на рис. 14, где кривая степени 4 показана более жирной линией.

Рассмотрим кривую степени 2, определяемую уравнением $\tilde{C}_2 = C_2 + \varepsilon l_1 l_2 = 0$, где прямые l_1 и l_2 пересекают кривую C_2 в точках r_1, r_2, r_3, r_4 (см. рис. 15).

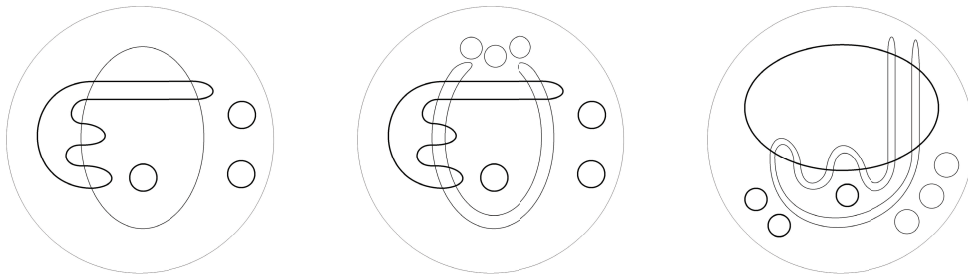


Рис. 20

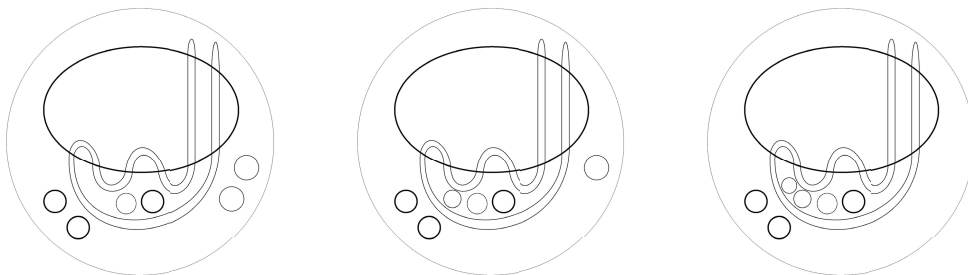


Рис. 21

При малых по абсолютной величине значениях ε кривая $\tilde{C}_2$ лежит близко к C_2 и при ε подходящего знака проходит так, как показано на рис. 16. Теперь с помощью малых изменений коэффициентов можем добиться устранения двойных точек кривой $C_2 \cdot \tilde{C}_2 = 0$, результат которого показан на рис. 17; уравнение возмущённой кривой можно записать в виде $\tilde{C}_4 = C_2 \cdot \tilde{C}_2 + \varepsilon_1 D_4 = 0$, где ε_1 достаточно мало по абсолютной величине и подходящего знака, а D_4 — какая-нибудь кривая степени 4 без действительных точек.

Расположение рис. 18 гомеоморфно расположению, показанному на рис. 17. Таким образом, мы реализовали расположение двух M -кривых степени 4 типа «змея, обвивающаяся вокруг овала», отвечающее подстановке (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).

Аналогичное удвоение кривой степени 2 в расположениях кривых степени 2 и степени 4, в которых овал M -кривой степени 4 пересекает овал кривой степени 2 в восьми точках — классификация таких расположений найдена Г. М. Полотовским в [4] — при различном выборе дуг овала кривой степени 2 для пересечения с прямыми l_1 и l_2 позволило реализовать ещё ряд расположений двух M -кривых степени 4 со змеей, обвивающейся вокруг овала (см. рис. 19–23).

7. Сводка результатов. В результате проведённого исследования доказано, что расположения, отвечающие 12 из 21 подстановок, перечисленных в лемме 1, не могут быть реализованы кривой степени 8 ни при каком расположении свободных овалов. Сводка результатов, полученных для остальных 9 подстановок, собрана в таблице 5. Отметим, что максимальный пучок удалось найти для 18 из 21 подстановок леммы 1. В этих случаях в совокупности построено 5 расположений и остаётся открытым вопрос о реализуемости 9 расположений, показанных на рис. 13 и на рисунках в предпоследней строке таблицы 5. Построено также 5 расположений для тех случаев, когда не был найден максимальный пучок.

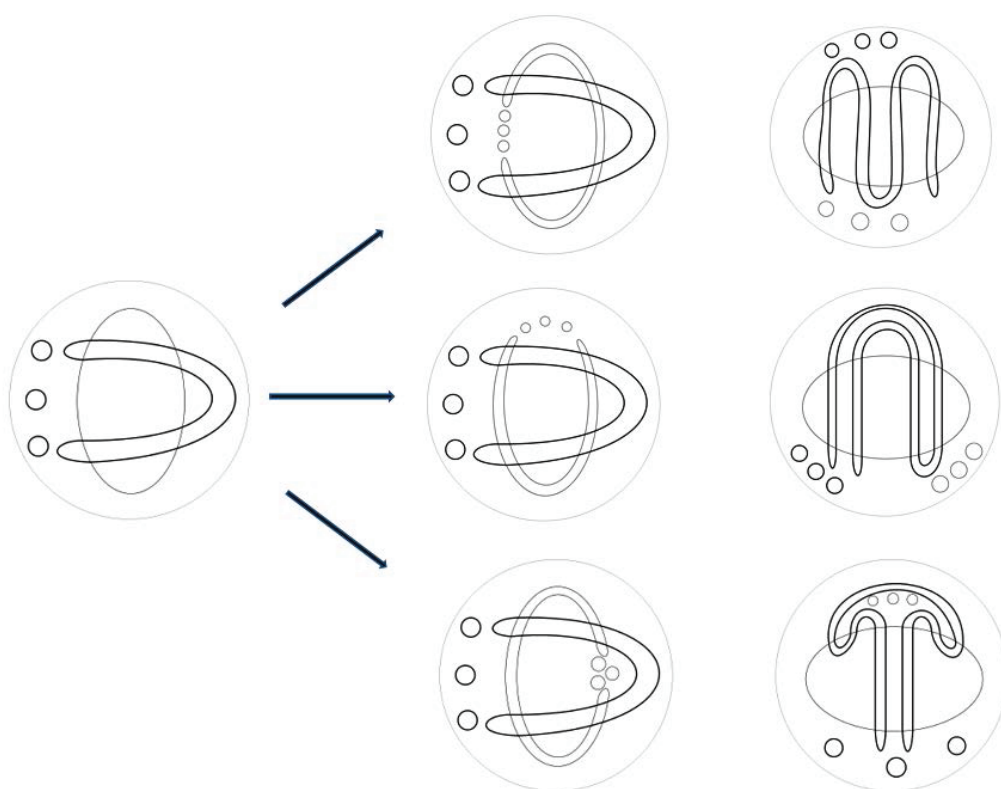


Рис. 22

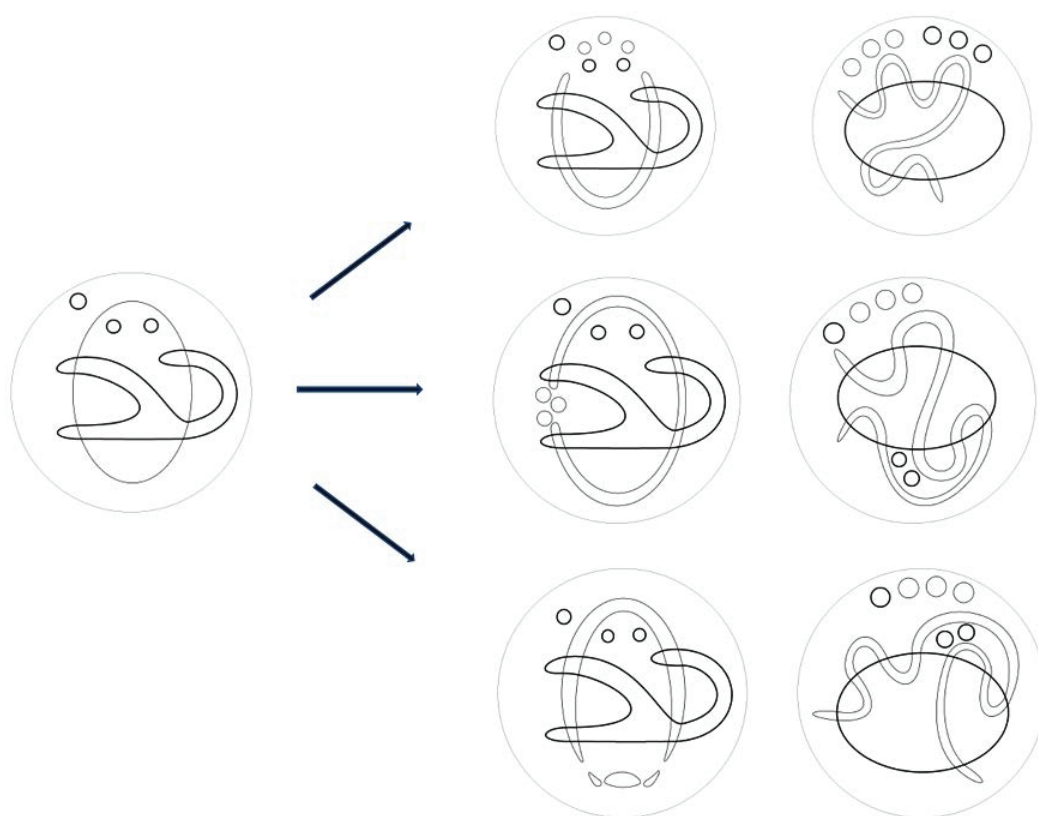


Рис. 23

Таблица 5

№	Подстановка	Результат исследования
1	12345678	Не удалось найти максимальный пучок. Построены 3 расположения: см. рис. 18, 19.
2	12345687	Открыт вопрос о реализуемости шести расположений, показанных на рис. 13; остальные расположения запрещены.
3	12345876	Не удалось найти максимальный пучок. Построено одно расположение: см. верхний ряд на рис. 23.
5	12347658	Построено одно расположение: см. нижний ряд на рис. 23; все остальные расположения запрещены.
7	12365478	Построено одно расположение: см. средний ряд на рис. 23; все остальные расположения запрещены.
10	12387456	Не удалось найти максимальный пучок. Построено одно расположение: см. верхний ряд на рис. 22
12	12567438	Построено одно расположение: см. средний ряд на рис. 22; все остальные расположения запрещены.
15	12765438	Построено одно расположение: см. рис. 20; Вопрос о реализуемости следующих трёх расположений, изображённых на рис. 21 открыт.
18	14327658	Построено одно расположение: см. нижний ряд на рис. 22; все остальные расположения запрещены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 176. — С. 3–18.
2. Горская В. А., Полотовский Г. М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости// Ж. Средневож. мат. о-ва. — 2020. — 22, № 1. — С. 24–37.
3. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий// Усп. мат. наук. — 1974. — 29, № 4 (178). — С. 3–79.
4. Полотовский Г. М. Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка// Докл. АН СССР. — 1977. — 236, № 3. — С. 548–551.
5. Hilbert D. Über die reellen Züge algebraischer Curven// Math. Ann. — 1891. — 38. — P. 115–138.
6. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve// Topology. — 1999. — 38. — P. 779–810.
7. Rudolf L. Algebraic functions and closed braids// Topology. — 1983. — 22. — P. 191–202.

Пучкова Наталья Дмитриевна
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
 Нижний Новгород
 E-mail: nataha1910@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 83–93
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-83-93

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ ГОЛОМОРФНЫХ ТОРСООБРАЗУЮЩИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2023 г. А. Р. РУСТАНОВ, О. Е. АРСЕНЬЕВА, С. В. ХАРИТОНОВА

Аннотация. Получен ряд результатов о голоморфных торсообразующих векторных полях на почти контактных метрических многообразиях.

Ключевые слова: торсообразующее векторное поле, голоморфное торсообразующее векторное поле, спецконциркулярное векторное поле, почти контактное метрическое многообразие, ξ -инвариантная структура.

ON THE GEOMETRY OF HOLOMORPHIC TORSE-FORMING VECTOR FIELDS ON ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS

© 2023 A. R. RUSTANOV, O. E. ARSEN'EVA, S. V. KHARITONOVA

ABSTRACT. Several new results on holomorphic torse-forming vector fields on almost contact metric manifolds are obtained.

Keywords and phrases: torse-forming vector field, holomorphic torse-forming vector field, special concircular vector field, almost contact metric manifold, ξ -invariant structure.

AMS Subject Classification: 53C10, 53C25

1. Введение. Нахождение условий инвариантности геометрических объектов относительно действия той или иной группы преобразований является одной из наиболее актуальных задач геометрического исследования. В [5] эта задача решалась для действия локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной торсообразующим векторным полем на почти эрмитовом многообразии. Были найдены необходимые и достаточные условия инвариантности келеровой структуры относительно такого действия. Развитие идей, изложенных в [5], было продолжено в [9]. Так, в [9] введено понятие абсолютно торсообразующего векторного поля на почти эрмитовом многообразии. Показано, что любое торсообразующее векторное поле на келеровом многообразии является абсолютно торсообразующим. Доказано, что абсолютно торсообразующее векторное поле ξ на приближенно келеровом многообразии сохраняет структурный эндоморфизм приближенно келеровой структуры тогда и только тогда, когда ξ — спецконциркулярное векторное поле [9].

В [11] рассматривается почти контактное метрическое многообразие, характеристический вектор которого является торсообразующим векторным полем. Доказано, что торсообразующий характеристический вектор ζ с определяющими элементами ρ и a сохраняет почти контактную метрическую структуру $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ тогда и только тогда, когда

- (i) $a(\zeta) = -\rho$;
- (ii) $\nabla_{\zeta}(\Phi)X = a(\Phi X)\zeta$;

$$(iii) \langle \nabla_X \zeta, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \zeta \rangle = 0.$$

Торсообразующий характеристический вектор ζ с определяющими элементами ρ и a сохраняет нормальную почти контактную метрическую структуру $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ тогда и только тогда, когда

- (i) $a(\zeta) = -\rho$;
- (ii) $a \circ \Phi = 0$;
- (iii) $\langle \nabla_X \zeta, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \zeta \rangle = 0$.

Конциркулярные векторные поля возникают при рассмотрении конформных преобразований псевдоримановых многообразий, переводящих геодезические окружности в геодезические окружности. Примером конциркулярного векторного поля может служить детально исследованное П. А. Широковым [12] поле сходящихся направлений, называемое также конкурентным векторным полем. В дальнейшем изучением конциркулярных векторных полей занимался целый ряд авторов: Г. И. Кручкович [8], Й. Микеш [10] и др. В рамках общей теории относительности конциркулярные векторные поля рассматривал Х. Такено [18].

Скалярное поле Φ на (M, g) называется специальным конциркулярным скалярным полем, если $\nabla^2 \Phi = \rho \Phi g$, где $\rho = \text{const} \neq 0$. Если тензор кривизны (соответственно тензор Риччи) риманова пространства (M, g) , допускающего специальное конциркулярное (спецконциркулярное) скалярное поле, удовлетворяет условию $R_{hijk, [lm]} = 0$ (соответственно $R_{ij, [kl]} = 0$), то M есть пространство постоянной кривизны (соответственно пространство Эйнштейна) [17].

Связное n -мерное риманово многообразие класса C^∞ допускает $n + 1$ независимых решений уравнения $\nabla^2 \rho + c^2 \rho g = 0$ тогда и только тогда, когда M изометрично сфере $S^n(1/c)$ в E^{n+1} (см. [13, 19]).

Векторное поле X на n -мерном римановом многообразии (M, g) класса C^∞ называется специальным конциркулярным (спецконциркулярным) векторным полем, если $\nabla_X Y = \phi Y$ для всех векторных полей Y и функций ϕ на M . Если на многообразии M существует более двух линейно независимых спецконциркулярных векторных полей $X_{(i)}$, то $\nabla_Y \phi_{(i)} = -Kg(Y, X_{(i)})$ для всех $Y \in \mathcal{X}(M)$ и $\phi_{(i)} = -K\rho_{(i)} + b_{(i)}$, где $b_{(i)}$ и K — константы (см. [16]).

В [7] исследуются условия, при которых характеристический вектор нормального локально конформно квазисасакиева (короче $lcQS$ -) многообразия является торсообразующим или, более того, конциркулярным векторным полем. Доказано, что следующие утверждения эквивалентны: $lcQS$ -структура нормальна и ее характеристический вектор является торсообразующим векторным полем; $lcQS$ -структура нормальна и ее характеристический вектор является конциркулярным векторным полем; $lcQS$ -структура локально конформно косимплектична и имеет замкнутую контактную форму.

В данной работе рассматриваются голоморфные торсообразующие векторные поля на почти контактных метрических многообразиях. Получен критерий голоморфности торсообразующего векторного поля на почти контактном метрическом многообразии. Получен критерий спецконциркулярности голоморфного торсообразующего векторного поля на почти контактном метрическом многообразии. Получено необходимое и достаточное условие, при котором торсообразующее векторное поле на почти контактном метрическом многообразии является абсолютно торсообразующим. Для основных классов почти контактных метрических многообразий (косимплектических, слабо косимплектических, сасакиевых, приближенно сасакиевых, Кенмоцу и обобщенных Кенмоцу) рассмотрены торсообразующие векторные поля, удовлетворяющие дополнительным условиям. В заключение получены факты, связанные с геометрией дифференциальной формы дуальной голоморфному торсообразующему векторному полю.

2. Голоморфные торсообразующие векторные поля на почти контактных метрических многообразиях. Пусть M — гладкое многообразие, $\mathcal{X}(M) — C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M , d — оператор внешнего дифференцирования, ∇ — риманова связность метрики $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathcal{L}_X$ — оператор дифференцирования Ли в направлении векторного поля X , $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор векторных полей или скобка Ли.

Все многообразия, тензорные поля и подобные объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Термины тензорное поле и тензор полагаются равнозначными.

Регулярное векторное поле $\xi \in \mathcal{X}(M)$ порождает локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов F_t на многообразии M . Рассмотрим дифференциально-геометрическую структуру $S = \{T_1, \dots, T_N\}$, определенную конечным числом тензорных полей на M .

Определение 1 (см. [2]). Структура $S = \{T_1, \dots, T_N\}$ называется ξ -инвариантной, если каждый из тензоров, её составляющих, инвариантен относительно операций увлечения, порожденных элементами локальной группы F_t .

Удобный критерий ξ -инвариантности структуры дается следующей теоремой.

Теорема 1 (см. [2]). Структура $S = \{T_1, \dots, T_N\}$ ξ -инвариантна тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_\xi(T_i) = 0$, $i = 1, \dots, N$.

Пример 1 (см. [2]). Риманова структура $S = \{g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ξ -инвариантна тогда и только тогда, когда ξ — векторное поле Киллинга, т.е. $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Действительно, согласно теореме 1, риманова структура будет ξ -инвариантна тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_\xi(g)(X, Y) = \\ &= \mathcal{L}_\xi(g(X, Y)) - g(\mathcal{L}_\xi X, Y) - g(X, \mathcal{L}_\xi Y) = \\ &= \xi(g(X, Y)) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) = \\ &= \xi(g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) - g(X, \nabla_\xi Y) + g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = \\ &= \nabla_\xi g(X, Y) + g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = \\ &= \langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \xi \rangle. \end{aligned}$$

Пример 2. Почти эрмитова структура $S = \{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ξ -инвариантна тогда и только тогда, когда

- (i) ξ — векторное поле Киллинга, т.е. $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$;
- (ii) $\nabla_\xi(J)X - \nabla_{JX}\xi + J\nabla_X\xi = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$.

Справедливость первого утверждения доказывается так же как для примера 1. Покажем справедливость второго пункта. Тензор J является ξ -инвариантным тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_\xi(J)X = \\ &= \mathcal{L}_\xi(JX) - J\mathcal{L}_\xi X = \\ &= [\xi, JX] - J([\xi, X]) = \\ &= \nabla_\xi(JX) - \nabla_{JX}\xi - J(\nabla_\xi X) + J(\nabla_X\xi) = \\ &= \nabla_\xi(J)X + J(\nabla_\xi X) - \nabla_{JX}\xi - J(\nabla_X\xi) + J(\nabla_X\xi) = \\ &= \nabla_\xi(J)X - \nabla_{JX}\xi + J(\nabla_X\xi). \end{aligned}$$

Пример 3. Почти контактная метрическая структура $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ξ -инвариантна тогда и только тогда, когда:

- (i) $\nabla_\xi \zeta = \nabla_\zeta \xi$;
 - (ii) $\nabla_\xi(\vartheta)X + \vartheta(\nabla_X \xi) = 0$;
 - (iii) $\nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi\nabla_X\xi = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$;
 - (iv) ξ — векторное поле Киллинга, т.е. $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle \nabla_Y \xi, X \rangle = 0$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.
- (i) Действительно, вектор ζ является ξ -инвариантным тогда и только тогда, когда

$$0 = \mathcal{L}_\xi \zeta = [\xi, \zeta] = \nabla_\xi \zeta - \nabla_\zeta \xi,$$

т.е. $\nabla_\xi \zeta = \nabla_\zeta \xi$.

(ii) Форма ϑ является ξ -инвариантной тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_\xi(\vartheta)X = \\ &= \mathcal{L}_\xi\vartheta(X) - \vartheta(\mathcal{L}_\xi X) = \\ &= \xi(\vartheta(X)) - \vartheta([\xi, X]) = \\ &= \xi(\vartheta(X)) - \vartheta(\nabla_\xi X) + \vartheta(\nabla_X \xi) = \\ &= \nabla_\xi(\vartheta)X + \vartheta(\nabla_X \xi) - \vartheta(\nabla_\xi X) + \vartheta(\nabla_X \xi) = \\ &= \nabla_\xi(\vartheta)X + \vartheta(\nabla_X \xi), \quad X \in \mathcal{X}(M), \end{aligned}$$

т.е. $\nabla_\xi(\vartheta)X + \vartheta(\nabla_X \xi) = 0$.

(iii) Эндоморфизм Φ является ξ -инвариантным тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_\xi(\Phi)X = \\ &= \mathcal{L}_\xi(\Phi X) - \Phi\mathcal{L}_\xi X = \\ &= [\xi, \Phi X] - \Phi([\xi, X]) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi X) - \nabla_{\Phi X} \xi - \Phi(\nabla_\xi X) + \Phi(\nabla_X \xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X + \Phi(\nabla_\xi X) - \nabla_{\Phi X} \xi - \Phi(\nabla_\xi X) + \Phi(\nabla_X \xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X} \xi + \Phi(\nabla_X \xi), \quad X \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

(iv) следует из примера 1.

Определение 2 (см. [2, 5, 9]). Ненулевое векторное поле $\xi \in \mathcal{X}(M)$ называется *торсообразующим*, если

$$\nabla \xi = \rho \operatorname{id} + a \otimes \xi, \quad (1)$$

и *псевдоторсообразующим*, если

$$\nabla \xi = \rho \Phi + a \otimes \xi$$

для некоторых $\rho \in C^\infty(M)$ и $a \in \mathcal{X}^*(M)$. Дифференциальная 1-форма a и функция ρ называются *характеристическими*. Торсообразующее векторное поле называется *конциркулярным*, если $da = 0$, *спецконциркулярным*, если $a = 0$, и *рекуррентным*, если $\rho = 0$.

Пусть $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ — почти контактная метрическая структура на многообразии M^{2n+1} , $n > 1$ (см. [4]), где Φ — эндоморфизм модуля $\mathcal{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом, ϑ — дифференциальная 1-форма на M , называемая контактной формой, ζ — вектор на M , называемый характеристическим вектором. При этом

$$\begin{aligned} \vartheta(\zeta) &= 1; \quad \vartheta \circ \Phi = 0; \quad \Phi(\zeta) = 0; \\ \Phi^2 &= -\operatorname{id} + \vartheta \otimes \zeta; \quad \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \vartheta(X)\vartheta(Y). \end{aligned}$$

Замечание 1. Если ξ — ненулевое векторное поле из $\mathcal{X}(M)$, то векторное поле $\eta = \Phi\xi$, очевидно, ортогонально полю ξ . В самом деле, $\langle \eta, \xi \rangle = \langle \Phi\xi, \xi \rangle = -\langle \xi, \Phi\xi \rangle = -\langle \eta, \xi \rangle$, а значит, $\langle \eta, \xi \rangle = 0$. В частности, векторные поля ξ и η линейно независимы.

Определение 3. Векторное поле $\xi \in \mathcal{X}(M)$ назовем *голоморфным*, если эндоморфизм Φ является ξ -инвариантным.

Теорема 2. Торсообразующее векторное поле ξ на почти контактном метрическом многообразии M голоморфно тогда и только тогда, когда

$$\nabla_\xi(\Phi)X = a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M). \quad (2)$$

Доказательство. Согласно рассуждениям в примере 3

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi(\Phi)X &= \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X} \xi + \Phi(\nabla_X \xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X - \rho \circ \Phi(X) - a \circ \Phi(X)\xi + \Phi(\rho X) + \Phi(a(X)\xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X - a \circ \Phi(X)\xi + \Phi(a(X)\xi) = \\ &= \nabla_\xi(\Phi)X - a(\Phi X)\xi + a(X)\Phi\xi; \end{aligned}$$

отсюда сразу же следует, что условие ξ -инвариантности $\mathcal{L}_\xi(\Phi)X = 0$ равносильно справедливости тождества (2). $\square$

Теорема 3. *Голоморфное торсообразующее векторное поле ξ на почти контактном метрическом многообразии M спецконциркулярно тогда и только тогда, когда справедливо тождество*

$$\nabla_\xi(\Phi)X = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M). \quad (3)$$

Доказательство. Согласно теореме 2 семейство всех голоморфных векторных полей на многообразии M полностью определяется тождеством (2), а значит, его подсемейство — семейство спецконциркулярных векторных полей (у которых по определению $a = 0$) определяется тождеством (3).

Обратно, пусть на многообразии M выполнены тождества (2) и (3). Вычитая почленно одно тождество из другого, получим:

$$a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M). \quad (4)$$

Поскольку векторные поля ξ и $\Phi\xi$ линейно независимы, то в (4) коэффициенты при них равны нулю. В частности, $a(X) = 0$ и, в силу произвола $X \in \mathcal{X}(M)$, $a = 0$. Следовательно, поле ξ — спецконциркулярное. $\square$

Определение 4. Торсообразующее векторное поле $\xi \in \mathcal{X}(M)$ назовем *абсолютно торсообразующим*, если векторное поле $\Phi\xi$ является псевдоторсообразующим с теми же определяющими элементами.

Теорема 4. *Пусть M — почти контактнoе метрическое многообразие, допускающее торсообразующее векторное поле ξ . Тогда векторное поле ξ будет абсолютно торсообразующим тогда и только тогда, когда выполняется тождество*

$$\nabla_X(\Phi)\xi = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть ξ — торсообразующее векторное поле на почти контактном метрическом многообразии M . Введем обозначение $\Phi\xi = \eta$. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_X\eta &= \nabla_X(\Phi\xi) = \\ &= \nabla_X(\Phi)\xi + \Phi\nabla_X\xi = \\ &= \nabla_X(\Phi)\xi + \Phi(a(X)\xi + \rho X) = \\ &= \nabla_X(\Phi)\xi + a(X)(\Phi\xi) + (\rho \circ \Phi)X = \\ &= \nabla_X(\Phi)\xi + a(X)\eta + (\rho \circ \Phi)X. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что векторное поле ξ — абсолютно торсообразующее тогда и только тогда, когда $\nabla_X(\Phi)\xi = 0$. $\square$

3. Торсообразующие векторные поля на основных классах почти контактных метрических многообразий. Приведем рассматриваемые классы почти контактных метрических структур вместе с определяющими их тождествами [1, 3, 4, 6, 14, 15]:

- (a) косимплектические структуры: $\nabla_X(\Phi)Y = 0$;
- (b) слабо косимплектические структуры: $\nabla_X(\Phi)X = 0$;
- (c) сасакиевы структуры: $\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y \rangle \zeta - \vartheta(Y)X$;
- (d) приближенно сасакиевы структуры: $\nabla_X(\Phi)X = \langle X, X \rangle \zeta - \vartheta(X)X$;
- (e) структуры Кенмоцу: $\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle \zeta - \vartheta(Y)\Phi X$;
- (f) обобщенные структуры Кенмоцу: $\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\vartheta(Y)\Phi X - \vartheta(X)\Phi Y$;
- (g) контактные структуры: $d\eta = 2\Omega$;
- (h) К-контактные структуры: $\nabla_X(\eta)Y = \Omega(X, Y)$;
- (i) нормальные структуры:

$$\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X - \Phi\nabla_X(\Phi)Y + \Phi\nabla_Y(\Phi)X + (\nabla_X(\eta)Y - \nabla_Y(\eta)X)\xi = 0.$$

Теорема 5. Пусть M — косимплектическое многообразие, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ — торсообразующий вектор. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) ξ — абсолютно торсообразующий вектор;
- (ii) ξ — голоморфный вектор;
- (iii) ξ — спецконциркулярный вектор.

Доказательство. Поскольку M — косимплектическое многообразие, $\nabla_X(\Phi)Y = 0$ для всех $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ (см. [4]). Из теоремы 4 следует, что ξ — абсолютно торсообразующий вектор. Соотношение (2) выполняется в этом случае при $a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi = 0$; $X \in \mathcal{X}(M)$. В силу линейной независимости векторов ξ и $\Phi\xi$ $a(X) = 0$, значит, ξ — спецконциркулярное векторное поле. Соотношение (2) в этом случае выполняется тождественно и по теореме 2 ξ — голоморфное векторное поле. $\square$

Теорема 6. Векторное поле на слабо косимплектическом многообразии спецконциркулярно тогда и только тогда, когда оно абсолютно торсообразующее.

Доказательство. Пусть ξ — абсолютно торсообразующее векторное поле на слабо косимплектическом многообразии M . Поскольку оно абсолютно торсообразующее, то по теореме 4 $\nabla_X(\Phi)\xi = 0$. Из кососимметричности этого соотношения следует $\nabla_\xi(\Phi)X = 0$. Соотношение (2) выполняется в этом случае при $a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi = 0$; $X \in \mathcal{X}(M)$. В силу линейной независимости векторов ξ и $\Phi\xi$ $a(X) = 0$, значит, ξ — спецконциркулярное векторное поле.

Обратно, пусть ξ — спецконциркулярное векторное поле на слабо косимплектическом многообразии M . Тогда по теореме 3: $\nabla_\xi(\Phi)X = 0$. Из кососимметричности этого соотношения следует, что $\nabla_X(\Phi)\xi = 0$, значит, ξ — абсолютно торсообразующее векторное поле. $\square$

Теорема 7. Голоморфное торсообразующее векторное поле на слабо косимплектическом многообразии спецконциркулярно.

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на слабо косимплектическом многообразии M . По теореме 2 справедливо

$$\nabla_\xi(\Phi)X = a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

По определению слабо косимплектического многообразия $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ имеем $\nabla_X(\Phi)X = 0$, т.е.

$$\nabla_X(\Phi)\xi = -\nabla_\xi(\Phi)X, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Поскольку на почти контактном метрическом многообразии имеет место тождество

$$\langle Y, \nabla_X(\Phi)Z \rangle + \langle \nabla_X(\Phi)Y, Z \rangle = 0; \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M),$$

то, положив в данном тождестве $Z = Y$, получим

$$\langle Y, \nabla_X(\Phi)Y \rangle = 0, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Тогда для голоморфного торсообразующего векторного поля ξ имеем

$$\langle \xi, \nabla_X(\Phi)\xi \rangle = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M),$$

а значит,

$$\langle \xi, \nabla_\xi(\Phi)X \rangle = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M),$$

т.е.

$$a(\Phi X)\langle \xi, \xi \rangle - a(X)\langle \Phi\xi, \xi \rangle = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

или

$$a(\Phi X)\langle \xi, \xi \rangle = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Отсюда имеем $a = 0$, т.е. голоморфное торсообразующее векторное поле на слабо косимплектическом многообразии является спецконциркулярным. $\square$

Следствие 1. Голоморфное торсообразующее векторное поле на точнейше косимплектическом многообразии спецконциркулярно.

Теорема 8. *Голоморфное торсообразующее векторное поле на многообразии Сасаки спецконциркулярно.*

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на сасакиевом многообразии M , тогда

$$\nabla_{\xi}(\Phi)X = \langle \xi, X \rangle \zeta - \vartheta(X)\xi,$$

и по теореме 2 имеем

$$\langle \xi, X \rangle \zeta - \vartheta(X)\xi = a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi.$$

Умножим последнее скалярно на ξ , получим

$$\langle \xi, X \rangle \langle \zeta, \xi \rangle - \vartheta(X) \langle \xi, \xi \rangle = a(\Phi X) \langle \xi, \xi \rangle - a(X) \langle \Phi\xi, \xi \rangle,$$

т.е.

$$\langle \xi, X \rangle \vartheta(\xi) - \vartheta(X) \langle \xi, \xi \rangle = a(\Phi X) \langle \xi, \xi \rangle.$$

Положим $X = \xi$, тогда из последнего равенства получим $a(\Phi\xi) = 0$. В этом случае возможны два варианта: $\Phi\xi = 0$ или $a = 0$.

Если $\Phi\xi = 0$, тогда $\zeta \parallel \xi$, а значит, $\nabla_{\xi}(\Phi)X = \langle \xi, X \rangle \zeta - \vartheta(X)\xi = 0$, т.е. ξ — спецконциркулярное, согласно теореме 3.

Если $a = 0$, то ξ — спецконциркулярное.

Таким образом, голоморфное торсообразующее векторное поле на многообразии Сасаки спецконциркулярно. $\square$

Теорема 9. *Многообразие Сасаки не допускает абсолютно торсообразующих векторных полей.*

Доказательство. Пусть ξ — абсолютно торсообразующий вектор на многообразии Сасаки M . По теореме 4 $\nabla_X(\Phi)\xi = 0$. С другой стороны, хорошо известно, что на многообразии Сасаки справедливо тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y \rangle \zeta - \vartheta(Y)X.$$

В частности, при $Y = \xi$ имеем:

$$0 = \nabla_X(\Phi)\xi = \langle X, \xi \rangle \zeta - \vartheta(\xi)X.$$

Обозначим через η форму, заданную формулой $\eta(X) = \langle X, \xi \rangle$; тогда предыдущее равенство можно записать как

$$\eta(X)\zeta - \vartheta(\xi)X = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M),$$

т.е.

$$\eta \otimes \zeta - \vartheta(\xi) \text{id} = 0 \quad \text{или} \quad \eta \otimes \zeta = \vartheta(\xi) \text{id}.$$

Но это равенство невозможно, т. к. эндоморфизмы $\eta \otimes \zeta$ и id имеют разные ранги. Следовательно, предположение неверно, вектор ξ не может быть абсолютно торсообразующим. $\square$

Следствие 2. *K-контактное и контактное многообразия не допускают абсолютно торсообразующих векторных полей.*

Следствие 3. *Нормальные многообразия не допускают абсолютно торсообразующих векторных полей.*

Следствие 4. *Приближенно сасакиевы многообразия не допускают абсолютно торсообразующих векторных полей.*

Теорема 10. *Голоморфное торсообразующее векторное поле на приближенно сасакиевом многообразии спецконциркулярно.*

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на приближенно сасакиевом многообразии M . Характеристическое тождество такого многообразия имеет вид

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = 2\langle X, Y \rangle \zeta - \vartheta(X)Y - \vartheta(Y)X, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

В этом тождестве положим $Y = \xi$, тогда

$$\nabla_X(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)X = 2\langle X, \xi \rangle \zeta - \vartheta(X)\xi - \vartheta(\xi)X, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Согласно теореме 2 последнее равенство запишем в виде

$$\nabla_X(\Phi)\xi = -\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\xi + a(X)\Phi\xi + 2\langle X, \xi \rangle \zeta - \vartheta(\xi)X, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Полученное равенство умножим скалярно на вектор ξ , тогда

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X(\Phi)\xi, \xi \rangle &= -\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\langle \xi, \xi \rangle + a(X)\langle \Phi\xi, \xi \rangle + 2\langle X, \xi \rangle \langle \zeta, \xi \rangle - \vartheta(\xi)\langle X, \xi \rangle = \\ &= -\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\|\xi\|^2 + 2\langle X, \xi \rangle \vartheta(\xi) - \vartheta(\xi)\langle X, \xi \rangle = \\ &= -\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\|\xi\|^2 + \langle X, \xi \rangle \vartheta(\xi), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

т.е.

$$-\{a(\Phi X) + \vartheta(X)\}\|\xi\|^2 + \langle X, \xi \rangle \vartheta(\xi) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

В последнем тождестве положим $X = 0$, тогда получим $a(\Phi\xi) = 0$, т.е. $a = 0$. Таким образом, $\nabla_\xi(\Phi)X = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$. И согласно теореме 3 ξ является спецконциркулярным, т.е. голоморфное торсообразующее векторное поле на приближенно сасакиевом многообразии является спецконциркулярным. $\square$

Теорема 11. Голоморфное торсообразующее векторное поле на многообразии Кенмоцу является спецконциркулярным

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на многообразии Кенмоцу M . По теореме 2

$$\nabla_\xi(\Phi)X = a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

С другой стороны, положив в определяющем тождестве многообразия Кенмоцу $X = \xi$, получим:

$$\nabla_\xi(\Phi)X = \langle \Phi\xi, X \rangle \zeta - \vartheta(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Почленно вычитая первое тождество из второго, получим

$$a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi = \langle \Phi\xi, X \rangle \zeta - \vartheta(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

т.е.

$$a(\Phi X)\xi - \{a(X) - \vartheta(X)\}\Phi\xi - \langle \Phi\xi, X \rangle \zeta = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Полученное равенство умножим скалярно на ξ , тогда, с учетом равенства $\langle \Phi\xi, \xi \rangle = 0$, получим $a(\Phi X)\langle \xi, \xi \rangle = \langle \Phi\xi, X \rangle \langle \zeta, \xi \rangle$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Если положить в полученном равенстве $X = \xi$, получим $a(\Phi\xi)\|\xi\|^2 = 0$. Отсюда получаем, что $a = 0$, а значит, векторное поле ξ спецконциркулярно. $\square$

Замечание 2. Характеристический вектор структуры Кенмоцу является торсообразующим вектором с характеристической 1-формой $(-\vartheta)$ и единичной функцией ρ в силу тождества $\nabla_X \zeta = X - \vartheta(X)\zeta$.

Теорема 12. Многообразие Кенмоцу не допускает абсолютно торсообразующих векторных полей.

Доказательство. Пусть M — многообразие Кенмоцу, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ — абсолютно торсообразующее векторное поле. Тогда на M выполнено тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle \zeta - \vartheta(Y)\Phi X.$$

Положив в этом тождестве $Y = \xi$, получим тождество

$$0 = \nabla_X(\Phi)\xi = \langle \Phi X, \xi \rangle \zeta - \vartheta(\xi)\Phi X.$$

Перепишем это тождество в форме

$$\eta(\Phi X)\zeta - \vartheta(\xi)\Phi X = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

где $\eta(X) = \langle X, \xi \rangle$. Таким образом,

$$(\eta \circ \Phi) \otimes \zeta - \vartheta(\xi)\Phi = 0.$$

Как и в случае многообразий Сасаки, это равенство невозможно, так как эндоморфизмы $(\eta \circ \Phi) \otimes \xi$ и Φ имеют разные ранги. Следовательно, предположение неверно, т.е. векторное поле ξ не может быть абсолютно торсообразующим. $\square$

Обобщенное многообразие Кенмоцу не допускает абсолютно торсообразующих векторных полей.

Теорема 13. *Голоморфное торсообразующее векторное поле на обобщенном многообразии Кенмоцу является спецконциркулярным*

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное торсообразующее векторное поле на обобщенном многообразии Кенмоцу M . По определению обобщенного многообразия Кенмоцу

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\vartheta(Y)\Phi X - \vartheta(X)\Phi Y, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

В последнем тождестве положим $Y = \xi$, тогда получим

$$\nabla_X(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)X = -\vartheta(\xi)\Phi X - \vartheta(X)\Phi\xi, \quad X \in \mathcal{X}(M). \quad (6)$$

С учетом теоремы 2 запишем

$$\nabla_X(\Phi)\xi = \{a(X) - \vartheta(X)\}\Phi\xi - a(\Phi X)\xi - \vartheta(\xi)\Phi X, \quad X \in \mathcal{X}(M). \quad (7)$$

Полученное равенство умножим скалярно на вектор ξ , тогда

$$\langle \nabla_X(\Phi)\xi, \xi \rangle = \{a(X) - \vartheta(X)\}\langle \Phi\xi, \xi \rangle - a(\Phi X)\langle \xi, \xi \rangle - \vartheta(\xi)\langle \Phi X, \xi \rangle \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Поскольку $\langle \nabla_X(\Phi)\xi, \xi \rangle = 0$ (см. доказательство теоремы 7) и $\langle \Phi\xi, \xi \rangle = 0$, то

$$a(\Phi X)\langle \xi, \xi \rangle = -\vartheta(\xi)\langle \Phi X, \xi \rangle \quad X \in \mathcal{X}(M). \quad (8)$$

Теперь положим в тождестве (8) $X = \xi$, тогда получим $a(\Phi\xi)\langle \xi, \xi \rangle = 0$. Поскольку $\langle \xi, \xi \rangle \neq 0$, то $a(\Phi\xi) = 0$. Из последнего равенства следует два случая:

- (i) если $a = 0$, то векторное поле ξ является спецконциркулярным;
- (ii) если $\Phi\xi = 0$, тогда правая часть равенства (8) запишется в виде

$$-\vartheta(\xi)\langle \Phi X, \xi \rangle = \vartheta(\xi)\langle X, \Phi\xi \rangle = 0, \quad X \in \mathcal{X}(M),$$

т.е. $a(\Phi X)\langle \xi, \xi \rangle = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$. Поскольку $\langle \xi, \xi \rangle \neq 0$, то $a(\Phi X) = 0$, $X \in \mathcal{X}(M)$. А значит, $\nabla_\xi(\Phi)X = 0$, т.е. ξ — спецконциркулярное, согласно теореме 3. $\square$

Пусть $S = \{\zeta, \vartheta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ — почти контактная метрическая структура на многообразии M . Обозначим через ω ковекторное поле, дуальное торсообразующему векторному полю ξ . Имеем:

$$\omega(Y) = \langle \xi, Y \rangle; \quad Y \in \mathcal{X}(M). \quad (9)$$

Применим к обеим частям оператор ∇_X , учитывая тот факт, что вектор ξ — торсообразующий, т.е. для него выполняется соотношение (1), получим:

$$\nabla_X(\omega)Y = \langle \nabla_X\xi, Y \rangle = \langle a(X)\xi, Y \rangle + \rho\langle X, Y \rangle.$$

С учетом (9) это выражение примет вид

$$\nabla_X(\omega)Y = a(X)\omega(Y) + \rho\langle X, Y \rangle; \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (10)$$

В частности, после альтернирования имеем:

$$d\omega(X, Y) = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X = a(X)\omega(Y) - a(Y)\omega(X) = a \wedge \omega(X, Y).$$

Следовательно,

$$d\omega = a \wedge \omega. \quad (11)$$

Дифференциальное продолжение этого тождества имеет вид:

$$da \wedge \omega = 0. \quad (12)$$

Соотношение (11) показывает, что гиперраспределение на M , порожденное дифференциальной формой ω , инволютивно, значит, вполне интегрируемо. Тем самым доказана

Теорема 14. *Гиперраспределение на почти контактном метрическом многообразии, порожденное дифференциальной формой дуальной голоморфному торсообразующему векторному полю на этом многообразии, вполне интегрируемо.*

Замечание 3. Рассмотрим два класса торсообразующих полей, характеризующихся уравнениями $a = 0$ (спецконциркулярные векторные поля) и $da = 0$ (конциркулярные векторные поля) соответственно. Очевидно, первый класс входит во второй.

Особый интерес представляет случай $\omega = a$. Тогда из (11) вытекает, что $da = 0$, значит, ξ — конциркулярное векторное поле. Уравнение (10) в этом случае принимает вид

$$\nabla_X \omega = \omega \otimes \omega(Y) + \rho g. \quad (13)$$

Здесь ρ — гладкая функция на многообразии M , с необходимостью равная

$$\rho = \frac{1}{n}(\delta\omega - \|\omega\|^2),$$

где $\delta\omega = g^{ij}\omega_{i,j}$ — кодифференциал формы ω , $\|\omega\|$ — норма этой формы. Уравнение (13) было введено К. Яно в [20] и называется *уравнением Яно*. Укажем его геометрический смысл. Как показано выше, дифференциальная форма ω , дуальная торсообразующему векторному полю ξ , в случае ее совпадения с характеристической формой a замкнута и, значит, локально точна. Следовательно, существует открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ многообразия M , такое, что $\forall \alpha \in A$ существует $\sigma_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$, $\omega|_{U_\alpha} = d\sigma_\alpha$. Рассмотрим функции σ_α как определяющие функции локально конформного преобразования $g|_{U_\alpha} \rightarrow \tilde{g} = e^{2\sigma} \circ g|_{U_\alpha}$ метрики многообразия M . Тогда выполнимость уравнения Яно на многообразии M равносильно конциркулярности построенного нами локально конформного преобразования его метрики (напомним, что конформное преобразование метрики называется конциркулярным преобразованием, если оно любую геодезическую окружность переводит в геодезическую окружность). Заметим также, что эти рассуждения, очевидно, остаются в силе для любых римановых многообразий. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 15. *Торсообразующее векторное поле на римановом многообразии (в частности, АС-многообразии), дуальная 1-форма которого совпадает с характеристической 1-формой, является конциркулярным векторным полем и внутренним образом порождает конциркулярное локально конформное преобразование метрики этого многообразия.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абу-Салеем А., Рустанов А. Р., Харитонова С. В. Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу // Владикавказ. мат. ж. — 2018. — 20, № 3. — С. 4–20.
2. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
3. Кириченко В. Ф. О геометрии приближенно сасакиевых многообразий // Докл. АН СССР. — 1983. — 269, № 1. — С. 24–29.
4. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный Дом, 2013.
5. Кириченко В. Ф., Кузаконь В. М. О геометрии голоморфных торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях // Укр. мат. ж. — 2013. — 65, № 7. — С. 1005–1008.
6. Кириченко В. Ф., Кусова Е. В. О геометрии слабо косимплектических многообразий // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 2. — С. 33–42.
7. Кириченко В. Ф., Терпистра М. А. О геометрии характеристического вектора $lcQS$ -многообразия // Мат. заметки. — 2012. — 92, № 6. — С. 864–871.
8. Кручков Г. И. Об одном классе римановых пространств // Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 1. — С. 103–128.
9. Кузаконь В. М. О голоморфности торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях // Укр. мат. ж. — 2015. — 67, № 3. — С. 420–430.

10. *Микеш Й.* О конциркулярных векторных полях «в целом» на компактных римановых пространствах. — Одесса: Деп. в Укр. НИИТИ 02.03.88. — № 615-Ук88..
11. *Терпстра М. А.* Инвариантность АС-структуры относительно торсообразующего вектора Рибба// Изв. Пензенск. гос. пед. ин-та им. В. Г. Белинского. — 2011. — № 26. — С. 248–254.
12. *Широков П. А.* О сходящихся направлениях в римановых пространствах// Изв. физ.-мат. о-ва. — 1934/35. — № 7. — С. 77–88.
13. *Fijii M.* Some Riemannian manifolds admitting a concircular scalar field// Math. J. Okayama Univ. — 1973. — 16, № 1. — P. 1–9.
14. *Goldberg S., Yano K.* Integrability of almost cosymplectic structures// Pac. J. Math. — 1969. — 31, № 2. — P. 373–382.
15. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds// Tôhoku Math. J. — 1972. — 24, № 1. — P. 93–103.
16. *Kim In-Bae.* Special concircular vector fields in Riemannian manifolds// Hiroshima Math. J. — 1982. — 12, № 1. — P. 77–91.
17. *Koyanagi T.* On a certain property of a Riemannian space admitting a special concircular scalar field// J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. — 1972. — 22, № 3, 4. — P. 154–157.
18. *Takeno H.* Concircular scalar field in spherically symmetric spacetime, I// Tensor, N.S. — 1969. — 20, № 2. — P. 167–176.
19. *Tandai K.* Riemannian manifold admitting more than $n - 1$ linearly independent solutions of $\nabla^2 \rho + c^2 \rho g = 0$ // Hokkaido Math. J. — 1972. — 1, № 1. — P. 12–15.
20. *Yano K.* Concircular geometry, I–IV// Proc. Imp. Acad. Jpn. — 1940. — 16, № 6. — P. 195–200, 354–360, 442–448, 505–511.

Рустанов Алигаджи Рабаданович

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Арсеньева Ольга Евгеньевна

Московский педагогический государственный университет

E-mail: highgeom@yandex.ru

Харитоновна Светлана Владимировна

Оренбургский государственный университет

E-mail: hcb@yandex.ru



ОБ АЛГЕБРЕ ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ ЙОРДАНОВОЙ АЛГЕБРЫ БИЛИНЕЙНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

© 2023 г. А. Я. СУЛТАНОВ, М. В. ГЛЕБОВА

Аннотация. Установлена размерность алгебры Ли дифференцирований йордановой алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$ симметрической билинейной формы Φ над полем P , характеристики, отличной от 2.

Ключевые слова: алгебра Ли, йорданова алгебра, билинейная симметрическая форма, дифференцирование алгебры.

ON THE LIE ALGEBRA OF DERIVATIONS OF THE JORDAN ALGEBRA OF A BILINEAR SYMMETRIC FORM

© 2023 A. Ya. SULTANOV, M. V. GLEBOVA

ABSTRACT. We find the dimension of the Lie algebra of derivations of the Jordan algebra $\mathfrak{Z}(\Phi)$ of a symmetric bilinear form Φ over a field P with characteristic different from 2.

Keywords and phrases: Lie algebra, Jordan algebra, bilinear symmetric form, algebra derivation.

AMS Subject Classification: 14B05, 17B60

1. Йордановы алгебры. Пусть A — линейная алгебра над полем P с носителем W , причем характеристика поля P отлична от 2.

Определение 1. Алгебра A называется йордановой, если выполняются условия

$$xy = yx, \quad x^2(yx) = (x^2y)x$$

для всех $x, y \in A$ (см. [2]).

Пример йордановой алгебры можно получить, имея ассоциативную алгебру над полем P .

Пусть B — ассоциативная алгебра над полем P . Определим на носителе этой алгебры новую операцию умножения $*$ по формуле

$$x * y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

Получим линейную алгебру, которую обозначают через $B^{(+)}$. Новая операция $*$ удовлетворяет условиям определения йордановой алгебры.

Коммутативность умножения $x * y = y * x$ выполняется очевидным образом. Покажем, что условие $x^2(yx) = (x^2y)x$ также выполняется. Ассоциативность умножения в алгебре позволяет в выражении $(xy)z$ и $x(yz)$ обозначить символом xyz . Тогда

$$\begin{aligned} x * x &= \frac{1}{2}(xx + xx) = xx, & y * x &= \frac{1}{2}(yx + xy), \\ x^2 * (y * x) &= \frac{1}{2}(x^2(y * x) + (y * x)x^2) = \frac{1}{4}(x^2yx + x^3y + yx^3 + xyx^2), \end{aligned}$$

$$(x^2 * y) * x = \frac{1}{2}(x^2 y + y x^2) * x = \frac{1}{4}(x^2 y x + x^3 y + y x^3 + x y x^2).$$

Отсюда заключаем, что

$$x^2(yx) = (x^2 y)x.$$

Другим примером йордановой алгебры является йорданова алгебра симметрической билинейной формы. Опишем, как она строится.

Пусть V — векторное пространство над полем P , Φ — симметрическая билинейная форма, заданная на V со значениями в P . Поскольку поле P можно считать одномерным векторным пространством над этим же полем, построим стандартным образом прямое произведение $W = P \times V$. Пары (λ, x) , где $\lambda \in P$, $x \in V$, можно представить как сумму $(\lambda, 0_\nu) + (0, x)$. Условимся использовать такие обозначения $(\lambda, 0_\nu) = \lambda(1, 0) = \lambda e_0$, $(0, x) = x$. Здесь $e_0 = (1, 0)$. Тогда $(\lambda, x) = \lambda e_0 + x$. Определим на векторном пространстве $P \times V$ операцию умножения формулой

$$(\lambda e_0 + x)(\mu e_0 + y) = ((\lambda\mu)e_0 + \Phi(x, y))e_0 + \lambda y + \mu x. \quad (1)$$

Эта операция является билинейной. Следовательно, векторное пространство $P \times V$ с введенными операциями является линейной алгеброй. Из определения операции умножения (1) следует, что она является коммутативной.

Покажем, что выполняется и второе условие определения йордановой алгебры.

Пусть $a = \lambda e_0 + x$, $b = \mu e_0 + y$. Тогда $a^2 = (\lambda^2 + \Phi(x, x))e_0 + 2\lambda x$. Поскольку $x = (-\lambda)e_0 + a$, то $a^2 = (\lambda^2 - 2\lambda^2)1 + 2\lambda a = (\Phi(x, x) - \lambda^2) + 2\lambda a$. Далее, умножив обе части этого равенства на ba , получим

$$a^2(ba) = ((\Phi(x, x) - \lambda^2) + 2\lambda a)(ba). \quad (2)$$

Аналогично находим $(a^2 b)a$:

$$(a^2 b)a = ((\Phi(x, x) - \lambda^2)ba + 2\lambda(ab)a).$$

В силу коммутативности операции умножения, имеем $(ab)a = a(ab) = a(ba)$. Поэтому

$$(a^2 b)a = ((\Phi(x, x) - \lambda^2)e_0 + 2\lambda a)(ba). \quad (3)$$

Из равенства (2) и (3) следует, что

$$(a^2 b)a = (a^2 b)a.$$

Таким образом, алгебра с носителем $W = P \times V$ и умножением, определенной формулой (1), является йордановой. Эта алгебра называется йордановой алгеброй симметрической билинейной формы Φ . Обозначим эту алгебру символом $\mathfrak{J}(\Phi)$.

2. Система линейных уравнений дифференцирований йордановой алгебры симметрической билинейной формы. В предыдущем параграфе было приведено определение йордановой алгебры, симметрической билинейной формы Φ , заданной на векторном пространстве V над произвольным полем P , характеристика которого не равна 2. В данном параграфе исследуем систему линейных уравнений дифференцирований йордановой алгебры симметрической билинейной формы.

Напомним основные понятия.

Определение 2. Линейный оператор D называется дифференцированием алгебры $A = (W, \varphi)$, если выполняется следующее условие

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) \quad (4)$$

для любых $x, y \in A$.

Совокупность всех дифференцирований линейной алгебры A обозначается символом $\text{Der } A$. На множестве $\text{Der } A$ естественным образом вводится операция коммутирования по правилу

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

для всех $D_1, D_2 \in \text{Der } A$.

Операция композиции над дифференцированиями, вообще говоря, не проводит к дифференцированию алгебры A , а операция коммутирования $(D_1, D_2) \rightarrow [D_1, D_2]$ приводит к дифференцированию алгебры A . Более того, пара $(\text{Der}, [,])$ является алгеброй Ли и эта алгебра называется алгеброй Ли дифференцирований линейной алгебры A .

Выберем какой-нибудь базис алгебры A : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ и для каждого дифференцирования $D \in \text{Der } A$ образы $D(\varepsilon_i)$ базисных элементов разложим по элементам базиса $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$. Тогда получим $D(\varepsilon_i) = x_i^j \varepsilon_j$, $x_i^j \in P$. Учитывая, что $\varepsilon_i \varepsilon_j = C_{ij}^k \varepsilon_k$, где $C_{ij}^k \in P$, и называются структурными постоянными алгебры A , находим, что соотношение (4) в координатном представлении имеет вид

$$(C_{sj}^h \delta_i^k + C_{is}^h \delta_j^k - C_{ij}^k \delta_s^h) x_h^s = 0. \quad (5)$$

Эти соотношения представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно переменных x_h^s .

Будем исследовать систему (5) применительно к йордановой алгебре $\mathfrak{Z}(\Phi)$, построенной на векторном пространстве $W = P \times V$, предполагая, что симметрическая билинейная форма Φ ненулевая, а векторные пространства V — конечномерное, причем базис в пространстве V выбран таким образом, что относительно этого базиса матрица Φ имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_{12} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \Phi_{27} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а диагональные элементы $\Phi_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, z$). Этот базис обычно называют каноническим базисом симметрической билинейной формы Φ .

Таким образом, относительно канонического базиса $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ векторного пространства V имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_{ii} &= \Phi(e_i, e_i) \neq 0 \text{ для } i \in \{1, 2, \dots, z\}, \\ \Phi_{i'i'} &= \Phi(e_{i'}, e_{i'}) \neq 0 \text{ для } i' > z, \text{ (если такие индексы существуют)}, \\ \Phi_{jk} &= \Phi(e_j, e_k) \neq 0 \text{ для таких } j \neq k, \text{ что } i, k \in 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Число ненулевых диагональных элементов матрицы симметрической формы Φ равно рангу этой формы. Известно, что ранг каждой билинейной формы, заданной над конечномерным векторным пространством, не зависит от выбора базиса.

Таким образом, на носителе $W = P \times V$ йордановой алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$ базисом будет уже набор $(e_0, e_1, \dots, e_n)$.

Отметим также, что размерность векторного пространства W равна $n+1$. Значит, ранг йордановой алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$ равен $n+1$. Тогда каждый вектор q из W можно представить единственным образом в виде $a = x^0 e_0 + x$, где $x \in V$.

Из определения операции умножения в $\mathfrak{Z}(\Phi)$ имеем:

$$(x^0 e_0 + x)(y^0 e_0 + y) = (x^0 y^0 + \Phi(x, y))e_0 + x^0 y + y^0 x.$$

Отсюда следует, в частности, что e_0 является единицей алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$. Действительно, учитывая, что $\Phi(0_V, y) = \Phi(y, 0_V) = 0_V$,

$$e_0(y^0 e_0 + y) = (1e_0 + 0_V)(y^0 e_0 + y) = (y^0 + \Phi(0_V, y))e_0 + 1y + y^0 0_V = y^0 e_0 + y.$$

В силу коммутативности операции умножения в алгебре Йордана $\mathfrak{Z}(\Phi)$, $(y^0 e_0 + y)e_0 = y^0 e_0 + y$, для произвольного элемента $y^0 e_0 + y \in P \times V$.

Пусть D — произвольное дифференцирование йордановой алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$. Разложим элементы $D(e_0)$, $D(e_i)$, полученные действием дифференцирования D на базисные элементы, по элементам этого базиса

$$D(e_0) = x_0^0 + x_0^k e_k, \quad D(e_i) = x_i^0 e_0 + x_i^k e_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Найдем условия, которым удовлетворительны координаты $x_\beta^\alpha \in P$, где $\alpha, \beta \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Дифференцируя соотношение $e_0 e_0 = e_0$, получим

$$D(e_0)e_0 + e_0 D(e_0) = D(e_0).$$

Поскольку e_0 — единица алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$, то это равенство примет вид:

$$D(e_0) + D(e_0) = D(e_0).$$

Отсюда $D(e_0) = 0$. Так как D — линейное отображение, то для любого скаляра $\lambda \in P$ или $D(\lambda e_0) = \lambda D(e_0) = 0$. Соотношение $D(e_0) = 0$ равносильно системе уравнений $x_i^0 = 0$, $x_0^i = 0$. Дифференцируя произведение $e_i e_j$ находим, что

$$D(e_i e_j) = D(e_i) e_j + e_i D(e_j).$$

Поскольку $e_i e_j = \Phi(e_i, e_j) e_0$, то $D(e_i, e_j) = 0$. Поэтому предыдущее равенство будет иметь вид

$$D(e_i) e_j + e_i D(e_j) = 0.$$

Подставив в эти соотношения разложение элементов $D(e_i)$ и $D(e_j)$, получим

$$(x_i^0 e_0 + x_i^k e_k) e_j + e_i (x_j^0 e_0 + x_j^k e_k) = 0. \quad (6)$$

Принимая во внимание определение операции умножения в алгебре $\mathfrak{Z}(\Phi)$, соотношение (6) можно представить следующим образом

$$x_i^0 e_j + x_i^k \Phi_{kj} e_0 + x_j^0 e_i + x_j^k \Phi_{ik} e_0 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$x_i^0 e_j + x_j^0 e_i = 0, \quad (7)$$

$$x_i^k \Phi_{kj} + x_j^k \Phi_{ik} = 0. \quad (8)$$

В соотношениях (8) по индексу k ведется суммирование от 1 до n , и $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Из соотношения (7) при $i = j$ следуют равенства $2x_i^0 e_i = 0$. Так как характеристика поля P отлична от 2, а e_i — базисные векторы, то $x_i^0 = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, в системе (5) применительно к йордановой алгебре $\mathfrak{Z}(\Phi)$ мы выделили следующую подсистему линейных однородных уравнений

$$x_0^0 = 0; \quad x_h^0 = 0; \quad x_h^0 = 0, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Перейдем к исследованию системы (8). В силу выбора базиса специальным образом в алгебре $\mathfrak{Z}(\Phi)$, имеем: $\Phi_{is} = 0$ для $i \leq r$ и $s > r$. Поэтому при этих условиях система (8) имеет следующую подсистему, равносильную системе: $x_s^i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$; $s = r + 1, \dots, n$).

Пусть теперь $i \leq r$ и $j \geq m$. Тогда система (8) примет вид

$$x_j^i \Phi_{jj} + x_j^i \Phi_{ii} = 0. \quad (9)$$

В соотношениях (9) по i и по j нет суммирования. Положив в (9) $i = j$, получим $2x_j^i \Phi_{ii} = 0$. Отсюда, в силу того, что характеристика поля P отлична от 2 и $\Phi_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), следует, что $x_i^i = 0$ (по i нет суммирования) и $i = 1, 2, \dots, r$. Выберем переменные x_j^i ($j > ii$, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$) в качестве базисных переменных. Тогда переменные x_j^i ($j > i$) будут свободными. Поэтому ранг системы линейных однородных уравнений (9) будет равен $(r - 1)r/2$.

Таким образом, система (5), определяющая координаты произвольного дифференцирования D йордановой алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$, равносильна следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned} x_0^0 &= 0; & x_h^0 &= 0; & x_i^i &= 0; \\ x_j^i \Phi_{jj} + x_j^i \Phi_{ii} &= 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, r\}), \\ x_s^i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r, \quad s = r + 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (10)$$

Ранг ρ системы (10) равен

$$1 + 2n + r + \frac{(r - 1)r}{2} + r(n - r).$$

Тогда размерность $\dim_P \text{Der } \mathfrak{Z}(\Phi)$ йордановой алгебры симметрической билинейной формы Φ равна $(n+1)^2 - \rho = n^2 - rn + (r-1)r/2$. Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Размерность алгебры Ли дифференцирований йордановой алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$ симметрической билинейной формы Φ ранга $r \geq 1$ над полем P характеристики, отличной от 2, равна*

$$n^2 - rn + \frac{(r-1)r}{2},$$

где n — размерность векторного пространства V над P , на котором задана билинейная форма Φ .

Следствиями этой теоремы являются следующие утверждения.

Следствие 1. *Если ранг симметрической билинейной формы Φ равен 1, то размерность алгебры Ли дифференцирований йордановой алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$ равна $n^2 - n$.*

Следствие 2. *Если ранг симметрической билинейной формы Φ равен n , то*

$$\dim_P \text{Der } \mathfrak{Z}(\Phi) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Найдем матрицу $M(D)$ произвольного дифференцирования D йордановой алгебры относительно базиса $(e_0, e_1, \dots, e_n)$, выбранным специальным образом, описанным в начале этого параграфа.

На основании соотношения (10) имеем, что матрица произвольного дифференцирования D из Der имеет следующий блочный вид

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 \\ 0 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}1 \\ \}2 \\ \}n-r \end{matrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_2^1 & \dots & x_r^1 \\ x_1^2 & 0 & \dots & x_2^r \\ x_1^r & x_2^r & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

M_2 — $(n-r) \times r$ -матрица, M_3 — квадратная матрица порядка $n-r$ с произвольными элементами.

Рассмотрим случай, когда симметрическая билинейная форма — нулевая, т.е. $\Phi(x, y) = 0$, для всех $x, y \in V$. В этом случае операция умножения в йордановой алгебре $\mathfrak{Z}(\Phi_0)$ заданная формулой

$$(x^0 e_0 + x)(y^0 e_0 + y) = (x^0, y^0) e_0 + y^0 x \quad (11)$$

для любых $x^0, y^0 \in P$, $x, y \in V$.

Пусть D — произвольное дифференцирование йордановой алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$, где Φ_0 — нулевая билинейная форма. Поскольку e_0 — единица этой алгебры, то $D(e_0) = 0$, следовательно,

$$0 = D(e_0) = x_0^0 e_0 + x_0^k e_k.$$

Отсюда $x_0^0 = 0$, $x_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Разложив $D(e_i)$ по базисным элементам $(e_0, e_1, \dots, e_n)$, получим $D(e_i) = x_k^0 e_0 + x_i^k e_k$. Тогда будут иметь место соотношения (7) и их следствие $x_k^0 = 0$. Условие (8) выполняется тождественно, так как $\Phi_{ij} = 0$. Поэтому компоненты дифференцирования D удовлетворяет следующей системе линейных однородных уравнений:

$$x_0^0 = 0, x^k = 0, \dots, x_k^0 = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ранг этой системы равен $2n+1$. Поэтому размерность $n = \dim_P \mathfrak{Z}(\Phi_0) = (n+1)^2 - (2n+1) = n^2$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Размерность алгебры Ли дифференцирования йордановой алгебры нулевой симметрической формы Φ_0 равна n^2 , где $n = \dim_P V$.*

Поскольку ранг нулевой матрицы равен 0 [2], то формула $\dim_P \text{Der } \mathfrak{Z}(\Phi) = n^2 - rn + (r-1)r/2$ при $r = 0$ дает размерность алгебры дифференцирований йордановой алгебры с нулевой симметрической формы Φ_0 . Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Размерность алгебры Ли дифференцирований йордановой алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi)$ симметрической билинейной формы Φ над полем P , характеристики, отличной от 2, равна*

$$n^2 - rn + \frac{(r-1)r}{2},$$

где $n = \dim_P V$, $r = \text{rank } \Phi$.

Вернемся снова к йордановой алгебре нулевой симметрической билинейной формы. Закон умножения (11) элементов этой алгебры дает, что алгебра $\mathfrak{Z}(\Phi_0)$ ассоциативна и базисные элементы e_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют тождеству $e_i e_j = 0$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{Z}(\Phi_0)$ обладает базисом $(e_0, e_1, \dots, e_n)$, где e_0 — единица, а $e_i e_j = 0$. Отсюда следует, что подалгебра $I = \langle e_0, e_1, \dots, e_n \rangle$ является идеалом алгебры $\mathfrak{Z}(\Phi_0)$, причем факторалгебра $\mathfrak{Z}(\Phi_0)/I$ изоморфна алгебре P . Следовательно, алгебра $\mathfrak{Z}(\Phi_0)$ является алгеброй А. Вейля ширины n и высоты 1 [1].

Алгебре $\mathfrak{Z}(\Phi_0)$ можно дать другую интерпретацию: алгебра $\mathfrak{Z}(\Phi_0)$ изоморфна сумме Уитна n экземпляров алгебры дуальных чисел $P(\varepsilon) = \{\lambda \varepsilon_0 + \mu \varepsilon \mid \lambda, \mu \in P\}$, причем ε_0 — единица алгебры $P(\varepsilon)$, а $\varepsilon^2 = 0$. Эта алгебра в книге [3] называется алгеброй двойных чисел. В [3] рассматривается более широкий класс таких чисел — в них P является произвольным кольцом с единицей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985.
2. Жевланов К. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
3. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М.: ИЛ, 1960.

Султанов Адгам Яхиевич
Пензенский государственный университет
E-mail: sultanovaya@rambler.ru

Глебова Мария Владимировна
Пензенский государственный университет
E-mail: mvmorgun@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 100–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-100-114

УДК 514.76

О РАССЛОЕНИЯХ ВЕЙЛЯ

© 2023 г. А. Я. СУЛТАНОВ, О. А. МОНАХОВА, Г. А. СУЛТАНОВА

Аннотация. В статье рассмотрены некоторые лифты тензорных полей и линейных связностей, заданных на гладком классе C^∞ многообразии, в его расслоение Вейля M_n^A . Дан краткий обзор результатов по теории расслоений Вейля второго порядка, полученных за последние годы.

Ключевые слова: дифференцируемое многообразие, расслоение Вейля, вертикальный лифт тензорного поля, горизонтальный лифт тензорного поля, горизонтальный лифт линейной связности, полный лифт линейной связности.

ON WEIL BUNDLES

© 2023 А. Ya. SULTANOV, O. A. MONAKHOVA, G. A. SULTANOVA

ABSTRACT. In the paper, some lifts of tensor fields and linear connections given on a smooth manifold of the class C^∞ to its Weil bundle M_n^A are considered. A brief review of results on the theory of second-order Weil bundles obtained in recent years is given.

Keywords and phrases: differentiable manifold, Weil bundle, vertical lift of a tensor field, horizontal lift of a tensor field, horizontal lift of a linear connection, complete lift of a linear connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 53A55

1. Введение. Линейная связность в геометрии была введена в 1918 году Г. Вейлем, а в общем виде пространство аффинной связности определено Э. Картаном. Одной из основных задач геометрии пространства, снабженного дифференциально-геометрической структурой, является изучение группы автоморфизмов этого пространства. Вопрос о движениях в евклидовых и неевклидовых пространствах был поставлен С. Ли. В конце XIX и начале XX века были опубликованы работы В. Киллинга, Г. Фубини, Л. Бианки, Г. Риччи и других авторов по группам движений в римановых пространствах.

В 1953 году А. Вейль построил расслоение A -близких точек, где A — локальная алгебра. К числу таких расслоений относятся касательные расслоения и расслоения p^v -скоростей Эресмана. А. П. Широков показал, что на расслоениях Вейля существует естественная A -гладкая структура. Этот факт позволил упростить построение лифтов с базовых многообразий на тотальные пространства этих расслоений. В. В. Вишневым изучались многообразия над алгеброй плюральных чисел, являющиеся полукасательными расслоениями высших порядков над ступенчато расслоенным многообразием.

В. В. Шурыгиным изучались категории многообразий над алгебрами, объектами которых являются многообразия над ассоциативными, коммутативными алгебрами, моделируемые произвольными модулями, функторы Вейля, связности в расслоениях Вейля.

Расслоения Вейля в настоящее время являются активно развивающейся областью геометрии. Отметим работы А. Моримото, И. Коларжа, Р. Алонсо, Г. Н. Бушуевой и В. В. Шурыгина,

Л. Б. Смоляковой и В. В. Шурыгина и других авторов. Подробная библиография работ по теории расслоенных пространств и многообразиям над алгебрами приведена в книге В. В. Вишневского, А. П. Широкова, В. В. Шурыгина [5], в статьях В. В. Вишневского, А. П. Широкова, В. В. Шурыгина, М. А. Малахальцева.

2. Алгебры Вейля. Алгебры А. Вейля лежат в основе определения расслоений Вейля, а также используются при построении лифтов геометрических объектов с базы в расслоение Вейля.

Приведем здесь определение алгебры Вейля над полем действительных чисел.

Определение 1. Линейная алгебра $\mathbb{A}$ конечного ранга над полем $\mathbb{R}$ называется алгеброй Вейля, если выполнены следующие условия:

- (i) $\mathbb{A}$ — коммутативна, ассоциативна, обладает единицей;
- (ii) существует идеал $\mathbb{I}$ такой, что $\mathbb{I}^p \neq \{0\}$, а $\mathbb{I}^{p+1} = \{0\}$;
- (iii) факторалгебра $\mathbb{A}/\mathbb{I}$ изоморфна $\mathbb{R}$.

Число p называется высотой алгебры $\mathbb{A}$, а число m , равное размерности факторалгебры $\mathbb{I}/\mathbb{I}^2$, называется шириной алгебры $\mathbb{A}$. В идеале $\mathbb{I}$, который будем обозначать также символом $\mathbb{A}^0$, можно выбрать m элементов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, порождающие этот идеал. Одномерная подалгебра, порожденная единицей δ алгебры $\mathbb{A}$, изоморфна $\mathbb{R}$. отождествив δ с 1 поля действительных чисел $\mathbb{R}$, алгебру $\mathbb{A}$ можно представить в виде полупрямой суммы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{I}$: $\mathbb{A} = \mathbb{R} + \mathbb{I}$. Каждый элемент a алгебры $\mathbb{A}$ единственным образом представим в виде $a_0 + a_1 = a$; число a_0 назовем вещественной частью и обозначим $\text{Re } a$. Если $a_0 \neq 0$, то $a^k \neq 0$ при любом натуральном k . Отсюда следует, что все нильпотентные элементы алгебры $\mathbb{A}$ принадлежат идеалу $\mathbb{I}$. Идеал $\mathbb{I}$ называется радикалом и обозначается символом $\text{Rd } \mathbb{A}$. Базис в алгебре $\mathbb{A}$ можно построить из элементов $\varepsilon^0 = 1$ и $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} \dots \varepsilon_m^{\alpha_m}$, где α_i — неотрицательные целые числа и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \neq 0$. Для обозначения базисных элементов удобно использовать мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ с неотрицательными целыми составляющими α_i и $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leq p$. Тогда $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} \dots \varepsilon_m^{\alpha_m} = \varepsilon^\alpha$ мультииндекс $0 = (0, \dots, 0)$ соответствует 1. Количество всевозможных мультииндексов α таких, что $0 \leq |\alpha| \leq p$ равно C_{p+m}^m — числу сочетаний из $p + m$ элементов по m элементов. Если $|\alpha| > p$, то $\varepsilon^\alpha = 0$. Мультииндексы складываются как арифметические векторы. Ранг алгебры $\mathbb{A}$ не превосходит C_{p+m}^m . Если $\dim \mathbb{A} < C_{p+m}^m$, то не все мультииндексы будут соответствовать базисным элементам. Обозначим через Λ — множество мультииндексов, соответствующих базисным элементам алгебры $\mathbb{A}$, а через Λ^* — множество всех остальных мультииндексов α таких, что $|\alpha| \leq p$. Для каждого $\mu^* \in \Lambda^*$ имеем

$$\varepsilon^{\mu^*} = a_\lambda^{\mu^*} \varepsilon^\lambda, \quad (1)$$

где $a_\lambda^{\mu^*} \in \mathbb{R}$, а по мультииндексу $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ ведется суммирование.

Соотношения (1) называются определяющими соотношениями алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

Если $\dim \mathbb{A} = C_{p+m}^m$, то $\Lambda^* = \emptyset$. В этом случае алгебра $\mathbb{A}$ не имеет определяющих соотношений и называется свободной алгеброй Вейля.

В алгебре Вейля $\mathbb{A}$ можно выделить цепочку идеалов

$$\mathbb{A} \supset \mathbb{I} \supset \mathbb{I}^2 \supset \dots \supset \mathbb{I}^p \supset \{0\}. \quad (2)$$

Будем считать, что описанный выше базис $(\varepsilon^0, \varepsilon^\alpha)$, $\alpha \neq 0$, удовлетворяет условию: набор (ε^τ) является базисом идеала $\mathbb{I}^r$ при $|\tau| \geq r$. Тогда каждый набор элементов вида ε^α , где $|\alpha| < r$, не будет содержаться в $\mathbb{I}^r$. Такой базис будем называть подчиненным цепочке идеалов (2).

Пусть $\mathbb{A}$ — произвольная линейная алгебра над $\mathbb{R}$. Элемент $e \in \mathbb{A}$ называется идемпотентным, иначе идемпотентом, если $e^2 = e$. Во всякой унитарной алгебре имеются два идемпотента: δ и 0 , называемые тривиальными.

Предложение 1. В любой алгебре Вейля нет идемпотентов, отличных от 1 и 0.

Известно, что если в конечномерной коммутативной ассоциативной алгебре с единицей имеется делитель нуля, не принадлежащий радикалу, то в ней имеется нетривиальный идемпотент.

Из этого факта и предложения 1 получаем следующее утверждение.

Предложение 2.

1. В любой алгебре Вейля $\mathbb{A}$ каждый делитель нуля принадлежит радикалу алгебры $\mathbb{A}$.
2. Элемент a алгебры Вейля $\mathbb{A}$ обратим тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re} a \neq 0.$$

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — линейные алгебры над полем $\mathbb{R}$. Линейное отображение $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если для любых элементов x, y алгебры $\mathbb{A}$ выполняется условие $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Биактивный гомоморфизм называется изоморфизмом.

Предложение 3. Если $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — изоморфизм, $\mathbb{A}$ — унитарная алгебра с единицей $\delta_{\mathbb{A}}$, то $\mathbb{B}$ также унитарна и $\varphi(\delta_{\mathbb{A}})$ — ее единица.

Используя две линейные алгебры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ над полем $\mathbb{R}$, можно построить стандартным образом их прямую сумму $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$. Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — унитарные алгебры, $\delta_{\mathbb{A}}, \delta_{\mathbb{B}}$ их единицы, соответственно, то $(\delta_{\mathbb{A}}, \delta_{\mathbb{B}})$ является единицей прямой суммы $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$.

Предложение 4. Если ассоциативная унитарная алгебра $\mathbb{A}$ изоморфна прямой сумме $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ алгебр $\mathbb{B} \neq \{0_{\mathbb{B}}\}, \mathbb{C} \neq \{0_{\mathbb{C}}\}$, то каждая из них является ассоциативной и унитарной.

Определение 2. Линейная алгебра $\mathbb{A}$, изоморфная прямой сумме $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ алгебр $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$, не сводящихся только к нулевому элементу, называется приводимой. В противном случае алгебра $\mathbb{A}$ называется неприводимой.

Имеет место следующее

Предложение 5. Любая алгебра Вейля является неприводимой алгеброй.

Доказательство. Пусть алгебра Вейля $\mathbb{A}$ — приводимая алгебра и изоморфна $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$, причем $\mathbb{B} \neq \{0_{\mathbb{B}}\}, \mathbb{C} \neq \{0_{\mathbb{C}}\}$. Тогда в силу предложения 4 $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ — унитарные ассоциативные алгебры с единицами $\delta_{\mathbb{B}}$ и $\delta_{\mathbb{C}}$ соответственно. В силу нетривиальности алгебры $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ $\delta_{\mathbb{B}} \neq 0_{\mathbb{B}}$ и $\delta_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$, поэтому элементы $\delta_1 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})$ и $\delta_2 = (0_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}})$ отличны от единицы $(\delta_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}})$. Кроме того, эти элементы являются идемпотентами алгебры $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$, так как $\delta_1^2 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})^2 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}}) = \delta_1$, аналогично $\delta_2^2 = \delta_2$. Прообразы этих элементов при изоморфизме $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ являются идемпотентами алгебры $\mathbb{A}$. Действительно, если φ — изоморфизм, то φ^{-1} также является изоморфизмом и тогда

$$(\varphi^{-1}(\delta_i))^2 = \varphi^{-1}(\delta_i)\varphi^{-1}(\delta_i) = \varphi^{-1}(\delta_i^2) = \varphi^{-1}(\delta_i) \quad (i = 1, 2).$$

На основании предложения 1 заключаем, что $\varphi^{-1}(\delta_1)$ равен $0_{\mathbb{A}}$ либо $1_{\mathbb{A}}$. Если $\varphi^{-1}(\delta_1) = 0_{\mathbb{A}}$, то $\delta_1 = (0_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})$, т.е. $\delta_{\mathbb{B}} = 0_{\mathbb{B}}$, чего быть не может.

Если $\varphi^{-1}(\delta_1) = 1_{\mathbb{A}}$, то $\varphi(1_{\mathbb{A}}) = \delta_1$, т.е. $(\delta_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}}) = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})$. Отсюда $\delta_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$. Противоречие. Таким образом, алгебра Вейля $\mathbb{A}$ не может быть приводимой. $\square$

Из этого предложения следует, что прямая сумма двух алгебр Вейля не является алгеброй Вейля.

В прямой сумме $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ алгебр Вейля можно выделить подалгебру, которая является алгеброй Вейля, порожденной алгебрами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$. Опишем способ построения этой подалгебры.

В определении алгебры Вейля есть условие (3) о существовании изоморфизма $\omega: \mathbb{A}/\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Будем обозначать элементы факторалгебры $\mathbb{A}/\mathbb{T}$ символами $\bar{a}$, где $a \in \mathbb{A}$. Тогда $\bar{a} = \bar{b}$ в том и только в том случае, когда $a \equiv b \pmod{\mathbb{T}}$. Определим отображение $\pi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу $\pi(a) = \omega(\bar{a})$. Оно является эпиморфизмом. Действительно, для любого элемента $a_0 \in \mathbb{R}$ имеем $\pi(a_0 1) = \omega(\overline{a_0 1}) = a_0 \omega(\bar{1}) = a_0 1 = a_0$, т.е. отображение π сюръективно. Для любых $a, b \in \mathbb{A}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \pi(a + b) &= \omega(\overline{a + b}) = \omega(\bar{a} + \bar{b}) = \omega(\bar{a}) + \omega(\bar{b}) = \pi(a) + \pi(b), \\ \pi(ta) &= \omega(\overline{ta}) = \omega(t\bar{a}) = t\pi(a), \quad \pi(ab) = \omega(\overline{ab}) = \omega(\bar{a}\bar{b}) = \pi(a)\pi(b), \end{aligned}$$

которые означают, что π — гомоморфизм.

Определение 3. Эпиморфизм $\pi_{\mathbb{A}}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$, определенный условием $\pi_{\mathbb{A}}(a) = \omega_{\mathbb{A}}(\bar{a})$, называется канонической проекцией алгебры Вейля $\mathbb{A}$ на алгебру действительных чисел $\mathbb{R}$.

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — алгебры Вейля над $\mathbb{R}$, единицы которых отождествлены с единицей поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ — прямая сумма этих алгебр. Рассмотрим подмножество $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, состоящее из всевозможных пар $(a, b) \in \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, удовлетворяющих условию $\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{B}}(b)$.

Предложение 6. Подмножество $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$, снабженное ограничениями основных операций алгебры $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, являются унитарной подалгеброй прямой суммы $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$.

Предложение 7. Прямая сумма $\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$ радикалов $\overset{0}{\mathbb{A}}$, $\overset{0}{\mathbb{B}}$ алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно, является радикалом алгебры $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$.

Предложение 8. Алгебра $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ является алгеброй Вейля.

Определение 4. Алгебра Вейля $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ называется суммой Уитни алгебр Вейля $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Из рассмотренного выше следует, что сумма Уитни $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ алгебр Вейля $\mathbb{A} = \overset{0}{\mathbb{R}} \oplus \overset{0}{\mathbb{A}}$, $\mathbb{B} = \overset{0}{\mathbb{R}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$ изоморфна алгебре Вейля с радикалом $\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$: $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B} \cong \overset{0}{\mathbb{R}} + (\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}})$.

Введенная операция обладает следующим свойством: она не сохраняет свойство фробениусовости.

Определение 5. Унитарная алгебра $\mathbb{A}$ конечного ранга над полем $\mathbb{R}$ называется фробениусовой, если существует невырожденная билинейная форма q на $\mathbb{A}$ со значениями в $\mathbb{R}$ такая, что $q(a, bc) = q(ab, c)$ для любых $a, b, c \in \mathbb{A}$.

Определение 6. Сумма Уитни любого конечного числа фробениусовых алгебр Вейля не является фробениусовой.

Фробениусовы алгебры Вейля существуют. Например, любая алгебра плюралных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^{m+1})$ — фробениусова.

Известны следующие теоремы.

Теорема 1. Тензорное произведение фробениусовых алгебр является фробениусовой алгеброй [6].

Теорема 2. Тензорное произведение алгебр Вейля над полем $\mathbb{R}$ является алгеброй Вейля [13].

На основании этих теорем докажем следующее

Предложение 9. Пусть $\mathbb{A}$ — фробениусова алгебра Вейля ширины $m_{\mathbb{A}}$ и высоты $p_{\mathbb{A}}$, $\mathbb{B}$ — фробениусова алгебра Вейля ширины $m_{\mathbb{B}}$, высоты $p_{\mathbb{B}}$. Тогда тензорное произведение $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ — фробениусова алгебра Вейля ширины $m_{\mathbb{A}} + m_{\mathbb{B}}$ и высоты $p_{\mathbb{A}} + p_{\mathbb{B}}$.

Предложение 10. Для любых натуральных чисел m и p , удовлетворяющих условию $m \leq p$, существует фробениусова алгебра Вейля ширины m и высоты p .

Предложение 11.

- (1) Если $\dim \mathbb{A} = 2$, то алгебра Вейля $\mathbb{A}$ изоморфна алгебре дуальных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$.
- (2) Если $\dim \mathbb{A} = 3$, то $\mathbb{A}$ изоморфна одной из следующих алгебр:
 - (a) алгебре плюралных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^2) = \{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}, \varepsilon^3 = 0\}$;
 - (b) сумме Уитни $\mathbb{R}(\varepsilon_1) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon_2)$ алгебр дуальных чисел.
- (3) Если $\dim \mathbb{A} = 4$, то $\mathbb{A}$ изоморфна одной из следующих пяти алгебр Вейля:
 - (a) алгебре плюралных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^3) = \{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \varepsilon^4 = 0\}$;
 - (b) сумме Уитни $\mathbb{R}(\varepsilon_1) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon_2^2)$ алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon_1)$ дуальных чисел алгебры плюралных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon_2^2)$;
 - (c) сумме Уитни $\bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{R}(\varepsilon_i)$ алгебр дуальных чисел;
 - (d) Алгебре Вейля $\mathbb{A}$ ширины 2 и высоты 2 с псевдобазисом $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; базис алгебры $\mathbb{A}$ составляют элементы $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1^2$. Определяющие соотношения алгебры $\mathbb{A}$: $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_2^2 = q \varepsilon_1^2$ ($q = \pm 1$).

Доказательство опирается на классификацию неприводимых ассоциативных унитарных алгебр [5]. Поскольку всякая алгебра Вейля — ассоциативна, неприводима и унитарна, то из рассматриваемой классификации выделим алгебры Вейля.

Из приведенного предложения следует, что каждая алгебра Вейля размерности 2 или 3 является свободной. Среди алгебр Вейля, размерности которых больше трех, возможны как свободные, так и несвободные алгебры.

Среди алгебр Вейля размерности 4 алгебры (3а) и (3с) — свободные, а алгебры (3b), (3d) — несвободные. Определяющим соотношением алгебры (3b) является соотношение $\varepsilon_1^2 = 0$.

3. Расслоения Вейля. В основе определения расслоения Вейля лежат алгебры Вейля и гладкие многообразия. Обозначим через $\mathbb{A}$ — произвольную алгебру Вейля конечного ранга над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Будем считать, что единица δ алгебры $\mathbb{A}$ отождествлена с единицей 1 поля $\mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{A}$ как векторное пространство может быть представлено в виде прямой суммы $\mathbb{R}$ и идеала $\mathbb{T}$. Выберем какой-нибудь базис ε^α , $\alpha = 0, 1, \dots, \dim \mathbb{A} - 1$ алгебры $\mathbb{A}$, причем $\varepsilon^0 = 1$. Наряду с $\mathbb{A}$ будем использовать дуальное пространство $\mathbb{A}^*$ линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$, со значениями в $\mathbb{R}$. Обозначим через ε_α элементы дуального базиса к базису (ε^α) , тогда $\varepsilon_\alpha(\varepsilon^\beta) = \delta_\alpha^\beta$. Будем использовать также мультииндексы $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, где s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — целые неотрицательные числа. Введем обозначения

$$|s| = s_1 + s_2 + \dots + s_n; \quad s! = s_1!s_2!\dots s_n! \quad C_s^t = \frac{s!}{t!(s-t)!}.$$

Пусть M — n -мерное вещественное связное гладкое многообразие класса C^∞ , обозначим через $C^\infty(M)$ алгебру гладких класса C^∞ функций, заданных на M и принимающих значения в $\mathbb{R}$.

Определение 7. Точкой, $\mathbb{A}$ -близкой к точке $q \in M$, называется гомоморфизм $j_q: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{A}$, удовлетворяющий условию $j_q(f) \equiv f(q) \pmod{\mathbb{T}}$.

Множество точек, $\mathbb{A}$ -близких к точке $q \in M$, обозначим через $M_q^\mathbb{A}$. Объединение $\bigcup_{q \in M} M_q^\mathbb{A}$ обозначим через $M^\mathbb{A}$. Отображение $\pi: M^\mathbb{A} \rightarrow M$, определенное условием $\pi(j_q) = q$, называется канонической проекцией, а тройка $(M^\mathbb{A}, \pi, M)$ — расслоением Вейля.

На тотальном пространстве $M^\mathbb{A}$ возникают структуры гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ и над алгеброй $\mathbb{R}$. Прежде чем перейти к описанию этих структур, отметим некоторые свойства элементов пространства $M^\mathbb{A}$.

Предложение 12. Для любого элемента $j_q \in M^\mathbb{A}$ имеет место равенство $j_q(1) = 1$.

Следствие 1. Для любого элемента $j_q \in M^\mathbb{A}$ и постоянной функции $c: M \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место равенство $j_q(c) = c$.

Пусть $f \in C^\infty(M)$.

Определение 8.

1. Функция $f_{(0)}: M^\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная условием $f_{(0)} = f \circ \pi$, называется вертикальным лифтом функции f .
2. Функция $f^\mathbb{A}: M^\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, определенная условием $f^\mathbb{A}(j_q) = j_q(f)$ для всех $j_q \in M^\mathbb{A}$, называется естественным продолжением f с базы M в пространство $M^\mathbb{A}$.

Из определения следует $(f + g)^\mathbb{A} = f^\mathbb{A} + g^\mathbb{A}$, $(cf)^\mathbb{A} = cf^\mathbb{A}$ и $(fg)^\mathbb{A} = f^\mathbb{A}g^\mathbb{A}$, $c \in \mathbb{R}$.

Пусть на M выбран атлас гладкой структуры и (U, x^i) — произвольная карта этого атласа. Для координатных функций x^i построим их естественные продолжения $(x^i)^\mathbb{A} = X^i$.

Обозначим через $\pi^{-1}(U)$ — полный прообраз области U выбранной карты. Из определения естественного продолжения функций имеем

$$(x^i)^\mathbb{A}(j_q) = j_q(x^i)$$

для любого $j_q \in \pi^{-1}(U)$.

Так как $j_q(x^i) \equiv x^i(q) \pmod{\mathbb{T}}$, то

$$(x^i)^\mathbb{A}(j_q) = x_{(0)}^i(j_q) + x_\alpha^i(j_q)\varepsilon^\alpha \quad (\alpha \neq 0). \quad (3)$$

Из последних соотношений следует, что

$$(x^i)^\mathbb{A} = x_{(0)}^i + x_\alpha^i\varepsilon^\alpha.$$

Здесь $x_\alpha^i: M^\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ — функции, определенные соотношением (3).

Пусть q — произвольная точка окрестности U . Для каждой функции f существует окрестность точки q , содержащаяся в U , что в этой окрестности функция f может быть представлена формулой Тейлора

$$f = f(q) + \sum_{|s|=1}^p \frac{1}{s!} D_s f(q)(x-q)^s + \sum_{|s'|=p+1} \frac{1}{s'!} (D_{s'} f \circ \xi)(x-q)^{s'}. \quad (4)$$

Здесь p — высота алгебры Вейля $\mathbb{A}$, функция ξ определяется условием

$$\xi(q') = (q^i + \theta(q'^i - q^i)), \quad 0 < \theta < 1, \quad \text{а} \quad q^i = x^i(q), \quad q'^i = x^i(q').$$

Выражения $(x-q)^s$ означают кратную запись выражения $(x^1 - q^1)^{s_1}(x^2 - q^2)^{s_2} \dots (x^n - q^n)^{s_n}$. В формуле (4) $D_s f(q)$ определены так

$$D_s f(q) = \frac{\partial^{|s|} f}{(\partial x^1)^{s_1} (\partial x^2)^{s_2} \dots (\partial x^n)^{s_n}}(q).$$

Для каждой точки j_q , $\mathbb{A}$ -близкой к точке q на основании (4) имеем

$$j_q(f) = f(q) + \sum_{|s|=1}^p \frac{1}{s!} D_s f(q)(j_q(x) - q)^s. \quad (5)$$

В полученном равенстве имеем

$$(j_q(x) - q)^s = (j_q(x^1) - q^1)^{s_1} (j_q(x^2) - q^2)^{s_2} \dots (j_q(x^n) - q^n)^{s_n}.$$

Так как $j_q(x^i) - q^i = x^i(q) + q_\alpha^i \varepsilon^\alpha - q^i = q_\alpha^i \varepsilon^\alpha = Q^i$ ($\alpha \neq 0$), то (5) можно переписать в виде

$$j_q(f) = f(q) + \sum_{|s|=1}^p \frac{1}{s!} D_s f(q) Q^s, \quad (6)$$

Положим $D_0 f(q) = f(q)$, $Q^0 = 1$. Тогда равенство (6) можно представить следующим образом:

$$j_q(f) = \frac{1}{s!} D_s f(q) Q^s, \quad |s| \leq p. \quad (7)$$

В формуле (7) по мультииндексу s ведется суммирование.

Предложение 13. Если $j_q(x^i) = j_{q'}(x^i)$, то $j_q = j_{q'}$.

Следствием предложения является

Предложение 14. Если $(x^i)^\mathbb{A}(j_q) = (x^i)^\mathbb{A}(j_{q'})$, то $j_q = j_{q'}$, при этом $q = q'$.

Таким образом, отображение $\tilde{h}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{A}^n$, заданное по правилу

$$\tilde{h}(j_q) = (X^1(j_q), X^2(j_q), \dots, X^n(j_q)),$$

является инъективным. Здесь использовано обозначение $X^i = (x^i)^\mathbb{A}$.

Обозначим через $W \subset \mathbb{R}^n$ образ окрестности U при гомеоморфизме $h: U \rightarrow W$ по правилу $h(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q))$.

Предложение 15. Для каждого элемента $(A^1, A^2, \dots, A^n) \in \mathbb{A}^n$, где $A^i = a^i + A_1^i$, где $(a^1, a^2, \dots, a^n) \in W$, $A_1^i \in \mathbb{T}$, существует гомоморфизм j_a , $\mathbb{A}$ -близкий к точке $a \in U$ с координатами $a^i = x^i(a)$ такой, что $j_a(x^i) = A^i$.

Предложение 16. Для каждой функции $f \in C^\infty(M_n)$ ее естественное продолжение $f^\mathbb{A}$ является голоморфной над $\mathbb{A}$ [12].

Имеет место равенство

$$df^\mathbb{A} = (\partial_j f)^\mathbb{A} dX^j.$$

Отсюда получаем следующую формулу для вычисления частной производной по переменной X^j

$$\frac{\partial f^\mathbb{A}}{\partial X^j} = (\partial_j f)^\mathbb{A}.$$

Следствием этого предложения является

Предложение 17. Пусть $(U, x^i), (V, y^i)$ — две карты гладкой структуры на M и $U \cap V \neq \emptyset$, $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ — формулы перехода. Тогда $Y^i = Y^i(X^1, \dots, X^n)$ будут голоморфными функциями, где $X^i = (x^i)^\mathbb{A}$, $Y^i = (y^i)^\mathbb{A}$, причем

$$J\left(\frac{\partial Y^i}{\partial X^j}\right) \neq 0$$

и не является делителем нуля алгебры $\mathbb{A}$ в каждой точке $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$.

Доказательство. Так как формулы $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ обратимы, то $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$. Тогда $X^i = X^i(Y^1, Y^2, \dots, Y^n)$. Составим произведения якобиевых матриц с элементами $\partial Y^i / \partial X^j$ и $\partial X^i / \partial Y^j$:

$$\frac{\partial Y^i}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial Y^k} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)^\mathbb{A} \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right)^\mathbb{A} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right)^\mathbb{A} = (\delta_j^i)^\mathbb{A} = \delta_j^i.$$

Отсюда следует невырожденность якобиевых матриц. $\square$

В заключение этого параграфа заметим, что если $f^\mathbb{A} = 0$, то $f = 0$. Действительно, для произвольной точки $j_x \in M_n^\mathbb{A}$ имеем $f^\mathbb{A}(j_x) = j_x(f) \equiv f(x) \pmod{\mathbb{T}}$. Отсюда $0 \equiv f(x) \pmod{\mathbb{T}}$, значит, $f(x) = 0$ для любой точки $x \in M$.

4. Лифты тензорных полей и линейных связностей с базы M_n в расслоение Вейля. Рассмотрим расслоения Вейля $M_n^\mathbb{A}$, снабжённые гладкой класса C^∞ структурой над полем действительных чисел.

Определение 9. Естественным (δ) -лифтом тензорного поля типа $(1, s)$ или линейной связности с M_n в расслоение $M_n^\mathbb{A}$ называется (δ) -реализация их естественных $\mathbb{A}$ -продолжений.

Если в алгебре Вейля главная единица δ включена в базис, $\varepsilon^0 = 1 = \delta$, то (δ) -лифт будет обозначаться символом (0) вместо (ε^0) , (0) -лифт называется также полным лифтом тензорного поля типа $(1, s)$ или линейной связности. Будем считать, что $\varepsilon^0 = 1 = \delta$.

Сначала остановимся на лифтах функций с M_n в $M_n^\mathbb{A}$. Пусть $a^* \in \mathbb{A}^*$, $C^\infty(M_n)$, $C^\infty(M_n^\mathbb{A})$ — алгебры вещественных функций класса C^∞ на M_n и на $M_n^\mathbb{A}$, соответственно.

Определение 10. (a^*) -лифтом функций называется отображение

$$(a^*): C^\infty(M_n) \rightarrow C^\infty(M_n^\mathbb{A}),$$

определённое тождеством

$$f_{(a^*)} = a^* \circ f^\mathbb{A},$$

где $\circ$ означает композицию указанных отображений.

Предложение 18. (a^*) -Лифты функций удовлетворяют следующим тождествам:

- (a) $(tf + sg)_{(a^*)} = tf_{(a^*)} + sg_{(a^*)}$;
- (b) $f_{(ta^* + sb^*)} = tf_{(a^*)} + sf_{(b^*)}$;
- (c) $f_{((t+s)a^*)} = tf_{(a^*)} + sf_{(a^*)}$;
- (d) $(fg)_{(a^*)}^{(b)} = f_{(a^*)}^{(\alpha)} g_{(\alpha)}^{(b)}$;

здесь $t, s \in \mathbb{R}$, $f_{(a^*)}^{(\alpha)} = f_{(a^* \cdot \varepsilon^\alpha)}$, $g_{(\alpha)} = g_{(\varepsilon^\alpha)}$, ε^α — базисные элементы алгебры $\mathbb{A}$, ε_α — элементы дуального базиса к базису (ε^α) .

Предложение 19. Если элементы $a^1, \dots, a^l$ алгебры $\mathbb{A}$ линейно независимы и $(f_\alpha)_{(b^* \cdot a^\alpha)} = 0$ для всех $b^* \in \mathbb{A}^*$, то $f_\alpha = 0$.

Из определения 10 получим, что для векторного поля X , заданного на базе M_n , его (δ) -реализация определяется условием $X^{(0)} = (X^\mathbb{A})^{(\delta)}$. Для любого элемента $a \in \mathbb{A}$ положим $X^{(a)} = (aX^\mathbb{A})^{(\delta)}$. Векторное поле $X^{(a)}$ называется (a) -лифтом векторного поля X с M_n в $M_n^\mathbb{A}$.

Предложение 20. Векторное поле $X^{(a)}$ на $M_n^\mathbb{A}$ — единственное векторное поле, удовлетворяющее тождеству

$$X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)}.$$

Таким образом, (a) -реализация каждого голоморфного векторного поля $\tilde{X}$ на расслоении $M_n^\mathbb{A}$ является конечной суммой лифтов векторных полей, заданных на базе расслоения.

Предложение 21. Для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$, $a, b \in \mathbb{A}$ и $f \in C^\infty(M_n)$ имеют место следующие равенства:

- (a) $X^{(ta+sb)} = tX^{(a)} + sX^{(b)}$;
- (b) $(tX + sY)^{(a)} = tX^{(a)} + sY^{(a)}$;
- (c) $(fX)^{(a)} = f_{(\alpha)} X^{(a\varepsilon^\alpha)}$;
- (d) $[X^{(a)}, Y^{(b)}] = ([X, Y])^{(ab)}$.

Следствием предложения 19 является

Предложение 22. Если $a^1, a^2, \dots, a^l$ — $\mathbb{R}$ -линейно независимые элементы алгебры $\mathbb{A}$,

$$X_1, X_2, \dots, X_l$$

— векторные поля на M_n и сумма $X_\alpha^{(a^\alpha)} = 0$, то $X_\alpha = 0$ для каждого $\alpha = 1, 2, \dots, l$.

Это предложение позволяет доказать следующее

Предложение 23. Если $a^1, a^2, \dots, a^l$ — $\mathbb{R}$ -линейно независимые элементы алгебры $\mathbb{A}$,

$$K_1, K_2, \dots, K_l$$

— тензорные поля типа $(1, s)$ ($s \geq 1$) и $K_\alpha^{(a^\alpha)} = 0$, то $K_\alpha = 0$ для всех $\alpha = 1, 2, \dots, l$.

Как было сказано в начале параграфа, полный лифт тензорного поля K типа $(1, s)$ обозначается через $K^{(0)}$ вместо записи $K^{(\varepsilon^0)}$. Таким образом,

$$K^{(0)} = (K^\mathbb{A})^{(\delta)}.$$

В частности, для векторного поля $X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$, полный лифт $X^{(0)}$ определяется условием

$$X^{(0)} = (X^\mathbb{A})^{(\delta)}.$$

Для каждого элемента $a \in \mathbb{A}$ положим

$$X^{(a)} = (aX^\mathbb{A})^{(\delta)}, \quad K^{(a)} = (aK^\mathbb{A})^{(\delta)}.$$

Эти лифты называются (a) -лифтами векторного поля X и тензорного поля K , соответственно.

Предложение 24. (a) -лифт $K^{(a)}$ тензорного поля K , заданного на M_n , является единственным, удовлетворяющим тождеству

$$K^{(a)}(X_1^{(b_1)}, \dots, X_s^{(b_s)}) = (K(X_1, \dots, X_s))^{(ab_1 \dots b_s)}.$$

Если $K = I$ — единичный аффинор на M_n , то его (a) -лифт определяется условием

$$I^{(a)}(X^{(b)}) = X^{(ab)}.$$

Полный лифт $I^{(0)} = I^{(\varepsilon^0)}$ определяется тождеством

$$I^{(0)}(X^{(b)}) = X^{(b)},$$

поэтому является единичным аффинором на M_n^A . (a) -лифты тензорных полей K типа $(1, s)$ обладают свойствами, аналогичными свойствам (a) -лифтов векторных полей.

Предложение 25. Пусть K, Q — тензорные поля типа $(1, s)$ на M_n , $t, s \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{A}$. Имеют место следующие тождества:

- (a) $K^{(ta+sb)} = tK^{(a)} + sK^{(b)}$;
- (b) $(tK + sQ)^{(a)} = tK^{(a)} + sQ^{(a)}$;
- (c) $(fK)^{(a)} = f_{(\alpha)}K^{(a\varepsilon^\alpha)}$;
- (d) $L_{X^{(b)}}K^{(b)} = (\mathcal{L}_X K)^{(ab)}$.

Предложение 26. Если $\tilde{\omega}$ — s -форма, заданная на $M_n^{\mathbb{A}}$ и

$$\tilde{\omega}(X_1^{(a_1)}, \dots, X_s^{(a_s)}) = 0$$

для произвольных векторных полей $X_1, \dots, X_s$ из $\mathcal{T}_0^1(M_n)$ и произвольных элементов $a_1, \dots, a_s$ алгебры $\mathbb{A}$, то $\tilde{\omega} = 0$.

Предложение 27. Пусть $a^* \in \mathbb{A}^*$, $\omega \in \mathcal{T}_s^0(M_n)$. Существует единственная s -форма $\tilde{\omega}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющая тождеству

$$\tilde{\omega}(X_1^{(a_1)}, \dots, X_s^{(a_s)}) = (\omega(X_1, \dots, X_s))_{(a^*)}^{(a_1 a_2 \dots a_s)}. \quad (8)$$

Определение 11. Отображение $(a^*): \mathcal{T}_s^0(M_n) \rightarrow \mathcal{T}_s^0(M_n^{\mathbb{A}})$, определённое тождеством

$$\tilde{\omega}_{(a^*)}(X_1^{(a_1)}, \dots, X_s^{(a_s)}) = (\omega(X_1, \dots, X_s))_{(a^*)}^{(a_1 \dots a_s)},$$

называется (a^*) -лифтом s -форм.

Предложение 28. Для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $a^*, b^* \in \mathbb{A}^*$, s -форм ω, θ , заданных на M_n , $a \in \mathbb{A}$ и функций $f \in C^\infty(M_n)$ выполняются следующие равенства:

- (a) $\omega_{(ta^*+sb^*)} = t\omega_{(a^*)} + s\omega_{(b^*)}$;
- (b) $(t\omega + s\theta)_{(a^*)} = t\omega_{(a^*)} + s\theta_{(a^*)}$;
- (c) $(f\omega)_{(a^*)} = f_{(\sigma)}\omega_{(a^* \cdot \varepsilon^\sigma)}$;
- (d) $(f\omega)_{(a^*)} = f_{(a^*)}^{(\sigma)}\omega_{(\sigma)}$.

Предложение 29. Если $\omega_1 \in \mathcal{T}_r^0(M_n)$, $\omega_2 \in \mathcal{T}_s^0(M_n)$ и $a^* = a^\alpha \varepsilon_\alpha \in \mathbb{A}^*$, то

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)_{(a^*)} = a^\alpha \gamma_\alpha^{\sigma_1 \sigma_2} (\omega_1)_{(\sigma_1)} \otimes (\omega_2)_{(\sigma_2)},$$

где $\gamma_\alpha^{\sigma_1 \sigma_2} = \varepsilon_\alpha(\varepsilon^{\sigma_1} \varepsilon^{\sigma_2})$ — структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$.

Предложение 30. Для любого векторного поля $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ и любой s -формы ω имеет место тождество

$$L_{X^{(a)}}\omega_{(b^*)} = (L_X \omega)_{(a^* \cdot b)},$$

$a \in \mathbb{A}$, $b^* \in \mathbb{A}^*$.

5. Лифты тензорных полей в координатах. Пусть (U, x^i) — произвольная карта гладкого атласа многообразия M_n , $(\pi^{-1}(U), x_\alpha^i)$ — карта гладкого атласа на $M_n^{\mathbb{A}}$. Сначала остановимся на координатном представлении функций $f_{(a^*)}$, где $f \in C^\infty(M_n)$. Из определения (a^*) -лифта функции следует, что

$$f_{(a^*)} = a^0 f_{(0)} + a^\vartheta ((\partial_{j_1} f)_{(0)} x_{\vartheta}^{j_1} + \frac{1}{2!} (\partial_{j_1 j_2} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} x_{\alpha_2}^{j_2} \gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \alpha_2} + \dots + \frac{1}{p!} (\partial_{j_1 j_2 \dots j_p} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} \dots x_{\alpha_p}^{j_p} \gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}),$$

где $f_{(0)} = f \circ \pi$ — вертикальный лифт функции f ,

$$\gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} = \varepsilon_{\vartheta}(\varepsilon^{\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2} \dots \varepsilon^{\alpha_s}) = \gamma_{\tau_1}^{\alpha_1 \alpha_2} \gamma_{\tau_2}^{\alpha_2 \alpha_3} \dots \gamma_{\vartheta}^{\alpha_{s-2} \alpha_{s-1}},$$

$\gamma_{\tau_1}^{\alpha_1 \alpha_2}$ — структурные постоянные алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

Если ковектор a^* совпадает с базисным ковектором ε_τ дуального базиса (ε_α) к базису (ε^α) алгебры $\mathbb{A}$, то получим, в силу принятых соглашений об обозначениях

$$f_{(\varepsilon_0)} = f_{(0)},$$

$$f_{(\varepsilon_\vartheta)} = f_{(\vartheta)} = (\partial_{j_1} f)_{(0)} x_{\vartheta}^{j_1} + \frac{1}{2!} (\partial_{j_1 j_2} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} x_{\alpha_2}^{j_2} \gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \alpha_2} + \dots + \frac{1}{p!} (\partial_{j_1 j_2 \dots j_p} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} \dots x_{\alpha_p}^{j_p} \gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \quad (9)$$

Используя представление функций $f_{(a^*)}$, можно получить локальное выражение лифтов $X^{(a)}$ векторного поля $X = X^i \partial_i$, заданного на M_n :

$$X^{(a)} = (X^i)_{(\alpha)} \partial_i^{(a \varepsilon^\alpha)}.$$

Для тензорного поля K типа $(1, s)$ ($s \geq 1$), положим

$$K^{(a)}(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}) = {}^a K_{i_1 i_2 \dots i_s \mu}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s i} \partial_i^\mu.$$

С другой стороны, по определению

$$\begin{aligned} K^{(a)}(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}) &= (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i \partial_i)^{(a \varepsilon^{\alpha_1} \dots \varepsilon^{\alpha_s})} = \\ &= a_\tau \gamma_{\vartheta}^{\tau \alpha_1 \dots \alpha_s} (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i)_{(\alpha)} \partial_i^{(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\vartheta)} = \\ &= a_\tau \gamma_{\mu}^{\tau \alpha_1 \dots \alpha_s \alpha} (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i)_{(\alpha)} \partial_i^\mu. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что

$${}^a K_{i_1 i_2 \dots i_s \mu}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s i} = a_\tau \gamma_{\mu}^{\tau \alpha_1 \dots \alpha_s \alpha} (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i)_{(\alpha)}.$$

Таким образом,

$$K^{(a)} = a_\tau \gamma_{\mu}^{\tau \alpha_1 \dots \alpha_s \alpha} (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i)_{(\alpha)} \partial_i^\mu \otimes dx_{\alpha_1}^i \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_s}^i.$$

Аналогичное координатное представление можно получить для (a^*) -лифтов s -форм ω , заданных на M_n .

Пусть $\omega = \omega_{i_1 i_2 \dots i_s} dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \dots \otimes dx^{i_s}$.

Для $\omega_{(a^*)}$ положим $\omega_{(a^*)} = \tilde{\omega}_{i_1 i_2 \dots i_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} dx_{\alpha_1}^{i_1} \otimes dx_{\alpha_2}^{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_s}^{i_s}$. Тогда

$$\omega_{(a^*)}(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}) = \tilde{\omega}_{i_1 i_2 \dots i_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}.$$

По определению (a^*) -лифтов левые части этих соотношений можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} \omega_{(a^*)}(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}) &= (\omega(\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_s}))_{(a^*)}^{(\varepsilon^{\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2} \dots \varepsilon^{\alpha_s})} = (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(a^*)}^{(\varepsilon^\vartheta)} \gamma_{\nu}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \\ &= (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(a^*)}^{(a^\tau \varepsilon_\tau \varepsilon^\vartheta)} \gamma_{\nu}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} = a^\tau \gamma_{\tau}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_s} (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(\mu)}. \end{aligned}$$

Таким образом, s -форму $\omega_{(a^*)}$ можно представить

$$\omega_{(a^*)} = a^\tau \gamma_{\tau}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_s} (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(\mu)} dx_{\alpha_1}^{i_1} \otimes dx_{\alpha_2}^{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_s}^{i_s}.$$

В частности, для 1-формы $\theta = \theta_i dx^i$, имеем

$$\theta_{(a^*)} = a^\tau \gamma_{\tau}^{\mu \alpha} (\theta_i)_{(\mu)} dx_{\alpha}^i.$$

Если в полученных соотношениях возьмем $a^* = \varepsilon_0$, то получим

$$\omega_{(\varepsilon_0)} = (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(0)} dx_0^{i_1} \otimes dx_0^{i_2} \otimes \dots \otimes dx_0^{i_s}, \quad \theta_{(\varepsilon_0)} = (\theta_i)_{(0)} dx_0^i.$$

Эти лифты называются вертикальными лифтами и обозначаются символом $\omega_{(0)}$ и $\theta_{(0)}$, соответственно.

6. Горизонтальные лифты векторных полей и линейных связностей в расслоения Вейля второго порядка. Из определения 1 следует, что вещественной алгеброй А. Вейля $\mathbb{A}$ высоты 2 называется конечномерная, коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{R}$, обладающая идеалом $\mathbb{T}$, причем $\mathbb{T}^2 \neq \{0\}$, а $\mathbb{T}^3 = \{0\}$, факторалгебра $\mathbb{A}/\mathbb{T}$ изоморфна алгебре $\mathbb{R}$. В алгебре $\mathbb{A}$ выберем базис $\{e^0, e^1, \dots, e^m\}$, где $e^0 = 1, e^1, e^2, \dots, e^m$ составляют базис идеала $\mathbb{T}$. Из определения алгебры Вейля следует, что структурные постоянные $\gamma_{\sigma}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta, \sigma \neq 0$) удовлетворяют следующим соотношениям $\gamma_{\sigma}^{\alpha\beta} \gamma_{\mu}^{\sigma\tau} = 0$, где $\tau, \mu \neq 0$, а по индексу *sigma* ведется суммирование от 1 до m . На расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ возникает естественная гладкая класса C^{∞} структура. Пусть (U, x^i) — карта гладкой структуры на M_n , обозначим через x_0^i, x_{α}^i ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) координатные функции на $\pi^{-1}(U)$, где $\pi: M_n^{\mathbb{A}} \rightarrow M_n$ является канонической проекцией. Если ∇ — линейная связность, заданная на M_n , и Γ_{jk}^i — компоненты этой связности в карте (U, x^i) , то в области $\pi^{-1}(U)$ можно ввести новые координатные функции $x_{[0]}^i, x_{[\alpha]}^i$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) по формулам:

$$x_{[0]}^i = x_0^i, \quad x_{[\alpha]}^i = x_{\alpha}^i + \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i)_{(0)} x_{\sigma}^j x_{\tau}^k \gamma_{\alpha}^{\sigma\tau}.$$

Координатные окрестности $(\pi^{-1}(U), x_{[0]}^i, x_{[\alpha]}^i)$ составляют атлас суммы Уитни m экземпляров касательного расслоения первого порядка на $M_n^{\mathbb{A}}$. Сумма Уитни представляет собой расслоение А. Вейля над алгеброй m экземпляров алгебры дуальных чисел.

Пусть Q — тензорное поле типа $(1, 2)$ на M_n . На $M_n^{\mathbb{A}}$ возникает вертикальное векторное поле Q^V , определенное условием $Q^V = (Q_{jk}^i)_{(0)} x_{\sigma}^j x_{\tau}^k \gamma_{\alpha}^{\sigma\tau} \partial_i^{\alpha}$, где ∂_i^{α} — оператор частного дифференцирования по x_{α}^i , а по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до m . Векторное поле Q^V будем называть вертикальным лифтом тензорного поля Q . Для тензорного поля типа $(1, 1)$ определим вертикальное векторное поле $P^{V\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) (V_{α} -лифты) условиями $P^{V\alpha} = (P_j^i)_{(0)} x_{\sigma}^j \gamma_{\tau}^{\sigma\alpha} \partial_i^{\tau}$. Для векторного поля X , заданного на M_n , определим вертикальные векторные поля

$$X^{V(\alpha, \beta)} = (X^i)_{(0)} \gamma_{\sigma}^{\alpha\beta} \partial_i^{\sigma}.$$

Пусть X — векторное поле на M_n . На $M_n^{\mathbb{A}}$ построим горизонтальный лифт следующим образом: $X^{H_0} = X^{(0)} - \gamma(\hat{\nabla} X)$, где $\hat{\nabla} X$ — дифференциал векторного поля X относительно линейной связности $\hat{\nabla}$, которая определяется условием $\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + [X, Y]$, а векторное поле γP для тензорного поля типа $(1, 1)$ определяется условием

$$\gamma P = \left((P_j^i)_{(0)} x_{\alpha}^j + \frac{1}{2} (\partial_k T_j^i - \Gamma_{lj}^i T_k^l)_{(0)} x_{\sigma}^j x_{\tau}^k \gamma_{\alpha}^{\sigma\tau} \right) \partial_i^{\alpha}.$$

Действуя на векторное поле X^{H_0} структурным аффинором $\mathbb{J}^{(a)}$, получим (a) -горизонтальные лифты $X^{H\alpha} = \mathbb{J}^{(a)}(X^{H_0})$ векторного поля X . Горизонтальный лифт X^{H_0} соответствует единице ε^0 алгебры $\mathbb{A}$. В дальнейшем вместо X^{H_0} будем писать X^H . В локальных координатах имеем:

$$X^H = (X^i)_{(0)} \left(\left(\partial_i^0 - \left(\Gamma_{ij}^k \right)_{(0)} x_{\alpha}^j + \frac{1}{2} (\partial_j \Gamma_{is}^k - \Gamma_{ij}^t \Gamma_{ts}^k) x_{\sigma}^j x_{\tau}^s \gamma_{\alpha}^{\sigma\tau} \right) \partial_i^{\alpha} \right).$$

Отсюда следует $(X+Y)^H = X^H + Y^H$, $(fX)^H = f_{(0)} X^H$. Векторные поля $X^{H\alpha}$ для $\alpha \in \mathbb{T}$ являются вертикальными и имеют следующие локальные представления:

$$X^{H\alpha} = a_{\alpha}(X^i)_{(0)} (\partial_i^{\alpha} - \Gamma_{ij}^k x_{\sigma}^j \gamma_{\tau}^{\sigma\alpha} \partial_k^{\tau}).$$

Векторные поля $D_i = (\partial_i)^H$, $D_i^{\alpha} = (\partial_i)^{H\varepsilon^{\alpha}}$ образуют подвижной репер на $\pi^{-1}(U)$, называемый адаптированным репером к связности ∇ .

Пусть ∇ — произвольная линейная связность на M_n . При помощи связности ∇ построим горизонтальные лифты векторных полей с базы M_n в расслоение $M_n^{\mathbb{A}}$.

Теорема 3. Для каждой связности ∇ , заданной на M_n , существует, и притом единственная, линейная связность ∇^H на $M_n^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющая условиям

$$\nabla_{X^H}^H Y^{H_a} = (\nabla_X Y)^{H_a}, \quad \nabla_{X^{H_b}} Y^{H_a} = 0 \quad (10)$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $a, b \in \mathbb{A}$.

Доказательство. В каждой карте (U, x^i) атласа гладкой структуры многообразия найдем компоненты связности ∇ : $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$. В области $\pi^{-1}(U)$ карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_\alpha^i)$ определим линейную связность $\tilde{\nabla}$ следующим образом:

$$\tilde{\nabla}_{D_i} D_j = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} D_k, \quad \tilde{\nabla}_{D_i} D_j^\alpha = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} D_k^\alpha, \quad \tilde{\nabla}_{D_i^\alpha} D_j = 0, \quad \tilde{\nabla}_{D_i^\alpha} D_j^\beta = 0,$$

где $D_i = (\partial_i)^H$, $D_i^\alpha = (\partial_i)^{H_\alpha}$ — горизонтальные лифты векторных полей ∂_i относительно линейной связности ∇ . Непосредственные вычисления показывают, что $\tilde{\nabla}$ — связность, заданная на $M_n^{\mathbb{A}}$. Эта связность удовлетворяет условиям (10). Единственность $\tilde{\nabla}$ следует из того, что D_i, D_i^α образуют подвижной репер. $\square$

Аналогичным образом задается горизонтальный лифт линейной связности ∇ на $M^{\tilde{A}}$, где $\tilde{A}$ — алгебра m -дуальных чисел. Для этого в формулах (10) буквы H, H_α заменяются их строчными аналогами.

Пусть X — векторное поле на M_n . На $M_n^{\mathbb{A}}$ определим

$$X^H = (X^i)_{(0)} \left(\partial_i^0 - \left((\Gamma_{ij}^k)_{(0)} x_\alpha^j + \frac{1}{2} (\partial_j \Gamma_{is}^k - \Gamma_{ij}^t \Gamma_{ts}^k)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^s \gamma_{\alpha\sigma\tau} \right) \partial_k^\alpha \right),$$

$$X^{H_\tau} = (X^i)_{(0)} - (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} x_\sigma^j \gamma_{\alpha\sigma\tau} \partial_k^\alpha.$$

Горизонтальные лифты, заданные на сумме Уитни m экземпляров касательного расслоения TM , задаются равенствами

$$X^h = (X^i)_{[0]} (\partial_i^{[0]} - (\Gamma_{ij}^k)_{[0]} x_\alpha^j \partial_k^{[\alpha]}), \quad X^{h_\tau} = (X^i)_{[0]} \partial_i^{[\tau]}.$$

Здесь по индексу α ведется суммирование от 1 до m , а τ принимает значения от 1 до m . Имеют место следующие тождества:

$$[X^H, Q^V] = (\nabla_X Q)^V, \quad [X^{H_\alpha}, Q^V] = (Q(X, \cdot) + Q(\cdot, X))^{V_\alpha},$$

$$X^h = X^H - \frac{1}{2} (R(X, \cdot))^{V_\alpha}, \quad X^{h_\alpha} = X^{H_\alpha} + \frac{1}{2} (T(X, \cdot))^{V_\alpha},$$

где T, R — тензорные поля кручения и кривизны, соответственно, линейной связности ∇ . Используя эти тождества, можно доказать следующие тождества:

$$[X^H, Y^H] = [X, Y]^H - (R(X, Y))^\nu + \frac{1}{2} (\nabla_X R_Y - \nabla_Y R_X - R_{[X, Y]})^V,$$

$$[X^H, Y^{H_\alpha}] = (\nabla_X Y)^{H_\alpha} + \frac{1}{2} (R(X, Y) + \hat{R}(X, Y) - \nabla_X T(Y, \cdot))^{V_\alpha},$$

$$[X^{H_\alpha}, Y^{H_\beta}] = (T(X, Y))^{V_{(\alpha, \beta)}},$$

где тензорные поля $R_X, \hat{R}$ определены условиями

$$R_X(Z_1, Z_2) = R(X, Z_1)Z_2, \quad \hat{R}(X, Y)Z = R(X, Z)Y,$$

$$(R(X, Y))^\nu = ((R(X, Y))_j^i)_{(0)} x_{[\alpha]}^j \partial_i^{[\alpha]}.$$

7. Расслоения Вейля второго порядка. В основе построения таких расслоений лежат гладкое многообразие M_n класса C^∞ и алгебры A Вейля высоты 2.

Наиболее простым расслоением A Вейля второго порядка является касательное расслоение второго порядка. Определение касательного расслоения второго порядка T^2M дано в [14]. В этой книге авторы не связывают касательные расслоения второго порядка с алгеброй плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$ высоты 2. В силу этого обозначения в указанной книге, используемые для описания объектов на касательных расслоениях второго порядка, оказались достаточно громоздкими.

Используя эти обозначения, Осьминина Н. А. изучает лифты некоторых типов тензорных полей на T^2M , а также инфинитезимальные аффинные преобразования полного лифта линейной связности. Она получила каноническое разложение произвольного инфинитезимального преобразования $\tilde{X}$ полного лифта $\nabla^{(0)}$ линейной связности ∇ , заданного на базе M_n касательного расслоения T^2M [11].

Используя это каноническое разложение, она исследует строение алгебры Ли всех инфинитезимальных преобразований. В связи с этим ею была проведена большая работа по вычислению коммутаторов различных векторных полей, входящих в каноническое разложение инфинитезимального аффинного преобразования [10].

Горизонтальный лифт ∇^H линейной связности ∇ , заданной на базе M_n расслоения T^2M был построен Н. И. Маниной в [7]. Она доказала, что линейная связность ∇^H является единственной линейной связностью на T^2M , удовлетворяющей следующим условиям

$$\nabla_{X^H}^H Y^H = (\nabla_X Y)^H, \quad \nabla_{X^{H_b}}^H Y^{H_a} = 0, \quad a = 0, 1, 2, \quad b = 1, 2,$$

где X, Y — произвольные векторные поля на базе M_n касательного расслоения второго порядка T^2M . Горизонтальные лифты $X^H = X^{H_0}$, X^{H_1} , X^{H_2} задаются в естественных координатах x_α^i ($\alpha = 0, 1, 2$) следующим образом:

$$\begin{aligned} X^H &= (X^m)_{(0)} \left(\partial_m^0 - (\Gamma_{jm}^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1 - (\Gamma_{jm}^i)_{(0)} x_2^j \partial_i^2 + \frac{1}{2} (\Gamma_{ks}^i \Gamma_{jm}^s - \partial_j \Gamma_{km}^i)_{(0)} x_1^j x_1^k \partial_i^2 \right), \\ X^{H_1} &= (X^i)_{(0)} (\partial_i^1 - \Gamma_{mi}^t x_1^m \partial_t^2), \quad X^{H_2} = (X^i)_{(0)} \partial_i^2. \end{aligned}$$

В [9] Н. И. Манина получила каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка над гладким многообразием со связностью горизонтального лифта и нашла необходимые и достаточные условия, при которых векторное поле является инфинитезимальным аффинным преобразованием. В этой же работе Н. И. Манина произвела перевод обозначений лифтов векторных полей, приведенных в [14], на обозначения, согласованные с алгеброй плюральных чисел высоты 2:

$$X^{II} = X^{(0)}, \quad X^I = X^{(1)}, \quad X^0 = X^{(2)}.$$

В [8] она изучила инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения T^2M над гладким класса C^∞ многообразием M_n , снабженным линейной связностью ∇ с нулевым тензорным полем кручения T и с ненулевым тензорным полем проективной кривизны Γ . Вейля W и построила пример линейной связности ∇^H , для которой все составляющие канонического разложения инфинитезимального аффинного преобразования $\tilde{X}$ являются ненулевыми.

Расслоения А. Вейля над фробениусовыми алгебрами высоты 2 и ширины 2 изучались в работах Буданова К. М. [1–4]. Существует только две алгебры А. Вейля с указанными числовыми характеристиками. Базис этих алгебр составляют элементы $e^0 = 1$, e^1 , e^2 , e^3 , удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} e^0 e^\alpha &= e^\alpha e^0 = e^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \\ e^1 e^2 &= e^2 e^1 = 0, \quad e^1 e^3 = e^3 e^1 = 0, \quad e^2 e^2 = q e^3, \quad q = \pm 1. \end{aligned}$$

Им построены естественные лифты функций, векторных полей с базы M_n в расслоение А. Вейля M_n^A . Эти лифты задаются в локальных координатах формулами:

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_l X^i)_{(0)} x_\alpha^l \partial_i^\alpha + \frac{1}{2} (\partial_i \partial_s X^i)_{(0)} (x_1^i x_1^s + q x_2^i x_2^s) \partial_i^3 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \\ X^{(1)} &= (X^i)_{(0)} (\partial_i^1 + (\partial_l X^i)_{(0)} x_1^l \partial_i^3), \\ X^{(2)} &= (X^i)_{(0)} (\partial_i^2 + q (\partial_l X^i)_{(0)} x_2^l \partial_i^3), \\ X^{(3)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^3. \end{aligned}$$

Для линейной связности *nabla* без кручения на расслоении M_n^A существует единственная линейная связность ∇^C , удовлетворяющая условию $\nabla_{X^{(a)}}^C Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}$ для любых векторных

полей X, Y и любых элементов a, b алгебры A Вейля. Если a, b являются базисными элементами e^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), то лифты $X^{(e^\alpha)}$ обозначаются X^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$). В работе [3] приведены соотношения, определяющие полный лифт ∇^C линейной связности ∇ , использующие таблицу умножения базисных элементов алгебры A Вейля, приведенную выше. В силу коммутативности алгебры A Вейля A , имеют место равенства $\nabla_{X^{(a)}}^C Y^{(b)} = \nabla_{X^{(b)}}^C Y^{(a)}$. Учитывая эти соотношения, приведём только сокращённый вариант основных соотношений, определяющих ∇^C :

$$\begin{aligned}\nabla_{X^{(0)}}^C Y^{(0)} &= (\nabla_X Y)^{(0)}, & \nabla_{X^{(0)}}^C Y^{(1)} &= (\nabla_X Y)^{(1)}, \\ \nabla_{X^{(0)}}^C Y^{(2)} &= (\nabla_X Y)^{(2)}, & \nabla_{X^{(0)}}^C Y^{(3)} &= (\nabla_X Y)^{(3)}, \\ \nabla_{X^{(1)}}^C Y^{(1)} &= (\nabla_X Y)^{(3)}, & \nabla_{X^{(2)}}^C Y^{(2)} &= q(\nabla_X Y)^{(3)}, \\ \nabla_{X^{(1)}}^C Y^{(2)} &= \nabla_{X^{(1)}}^C Y^{(3)} = \nabla_{X^{(2)}}^C Y^{(3)} = \nabla_{X^{(3)}}^C Y^{(3)} = 0.\end{aligned}$$

Используя эти соотношения, можно получить компоненты линейной связности ∇^C в координатах и записать дифференциальные уравнения для компонент инфинитезимального аффинного преобразования $\tilde{X} = \tilde{X}_\alpha^\alpha \partial_i^\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$; $i = 1, 2, \dots, n$):

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta \tilde{X}_\sigma^i + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} \partial_j^\alpha \tilde{X}_\tau^m + \Gamma_{jm\sigma}^{\alpha\tau i} \partial_k^\beta \tilde{X}_\tau^m - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} \partial_m^\tau \tilde{X}_\sigma^i + \tilde{X}_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0.$$

В этой системе дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных функции $\Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta i}$ являются компонентами линейной связности в карте $(\pi^{-1}(U), x_\alpha^i)$. При интегрировании этой системы в [4] Будановым К. М. получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования. В этой же работе приведены уравнения движений в расслоениях A Вейля со связностью полного лифта над произвольной алгеброй A Вейля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буданов К. М. Лифты функций и векторных полей в расслоение Вейля над алгеброй высоты // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 12–16.
2. Буданов К. М. Лифты линейной связности и функций в расслоение Вейля над специальной алгеброй Вейля // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2007. — № 38. — С. 12–16.
3. Буданов К. М. О лифтах тензорных полей типа $(1, 1)$ в расслоение Вейля над специальной алгеброй Вейля // Изв. Пензенск. гос. пед. ун-та. Физ.-мат. и техн. науки. — 2012. — № 30. — С. 28–32.
4. Буданов К. М., Султанов А. Я. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта // Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3–13.
5. Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985.
6. Кертис И., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.
7. Манина Н. И. Некоторые свойства горизонтального лифта линейной связности в касательное расслоение второго порядка // Мат. Всерос. науч.-практ. конф. «Фундаментальные науки и образование». — Бийск: БПГУ, 2006. — С. 39–44.
8. Манина Н. И. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью горизонтального лифта над непроективно-плоским пространством // Мат. VII Междунар. симп. «Фундаментальные и прикладные проблемы науки». Т. 1. — М., 2012. — С. 23–31.
9. Манина Н. И., Султанов А. Я. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью горизонтального лифта // Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 9. — С. 62–69.
10. Осъминина Н. А. Об алгебре инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта // в кн.: Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза: ПГПУ, 1999. — С. 102–106.
11. Секачева Н. А. О каноническом разложении произвольного инфинитезимального преобразования в касательном расслоении второго порядка // в кн.: Математика и информатика: Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза: ПГПУ, 1996. — С. 24–26.

12. *Шурыгин В. В.* Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй // Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 2 (290). — С. 75–106.
13. *Morimoto A.* Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent bundles of p^v -velocities // Nagoya Math. J. — 1970. — 40. — P. 13–31.
14. *Yano K.* Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry. — New York: Marcel Dekker, 1973.

Султанов Адгам Яхиевич

Пензенский государственный университет

E-mail: sultanovaya@rambler.ru

Монахова Оксана Александровна

Пензенский государственный университет

E-mail: oxmonakh@mail.ru

Султанова Галия Алиевна

Филиал Военной Академии материально-технического обеспечения

имени генерала армии А. В. Хрулева, Пенза

E-mail: sultgaliya@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 115–133
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-115-133

УДК 519.2:531/534

СПОНТАННАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ. III. АЛГОРИТМЫ МОНТЕ-КАРЛО

© 2023 г. В. В. УЧАЙКИН, Е. В. КОЖЕМЯКИНА

Аннотация. Третья (заключительная) часть обзора по моделированию спонтанной кластеризации коррелированных точечных множеств на основе статистики узлов марковских цепей. Посвященная вычислительным аспектам этой проблемы, она содержит краткое введение в метод статистического моделирования (метод Монте-Карло) и обстоятельное изложение специфики его применения к рассматриваемой задаче, включая решение интегральных уравнений Орнштейна—Цернике с устойчивым ядром Леви—Фельдгейма.

Приводятся необходимые сведения из теории негауссовых устойчивых распределений, описывается алгоритм моделирования 3-мерных векторов с симметричным устойчивым распределением, дается его обоснование, сопровождаемое графическим и табличным материалом. В заключении представлены результаты тестирования.

Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 125–144. Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 221. — С. 128–147.

Ключевые слова: функция распределения, обратные функции, метод отказов, статистический вес, характеристические функции, устойчивые плотности, функционалы, аппроксимации, тестирование.

SPONTANEOUS CLUSTERING IN MARKOV CHAINS. III. MONTE CARLO ALGORITHMS

© 2023 V. V. UCHAIKIN, E. V. KOZHEMIKINA

ABSTRACT. The third (final) part of the review on the modeling of spontaneous clustering of correlated point sets based on the statistics of nodes of Markov chains. Dedicated to the computational aspects of this problem, it contains a brief introduction into the method of statistical modeling (Monte Carlo method) and a detailed presentation of the specifics of its application to the problem under consideration, including solving the Ornstein-Zernike equation with the Levy-Feldheim stable kernel.

The necessary information from the theory of non-Gaussian stable distributions is given, an algorithm for modeling 3-dimensional vectors with a symmetric stable distribution is described, its justification is given, accompanied by graphical and tabular material. In conclusion, the test results are presented.

The first part of this work: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 125–144. The second part of this work: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 221. — P. 128–147.

Keywords and phrases: cumulative distribution function, inverse functions, rejection method, statistical weight, characteristic functions, Levy-stable density, functionals, approximating, testing.

AMS Subject Classification: 65P40

1. Введение. *Однородная марковская цепь* в ее простейшем варианте представляет собой конечную или бесконечную последовательность случайных точек (*узлов цепи*) $X_1, X_2, \dots$ в некотором евклидовом пространстве, положение каждой из которых (в вероятностном смысле) связано с положением предыдущего узла условной вероятностью, называемой *вероятностью перехода* $P(X_n \in dx_n | X_{n-1} = x_{n-1})$ не зависящей от номера узла. Физической демонстрацией этого случайного процесса могут служить траектории нейтральных молекул в разреженном газе, нейтронов в ядерном реакторе, фотонов в рассеивающей среде. Геометрически, они представляют собой ломаные, состоящие из прямолинейных (в отсутствие внешнего поля, что мы и будем далее предполагать) независимых отрезков случайной длины (*свободные пробеги*) и направления. Точки соединения последовательных отрезков и представляют собой узлы марковской цепи, изображающие элементарные рассеяния (в них частицы скачкообразно меняют направления движения). Каждый элемент траектории рассеивающейся частицы — длина свободного пробега, угол рассеяния, энергия после рассеяния и т. п., характеризуется случайной величиной, имеющей известное распределение. Используя существующие алгоритмы получения на ЭВМ случайных чисел с произвольным распределением, можно получать случайные значения элементов траектории и тем самым — случайные реализации самих траекторий в веществе, эквивалентные (в статистическом смысле) траекториям реальных частиц. В силу этой эквивалентности рассматриваемый процесс можно считать моделированием случайного явления. Появление в 1950–1960-х гг. электронно-вычислительной техники сделало такое *статистическое моделирование* чрезвычайно популярным с закрепившимся за ним названием *метод Монте-Карло*. В этом разделе мы кратко очертим основные особенности этого метода, и приведем основные алгоритмы, специально разработанные для численного решения задач, поставленных в предшествующих частях нашего обзора [3, 4].

2. Случайные числа. Простейшими по свойствам являются случайные числа γ , плотность распределения которых $p_\gamma(x)$ на отрезке $[0, 1]$ числовой оси постоянна (и равна 1). Они называются *стандартными случайными числами*. Кодами генерации таких чисел оснащены все современные ЭВМ. Преобразованием стандартных случайных чисел можно получить случайные числа с любым заданным законом распределения. Существует два основных метода преобразования случайных чисел, часто используемых в комбинации друг с другом.

2.1. Метод функции распределения. Рассмотрим произвольную монотонно возрастающую функцию $F(x)$, удовлетворяющую условиям $F(a) = 0$, $F(b) = 1$ (рис. 1(а)). Включив генератор стандартных случайных чисел γ , получим последовательность их независимых реализаций $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ и преобразуем каждую из них по формуле $\gamma_i \mapsto \eta_i = F^{-1}(\gamma_i)$. На графике это соответствует случайному выбору точек γ_i на единичном отрезке оси ординат Oy и определению по кривой $y = F(x)$ соответствующих абсцисс. Чтобы найти распределение новых случайных чисел, выделим на оси Oy малый элемент Δy и построим на оси Ox соответствующий ему элемент $\Delta x = \Delta y / F'(x)$. В сериях из N испытаний в элемент Δy в среднем будет попадать $N\Delta y$ значений случайных чисел γ_i . Столько же значений η_i окажется и в элементе Δx . Стало быть, $P(\eta \in \Delta x) = \Delta y$, а плотность распределения вероятности новой случайной величины η

$$p_\eta(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(\eta \in \Delta x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по интервалу (a, x) , находим, что для генерирования случайных чисел с заданной плотностью $p_\eta(x)$ в качестве функции F в вышеприведенном алгоритме необходимо использовать *соответствующую функцию распределения*:

$$F(x) = \int_a^x p_\eta(x) dx.$$

Такое преобразование называется *методом функции распределения* (применяется также название *метод обратной функции*). Основной его недостаток в том, что далеко не всегда удается представить обратную функцию в удобном для вычислений виде.

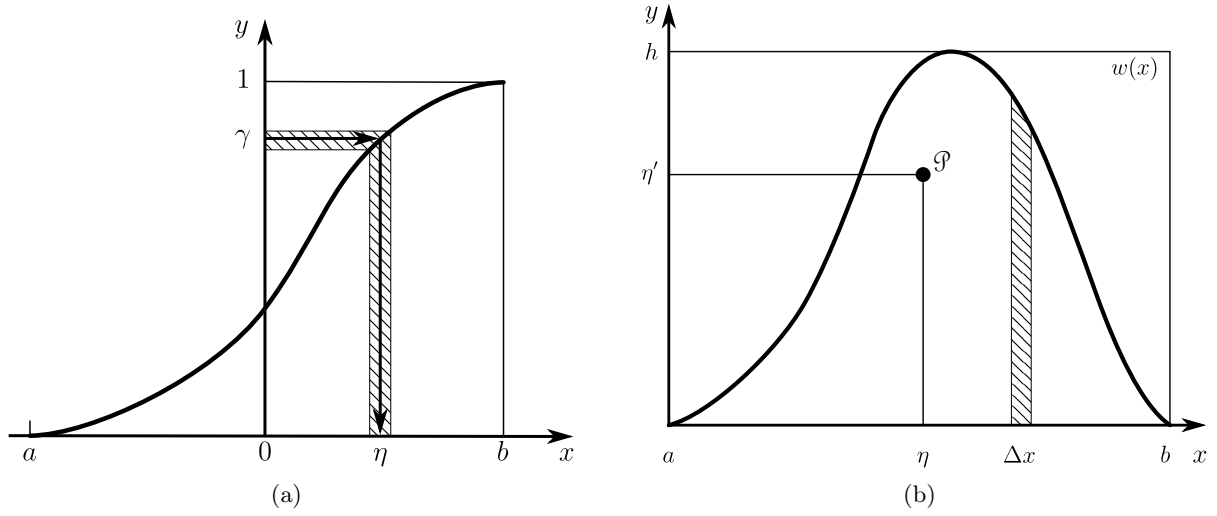


Рис. 1. Преобразование случайных чисел (а) методом функции распределения, (б) методом Неймана.

Приведем в качестве примера популярный алгоритм для получения случайных чисел η с экспоненциальной плотностью $p(x) = \exp(-x)$. В этом случае $F(x) = 1 - \exp(-x)$, и алгоритм их моделирования выражается формулой $\eta = -\ln(1 - \gamma)$ или эквивалентной ей $\eta = -\ln(\gamma)$ (случайные величины γ и $1 - \gamma$ имеют одинаковые распределения в одном и том же интервале $(0, 1)$).

2.2. Метод отказов. Другой популярный метод преобразования равномерно распределенных случайных чисел называют *методом отказов* или *методом Неймана*. Разобьем независимые случайные числа последовательности γ_i на пары (γ, γ') и преобразуем их в пары (η, η') по формулам

$$\eta = a + l\gamma, \quad \eta' = h\gamma',$$

где a , l и h — положительные постоянные. Пары чисел (η, η') можно считать координатами случайной точки $\mathcal{P}$ в прямоугольнике с основанием $l = b - a$ и высотой h (рис. 1(b)). Впишем в прямоугольник положительную функцию $w(x)$ и выделим из последовательности случайных точек $\mathcal{P}$ те, что оказались под кривой $w(x)$. Их абсциссы образуют случайную последовательность чисел η с распределением, вообще говоря, отличным от равномерного. Найдем плотность этого распределения.

Случайные точки $\mathcal{P}$ распределены в прямоугольнике равномерно, поэтому среднее число чисел η , полученных в серии из N испытаний, равно

$$N_\eta = (N/S)S_w, \quad (1)$$

где $S = lh$ — площадь прямоугольника,

$$S_w = \int_a^b w(x)dx$$

— площадь под кривой $w(x)$. Среднее число чисел η , попадающих в элемент Δx , пропорционально площади опирающейся на него элементарной трапеции:

$$N(\eta \in \Delta x) = (N/S)w(x)\Delta x.$$

Поэтому вероятность

$$P(\eta \in \Delta x) = N(\eta \in \Delta x)/N_\eta = [w(x)/S_w]\Delta x,$$

а плотность вероятности

$$p_\eta(x) = w(x) / \int_a^b w(x) dx, \quad a < x < b.$$

Таким образом, для получения случайных чисел с плотностью $p_\eta(x)$ в качестве *весовой* функции $w(x)$ следует использовать саму плотность $p_\eta(x)$ или функцию, отличающуюся от нее на постоянный множитель. Очевидно, часть полученных на первом этапе точек будет отброшена. Из рис. 1(b) видно, что при фиксированной $w(x)$ это число будет минимальным, если высоту прямоугольника h взять равной максимальному ее значению. Отношение среднего числа полученных значений η к среднему числу использованных случайных точек характеризует *эффективность метода*. Из (1) видно, что она равна S_w/S .

2.3. Гибридный метод. Эффективность метода Неймана в ряде случаев можно повысить, комбинируя его с методом функции распределения. Заметим, что число отброшенных точек (*отказов*) уменьшается, если их абсциссы выбирать не из равномерного распределения, а из распределения, близкого по форме к $w(x)$. Тогда случайные точки η будут чаще появляться в той части прямоугольника, где вероятность отказа меньше. Так, если плотность распределения можно представить в виде произведения двух функций $p(x)$ и $w(x)$, одна из которых (скажем, p) нормирована на единицу, то первый сомножитель можно использовать для выборки случайных чисел методом функции распределения, а второй сомножитель — в схеме отказов. Эффективность такого комбинированного метода

$$N_\eta/N = \frac{1}{h} \int_a^b p(x)w(x)dx.$$

Постоянную h следует брать равной максимальному на $[a, b]$ значению функции $w(x)$ (если такое существует):

$$h = \max w(x) = \max[p_\eta(x)/p(x)].$$

Легко видеть, что при $p(x) = p_\eta(x)$ эффективность гибридного метода становится равной единице, а сам он превращается в метод функции распределения. В другом предельном случае, когда $p(x) = 1/(b-a)$ (равномерное распределение), он совпадает с методом Неймана.

2.4. Моделирование марковской цепи. Рассмотрим случайное блуждание, представляемое марковской цепью в некотором фазовом пространстве, точки которого будем обозначать через x . Пусть $p_1(x)$ — плотность распределения первого узла цепи, $q(x)$ — вероятность обрыва цепи в очередном узле, зависящая от его координат x , $p(x \rightarrow x')dx'$ — переходная вероятность, нормированная (в отсутствие указания пределов интегрирования предполагается по всему фазовому пространству) на вероятность p_s выживания (то есть продолжения) цепи после узла в точке x :

$$\int p(x \rightarrow x')dx' = p_s(x) \equiv 1 - q(x).$$

Каждая реализация (траектория) такой цепи задается последовательностью ее узлов

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Будем говорить, что на множестве реализаций задан некоторый функционал, если каждой из них ставится в соответствие определенное число Q ,

$$Q = \Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\{\Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ — заданная совокупность функций, характеризующая функционал. Математическое ожидание его (усредненное по статистическому ансамблю траекторий значение) записывается в виде

$$\langle \Phi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int dx_1 \dots \int dx_n p_1(x_1) p(x_1 \rightarrow x_2) \dots p(x_{n-1} \rightarrow x_n) q(x_n) \Phi_n(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

Подынтегральные выражения в этих слагаемых содержат одинаковый сомножитель $p_1(x_1)$, что позволяет представить (2) в виде скалярного произведения

$$\langle \Phi_n \rangle = \overline{Q} \equiv \int dx_1 p_1(x_1) \overline{Q}(x_1) \quad (3)$$

двух функций: плотности распределения первого узла цепи $p_1(x_1)$ и условного математического ожидания функционала Q при фиксированном положении первого узла $\overline{Q}(x_1)$.

2.5. Функционалы рекуррентного типа. В работе [2] рассмотрен класс функционалов рекуррентного типа, определяемых свойствами

$$\Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = w(x_1) \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (4)$$

$$\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi_1(x_1) + w(x_1, x_2) \phi_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (5)$$

где $w(x)$, $w(x, x')$, $\phi_1(x)$ неотрицательные функции. Используя эти свойства, легко убедиться в справедливости равенства

$$\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \phi_1(x_i) \prod_{j=1}^{i-1} w(x_j, x_{j+1}),$$

из которого, в частности, следует, что вклад отдельной реализации марковской цепи есть сумма вкладов $\phi_1(x_i)$ отдельных узлов, умноженных на величину

$$W_i(x_1, \dots, x_i) = w(x_1) \prod_{j=1}^{i-1} w(x_j, x_{j+1}),$$

называемую *статистическим весом*. Эту формулу удобно представить в виде рекуррентного соотношения

$$W_1(x_1) = w(x_1), \\ W_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = w(x_{i-1}, x_i) W_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}).$$

Чтобы вывести уравнение для условных моментов, перепишем уравнения (4)–(5) в виде

$$\Phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = w(x_1) \{ \phi_1(x_1) + [w(x_1, x_2)/w(x_2)] \Phi_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n) \},$$

зафиксируем значения x_1 , x_2 и усредним это равенство по остальным переменным:

$$\overline{Q}(x_1, x_2) = w(x_1) \{ \phi(x_1) + [w(x_1, x_2)/w(x_2)] \overline{Q}(x_2) \}.$$

В результате для функции

$$\overline{q}(x) = \overline{Q}(x)/w(x)$$

получаем линейное интегральное уравнение

$$\overline{q}(x) = \phi_1(x) + \int dx' p(x \rightarrow x') w(x, x') \overline{q}(x'). \quad (6)$$

Положив $w(x, x') = 1$, а $\phi_1(x) = 1(x, A)$, мы приходим к уравнению для среднего числа узлов в области A фазового пространства от одной марковской цепи с переходной вероятностью $p(x \rightarrow x')$, первый узел которой находится в точке x . Чтобы найти решение этой задачи методом Монте-Карло, моделируют большое число независимых реализаций марковской цепи с заданным ядром и находят число узлов, принадлежащих A в каждой реализации. При выполнении условий центральной предельной теоремы среднее арифметическое этих значений будет приближаться к математическому ожиданию числа узлов, зависимость которого от положения первого узла цепи и описывается решением уравнения (6). Весовая функция $w(x, x')$ может служить регулятором качества алгоритма (времени счета и погрешности результата).

3. Устойчивые распределения вероятностей.

3.1. *Одномерные распределения.* Во второй части обзора [4] показано, сколь важную роль играют в нашей модели кластеризации устойчивые законы. В этом разделе мы подробнее остановимся на свойствах этого семейства. Наиболее популярным из них является нормальный закон, характеризующийся (в стандартизованных обозначениях семейства, см. [1]) плотностью

$$g^{(2)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$$

и характеристической функцией

$$\tilde{g}^{(2)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} g(x; 2) dx = \exp(-k^2).$$

Чтобы найти характеристические функции остальных членов этого семейства, введем *вторую характеристику*

$$\psi^{(\alpha)}(k) = \ln \tilde{g}^{(\alpha)}(k),$$

для которой свойство устойчивости эквивалентно аддитивности

$$\psi^{(\alpha)}(c_1 k) + \psi^{(\alpha)}(c_2 k) = \psi^{(\alpha)}(ck),$$

где

$$c = (c_1^\alpha + c_2^\alpha)^{1/\alpha}.$$

Распространяя это соотношение на сумму произвольного числа n одинаково распределенных слагаемых ($c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1$), получим

$$n\psi^{(\alpha)}(k) = \psi^{(\alpha)}(n^{1/\alpha}k).$$

Согласно свойству

$$\psi^{(\alpha)}(-k) = [\psi^{(\alpha)}(k)]^*$$

(здесь $*$ означает комплексное сопряжение) достаточно определить функцию $\psi^{(\alpha)}(k)$ для положительных значений аргумента $k > 0$. Учитывая ее непрерывность в окрестности начала координат и вытекающее из определения характеристической функции условие

$$\psi^{(\alpha)}(0) = 0,$$

приходим к равенству

$$|\psi^{(\alpha)}(k)| = \text{const} \cdot k^\alpha \quad (k > 0, \alpha > 0),$$

из которого следует, что

$$\psi^{(\alpha)}(k) = -k^\alpha [c_0 - ic_1].$$

Характеристическая функция удовлетворяет условию

$$|\tilde{g}(k)| \leq 1,$$

поэтому

$$\text{Re } \psi^{(\alpha)}(k) \leq 0,$$

и вещественная постоянная c_0 должна быть положительной. С другой стороны, из условия

$$\tilde{g}''(0) = -\langle S^2 \rangle$$

(здесь S — случайная величина с характеристической функцией $\tilde{g}(k)$) следует, что

$$[\psi^{(\alpha)}]''(0) = -\langle S^2 \rangle + \langle S \rangle^2 \equiv -DS \leq 0.$$

Вычислив вторую производную,

$$[\psi^{(\alpha)}(k)]'' = -[c_0 - ic_1]\alpha(\alpha - 1)k^{\alpha-2},$$

и устремив $k \rightarrow 0$, можно убедиться, что при $\alpha = 2$ дисперсия конечна (вследствие вещественности последней постоянная c_1 должна быть равна нулю), при $\alpha < 2$ она бесконечна (в этом

случае величина c_1 роли не играет), и при $\alpha > 2$ предельное значение производной равно нулю. Последнее означает, что второй момент функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) dx = 0.$$

Для не сосредоточенного в нуле распределения это может означать только, что произведение $x^2 g(x)$ является знакопеременным, и, стало быть, $g(x)$ не является плотностью вероятности. Таким образом, область допустимых значений параметра α есть $(0, 2]$.

Постоянные c_0 и c_1 могут быть представлены в нескольких формах. В одной из них

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \beta \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2},$$

где второй вещественный параметр $\beta \in [-1, 1]$ характеризует асимметрию распределения. Таким образом, характеристическая функция одномерной устойчивой плотности на положительной полуоси имеет вид

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp \left\{ -k^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\}, \quad k > 0.$$

Аналогичные вычисления для отрицательной полуоси дают

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp \left\{ -(-k)^\alpha \left[1 + i\beta \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \right] \right\}, \quad k < 0.$$

Объединяя эти формулы в одну, получим:

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp \left\{ -|k|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sign} k \right] \right\}, \quad -\infty < k < \infty.$$

Это стандартное представление устойчивой характеристической функции в форме A .

Часто используется представление в форме C , получаемое введением в показатель экспоненты масштабного множителя, подобранного таким образом, чтобы характеристическая функция приняла вид

$$\tilde{g}(k; \alpha, \theta) = \exp \left\{ -|k|^\alpha \exp \left[-i \frac{\theta\alpha\pi}{2} \operatorname{sign} k \right] \right\}.$$

Здесь $\alpha \in (0, 2]$ — характеристический показатель устойчивого закона, а $\beta \in [-1, 1]$ и $\theta \in [-\theta_\alpha, \theta_\alpha]$, $\theta_\alpha = \min\{1, 2/\alpha - 1\}$ — параметры асимметрии.

Задаваемые этими характеристическими функциями устойчивые случайные величины будем обозначать через $S^{(\alpha, \beta)}$ и $S(\alpha, \theta)$ соответственно.

3.2. Устойчивые распределения как предельные. Открытие Полем Леви класса устойчивых распределений, возможно, было одним из самых крупных событий в теории вероятностей XX века. Они освободили ЦПТ от ограничения, налагаемого требованием конечности дисперсии, и открыли возможность суммирования случайных величин с бесконечными дисперсиями. Оказалось, что если только существует невырожденное (не сосредоточенное в одной точке) предельное распределение нормированной суммы

$$\frac{1}{B_n} \left(\sum_{j=1}^n X_j - A_n \right)$$

при $n \rightarrow \infty$ и подходящим образом выбранных последовательностях A_n и $B_n > 0$, то это распределение *обязательно будет устойчивым*. При этом $B_n = h(n)n^{1/\alpha}$, где $h(n)$ — медленно меняющаяся функция (типа логарифма или какой-нибудь его степени), а α — характеристический показатель. Если для случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ можно подобрать такие A_n и B_n , то говорят, что X *принадлежит области притяжения устойчивого закона*. В противном случае она не принадлежит области притяжения никакого закона: *только устойчивые законы обладают областями притяжения*.

Чтобы проверить, принадлежит ли области притяжения случайная величина X , надо прежде всего вычислить дисперсию или просто второй момент $\langle X^2 \rangle$. Если он конечен, X находится

в области притяжения нормального закона. Если $\langle X^2 \rangle = \infty$, необходимо проверить асимптотику «хвостов» распределения X . Если оказывается, что

$$P(|X| > x) \sim h(x)x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

то ответ положителен, если же асимптотика имеет иной вид, ответ отрицательный. Мы ограничимся далее лишь случаем «нормального» (не путать с гауссовым!) притяжения, когда $h(x) \rightarrow \text{const} > 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Пусть теперь известно, что X принадлежит области притяжения устойчивого закона. Как узнать его параметры α и β (или θ)? Ответ на этот вопрос как раз и дает

Теорема (Обобщенная предельная теорема (ОПТ)). Пусть случайные величины X_j независимы, одинаково распределены и удовлетворяют условиям

$$P(X > x) \sim a_+ x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$P(X < -x) \sim a_- x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$0 < \alpha \leq 2$, $a_+ \geq 0$, $a_- \geq 0$ и $a_+ + a_- > 0$. Тогда найдутся такие последовательности A_n и $B_n > 0$, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{B_n} \left(\sum_{j=1}^n X_j - A_n \right) \stackrel{d}{\sim} S^{(\alpha, \beta)},$$

где $\beta = (a_+ - a_-)/(a_+ + a_-)$.

Разумеется, существует бесконечное множество последовательностей нормирующих коэффициентов A_n , B_n с одним и тем же асимптотическим поведением при $n \rightarrow \infty$. В частности, они могут быть определены следующим образом ($a = \langle X \rangle$ и $c = a_+ + a_-$):

при $\alpha = 2$	$A_n = na$,	$B_n = \sqrt{cn \ln n}$,
при $\alpha \in (1, 2)$	$A_n = na$,	$B_n = (\pi cn / [2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)])^{1/\alpha}$,
при $\alpha = 1$	$A_n = \beta cn \ln n$,	$B_n = \pi cn / 2$,
при $\alpha \in (0, 1)$	$A_n = 0$,	$B_n = (\pi cn / [2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)])^{1/\alpha}$.

3.3. Свойства устойчивых распределений. Приведем важнейшие свойства одномерных устойчивых распределений (в форме С).

1. Все устойчивые плотности одновершинны.
2. Дисперсии всех устойчивых распределений, кроме гауссова, бесконечны.
3. Средние значения устойчивых распределений с показателем $\alpha \leq 1$ не существуют.
4. Устойчивые плотности удовлетворяют соотношению инверсии:

$$g(x; \alpha, \theta) = g(-x; \alpha, -\theta).$$

5. Устойчивые плотности удовлетворяют соотношению двойственности: при $\alpha \geq 1$

$$g(x; \alpha, \theta) = x^{-1-\alpha} g(x^{-\alpha}; \alpha', \theta'),$$

где $\alpha' = 1/\alpha$, $\theta' = \alpha(1 + \theta) - 1$.

6. В начале координат функция распределения

$$G(x; \alpha, \theta) = \int_{-\infty}^x g(x'; \alpha, \theta) dx',$$

плотность и ее производная имеют следующие значения:

$$G(0; \alpha, \theta) = (1 - \theta)/2,$$

$$g(0; \alpha, \theta) = \pi^{-1} \Gamma(1 + 1/\alpha) \cos(\theta\pi/2),$$

$$g'(0; \alpha, \theta) = (2\pi)^{-1} \Gamma(1 + 2/\alpha) \sin(\theta\pi).$$

7. Если плотность распределения $g(x; \alpha, \theta)$ не является *крайней* (то есть $\theta \neq \pm\theta_\alpha$), то оба ее хвоста спадают по закону $|x|^{-\alpha-1}$ («тяжелые хвосты»):

$$g(\pm|x|; \alpha, \theta) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} \sin \frac{\alpha(1 \pm \theta)\pi}{2} |x|^{-1-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty.$$

8. Для крайних плотностей, когда

$$\theta = \begin{cases} \pm 1, & \alpha < 1, \\ \pm(2/\alpha - 1), & \alpha > 1 \end{cases}$$

одна из приведенных выше формул теряет смысл: соответствующий хвост становится «коротким» с экспоненциально спадающей асимптотикой.

9. Как следует из формулы для $G(0; \alpha, \theta)$, положительным значениям коэффициента асимметрии θ соответствует сосредоточение большей доли вероятности на положительной полуоси, отрицательным значениям θ — на отрицательной полуоси. При $\alpha \leq 1$ $G(0; \alpha, 1) = 0$ и $G(0; \alpha, -1) = 1$, то есть крайние распределения становятся *односторонними*, сосредоточенными исключительно на положительной или отрицательной полуосях. При $\alpha \rightarrow 1$

$$G(x; \alpha, 1) \rightarrow G(x; 1, 1) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

и односторонние плотности становятся вырожденными:

$$g(x; 1, \pm 1) = \delta(x \mp 1).$$

10. Следующие устойчивые плотности представляются в элементарных функциях: распределение Гаусса

$$g(x, 2, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right),$$

распределение Коши

$$g(x, 1, 0) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

и распределение Леви—Смирнова

$$g(x, 1/2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x^3}} \exp\left(-\frac{x}{4}\right).$$

11. Трансформанта Меллина от плотности на положительной полуоси

$$g(s; \alpha, \theta) \equiv \int_0^\infty g(x; \alpha, \theta) x^s dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s\alpha)}{\Gamma(\rho s)\Gamma(1-\rho s)}, \quad \rho = \frac{1+\theta}{2}.$$

12. Преобразование Лапласа односторонних распределений

$$g(\lambda; \alpha, 1) \equiv \int_0^\infty g(x; \alpha, 1) e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda^\alpha}, \quad \alpha \leq 1.$$

13. Характеристический показатель α в обеих формах А и С один и тот же, параметры асимметрии β и θ связаны формулой

$$\beta = \operatorname{tg} \frac{\theta\alpha\pi}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2},$$

а сами случайные величины — соотношением

$$S(\alpha, \theta) \stackrel{d}{=} \left[\cos \frac{\theta\alpha\pi}{2} \right]^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}.$$

14. Удобство формы C , среди прочего, и в том, что при $\theta = 1$ и $\alpha \uparrow 1$, как это видно из свойства 12,

$$g(x; \alpha, 1) \rightarrow \delta(x - 1).$$

В форме A распределение вероятностей при этих условиях уходит на бесконечность.

Мы пришли к устойчивым распределениям, рассмотрев сначала L -процессы, затем — последовательности нормированных сумм независимых случайных величин, однако сами устойчивые (мы ограничиваемся везде лишь строго устойчивыми) распределения и определяемые ими случайные величины могут быть определены и непосредственно. Одно из таких определений имеет следующий вид.

15. Случайная величина S называется устойчивой с показателем $\alpha \in (0, 2]$, если для любого n

$$\sum_{j=1}^n S_j \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} S,$$

где S_j — не зависящие от S и друг от друга случайные величины с одним и тем же α -устойчивым распределением.

3.4. *Многомерные устойчивые распределения.* Понятие устойчивости в смысле Леви легко обобщается на случайные векторы и соответствующие им многомерные распределения.

Случайный вектор $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d)$ называется устойчивым, если для любого n

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{S}_j \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} \mathbf{S}.$$

Характеристическая функция d -мерного устойчивого вектора имеет вид

$$\tilde{g}_d^{(\alpha, \Gamma)}(\mathbf{k}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |\mathbf{k}s|^\alpha \left[1 - i \operatorname{sign}(\mathbf{k}s) \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \right] \Gamma(ds) \right\},$$

где $\Gamma(ds)$ — конечная мера на сфере S_d единичного радиуса в рассматриваемом d -мерном пространстве, называемая *спектральной мерой*. Плотность

$$g_d^{(\alpha, \Gamma)}(\mathbf{x}) = g_d^{(\alpha, \Gamma)}(x_1, \dots, x_d) q \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dk_d e^{-i(k_1 x_1 + \dots + k_d x_d)} \tilde{g}^{(\alpha, \Gamma)}(k_1, \dots, k_d)$$

называется *многомерной устойчивой плотностью*.

Если спектральная мера равномерно распределена по сфере,

$$\Gamma(ds) = \operatorname{const} \cdot ds,$$

эта плотность изотропна. Определим стандартную характеристическую функцию изотропного распределения формулой

$$\tilde{g}_d^{(\alpha, \Gamma_0)}(\mathbf{k}) \equiv \tilde{g}_d(\mathbf{k}, \alpha) = \exp(-|\mathbf{k}|^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 2.$$

Соответствующая ей плотность может быть представлена в виде однократного интеграла, содержащего функцию Бесселя:

$$g_d(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi)^{-d/2} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} J_{d/2-1}(s|\mathbf{x}|) s^{1-d/2} s^{d-1} ds.$$

Для первых трех размерностей имеем

$$g_1(x, \alpha) = \pi^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} \cos(s|x|) ds, \quad g_2(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} J_0(s|\mathbf{x}|) s ds,$$

$$g_3(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi^2|x|)^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} \sin(s|\mathbf{x}|) s ds.$$

Как и в одномерном случае, имеют место разложения в ряды:

$$g_d(\mathbf{x}, \alpha) \equiv g_d(r, \alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(r\sqrt{\pi})^d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma((\alpha n + d)/2) \Gamma(\alpha n/2 + 1)}{\Gamma(n+1)} \sin \frac{\alpha n \pi}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^{-\alpha n},$$

$$g_d(r, \alpha) = \frac{2}{\alpha} \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^d} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma((2/\alpha)n + d/\alpha)}{\Gamma(n + d/2) \Gamma(n+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}.$$

Первый из них является сходящимся при $\alpha \in (0, 1)$ и асимптотическим при $\alpha \in [1, 2)$, второй, напротив, сходится при $\alpha \in [1, 2]$ и является асимптотическим при $\mu \in (0, 1)$.

Если спектральная мера сосредоточена в точках пересечения осей со сферой, компоненты $S_1, \dots, S_d$ устойчивого вектора $\mathbf{S}$ взаимно независимы.

Два важных обстоятельства следует отметить здесь. Во-первых, изотропность распределения влечет за собой независимость компонент только в случае $\alpha = 2$. При $\alpha < 2$ компоненты изотропно распределенного вектора не являются независимыми, а распределение с независимыми компонентами не является изотропным. Во-вторых, ввиду расходимости дисперсии обычная корреляционная техника анализа статистической связи компонент при $\alpha < 2$ неприменима.

4. Изотропные векторы.

4.1. Радиальные функции. Трехмерный вектор $R = R\Omega$ называют изотропным, если модуль его R не зависит от единичного вектора направления Ω , а последний характеризуется изотропным (равномерным по полному телесному углу) распределением.

Между трёхмерным сферически симметричным и одномерным устойчивым законом существует следующее соотношение [1]

$$p_3^{(\alpha)}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{dp_1^{(\alpha)}(x)}{dx} \Big|_{x=r}, \quad (7)$$

благодаря которому имеем

$$F(r) \equiv P(R < r) = 4\pi \int_0^r r^2 p_3^{(\alpha)}(r) dr, \quad r \geq 1. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (8) и интегрируя по частям, имеем

$$F(r) = 2 \left[F_1(r) - r p_1^{(\alpha)}(r) - \frac{1}{2} \right], \quad (9)$$

где

$$F_1(r) = \int_{-\infty}^r p_1^{(\alpha)}(x) dx \quad (10)$$

— соответствующая одномерная функция распределения. Она может быть представлена в виде [14]

$$F_1(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\{-r^{\alpha/(\alpha-1)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi, & \alpha < 1, \\ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\{-r^{\alpha/(\alpha-1)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi, & \alpha > 1 \end{cases} \quad (11)$$

где

$$V_\alpha(\varphi) = \left(\frac{\sin(\alpha\varphi)}{\cos \varphi} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \frac{\cos[(\alpha-1)\varphi]}{\cos \varphi}, \quad \alpha \neq 1, \quad x \geq 0.$$

Согласно уравнению (10) дифференцирование (11) по r приводит к интегральному представлению одномерной плотности распределения

$$p_1^{(\alpha)}(r) = \frac{\alpha r^{1/(\alpha-1)}}{\pi|1-\alpha|} \int_0^{\pi/2} V_\alpha(\varphi) \exp\{-r^{\alpha/(\alpha-1)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi. \quad (12)$$

Кроме этого, существует два представления в виде бесконечных рядов:

$$\begin{aligned} p_1^{(\alpha)}(r) &= \frac{1}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma(1+k\alpha) r^{-k\alpha} \sin\left(\frac{\pi k\alpha}{2}\right), \\ p_1^{(\alpha)}(r) &= \frac{1}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right) r^k \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Последнее может быть переписано в виде

$$p_1^{(\alpha)}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi\alpha} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) \frac{1}{(2k)!} r^{2k}. \quad (14)$$

Ряды (13) и (14) являются сходящимися в областях $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha \in (1, 2)$ соответственно, и асимптотическими для $x \rightarrow \infty$ (формула (13) для $\alpha \in (1, 2)$) и $x \rightarrow 0$ (формула (14) для $\alpha \in (0, 1)$).

Используя формулы (11)–(14), получаем следующие представления для функции распределения (9):

$$F(r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1-\alpha)} \int_0^{\pi/2} [1-\alpha - \alpha r^{-\alpha/(1-\alpha)} V_\alpha(\varphi)] \exp\{-r^{-\alpha/(1-\alpha)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi, & \alpha < 1, \\ 1 - \frac{2}{\pi(1-\alpha)} \int_0^{\pi/2} [1-\alpha - \alpha r^{-\alpha/(1-\alpha)} V_\alpha(\varphi)] \exp\{-r^{-\alpha/(1-\alpha)} V_\alpha(\varphi)\} d\varphi, & \alpha > 1, \end{cases} \quad (15)$$

$$1 - F(r) = \frac{2}{\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \Gamma(k\alpha + 2) \sin\left(\frac{\pi k\alpha}{2}\right) \frac{r^{-k\alpha}}{k}. \quad (16)$$

$$F(r) = \frac{4}{\pi\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) \frac{k}{(2k+1)!} r^{2k+1}, \quad (17)$$

Заметим, что при $\alpha = 1$

$$F(r) = \frac{2}{\pi} \left[\arctg r - \frac{r}{1+r^2} \right]. \quad (18)$$

На рис. 2 показаны некоторые результаты численных расчётов для функции распределения, проведённых по формуле (15); рис. 3 демонстрирует вклады первых членов разложений (16)–(17) для малых и больших значений r .

4.2. Аппроксимация обратной радиальной функции. Один из путей моделирования переменной R с заданным распределением $F(r)$ основан на преобразовании стандартизованной (равномерно распределённой $[0, 1]$) случайной величины U по формуле

$$R = r(U),$$

где $r(x) = F^{-1}(x)$ есть обратная функция распределения. Удобно найти некоторое аппроксимирующее выражение для этой функции. Для решения этой проблемы были численно найдены значения обратной функции распределения и затем аналитически проанализировано её асимптотическое поведение при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 1$.

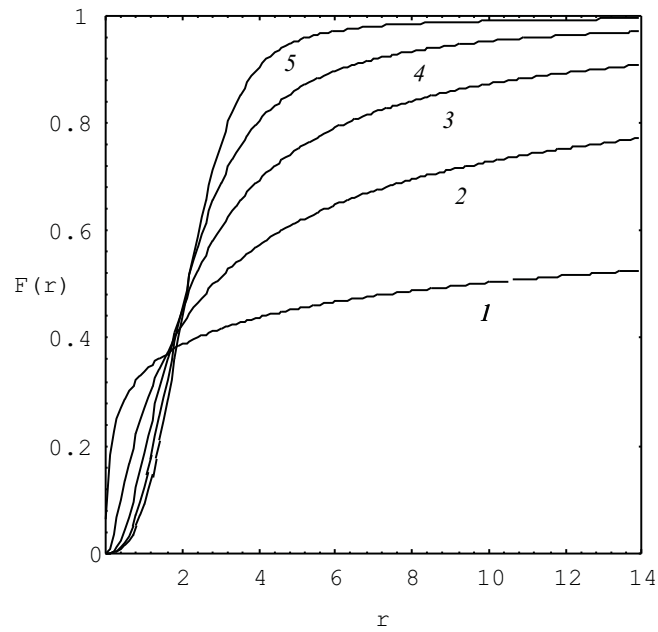


Рис. 2. Функция распределения $F(r)$ для различных значений показателя устойчивого закона $\alpha = 0,4, 0,6, 1,0, 1,4, 1,8$ (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно).

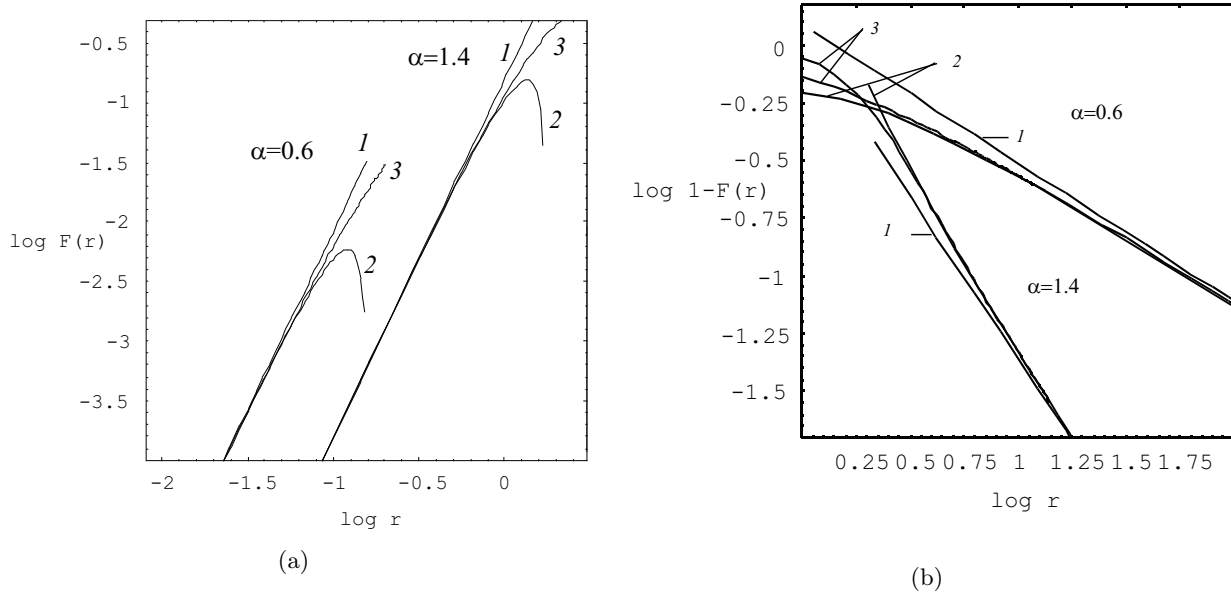


Рис. 3. Функция распределения $F(r)$ для $\alpha = 0,6, 1,4$: (а) на малых; (б) на больших расстояниях (кривые 3). Кривые 1, 2 относятся к одному и двум членам рядов (16) (рис. (а)) и (17) (рис. (б)) соответственно.

Согласно (17) мы можем записать следующее уравнение для обратной функции распределения $r_0(x)$ вблизи точки $x = 0$:

$$ar_0^3 - br_0^5 = x \quad (19)$$

где

$$a = \frac{2}{3\pi\alpha} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right), \quad b = \frac{8}{5!\pi\alpha} \Gamma\left(\frac{5}{\alpha}\right).$$

Взяв

$$r_0^{(1)}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} \quad (20)$$

как первое приближение и подставляя далее

$$r_0^{(2)}(x) = r_0^{(1)}(x) + r'(x)$$

в (19), получаем

$$r'(x) = \frac{x - (ar_0^{(1)3} - br_0^{(1)5})}{3ar_0^{(1)2} - 5br_0^{(1)4}}.$$

Тогда второе приближение имеет вид

$$r_0^{(2)}(x) = (x/a)^{1/3} + \frac{b(x/a)}{3a - 5b(x/a)^{2/3}}.$$

Чтобы избежать расходимости в точке, где знаменатель обращается в ноль, перепишем это выражение в другой приближительной форме:

$$r_0^{(2)}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \frac{b}{a} \frac{x}{a} + \frac{5}{9} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{x}{a}\right)^{5/3}. \quad (21)$$

Для больших r основной член ряда (16) даёт первое приближение обратной функции распределения возле 1

$$r_1^{(1)}(x) = \left[\frac{B}{1-x} \right]^{1/\alpha},$$

где

$$B = \frac{2}{\pi\alpha} \Gamma(\alpha + 2) \sin \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Учёт второго члена в (16) приводит к следующему уравнению

$$1 - x = \frac{2}{\pi\alpha} \left\{ \Gamma(\alpha + 2) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) r^{-\alpha} - \Gamma(2\alpha + 2) \sin(\pi\alpha) \frac{r^{-2\alpha}}{2} \right\}$$

или

$$Ar^{-2\alpha} - Br^{-\alpha} + 1 - x = 0$$

с коэффициентом

$$A = \frac{\Gamma(2\alpha + 2)}{2\pi\alpha} \sin(\pi\alpha),$$

который положителен для $\alpha < 1$, но меняет свой знак при переходе в область $\alpha > 1$. Поведение функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ проиллюстрировано на Рис. 4.

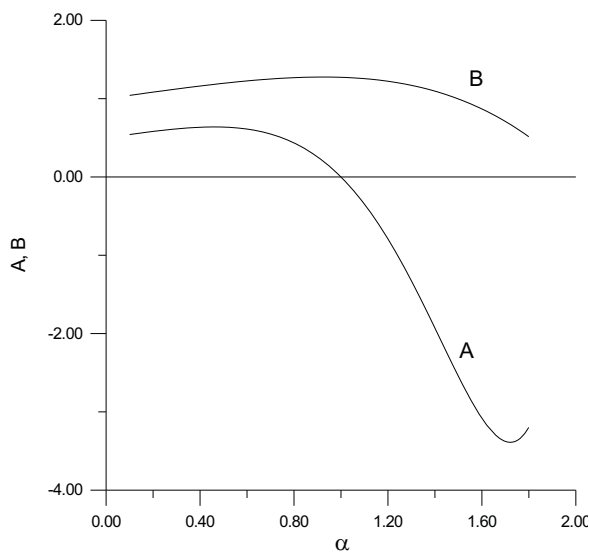
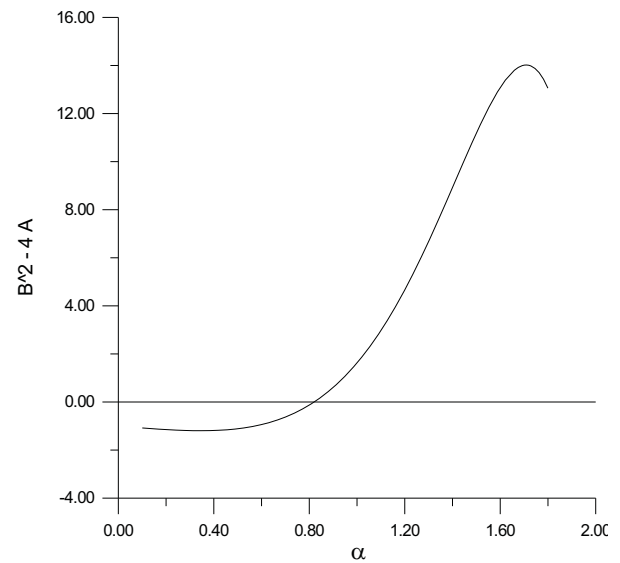
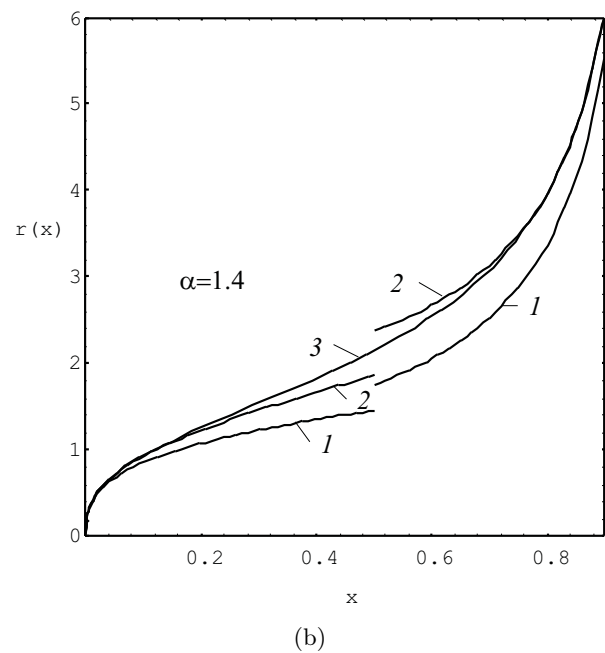
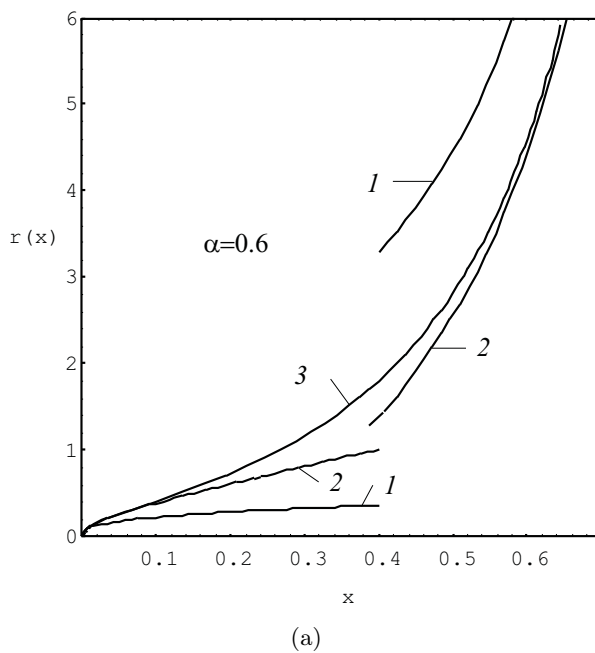
Для того, чтобы получить положительное решение уравнения

$$r^{-\alpha} = B/(2A) \pm \sqrt{(B/2A)^2 - (1-x)/A},$$

следует выбрать в нём знак $-$ для $\alpha < 1$ и $+$ для $\alpha > 1$. Таким образом, имеем

$$r_1^{(2)}(x) = \begin{cases} [\sqrt{(B/2A)^2 + (1-x)/A} - B/(2A)]^{-1/\alpha}, & \alpha > 1. \\ [B/(2A) - \sqrt{(B/2A)^2 - (1-x)/A}]^{-1/\alpha}, & \alpha < 1, \end{cases} \quad (22)$$

На рис. 6 показан вклад вышеописанных асимптотик в сравнении с точным решением, полученным путём численного обращения уравнения (15). Из графиков видно, что интервал применимости формулы второго приближения $r_1^{(2)}(x)$ значительно больше, чем у $r_1^{(1)}(x)$.

Рис. 4. Функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$.Рис. 5. Поведение функции $B^2 - 4A$ (см. подкоренное выражение в формуле (21)) в зависимости от показателя устойчивого закона α .Рис. 6. Обратная функция распределения $r(x)$ (кривая 3) с соответствующими асимптотиками (кривые 1 — первое приближение, кривые 2 — второе приближение): (a) $\alpha=0,6$; (b) $\alpha=1,4$.

4.3. *Моделирование длины устойчивого вектора.* В основу алгоритма положена соответствующая аппроксимация обратной функции распределения $r(x)$. Начиная со случая $\alpha > 1$ мы можем записать желаемое представление для $r(x)$ в виде

$$r(x) = r_0^{(2)}(x) + \psi(x) + r_1^{(2)}(x),$$

где $\psi(x)$ должно быть найдено путём сравнения правой части уравнения с точным численным решением. Однако перед этим необходимо заметить, что слагаемое $\psi(x) + r_1^{(2)}(x)$ не должно менять асимптотического поведения $r(x)$ при $x \rightarrow 0$, которое даётся $r_0^{(2)}(x)$ (смотри формулу (21)), и обратно, слагаемое $r_0^{(2)}(x) + \psi(x)$ не должно влиять на асимптотику $r(x)$ при $x \rightarrow 1$ даваемую $r_1^{(2)}(x)$. Для того, чтобы эти условия удовлетворялись, мы выбираем вспомогательную функцию $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = -r_1^{(2)}(0) - r_1^{(2)'}(0)x - xP_n^*(x),$$

где $r_1^{(2)'}(0)$ — производная от $r_1^{(2)}(x)$ в точке $x = 0$, и $P_n^*(x)$ — полином некоторой степени n . Принимая во внимание, что второй член суммы может быть включён в первый член полинома (звёздочка в этом случае не пишется), мы получаем окончательное выражение для $r(x)$ в виде

$$r(x) = r_0^{(2)}(x) + [r_1^{(2)}(x) - r_1^{(2)}(0)] - xP_n^{(\alpha)}(x), \quad \alpha > 1.$$

Вычисляя коэффициенты $c_0, \dots, c_n$ в выражении

$$xP_n^{(\alpha)}(x) = c_0x + c_1x^2 + \dots + c_nx^{n+1}$$

методом наименьших квадратов, мы нашли, что вполне приемлемая точность может быть достигнута и при использовании полиномов невысокого порядка.

Следует также отметить, что это представление не может быть непосредственно распространено на область $\alpha < 1$, поскольку $r_1^{(2)}(0)$ принимает комплексные значения для всех $\alpha < \alpha^*$ ($\alpha^* \approx 0,82$) (см. Рис. 5), но оказалось, что более простая аппроксимация

$$r(x) = r_0^{(1)}(x) + xr_1^{(1)}(x)P_n^{(\alpha)}(x), \quad \alpha < 1,$$

позволяет достигнуть в этой области желаемой точности. Однако интервал использования данной простой формулы также не может быть расширен на область $\alpha > 1$ без существенного роста степени полинома.

Тестирование предложенного алгоритма показало, что относительная ошибка представленной аппроксимации (рис. 7)

$$\delta(r) = (\tilde{p}_3(r) - p_3(r))/p_3(r)$$

не превышает 1% в плотности функции распределения R для всех значений α за исключением 0,2, 0,4, 0,5 и 1,8, где она превышает 2% только для малых значений r ($r < r_0$, $r_0 = 0,0014, 0,045, 0,0901$ и $0,574$ соответственно), величина вероятности для которых 0,02.

На рис. 8 представлены результаты статистического моделирования в сравнении с численными расчётами плотностей трёхмерных сферически симметричных устойчивых распределений для $\alpha = 0,5, 1,0, 1,5$. Видимое согласие подтверждает χ^2 -тест: для $\alpha = 0,5, 1,5$ использовался 51 интервал, каждый длиной 0,1 и 20000 и 50000 реализаций соответственно; для $\alpha = 1,0$ использовалось 76 интервалов, каждый длиной 0,1 и 50000 реализаций. Результаты вычислений при уровне значимости 0,01:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{в}}^2 &= 26,6 < \chi_{1-0,01}^2(51-1)v.2 & (\alpha = 0,5); \\ \chi_{\text{в}}^2 &= 44,4 < \chi_{1-0,01}^2(51-1)v.6 & (\alpha = 1,5); \\ \chi_{\text{в}}^2 &= 92,8 < \chi_{1-0,01}^2(76-1) = 6.4 & (\alpha = 1,0). \end{aligned}$$

Явные выражения для $P_n^{(\alpha)}(x)$ при $\alpha = 0,2(0,1)1,8$ представлены в Приложении.

5. Заключение. В процессе написания данного обзора пришлось обращаться к разным работам, и многие из них нашли отражение и в тексте, и в библиографическом перечне, однако связующим все три части обзора стержнем оставалась идея построения метода анализа неупорядоченных систем на перекрестке, условно выражаясь, трех проспектов: Орнштейна—Чернике, Леви—Фельдгейма и Монте-Карло. В определенном смысле, этим и объясняется наличие трех составных частей обзора. Начальные положения данного направления были изложены в работах В. В. Учайкина с соавторами 1997–1999 гг., представленных в монографии [14], за которой

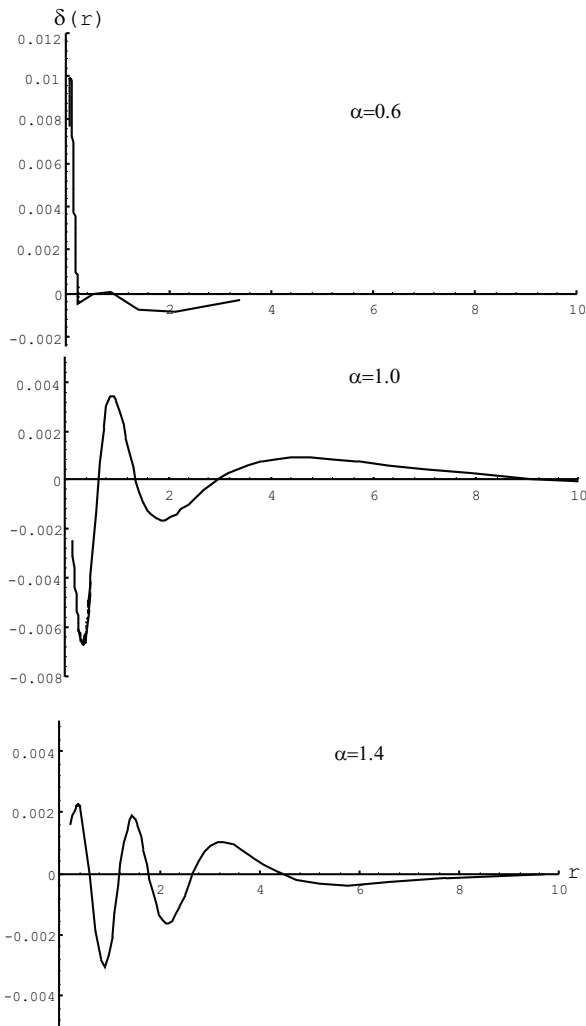


Рис. 7. Относительная ошибка δ в плотности распределения для значений $\alpha = 0,6, 1,0, 1,4$.

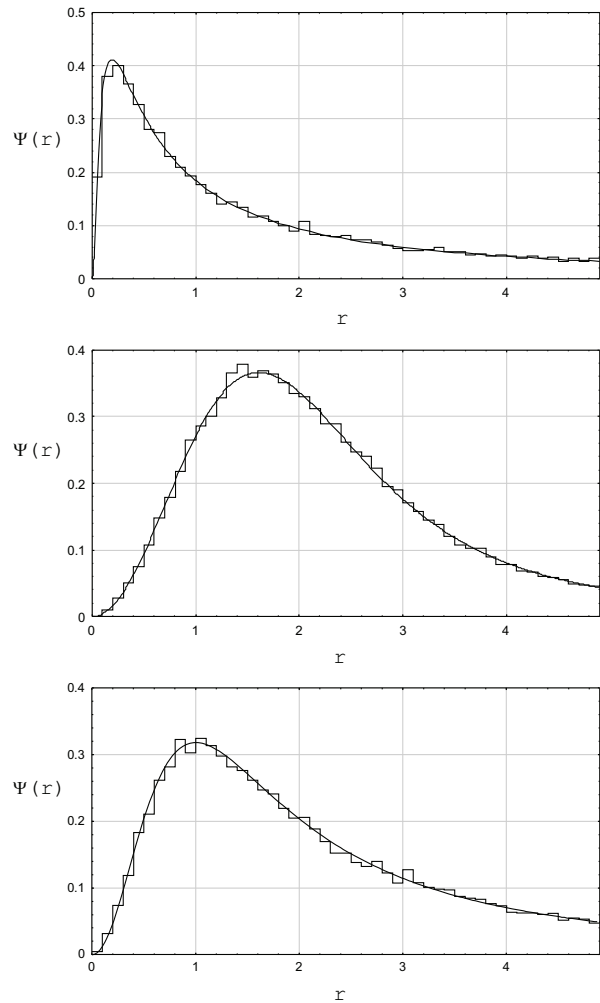


Рис. 8. Результаты статистического моделирования в сравнении с численными расчётами плотностей трёхмерных сферически симметричных устойчивых распределений для $\alpha = 0,5, 1,0, 1,5$.

последовали две работы В. В. Учайкина [7, 8], в одной из которых появился термин «мезофрактал», [5, 11], и др., связанные с космологической тематикой (главным образом, со статистикой крупномасштабного распределения галактик), и вплоть до недавних, совсем свежих работ с новыми соавторами [13] и относящихся уже к статистике межзвездной среды, по-прежнему допускающей мезофрактальную аппроксимацию спектра мощности турбулентных флуктуаций в виде анзаца Учайкина—Золотарева [14].

Представленный в этой, последней части обзора, алгоритм генерирования векторов из трёхмерных сферически симметричных устойчивых распределений основан на аппроксимации обратной функции распределения модуля вектора и позволяет моделировать устойчивые распределения с характеристическим показателем $\alpha = 0,2(0,1)1,8$ и погрешностью в плотности распределения менее одного процента при всех значениях α из указанного диапазона, за исключением граничных значений, где погрешность превышает два процента только в области малых r , на которую приходится вероятность менее 0,02.

Этот алгоритм эффективно использован в наших работах по моделированию кластерных форм крупномасштабных неоднородностей в распределении галактик во Вселенной [13] и в распределении молекулярных облаков в Галактике [12].

В данном обзоре мы ограничились стационарной постановкой задачи. Нестационарная теория развита в наших работах [9, 10].

6. Приложение. Собирая все вышеприведённые выражения для аппроксимирующей функции $r(x)$, получим

$$r(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{A}\right)^{1/3} + x \left[\frac{B}{1-x}\right]^{1/\alpha} P_n^{(\alpha)}(x), & \alpha \leq 1, \\ \left(\frac{x}{A}\right)^{1/3} + \frac{5}{9} \left(\frac{C}{A}\right)^2 \left(\frac{x}{A}\right)^{5/3} + g(x) - x P_n^{(\alpha)}(x), & \alpha > 1, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$A = \frac{2}{3\alpha\pi} \Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right), \quad B = \frac{2\Gamma(\alpha+2)}{\alpha\pi} \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \quad C = \frac{8}{5!\alpha\pi} \Gamma\left(\frac{5}{\alpha}\right), \quad D = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\alpha\pi} |\sin(\alpha\pi)|,$$

$$g(x) = \left[\sqrt{\left(\frac{B}{D}\right)^2 + \frac{2(1-x)}{D}} - \frac{B}{D} \right]^{-1/\alpha} - \left[\sqrt{\left(\frac{B}{D}\right)^2 + \frac{2}{D}} - \frac{B}{D} \right]^{-1/\alpha},$$

$$x P_n^{(\alpha)}(x) = c_0 x + c_1 x^2 + \dots + c_n x^{n+1}.$$

$$P_3^{(0,2)}(x) = 0,04310 + 0,47961x + 0,43761x^2 + 0,03968x^3,$$

$$P_3^{(0,3)}(x) = 0,36633 + 0,68591x - 0,09155x^2 + 0,03931x^3,$$

$$P_2^{(0,4)}(x) = 0,77792 + 0,27989x - 0,05781x^2,$$

$$P_2^{(0,5)}(x) = 1,01155 + 0,09253x - 0,10407x^2,$$

$$P_2^{(0,6)}(x) = 1,06878 + 0,14079x - 0,20957x^2,$$

$$P_2^{(0,7)}(x) = 1,02330 + 0,28358x - 0,30687x^2,$$

$$P_2^{(0,8)}(x) = 0,94223 + 0,39823x - 0,34046x^2,$$

$$P_3^{(0,9)}(x) = 0,86897 + 0,43915x - 0,36207x^2 + 0,05395x^3,$$

$$P_3^{(1,0)}(x) = 0,80193 + 0,44032x - 0,34080x^2 + 0,09855x^3,$$

$$P_3^{(1,1)}(x) = 0,39456 + 3,54231x - 3,06908x^2 + 2,55379x^3,$$

$$P_3^{(1,2)}(x) = 0,34583 + 2,37756x - 1,18707x^2 + 0,47064x^3,$$

$$P_3^{(1,3)}(x) = 0,26378 + 1,95839x - 1,08096x^2 + 0,53840x^3,$$

$$P_3^{(1,4)}(x) = 0,16540 + 1,84557x - 1,42423x^2 + 0,89226x^3,$$

$$P_3^{(1,5)}(x) = 0,05993 + 1,96872x - 2,24189x^2 + 1,57409x^3,$$

$$P_5^{(1,6)}(x) = 0,04606 + 1,59258x - 3,18405x^2 + 7,19358x^3 - 8,69865x^4 + 4,37779x^5,$$

$$P_6^{(1,7)}(x) = 0,00210 + 0,84060x + 2,58118x^2 - 16,69826x^3 + 39,86698x^4 - 43,13309x^5 + 17,89178x^6,$$

$$P_9^{(1,8)}(x) = -0,34685 + 6,66547x - 41,66960x^2 + 133,46730x^3 - 189,59325x^4 + 22,42745x^5 + \\ + 241,46185x^6 - 222,98818x^7 + 18,19747x^8 + 33,83475x^9.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарёв В. М. Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983.
2. Лаппа А. В., Кольчужкин А. М., Учайкин В. В. Интегральные уравнения для вероятностных характеристик функционалов, заданных на траекториях марковской цепи// в кн.: Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике (Марчук Г. И., ред.). — Новосибирск, 1974. — С. 114–121.
3. Учайкин В. В. Спонтанная кластеризация в марковских цепях I. Фрактальная пыль// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2023. — 220. — С. 125–144.
4. Учайкин В. В. Спонтанная кластеризация в марковских цепях II. Мезофрактальная модель// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2023. — 221. — С. 128–147.
5. Учайкин В. В., Коробко Д. А., Гисмятов И. Ф. Модифицированный алгоритм Мандельброта стохастического моделирования распределения галактик фрактального типа// Изв. вузов. Физ. — 1997. — 8. — С. 7–13.
6. Shanks T. Discriminating between models of galaxy clustering by statistical measures// Month. Not. Roy. Astron. Soc. — 1979. — 186. — P. 583–602.
7. Uchaikin V. V. If the universe were a Levy–Mandelbrot fractal// Gravit. Cosmology. — 2004. — 10. — P. 5–24.
8. Uchaikin V. V. The mesofractal Universe driven by Rayleigh–Levy walks// Gen. Rel. Gravit. — 2004. — 36, № 7. — P. 1689–1717.
9. Uchaikin V. V. Statistical mechanics of fragmentation-advection processes and monlinear measurements problem, I// Discont. Nonlin. Complex. — 2012. — 1, № 1. — P. 79–112.
10. Uchaikin V. V. Statistical mechanics of fragmentation-advection processes and monlinear measurements problem, II// Discont. Nonlin. Complex. — 2012. — 1, № 2. — P. 171–196.
11. Uchaikin V. V., Gusarov G. G. Levy flight applied to random media problems// J. Math. Phys. — 1997. — 38. — P. 2453–2464.
12. Uchaikin V. V., Kozhemyakin I. I. A mesofractal model of interstellar cloudiness// Universe. — 2022. — 8, № 5. — P. 249–262.
13. Uchaikin V. V., Litvinov V. A., Kozhemyakina E. V., Kozhemyakin I. I. A random walk model for spatial galaxy distribution// Mathematics. — 2021. — 9, № 1. — P. 1–17.
14. Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. Chance and Stability. Stable Distributions and Their Applications. — Utrecht, The Netherlands: VSP, 1999.

Учайкин Владимир Васильевич
Ульяновский государственный университет
E-mail: vuchaikin@gmail.com

Кожемякина Елена Владиславовна
Ульяновский государственный университет
E-mail: elvk@mail.ru



О КАНОНИЧЕСКОЙ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА

© 2023 г. Ю. И. ШЕВЧЕНКО, Е. В. СКРЫДЛОВА, А. В. ВЯЛОВА

Аннотация. Проективная связность Картана преобразована к каноническому виду с помощью тензора деформации, который является расширенным тензором кручения. Тензор кривизны-кручения канонической проективной связности вырождается в аналог тензора центропроективной кривизны. Проективная связность станет канонической лишь при аннулировании расширенного тензора кручения.

Ключевые слова: проективная связность Картана, тензор кривизны-кручения, тензор кручения, тензор аффинной кривизны-кручения, каноническая проективная связность.

ON CARTAN'S CANONICAL PROJECTIVE CONNECTION

© 2023 Yu. I. SHEVCHENKO, E. V. SKRYDLOVA, A. V. VYALOVA

ABSTRACT. The projective Cartan connection is reduced to the canonical form using the deformation tensor, which is an extended torsion tensor. The curvature-torsion tensor of the canonical projective connection is degenerated into an analog of the centroprojective curvature tensor. The projective connection becomes canonical only when the extended torsion tensor vanishes.

Keywords and phrases: projective Cartan connection, curvature-torsion tensor, torsion tensor, affine curvature-torsion tensor, canonical projective connection.

AMS Subject Classification: 53B10

1. Введение. Проективная связность Картана, не являющаяся связностью в расслоении, до сих пор привлекает внимание. Обзор основных работ в этом направлении дал Ю.Г. Лумисте [6]. В настоящей статье продолжено исследование этого объекта.

Рассмотрены структурные уравнения проективной связности Картана, записанные в подробном виде. Из дифференциальных уравнений для компонент тензора кривизны-кручения следует, что этот тензор содержит тензоры кручения и аффинной кривизны-кручения. Рассмотрены особые случаи и сформулировано три утверждения относительно проективной группы, проективного пространства и типового слоя пространства проективной связности.

Структурные уравнения пространства проективной связности преобразованы к каноническому виду с помощью расширенного тензора кручения. Тензор кривизны-кручения канонической проективной связности вырождается в аналог тензора центропроективной (коаффинной) кривизны. Доказано, что проективная связность Картана и каноническая проективная связность совпадают лишь тогда, когда тензор расширенного кручения равен нулю.

2. Тензор кривизны-кручения и его подтензоры. Структурные уравнения пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$, полученные в результате обобщения соответствующих уравнений проективной группы $GP(n)$ в неоднородной форме, имеют вид (см., например, [1,2,7,11,12]):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_k^i + T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (1)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R_{jki}^i \omega^k \wedge \omega^l, \quad (2)$$

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + R_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k, \quad (3)$$

причем индексы принимают следующие значения: $i, j, k, \dots = \overline{1, n}$. Коэффициенты T_{jk}^i , R_{jkl}^i , R_{ijk} антисимметричны по двум последним индексам

$$T_{(jk)}^i = 0, \quad R_{j(kl)}^i = 0, \quad R_{i(jk)} = 0, \quad (4)$$

где круглые скобки обозначают симметрирование.

Утверждение 1. *Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ есть специальное n -мерное гладкое многообразие B_n со структурными уравнениями (1), двукратное продолжение которых имеет вид (2), (3), поэтому формы ω^i называются базисными, а формы ω_j^i , ω_i — слоевыми формами.*

Дифференцируем квадратичные уравнения (1), (2), (3) внешним образом:

$$\begin{aligned} & \left[\Delta T_{jk}^i + (T_{mk}^i T_{lj}^m - T_{jm}^i T_{kl}^m - R_{jkl}^i) \omega^l \right] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0, \\ & \left[\Delta R_{jkl}^i - \delta_j^i T_{kl}^m \omega_m - T_{kl}^i \omega_j + (\delta_j^i R_{klm} + \delta_m^i R_{jkl} + 2R_{jpl}^i T_{mk}^p) \omega^m \right] \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0, \\ & \left[\Delta R_{ijk} + R_{ijk}^l \omega_l + (R_{imk} T_{lj}^m - R_{ijm} T_{kl}^m) \omega^l \right] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta T_{jk}^i = dT_{jk}^i + T_{jk}^l \omega_l^i - T_{lk}^i \omega_j^l - T_{jl}^i \omega_k^l.$$

Разрешим кубические уравнения (5) по лемме Лаптева [3, 4], вынесем базисные формы ω^i , применим лемму Картана, проальтернируем полученное по двум последним индексам и запишем результат:

$$\Delta T_{jk}^i = T_{jkl}^i \omega^l, \quad (6)$$

$$\Delta R_{jkl}^i - \delta_j^i T_{kl}^m \omega_m - T_{kl}^i \omega_j = R_{jklm}^i \omega^m, \quad (7)$$

$$\Delta R_{ijk} + R_{ijk}^l \omega_l = R_{ijkl} \omega^l. \quad (8)$$

Утверждение 2. *Объект $R = \{T_{jk}^i, R_{jkl}^i, R_{ijk}\}$ является тензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (6), (7), (8). Тензор R , называемый тензором (проективной) кривизны-кручения пространства проективной связности $P_{n,n}$, содержит два подтензора: T_{jk}^i — тензор кручения и $\{R_{jkl}^i, T_{jk}^i\}$ — тензор аффинной кривизны-кручения (см. [5, 8–10, 13]).*

3. Обобщенные тождества Риччи. Подставим дифференциальные уравнения (6), (7), (8) в кубические уравнения (5):

$$\begin{aligned} & (T_{jkl}^i + T_{mk}^i T_{lj}^m - T_{jm}^i T_{kl}^m - R_{jkl}^i) \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0, \\ & (R_{jklm}^i + \delta_j^i R_{klm} + \delta_m^i R_{jkl} + 2R_{jpl}^i T_{mk}^p) \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m = 0, \\ & (R_{ijkl} + R_{imk} T_{lj}^m + R_{imj} T_{kl}^m) \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, альтернированные по трем индексам коэффициенты при внешних произведениях базисных форм равны нулю

$$\begin{aligned} & T_{[jkl]}^i + T_{m[k}^i T_{lj]}^m + T_{m[j}^i T_{kl]}^m - R_{[jkl]}^i = 0, \\ & R_{j[klm]}^i + \delta_j^i R_{[klm]} + R_{j[kl} \delta_{m]}^i + 2R_{jpl}^i T_{mk]}^p = 0, \\ & R_{i[jkl]} + R_{im[k} T_{lj]}^m + R_{im[j} T_{kl]}^m = 0. \end{aligned}$$

Здесь учтено первое условие антисимметрии (4), а в квадратных скобках производится альтернирование по трем индексам. Поскольку в каждой квадратной скобке имеется антисимметрия по

паре индексов, альтернирование можно заменить циклированием

$$T_{\{jkl\}}^i + 2T_{m\{j}^i T_{kl\}}^m - R_{\{jkl\}}^i = 0, \quad (9)$$

$$R_{j\{klm\}}^i + \delta_j^i R_{\{klm\}} + R_{j\{kl} \delta_m^i + 2R_{jp\{k}^i T_{lm\}}^p = 0, \quad (10)$$

$$R_{i\{jkl\}} + 2R_{im\{j} T_{kl\}}^m = 0, \quad (11)$$

где фигурные скобки обозначают циклирование по трем индексам.

Утверждение 3. Компоненты тензора кривизны-кручения R проективной связности Картана и их пфаффовы производные T_{jkl}^i , R_{jklm}^i , R_{ijkl} удовлетворяют обобщенным тождествам Риччи (9), (10), (11).

4. Пространства без кручения и без аффинной кривизны-кручения. Если в особом случае проективная связность не имеет кручения, то отсутствуют дифференциальные уравнения (6); становятся проще структурные уравнения (1), дифференциальные уравнения (7) и тождества Риччи (9), (10), (11); сохраняют вид уравнения (2), (3), (8):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad (12)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + \dot{R}_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \quad (13)$$

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \dot{R}_{ijk} \omega^j \wedge \omega^k; \quad (14)$$

$$\Delta \dot{R}_{jkl}^i = \dot{R}_{jklm}^i \omega^m, \quad (15)$$

$$\Delta \dot{R}_{ijk} + \dot{R}_{ijk}^l \omega_l = \dot{R}_{ijkl} \omega^l; \quad (16)$$

$$\dot{R}_{\{jkl\}}^i = 0, \quad (17)$$

$$\dot{R}_{j\{klm\}}^i + \delta_j^i \dot{R}_{\{klm\}} + \dot{R}_{j\{kl} \delta_m^i = 0, \quad (18)$$

$$\dot{R}_{i\{jkl\}} = 0. \quad (19)$$

В этом случае компоненты объектов отмечены кружком.

Более того, когда отсутствует аффинная кривизна-кручение, уравнения (15), (17) пропадают, (13), (16), (18) становятся проще, (12), (14), (19) не меняют вид:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad (20)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i, \quad (21)$$

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \dot{R}_{ijk} \omega^j \wedge \omega^k; \quad (22)$$

$$\Delta \dot{R}_{ijk} = \dot{R}_{ijkl} \omega^l; \quad (23)$$

$$\delta_j^i \dot{R}_{\{klm\}} + \dot{R}_{j\{kl} \delta_m^i = 0, \quad (24)$$

$$\dot{R}_{i\{jkl\}} = 0. \quad (25)$$

В этом особенном случае над компонентами объектов поставлена точка.

Наконец, если весь тензор кривизны-кручения обращается в нуль: $R = 0$, то структурные уравнения (20), (21) сохраняют вид, а уравнения (22) становятся проще; дифференциальные уравнения (23) и тождества (24), (25) исчезают:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad (26)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i, \quad (27)$$

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j. \quad (28)$$

Получили структурные уравнения Картана для проективной группы $GP(n)$ в неоднородной форме (см., например, [2]).

Утверждение 4. В пространстве проективной связности без кручения $\dot{P}_{n,n}$ тензор проективной кривизны-кручения R вырождается в тензор аналога центропроективной (коаффинной)

кривизны $\mathring{R} = \{\mathring{R}_{jkl}^i, \mathring{R}_{ijk}\}$, содержащий подтензор аналога линейной кривизны $\mathring{R}_{jkl}^i$. В пространстве без аффинной кривизны-кручения $\mathring{P}_{n,n}$ тензор $\mathring{R}$ превращается в тензор $\mathring{R}_{ijk}$.

5. Пространство проективной связности Картана как обобщение проективной группы. Сопоставим структурные уравнения (1), (2), (3) и (26), (27), (28).

Утверждение 5. *Проективная группа $GP(n)$ является пространством проективной связности Картана без кривизны-кручения.*

Утверждение 6. *Если тензор кривизны-кручения R пространства проективной связности $P_{n,n}$ обращается в нуль: $R = 0$, то это пространство вырождается в проективную группу $GP(n)$.*

Утверждение 7. *Пространство $P_{n,n}$ со структурными уравнениями (1), (2), (3) обобщает проективную группу $GP(n)$ с неоднородными структурными уравнениями (26), (27), (28), действующую эффективно в проективном пространстве P_n .*

В силу структурных уравнений (26) система уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируема. Она выделяет из проективной группы $GP(n)$ коаффинную (центропроективную) подгруппу $GA^*(n)$ со структурными уравнениями

$$d\bar{\omega}_j^i = \bar{\omega}_j^k \wedge \bar{\omega}_k^i, \quad d\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_i^j \wedge \bar{\omega}_j (\bar{\omega} = \omega|_{\omega^i=0}). \quad (29)$$

Утверждение 8. *Проективное пространство P_n является факторпространством проективной группы $GP(n)$ по коаффинной подгруппе $GA^*(n)$: $P_n = GP(n)/GA^*(n)$.*

Если $\omega^i = 0$, то структурные уравнения (1) будут отсутствовать, а уравнения (2), (3) примут вид (29).

Утверждение 9. *При фиксации точки на базе B_n пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$ это пространство вырождается в центропроективную группу $GA^*(n)$.*

6. Преобразование структурных уравнений. Запишем уравнения (1) в виде структурных уравнений специального гладкого многообразия — базы B_n пространства $P_{n,n}$:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \theta_j^i, \quad (30)$$

$$\theta_j^i = \omega_j^i + T_{jk}^i \omega^k. \quad (31)$$

С помощью структурных уравнений (2), (30) будем искать внешние дифференциалы от форм (31):

$$d\theta_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l + (dT_{jk}^i - T_{jl}^i \theta_k^l) \wedge \omega^k. \quad (32)$$

Преобразуем первое слагаемое, используя обозначение (31):

$$\omega_j^k \wedge \omega_k^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i - T_{jl}^k \omega^l \wedge \theta_k^i - \theta_j^k \wedge T_{km}^i \omega^m + T_{jl}^k \omega^l \wedge T_{km}^i \omega^m.$$

Во втором и третьем слагаемых вернемся к исходным формам

$$\omega_j^k \wedge \omega_k^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i - T_{jl}^k \omega^l \wedge \omega_k^i - \omega_j^k \wedge T_{km}^i \omega^m - T_{jl}^k \omega^l \wedge T_{km}^i \omega^m.$$

Подставим это выражение в уравнения (32):

$$d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + \Delta T_{jk}^i \wedge \omega^k + (R_{jkl}^i + T_{jm}^i T_{kl}^m - T_{jk}^m T_{ml}^i) \omega^k \wedge \omega^l. \quad (33)$$

Слоевые формы ω_j^i подверглись преобразованию (31) с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^k . Произведем аналогичное преобразование оставшихся слоевых форм ω_i :

$$\theta_i = \omega_i + T_{ij} \omega^j (T_{ij} = 0). \quad (34)$$

Используя структурные уравнения (3), (30), запишем внешние дифференциалы форм (34):

$$d\theta_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + R_{ijk} \omega^j \wedge \omega^k + (dT_{ij} - T_{ik} \theta_j^k) \wedge \omega^j. \quad (35)$$

Преобразуем первое слагаемое с помощью равенств (31), (34):

$$\omega_i^j \wedge \omega_j = \theta_i^j \wedge \theta_j - T_{ik}^j \omega^k \wedge \omega_j - \omega_i^j \wedge T_{jl} \omega^l - T_{ij}^l \omega^j \wedge T_{lk} \omega^k.$$

Подставим это выражение в уравнения (35) и используем обозначение (31):

$$d\theta_i = \theta_i^j \wedge \theta_j + (\Delta T_{ij} + T_{ij}^k \omega_k) \wedge \omega^j + (R_{ijk} - T_{ij}^l T_{lk} + T_{il} T_{jk}^l) \omega^j \wedge \omega^k. \quad (36)$$

Наконец, внесем формы (34) в структурные уравнения (33) и воспользуемся дифференциальными уравнениями (6):

$$d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \delta_j^i \theta_k \wedge \omega^k + \theta_j \wedge \omega^i + (R_{jkl}^i + T_{jm}^i T_{kl}^m + \delta_j^i T_{kl} - \delta_{[k}^i T_{l]j} + T_{j[k}^m T_{l]m}^i - T_{j[kl}^i) \omega^k \wedge \omega^l. \quad (37)$$

Утверждение 10. *Формы θ_j^i , θ_i , полученные из слоевых форм ω_j^i , ω_i пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$ в результате преобразований (31), (34) с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^k с данными коэффициентами T_{jk}^i и неопределенными коэффициентами T_{ij} , удовлетворяют структурным уравнениям (36), (37).*

7. Деформация проективной связности Картана. Зададим поле дополнительного объекта деформации T_{ij} на базе B_n (ср. [5, 8]):

$$\Delta T_{ij} + T_{ij}^k \omega_k = T_{ijk} \omega^k. \quad (38)$$

Учитывая обозначения (31), (34), дадим

Определение 1. Объект $T = \{T_{jk}^i, T_{ij}\}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (6), (38), назовем тензором деформации проективной связности Картана, причем этот тензор содержит подтензор кручения T_{jk}^i , поэтому тензор T можно также называть расширенным тензором кручения.

Замечание 1. При деформировании тривиальной связности проективного пространства тензор T назывался [8] объектом проективной деформации с подтензором аффинной деформации.

Теперь структурные уравнения (37), (36) можно записать в виде уравнений (2), (3):

$$d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \delta_j^i \theta_k \wedge \omega^k + \theta_j \wedge \omega^i + \mathcal{R}_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \quad (39)$$

$$d\theta_i = \theta_i^j \wedge \theta_j + \mathcal{R}_{ijk} \omega^j \wedge \omega^k; \quad (40)$$

$$\mathcal{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + T_{jm}^i T_{kl}^m + \delta_j^i T_{kl} - \delta_{[k}^i T_{l]j} + T_{j[k}^m T_{l]m}^i - T_{j[kl}^i, \quad (41)$$

$$\mathcal{R}_{ijk} = R_{ijk} - T_{i[j}^l T_{l|k]} + T_{il} T_{jk}^l - T_{i[jk]}. \quad (42)$$

Найдем дифференциальные сравнения по модулю базисных форм ω^i , которым удовлетворяют компоненты (41), (42) преобразованного тензора кривизны-кручения $\{T_{jk}^i, \mathcal{R}_{jkl}^i, \mathcal{R}_{ijk}\}$. Для этого продолжим дифференциальные уравнения (6), (38). Предварительно раскроем действие дифференциального оператора Δ :

$$dT_{jk}^i + T_{jk}^l \omega_l^i - T_{lk}^i \omega_j^l - T_{jl}^i \omega_k^l = T_{jkl}^i \omega^l,$$

$$dT_{ij} - T_{kj} \omega_i^k - T_{ik} \omega_j^k + T_{ij}^k \omega_k = T_{ijk} \omega^k.$$

Продифференцируем эти уравнения внешним образом, ограничиваясь в силу правильной продолжаемости произведениями лишь с одной базисной формой:

$$\left(\Delta T_{jkl}^i - \delta_l^i T_{jk}^m \omega_m + T_{jk}^i \omega_l + T_{jl}^i \omega_k + T_{lk}^i \omega_j + \dots \right) \wedge \omega^l = 0,$$

$$\left(\Delta T_{ijk} + 2T_{ij} \omega_k + T_{ik} \omega_j + T_{kj} \omega_i + T_{ij}^l \omega_l + \dots \right) \wedge \omega^k = 0.$$

Воспользуемся леммой Картана и запишем результат в виде дифференциальных сравнений по модулю базисных форм ω^i :

$$\begin{aligned} \Delta T_{jkl}^i - \delta_l^i T_{jk}^m \omega_m + T_{jk}^i \omega_l + T_{jl}^i \omega_k + T_{lk}^i \omega_j &\equiv 0, \\ \Delta T_{ijk} + 2T_{ij} \omega_k + T_{ik} \omega_j + T_{kj} \omega_i + T_{ij}^l \omega_l &\equiv 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Альтернируем эти сравнения по двум индексам и приводим подобные слагаемые:

$$\begin{aligned}\Delta T_{j[kl]}^i - T_{j[k}^m \delta_{l]}^i \omega_m + T_{lk}^i \omega_j &\equiv 0, \\ \Delta T_{i[jk]} + T_{i[j} \omega_{k]} + T_{kj} \omega_i + T_{i[jk]}^l \omega_l &\equiv 0.\end{aligned}$$

Эти дифференциальные сравнения вместе с уравнениями (6), (7), (8), (38) позволяют получить сравнения для объектов (41), (42):

$$\Delta \mathcal{R}_{jkl}^i \equiv 0, \quad \Delta \mathcal{R}_{ijk} + \mathcal{R}_{ijk}^l \omega_l \equiv 0. \quad (44)$$

Определение 2. Связность со структурными уравнениями (30), (39), (40) назовем канонической проективной связностью.

Утверждение 11. Каноническая связность имеет нулевой тензор кручения, а совокупность остальных компонент тензора кривизны-кручения $\mathcal{R} = \{0, \mathcal{R}_{jkl}^i, \mathcal{R}_{ijk}\}$ образует тензор с дифференциальными сравнениями для компонент (44), который содержит подтензор $\mathcal{R}_{jkl}^i$.

Замечание 2. Тензор кривизны канонической связности аналогичен тензору кривизны центропроективной (коаффинной) связности, но структурные уравнения этих связностей различны.

8. Роль расширенного тензора кручения. Если тензор кручения равен нулю:

$$T_{jk}^i = 0 \Rightarrow T_{jkl}^i = 0, \quad (45)$$

то $\theta_j^i = \omega_j^i$ и формулы (41), (42) принимают вид:

$$\mathring{\mathcal{R}}_{jkl}^i = \mathring{R}_{jkl}^i + \delta_j^i \mathring{T}_{kl} + \mathring{T}_{j[l} \delta_{k]}^i, \quad (46)$$

$$\mathring{\mathcal{R}}_{ijk} = \mathring{R}_{ijk} - \mathring{T}_{i[jk]}. \quad (47)$$

В этом случае дифференциальные уравнения (15), (16) аналогичны сравнениям (44), но входящие в них объекты различны. Значит, разности соответствующих объектов являются компонентами тензора, т.е.

$$\Delta(\delta_j^i \mathring{T}_{kl} + \mathring{T}_{j[l} \delta_{k]}^i) \equiv 0, \quad \Delta \mathring{T}_{i[jk]} \equiv 0. \quad (48)$$

Действительно, из дифференциальных уравнений (38) при условии (45) следует $\Delta \mathring{T}_{ij} \equiv 0$, т.е. $\mathring{T}_{ij}$ — тензор, поэтому выполняются первые сравнения (48). Кроме того, вторые дифференциальные сравнения (43) при условии (45) принимают вид:

$$\Delta \mathring{T}_{ijk} + 2\mathring{T}_{ij} \omega_k + \mathring{T}_{ik} \omega_j + \mathring{T}_{kj} \omega_i \equiv 0,$$

поэтому совокупность $\{\mathring{T}_{ij}, \mathring{T}_{ijk}\}$ — тензор, что обеспечивает инвариантность сравнений (48).

Если расширенный тензор кручения равен нулю, т.е. наряду с равенствами (45) выполняются равенства

$$\mathring{T}_{ij} = 0 \Rightarrow \mathring{T}_{ijk} = 0,$$

то $\theta_i = \omega_i$. Формулы (46), (47) принимают тривиальный вид:

$$\mathring{\mathcal{R}}_{jkl}^i = \mathring{R}_{jkl}^i, \quad \mathring{\mathcal{R}}_{ijk} = \mathring{R}_{ijk},$$

поэтому справедливо

Утверждение 12. Проективная связность Картана без кручения и каноническая проективная связность имеют аналогичные дифференциальные соотношения для компонент тензоров кривизны $\{\mathring{R}_{jkl}^i, \mathring{R}_{ijk}\}$ и $\{\mathcal{R}_{jkl}^i, \mathcal{R}_{ijk}\}$, но эти тензоры отличаются слагаемыми, которые обращаются в нуль лишь тогда, когда тензор расширенного кручения равен нулю: $T = 0$.

9. Вывод. Проективная связность Картана и каноническая проективная связность совпадают лишь при аннулировании тензора расширенного кручения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Пробл. геом. — 1979. — 9. — С. 3–248.
2. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
3. *Лаптев Г. Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства// Тр. 4 Всесоюз. мат. съезда, 1961. Т. 2. — Л.: Наука, 1964. — С. 226–233.
4. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии// Тр. геом. семин. ВИНТИ. — 1966. — 1. — С. 139–189.
5. *Лемлейн В. Г.* Локальные центропроективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии// Лит. мат. сб. — 1964. — 4, № 1. — С. 41–132.
6. *Лумисте Ю. Г.* Теория связностей в расслоенных пространствах// в кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1969. — М.: ВИНТИ, 1971. — С. 123–168.
7. *Лумисте Ю. Г.* Проективная связность// в кн.: Математическая энциклопедия. Т. 4. — М., 1984. — С. 671–673.
8. *Шевченко Ю. И.* Проективная связность Картана в проективном пространстве// Тр. науч. конф. «Лаптевские чтения». — Пенза, 2004. — С. 150–155.
9. *Шевченко Ю. И.* Центропроективная связность в пространстве проективной связности Картана// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2005. — 36. — С. 154–160.
10. *Шевченко Ю. И.* Классификация пространств проективной связности// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2014. — 45. — С. 144–157.
11. *Cartan E.* Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. — Paris: Gauthier-Villars, 1937.
12. *Kobayashi S., Nagano T.* On projective connection// J. Math. Mech. — 1964. — 13, № 2. — P. 215–235.
13. *Shevchenko Yu. I.* Tensor of affine torsion-curvature of projective Cartans connection// в кн.: Избранные вопросы современной математики. — Калининград, 2005. — С. 49–52.

Шевченко Юрий Иванович
 Балтийский федеральный университет им. И. Канта
 E-mail: iushevchenko@kantiana.ru

Скрыдлова Елена Викторовна
 Балтийский федеральный университет им. И. Канта
 E-mail: eskrydlova@kantiana.ru

Вялова Александра Вячеславна
 Калининградский государственный технический университет
 E-mail: aleksandra.vyalova@klgtu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 141–152
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-141-152

УДК 517.58+517.986.68

АЛГЕБРЫ ЛИ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ИЗОТРОПНЫМ КОНУСОМ

© 2023 г. И. А. ШИЛИН, Дж. ЧОЙ

Аннотация. В статье обсуждается связь некоторых максимальных подалгебр алгебры Ли трехмерной собственной группы Лоренца G с некоторыми специальными функциями: функциями Бесселя и Бесселя—Клиффорда, волновыми кулоновскими функциями, гипергеометрической функции Аппеля F_1 и др. Ядра интегральных операторов в пространстве представлений выражаются через введенную авторами функцию, для которой выводятся континуальные теоремы сложения, которые, в свою очередь, приводят к интегральным формулам для специальных функций. Кратко говорится об аналогичных результатах, связанных с группами, близкими к G .

Ключевые слова: алгебра Ли, функция Бесселя—Клиффорда, волновая кулоновская функция, гипергеометрическая функция Аппеля, интегральный оператор.

LIE ALGEBRAS AND SPECIAL FUNCTIONS RELATED TO THE ISOTROPIC CONE

© 2023 I. A. SHILIN, J. CHOI

ABSTRACT. In this paper, we discuss the relationship between some maximal subalgebras of the Lie algebra of the proper three-dimensional Lorentz group G and some special functions: Bessel and Bessel–Clifford functions, wave Coulomb functions, the Appel hypergeometric function F_1 , etc. The kernels of integral operators in the space of representations are expressed in terms of the function introduced by the authors. For this function, we derive continual addition theorems, which, in turn, lead to integral formulas for special functions. We briefly discuss similar results related to groups similar to G .

Keywords and phrases: Lie algebra, Bessel–Clifford function, Coulomb wave function, Appel hypergeometric function, integral operator.

AMS Subject Classification: 33C80, 22E66

1. Группа G , алгебра $\mathfrak{g}$, некоторые их подгруппы и подалгебры. Изотропным (световым) конусом называют множество точек $(ct)^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ в $\mathbb{R}^4$, где c — скорость света. Это множество является однородным пространством собственной группы Лоренца $\tilde{G}$. Полагая $x_1 = ct$ и $x_4 = 0$, получаем его трехмерный аналог C . Подгруппу в $\tilde{G}$, транзитивно действующую на полуконусе $C_+ = \{x \in C \mid x_1 > 0\}$, обозначим G . Группа G изоморфна связной компоненте $SO_0(2, 1)$ единичной матрицы унимодулярной псевдоортогональной группы Ли $SO(2, 1)$ и состоит из матриц g размера 3×3 , для которых [8] $g_{i1}^2 - g_{i2}^2 - g_{i3}^2 = (-1)^{\delta_{i2} + \delta_{i3}}$ (где δ_{ij} — символ Кронекера), $\det g = 1$, $g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32} > 0$ и $g_{11} > 0$. Еще одним однородным пространством группы G является двуполостный гиперboloид $S_1 = \{x \mid x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1\}$, точка $(1, 0, 0)$ которого инвариантна

относительно преобразования

$$h_1(\tau_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tau_1 & -\sin \tau_1 \\ 0 & \sin \tau_1 & \cos \tau_1 \end{pmatrix} \in G$$

и входит в полный прообраз произвольной точки

$$y = (\operatorname{ch} \xi, \operatorname{sh} \xi \cos \mu, \operatorname{sh} \xi \sin \mu) \in S_1,$$

поскольку существуют преобразования

$$h(\xi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \xi & \operatorname{sh} \xi & 0 \\ \operatorname{sh} \xi & \operatorname{ch} \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $h_1(\tau_1)$ из группы G , такие, что $[h_1(\mu)h(\xi)h_1(\tau_1)](1, 0, 0) = y$. Это означает, что G является функцией переменных $\mu, \tau_1 \in [-\pi; \pi]$ и $\xi \in \mathbb{R}$. Касательные векторы к кривым $h_1(\tau_1)$,

$$h_2(\tau_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \tau_2 & 0 & \operatorname{sh} \tau_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} \tau_2 & 0 & \operatorname{ch} \tau_2 \end{pmatrix}$$

и $h(\tau)$ в точке id имеют соответственно вид

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и образуют базис касательного линейного пространства группы G в точке id . Коммутационные соотношения соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид $[a, b] = -c$, $[a, c] = b$ и $[b, c] = c$. Полагая $\mathfrak{k} = \operatorname{Span}(a)$ и $\mathfrak{p} = \operatorname{Span}(b, c)$, получаем разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, в котором $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ и $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, т.е. разложение Картана. $\mathbb{Z}_2$ -градуировка этого разложения означает, что $\mathfrak{k}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ и подгруппа $H_1 = \exp \mathfrak{k} = \{\exp(\tau_1 a)\} = \{h_1(\tau_1)\}$ в G является максимальной компактной подгруппой.

Так как $(\operatorname{ad} x)y = [x, y]$ и $(\operatorname{ad} a)a = 0$, $(\operatorname{ad} a)b = -c$, $(\operatorname{ad} a)c = b$, то матрицы присоединенного линейного оператора $\operatorname{ad} a$ в базисе $E = \{a, b, c\}$ алгебры $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$\operatorname{ad} a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -a.$$

Точно так же получаем, что $\operatorname{ad} b = b$ и $\operatorname{ad} c = -c$. Поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(aa) &= \operatorname{tr} \operatorname{diag}(0, -1, -1) = -2, & \operatorname{tr}(bb) &= \operatorname{tr} \operatorname{diag}(1, 0, 1) = 2, & \operatorname{tr}(cc) &= \operatorname{tr} \operatorname{diag}(1, 1, 0) = 2 \\ \operatorname{tr}(-ab) &= \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, & \operatorname{tr}(ac) &= \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, & \operatorname{tr}(-bc) &= \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

то матрица билинейной формы Картана—Киллинга $B(x, y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)(\operatorname{ad} y))$ в базисе E имеет вид $(b_{ij}) = \operatorname{diag}(-2, 2, 2)$, а значит, алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста.

Так как $\dim \mathfrak{p} = 2$, то вещественный ранг $\dim \mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{g}$ равен 1. Положим, что максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$ определяется формулой $\mathfrak{a} = \operatorname{Span}(c)$. Тогда подгруппа $\exp \mathfrak{a} = \{\exp(\tau c)\}$ в G является максимальной коммутативной подгруппой.

Поскольку характеристический многочлен оператора $\operatorname{ad} c$ имеет вид

$$\mu(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix},$$

то $\mathfrak{g} = \text{Ker ad } c + V_1 + V_{-1}$, где V_λ — линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, состоящее из нулевого вектора и собственных векторов оператора $\text{ad } c$, отвечающих собственному значению λ . Тогда максимальная нильпотентная подалгебра $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$ совпадает с корневым подпространством V_1 . Решая матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

получаем, что $\mathfrak{n} = \text{Span}(a + b)$, следовательно, максимальная нильпотентная подгруппа $H_3 = \exp \mathfrak{n} = \{\exp(\tau_3(a + b))\} = \{h_3(\tau_3)\}$ группы G состоит из матриц

$$h_3(\tau_3) = \text{diag}(1, 1, 1) + \tau_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\tau_3^2}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\tau_3^3}{3!} \text{diag}(0, 0, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + \tau_3^2 & \tau_3^2 & 2\tau_3 \\ -\tau_3^2 & 2 - \tau_3^2 & -2\tau_3 \\ 2\tau_3 & 2\tau_3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если положить $\mathfrak{a} = \text{Span}(b)$, то, рассуждая аналогично, получаем, что максимально нильпотентная подалгебра совпадает с линейной оболочкой $\text{Span}(a + b)$, откуда получается сопряженная подгруппе H_3 максимально нильпотентная подгруппа H_4 , состоящая из матриц

$$h_4(\tau_4) = \text{diag}(1, 1, 1) + \tau_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\tau_4^2}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\tau_4^3}{3!} \text{diag}(0, 0, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + \tau_4^2 & 2\tau_4 & -\tau_4^2 \\ 2\tau_4 & 2 & -2\tau_4 \\ \tau_4^2 & 2\tau_4 & 2 - \tau_4^2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что на полуконусе C_+ окружность $\gamma_1: x_1 = 1$ является однородным пространством подгруппы $H_1 = \{h_1(\tau_1) \mid \tau_1 \in \mathbb{R}\}$, гипербола $\gamma_2: x_2 = \pm 1$ — однородным пространством подгруппы H_2 , состоящей из преобразований h_2 , а параболы $\gamma_3: x_1 + x_2 = 1$ и $\gamma_4: x_1 + x_3 = 1$ — однородными пространствами подгрупп H_3 и H_4 соответственно.

2. Представление, инфинитезимальные операторы и базисы. Для фиксированного $\sigma \in \mathbb{C}$ обозначим $\mathfrak{D}$ линейное пространство, состоящее из функций, которые заданы на полуконусе C_+ , бесконечно дифференцируемы на области определения и при любых $x \in C_+$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ удовлетворяют равенству $f(\alpha x) = |\alpha|^\sigma f(x)$. Представление T группы G в пространстве $\mathfrak{D}$ зададим, поставив каждому элементу $g \in G$ в соответствие оператор левого «сдвига» функции произвольной функции $f \in \mathfrak{D}$ на g^{-1} . Рассмотрим инфинитезимальные операторы

$$\mathfrak{d}_i = \mathbf{i} \left. \frac{dT(h_i(\tau_i))f(x)}{d\tau_i} \right|_{\tau_i=0}.$$

Так как произвольная функция $f \in \mathfrak{D}$ удовлетворяет условию σ -однородности, то

$$T(h_i(\tau_i))f(x) = |x_1|^\sigma f\left(1, \frac{x_2 \cos \tau_1 + x_3 \sin \tau_1}{x_1}, \frac{x_3 \cos \tau_1 - x_2 \sin \tau_1}{x_1}\right). \quad (1)$$

Поскольку первая компонента точки

$$[h_1(\tau_1)]^{-1}x = h_1(-\tau_1)x = \left(1, \frac{x_2 \cos \tau_1 + x_3 \sin \tau_1}{x_1}, \frac{x_3 \cos \tau_1 - x_2 \sin \tau_1}{x_1}\right)$$

равна 1, то существует такое $\alpha_1 \in [-\pi; \pi]$, что

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_2 \cos \tau_1 + x_3 \sin \tau_1}{x_1}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{x_3 \cos \tau_1 - x_2 \sin \tau_1}{x_1},$$

т.е. функция f в равенстве (1) зависит от одного переменного α_1 :

$$T(h_i(\tau_i))f(x) = |x_1|^\sigma f\left(\arctg \frac{x_3 \cos \tau_1 - x_2 \sin \tau_1}{x_2 \cos \tau_1 + x_3 \sin \tau_1}\right).$$

Тогда для этой функции

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_1 &= \mathbf{i} \frac{df}{d\tau_1} \left(\operatorname{arctg} \frac{x_3 \cos \tau_1 - x_2 \sin \tau_1}{x_2 \cos \tau_1 + x_3 \sin \tau_1} \right)'_{\tau_1} \times \left(\frac{x_3 \cos \tau_1 - x_2 \sin \tau_1}{x_2 \cos \tau_1 + x_3 \sin \tau_1} \right)'_{\tau_1} = \\ &= \mathbf{i} \frac{df}{d\tau_1} \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3^2} \left(-\frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2^2} \right) = -\mathbf{i} \frac{df}{d\tau_1}.\end{aligned}$$

Поскольку собственные функции f оператора $\mathfrak{d}_1$ удовлетворяют уравнению $\mathfrak{d}_1 f = \lambda f$, то $f = \mu e^{\mathbf{i}\lambda\tau_1}$. Так как должно выполняться равенство $f(-\pi) = f(\pi)$, то $\mu e^{-\mathbf{i}\lambda\pi} = \mu e^{\mathbf{i}\lambda\pi}$, откуда $\lambda \in \mathbb{Z}$ и система функций $\{|x_1|^\sigma e^{-\mathbf{i}p_1\tau_1} \mid p_1 \in \mathbb{Z}\}$ является базисом в линейном пространстве сужений функций из $\mathfrak{D}$ на окружность γ_1 . Но

$$|x_1|^\sigma e^{-\mathbf{i}p_1\tau_1} = |x_1|^\sigma (\cos \tau_1 + \mathbf{i} \sin \tau_1)^{p_1} = |x_1|^\sigma \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{\mathbf{i}x_3}{x_1} \right)^{p_1} = |x_1|^{\sigma-p_1} (x_2 + \mathbf{i}x_3)^{p_1},$$

а значит, имеем базис

$$B_1 = \{f_{p_1}(x) = |x_1|^{\sigma-p_1} (x_2 + \mathbf{i}x_3)^{p_1} \mid p_1 \in \mathbb{Z}\}$$

пространства представления $\mathfrak{D}$.

Так как при $x_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= |x_2|^\sigma f\left(\frac{x_1}{|x_2|}, \operatorname{sign} x_2, \frac{x_3}{|x_2|}\right) = \\ &= x_2^\sigma \delta_{1, \operatorname{sign} 1} \cdot f\left(\frac{x_1}{|x_2|}, 1, \frac{x_3}{|x_2|}\right) + |x_2|^\sigma \delta_{-1, \operatorname{sign} x_2} f\left(\frac{x_1}{|x_2|}, -1, \frac{x_3}{|x_2|}\right),\end{aligned}$$

имеем

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2)_\pm^\sigma f\left(\frac{x_1}{|x_2|}, \pm 1, \frac{x_3}{|x_2|}\right),$$

где $(t)_\pm^\nu$ — обобщенные функции, определенные формулами [16]

$$|t|_\pm^\nu = \begin{cases} |t|^\nu, & \text{при } \pm t \geq 0, \\ 0, & \text{при } \pm t < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}T(h_2^{-1}(\tau_2)) &= (x_1)_\pm^\sigma f\left(\frac{x_1 \operatorname{ch} \tau_2 - x_3 \operatorname{sh} \tau_2}{|x_1|}, \pm 1, \frac{x_3 \operatorname{ch} \tau_2 - x_1 \operatorname{sh} \tau_2}{|x_1|}\right) = \\ &= (x_1)_\pm^\sigma f\left(\operatorname{arth} \frac{x_3 \operatorname{ch} \tau_2 - x_1 \operatorname{sh} \tau_2}{x_1 \operatorname{ch} \tau_2 - x_3 \operatorname{sh} \tau_2}\right)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_2 &= \mathbf{i} \frac{df}{d\tau_2} \left(\operatorname{arth} \frac{x_3 \operatorname{ch} \tau_2 - x_1 \operatorname{sh} \tau_2}{x_1 \operatorname{ch} \tau_2 - x_3 \operatorname{sh} \tau_2} \right)'_{\tau_2} \times \left(\frac{x_3 \operatorname{ch} \tau_2 - x_1 \operatorname{sh} \tau_2}{x_1 \operatorname{ch} \tau_2 - x_3 \operatorname{sh} \tau_2} \right)'_{\tau_2} = \\ &= \mathbf{i} \frac{df}{d\tau_2} \frac{x_1^2}{x_1^2 - x_3^2} \frac{x_3^2 - x_1^2}{x_1^2} = -\mathbf{i} \frac{df}{d\tau_2}.\end{aligned}$$

Для произвольного собственного значения $\lambda \in \mathbb{R}$ собственные функции оператора $\mathfrak{d}_2$ имеют вид $f = \mu e^{\mathbf{i}\lambda\tau_2}$, а значит, система функций $\{(x_2)^\sigma e^{\mathbf{i}p_2\tau_2} \mid p_2 \in \mathbb{R}\}$ является базисом пространства сужений функций из $\mathfrak{D}$ на гиперболу γ_2 . Но

$$(x_2)_\pm^\sigma e^{\mathbf{i}p_2\tau_2} = (x_2)_\pm^\sigma (\operatorname{ch} \tau_2 + \operatorname{sh} \tau_2)^{\mathbf{i}p_2} = (x_2)_\pm^\sigma \left(\frac{x_1}{|x_2|} + \frac{x_3}{|x_2|} \right)^{\mathbf{i}p_2},$$

поэтому система функций

$$B_2 = \{f_{p_2, \pm}(x) = (x_2)_\pm^{\sigma-\mathbf{i}p_2} (x_1 + x_3)^{\mathbf{i}p_2} \mid p_2 \in \mathbb{R}\}$$

является базисом в $\mathfrak{D}$.

Поскольку

$$\begin{aligned} T(h_3(\tau_3))f(x) &= f\left(\frac{(x_1+x_2)\tau_3^2}{2} - x_3\tau_3 + x_1, x_2 + x_3\tau_3 - \frac{(x_1+x_2)\tau_3^2}{2}, x_3 - (x_1+x_2)\tau_3\right) = \\ &= |x_1+x_2|^\sigma f\left(\frac{\tau_3^2}{2} - \frac{x_3\tau_3}{x_1+x_2} + \frac{x_1}{x_1+x_2}, \frac{x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_3\tau_3}{x_1+x_2} - \frac{\tau_3^2}{2}, \frac{x_3}{x_1+x_2} - \tau_3\right) \end{aligned} \quad (2)$$

и для $i \in \{1, 2\}$

$$\frac{x_i}{x_1+x_2} + (-1)^i \left(\frac{x_3\tau_3}{x_1+x_2} - \frac{\tau_3^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_3}{x_1+x_2} - \tau_3 \right)^2 + \frac{(-1)^i}{2},$$

то равенство (2) можно переписать в виде

$$T(h_3(\tau_3))f(x) = |x_1+x_2|^\sigma f\left(\frac{x_3}{x_1+x_2} - \tau_3\right). \quad (3)$$

Тогда для функции f в равенстве (3) имеем

$$\mathfrak{d}_3 = -\mathbf{i} \frac{df}{d\tau_3},$$

поэтому функции $e^{\mathbf{i}\lambda\tau_3}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, составляют базис пространства сужений функций из $\mathfrak{D}$ на параболу γ_3 . Однако

$$e^{\mathbf{i}\lambda\alpha_3} = \exp \frac{\mathbf{i}\lambda x_3}{x_1+x_2},$$

поэтому получаем базис

$$B_3 = \{f_{p_3}(x) = |x_1+x_2|^\sigma \exp(\mathbf{i}p_3x_3/(x_1+x_2)) \mid p_3 \in \mathbb{R}\}$$

пространства $\mathfrak{D}$. Аналогично получается базис

$$B_4 = \{f_{p_4}(x) = |x_1+x_3|^\sigma \exp(\mathbf{i}p_4x_2/(x_1+x_3)) \mid p_4 \in \mathbb{R}\}.$$

3. Функция A , ее частные значения. Пусть γ — контур на полуконусе C_+ , по одному разу пересекающий все (быть может, за исключением нескольких) его образующие, а H — подгруппа группы G , для которой γ является однородным пространством. Справедлива следующая теорема [12].

Теорема 1. При $\hat{\sigma} = -\sigma - 1$ билинейные интегральные функционалы

$$F_\gamma: \mathfrak{D} \times \hat{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (u, \hat{v}) \longmapsto \int_\gamma u(x)\hat{v}(x) d\gamma,$$

где $d\gamma$ — мера на γ , инвариантная относительно подгруппы H , совпадают (т.е. не зависят от выбора контура γ).

Доказательство этого утверждения основано на том факте, что, интегрируя, например, по параболе γ_3 , можно ввиду σ -однородности значение произвольной функции $f \in \mathfrak{D}$ во всякой ($\alpha \in \mathbb{R}$) точке $\frac{1}{2}(1+\alpha^2, 1-\alpha^2, 2\alpha)$ этого контура представить в виде

$$\left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^\sigma f\left(1, \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right) = \left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^\sigma f(1, \cos \beta, \sin \beta),$$

т.е. выразить через значение этой же функции на окружности γ_1 . Из этого представления вытекает, что $u(\alpha)\hat{v}(\alpha) = 2(1+\alpha^2)^{-1}u(\beta)\hat{v}(\beta)$. Остается учесть, что $d\beta = 2^{-1}(1+\alpha^2)d\alpha$.

Кроме того, имеет место следующее утверждение [39].

Теорема 2. При $\hat{\sigma} = -\sigma - 1$ билинейные интегральные функционалы F_γ инвариантны относительно пары операторов представления $(T(g), \hat{T}(g))$, т.е. $F_\gamma(T(g)f, \hat{T}(g)\hat{f}) = F_\gamma(f, \hat{f})$.

В силу теоремы 1 доказательство теоремы 2 достаточно провести для одного из функционалов — скажем, для случая $\gamma = \gamma_1$. Так как уже показано, что $G = H_1 \times H_2 \times H_1$, то достаточно ограничиться проверкой случаев $g \in H_1$ и $g \in H_2$. В первом случае имеем $T(\tau_1)f(\beta) = f(\beta - \tau_1)$, поэтому утверждение теоремы 2 очевидно. Во втором случае, пользуясь теоремой 1, доказательство проведем для гиперболы $\gamma_2 = \{(\operatorname{ch} \iota, \pm 1, \operatorname{sh} \iota) \mid \iota \in \mathbb{R}\}$. Имеем тогда $T(\tau_2)f(\alpha) = f(\iota - \tau_2)$.

Определим функцию $A: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \times G \rightarrow \mathbb{C}$, ставящую набору $(\sigma, p, \hat{p}, g)$ в соответствие число $F_\gamma(T(g)f_p, \hat{f}_{\hat{p}})$. Корректность этого определения следует из теоремы 1.

В случае $g = \operatorname{id}$ частные значения этой функции выражаются через известные специальные функции математической физики, например, через гипергеометрическую функцию Гаусса:

$$A(-\sigma - 1, p_2^+, p_1, \operatorname{id}) = 2^{-\sigma} \mathbf{i}^\sigma (-\mathbf{i})^{p_1 + \mathbf{i}p_2} \times \\ \times B(\mathbf{i}p_2 - \sigma, -\mathbf{i}p_2 - \sigma)_2 F_1(\mathbf{i}p_2 - \sigma, p_1 - \sigma; -2\sigma; 2), \quad \operatorname{Re}(\sigma) < 0,$$

функции Уиттекера второго рода [2]:

$$A(-\sigma - 1, p_3, p_1, \operatorname{id}) = \frac{2\pi}{|p_3|^{\sigma+1/2} \Gamma(-\operatorname{sign} p_3 - \sigma)} W_{-\operatorname{sign} p_3, \sigma + \frac{1}{2}}(2|p_3|), \quad \operatorname{Re}(\sigma) < -\frac{1}{2}, \quad p_3 \neq 0,$$

волновые кулоновские функции [25, 26, 42]:

$$A(-\sigma - 1, p_2^+, p_3, \operatorname{id}) = 2p_3^{-\sigma-1} e^{p_2\pi/2} \times \\ \times \sqrt{\Gamma(1 + \sigma + \mathbf{i}p_2) \Gamma(1 + \sigma - \mathbf{i}p_2)} F_\sigma(p_2; p_3), \quad \operatorname{Re}(\sigma) > -1, \quad p_3 \neq 0,$$

$$A(-\sigma - 1, p_2^-, p_3, \operatorname{id}) = \frac{\mathbf{i} \Gamma(2\sigma + 2) C_\sigma(p_2)}{2^{2\sigma} p_3^{\sigma+1}} \times \\ \times \left(e^{-\mathbf{i}\pi\sigma} H_\sigma^+(p_2; p_3) - e^{\mathbf{i}\pi\sigma} H_\sigma^-(p_2; p_3) \right) \quad -1 < \operatorname{Re}(\sigma) < 0, \quad p_3 \neq 0,$$

функции Бесселя—Клиффорда [14] (другое название — функции Трикоми [39, 43]):

$$A(-\sigma - 1, p_4, p_3, \operatorname{id}) = R_{\operatorname{sign}(p_3 p_4)}, \quad [p_3, p_4 \neq 0, \quad -1 < \operatorname{Re}(\sigma) < 0,$$

где

$$R_1 = 2^{-\sigma-1} \cos(\sigma\pi) e^{\mathbf{i}(p_3 - p_4)} \left[\left(\frac{2}{p_4} \right)^{2\sigma+1} \mathcal{C}_{-2\sigma-1}(-p_3 p_4) - \left(\frac{p_3}{2} \right)^{2\sigma+1} \mathcal{C}_{2\sigma+1}(-p_3 p_4) \right], \\ R_{-1} = -2^{1-\sigma} p_3^{2\sigma+1} \sin(\sigma\pi) e^{\mathbf{i}(p_3 - p_4)} \mathcal{K}_{2\sigma+1}(p_3 p_4).$$

Но через функцию $A(\cdot, \cdot, \cdot, \operatorname{id})$ выражаются ядра интегральных операторов пространства $\mathfrak{D}$, являющиеся аналогами операторов перехода между базисами конечномерного пространства. Например, для ядра фредгольмова оператора

$$f_{p_2, \pm} = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{\pm}(p_2, p_3) f_{p_3} dp_3 \quad (4)$$

выполняется равенство [13]

$$\lambda_{\pm}(p_2, p_3) = (2\pi)^{-1} A(-\sigma - 1, p_2, -p_3, \operatorname{id}).$$

В общем же случае через значения функции A выражаются ядра интегральных операторов представления T . Например, при $-1 < \operatorname{Re}(\sigma) < 0$ значение функции $A(-\sigma - 1, p_2^+, p_2'^+, h(\xi))$, где $0 < \xi < \pi/2$, выражается через гипергеометрическую функцию Аппеля F_1 двух переменных:

$$A(-\sigma - 1, p_2^+, p_2'^+, h(\xi)) = \frac{(1 + \sin \xi)^{\mathbf{i}p_2} B(\mathbf{i}p_2 - \sigma, 1 + \sigma - \mathbf{i}p_2')}{2^{\sigma + \mathbf{i}p_2} \cos^{\sigma + \mathbf{i}(p_2 - p_2') - 1} (1 + \cos \xi - \sin \xi)^{-\sigma - \mathbf{i}p_2'}} \times \\ \times F_1 \left(\begin{matrix} \mathbf{i}p_2 - \sigma; 1 + \sigma + \mathbf{i}p_2, -\sigma - \mathbf{i}p_2' \\ 1 + \mathbf{i}(p_2 - p_2') \end{matrix} \middle| \frac{1 + \cos \xi - \sin \xi}{2}, \frac{1 - \cos \xi - \sin \xi}{1 + \cos \xi - \sin \xi} \right). \quad (5)$$

Это следует из [3, формула 2.2.8.5], если записать значение функции в интегральной форме

$$\begin{aligned} A(-\sigma-1, p_2^+, p_2'^+, h(\xi)) &= F_{\gamma_1}(T(h(\xi))f_{p_2,+}, f_{p_2',+}) = \\ &= \frac{2(1+\sin \xi)^{ip_2}}{\cos^{\sigma+1+ip_2} \xi} \int_{\alpha_-}^1 \frac{(1-\alpha)^{\sigma-ip_2'}(1+\alpha)^{\sigma+ip_2'} d\alpha}{\left(\frac{\sin \xi+1}{\cos \xi}-\alpha\right)^{\sigma+1+ip_2} \left(\alpha-\frac{\sin \xi-1}{\cos \xi}\right)^{\sigma+1-ip_2}}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_- = \frac{\sin \xi - 1}{\cos \xi}.$$

Подробное доказательство формулы (5) дано в [13].

Если $g(\mu, \nu)$ принадлежит прямому произведению двух однопараметрических подгрупп в G , т.е. $g(\mu, \nu) = g_1(\mu)g_2(\nu)$, то в силу того, что T является гомоморфизмом групп и для элемента $g_1(\mu)$ выполняется равенство $(g_1(\mu))^{-1} = g_1(-\mu)$, из теоремы 2 вытекает формула

$$\begin{aligned} A(\sigma, p, \hat{p}, g(\mu, \nu)) &= A(\sigma, p, \hat{p}, g_1(\mu)g_2(\nu)) = \\ &= F_{\gamma}(T(g_1(\mu))T(g_2(\nu))f_p, f_{\hat{p}}) = F_{\gamma}(T(g_2(\nu))f_p, T(g_1(-\mu))f_{\hat{p}}), \end{aligned}$$

упрощающая вычисления в тех случаях, когда f_p является собственной функцией оператора $T(g_2(\nu))$ или $f_{\hat{p}}$ является собственной функцией оператора $T(g_1(-\mu))$.

Отметим, что функция Аппеля F_1 является частным случаем (при $n = 2$), как и гипергеометрическая функция Гаусса (при $n = 1$), функции Лауричелла F_D , которая при $|z_1|, \dots, |z_n| < 1$ определяется рядом

$$F_D(a; b_1, \dots, b_n; c; z_1, \dots, z_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}} \frac{z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!},$$

а вне указанной области является его аналитическим продолжением [11, 18, 19]. С теоретико-групповой точки зрения функция F_D изучена У. Миллером в работе [33] (а также в [6]), рассмотревшим неприводимые представления алгебры $\mathfrak{sl}(n+3, \mathbb{C})$, а ее частный случай F_1 — в работе [34]. Работам Миллера предшествовала статья Н. Я. Виленкина [1], в которой другие гипергеометрические функции двух переменных, F_A и F_B , были изучены в виде матричных элементов максимально вырожденных представлений группы $SL(n, \mathbb{R})$ (см. также [44]). В работе [28] с помощью теории алгебр Ли для каждой из 34 гипергеометрических функций двух переменных (включая F_1) найдена каноническая система, в которой соответствующая функция возникает в результате разделения переменных.

4. Теоремы сложения для функции A и интегральные формулы для специальных функций. Из соотношений между ядрами указанных выше интегральных операторов получаются континуальные теоремы сложения для функции A , которые в то же время являются интегральными формулами для специальных функций. Взяв, к примеру, два континуальных базиса, состоящих из функций f_p и $f_{\hat{p}}$ соответственно, и элемент g так, чтобы $f_{\hat{p}}$ были собственными функциями оператора $T(g)$, из равенств

$$\begin{aligned} T(g)f_p &= \int_{\mathbb{R}} \theta_{p,p'} f_{p'} dp' = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \omega_{p',\hat{p}} \theta_{p,p'} dp' \right) f_{\hat{p}} d\hat{p}, \\ T(g)f_{\hat{p}} &= \int_{\mathbb{R}} \omega_{p,\hat{p}} T(g)f_{\hat{p}} d\hat{p} = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{\hat{p}} \omega_{p,\hat{p}} f_{\hat{p}} d\hat{p} \end{aligned}$$

получаем формулу

$$\int_{\mathbb{R}} \omega_{p',\hat{p}} \theta_{p,p'} dp' = \lambda_{\hat{p}} \omega_{p,\hat{p}}.$$

Например, теорема сложения [41]

$$A(-\sigma - 1, p_3, -p_4, g) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} A(-\sigma - 1, p_3, -\hat{p}_3, g) A(-\sigma - 1, \hat{p}_3, -p_4, \text{id}) d\hat{p}_3.$$

означает при $p_1 > 0$ и $p_2 < 0$ и $-1 < \text{Re}(\sigma) < 0$ интегральную формулу

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \left([J_{-2\sigma-1}(2\sqrt{p_1 t}) - J_{2\sigma+1}(2\sqrt{p_1 t})] K_{2\sigma+1}(2\sqrt{-p_2 t}) \right. \\ \left. + [J_{-2\sigma-1}(2\sqrt{-p_2 t}) - J_{2\sigma+1}(2\sqrt{-p_2 t})] K_{2\sigma+1}(2\sqrt{p_1 t}) \right) dt = \\ = 2^{\sigma+5/2} \sec(\pi\sigma) e^{i(p_1 - p_2)} K_{2\sigma+1}(2\sqrt{-p_1 p_2}). \end{aligned}$$

для функций Бесселя—Клиффорда ввиду связи последних с функциями Бесселя и Макдональда:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu C_n\left(-\frac{z^2}{4}\right), \quad K_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \mathcal{K}_\nu\left(\frac{z^2}{4}\right).$$

5. Оператор Пуассона и интегральные соотношения для специальных функций. Напомним, что если T_1 и T_2 являются соответственно представлениями некоторой группы в линейных пространствах L_1 и L_2 и линейный оператор $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ при всех g из этой группы удовлетворяет равенству $\varphi T_1(g) = T_2(g)\varphi$, то оператор φ называют [7] сплетающим. Оператор Пуассона $P(f) = F_\gamma(f, |x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3|^{-\sigma-1})$, где $y \in S_1$, сплетает представление T и представление группы G теми же операторами левого «сдвига» в пространстве бесконечно дифференцируемых, однородных и $\square$ -гармонических функций на гиперboloиде S_1 , где

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

В частности, для точки $y = (\text{ch } \xi, \text{sh } \xi \cos \mu, \text{sh } \xi \sin \mu)$ имеем

$$P(f_{p_1}^\bullet) = \frac{2\pi e^{ip_1 \mu} \Gamma(\sigma + 1)}{(-1)^{p_1+1} \Gamma(1 + \sigma - p_1)} P_\sigma^{-p_1}(\text{ch } \xi),$$

$$\begin{aligned} P(f_{p_2, \pm}^\bullet) &= \frac{(\text{sh } \xi \cos \mu + \mathbf{i})^{ip_2} (\text{sh } \xi \cos \mu - \mathbf{i})^\sigma}{4^\sigma \sqrt{\pi} e^{\pi p_2} (\cos \xi - \text{sh } \xi \cos \mu)^\sigma} \times \\ &\times \frac{(\mathbf{i} \text{sh } \xi \sin \mu + 1)^{\frac{ip_2}{2} - \sigma} \Gamma(\frac{1}{2} - \sigma) \text{B}(ip_2 - \sigma, -ip_2 - \sigma)}{(\mathbf{i} \text{sh } \xi \sin \mu - 1)^{\frac{ip_2}{2}} \Gamma(-\sigma - ip_2)} \times Q_{-\sigma-1}^{ip_2}(\mathbf{i} \text{sh } \xi \sin \mu), \quad \text{Re}(\sigma) < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(f_{p_4}^\bullet) &= |p_4|^{\sigma+1/2} \sqrt{\frac{2\pi}{\text{ch } \xi + \text{sh } \xi \cos \mu}} \times \\ &\times \exp \frac{ip_4 \text{sh } \xi \cos \mu}{\text{ch } \xi + \text{sh } \xi \cos \mu} \Gamma^{-1}(-\sigma) K_{\sigma+1/2} \left(\frac{|p_4|}{\text{ch } \xi + \text{sh } \xi \cos \mu} \right), \quad \text{Re}(\sigma) < 0. \end{aligned}$$

После применения оператора Пуассона из формул вида (4) получаются формулы

$$P(f_{p_2, \pm}) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_\pm(p_2, p_3) P(f_{p_3}) dp_3. \quad (6)$$

Если ядро $\lambda_\pm$ найдено в явном виде, то формула (6) является еще одним интегральным соотношением между специальными функциями.

6. Специальные функции, связанные с близкими к G группами. При переходе от G к близким к ней группам $SO_0(2, 2)$ и $SO_0(3, 1)$ базисы функции становятся сложнее — их можно найти как общие собственные функции дифференциальных операторов Казимира, соответствующих вложенным цепочкам подгрупп и коммутирующих со всеми элементами соответствующих подалгебр шестимерных алгебр дифференциальных операторов $\mathfrak{so}(2, 2)$ и $\mathfrak{so}(3, 1)$. Для группы $SO_0(2, 2)$ базисные функции все еще остаются комплекснозначными элементарными функциями, но для группы $SO_0(3, 1)$ в ходе решения задач о вычислении собственных функций операторов Казимира, коммутирующих с операторами из неединичных подалгебр, возникают линейные дифференциальные уравнения второго порядка, поэтому базисные функции выражаются (за исключением случая с подгруппой $SO_0(2) \times SO_0(1, 1)$) через специальные функции — многочлены Гегенбауэра, функции Бесселя и Лежандра, а их сужения на однородные подпространства подгрупп являются произведениями этих специальных функций и экспоненциальных функций. Базисные функции в этих случаях нумеруются двумя индексами, связь между которыми обусловлена размерностями неприводимых представлений подгрупп и вытекает из алгоритма построения операторов Казимира: для редукции $SO_0(3, 1) \supset SO_0(3) \supset SO_0(2)$ это алгоритм рассмотрен в [17].

Рассматривая функцию, подобную функции A , на паре аналогичных построенным выше пространств представлений $\mathfrak{D}$ и $\hat{\mathfrak{D}}$ группы $SO_0(3, 1)$ [10, 14] или $SO_0(2, 2)$ [15], таких, что $\sigma + \hat{\sigma} = -2$, можно получить, в частности, интегральные формулы для бесселевых функций и гиперфункций Бесселя (т.е. функций с векторным индексом)

$$I_{\nu_1, \dots, \nu_n}(z) = \frac{\left(\frac{z}{n+1}\right)^{\nu_1 + \dots + \nu_n}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\nu_i + 1)} F_n \left[-; \nu_1 + 1, \dots, \nu_n + 1; \left(\frac{z}{n+1}\right)^{n+1} \right],$$

введенных Делерю [24] и переоткрытых Ключанцевым [4], а также интересные результаты для суммы первого [27] и второго [35] интегральных преобразований Ганкеля—Клиффорда. Гиперфункции Бесселя (в основном $J_{\nu_1, \dots, \nu_n}(x)$) в последнее время интенсивно изучаются [36, 37], в том числе ввиду их связи со специальными функциями дробного исчисления [29, 30].

Через гиперфункции Бесселя—Клиффорда [14] Шилин и Чой [40] определили гипераналог интегральных преобразований Ганкеля—Клиффорда:

$$H_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(1)}[f](t) := t^{\sum_{i=1}^n \nu_i} \int_0^{+\infty} f(\hat{t}) C_{\nu_1, \dots, \nu_n}(t\hat{t}) d\hat{t},$$

$$H_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(2)}[f](t) := \int_0^{+\infty} \hat{t}^{\sum_{i=1}^n \nu_i} f(\hat{t}) C_{\nu_1, \dots, \nu_n}(t\hat{t}) d\hat{t}.$$

В работе [40] методом, изложенным выше, учитывая связь между матричными элементами сужения представления группы $SO_0(3, 1)$ на диагональную матрицу $\text{diag}(1, -1, 1, -1)$, записанными в «сферическом» и «гиперболическом» базисах, авторы получили следующую формулу для разности гиперпреобразований $H_{0,1+\sigma,1+\sigma}^{(1)}$ и $H_{0,1+\sigma,1+\sigma}^{(2)}$ функции Макдональда $K_{\sigma-1}$:

$$H_{0,1+\sigma,1+\sigma}^{(1)}[K_{\sigma-1}](p) - H_{0,1+\sigma,1+\sigma}^{(2)}[K_{\sigma-1}](p) = \pi^{-2} p^{-2\sigma-3} \sin(\pi\sigma) K_{\sigma-1}(p).$$

Отметим, что в работе [20] рассматриваются новые гиперфункции, частными случаями которых являются функции Макдональда и Вебера $D_\mu(x)$ и которые связаны с одной однопараметрической подгруппой группы $ISO(n, 1)$ движений псевдоевклидова пространства сигнатуры $(+, \dots, +, -)$, а именно с группой сдвигов вдоль оси Ox_{n+1} (при этом $SO_0(n, 1)$ — другая подгруппа в $ISO(n, 1)$). В статьях [22, 23] обобщенные бесселевы функции

$$\mathcal{D}_n^m(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{n+mr} y^r}{(n+mr)! r!}$$

рассматриваются как матричные элементы квазирегулярного представления группы

$$G_{p,q} = \{g = (\xi, \nu, \mu) \mid \xi, \mu \in \mathbb{C}, \mu \in [0; 2\pi]\}$$

с групповой операцией

$$g\hat{g} = (\xi + \hat{\xi}e^{ip\mu}, \nu + \hat{\nu}e^{-iq\hat{\mu}}, \mu + \hat{\mu})$$

и как элементы базисов пространства представления. Эти функции интересны тем, что в частных случаях они совпадают с хорошо известными бесселевыми функциями:

$$\mathcal{D}_n^1\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) = J_n(x), \quad \mathcal{D}_n^1\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = I_n(x), \quad \mathcal{D}_n^1(1, y) = \mathcal{C}_n(y), \quad \mathcal{D}_n^m(1, y) = \mathcal{W}_n^m(y),$$

где $\mathcal{W}_n^m(y)$ — функция Райта [31], играющая важную роль в теории специальных функций дробного исчисления [32]. Показано, в частности, что из теоретико-групповых соображений получаются теоремы сложения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n^m(x \pm u, y \pm z) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_{n-l}^m(x, y) \mathcal{D}_l^m(\pm u, \pm z), \\ \mathcal{D}_n^m\left(x + tu, y + \frac{v}{t^m}\right) &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} t^l \mathcal{D}_{n-l}^m(x, y) \mathcal{D}_l^m(u, v). \end{aligned}$$

Как отмечено выше, функции, образующие один из базисов пространства представления группы $SO_0(3, 1)$, выражаются через функции Лежандра. Они имеют вид

$$f_{p,q,\pm}(x) = (x_4)_{\pm}^{\sigma} (x_2^2 + x_3^2)^{-|q|/2} P_{-1/2+ip}\left(\frac{x_1}{x_4}\right) (x_3 + ix_2 \operatorname{sign} q)^{|q|},$$

где $p > 0$ и $q \in \mathbb{Z}$, и являются общими собственными функциями операторов Казимира

$$\mathfrak{c}_1 = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial \beta} \quad \text{и} \quad \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{d}_3^2 + \mathfrak{d}_4^2 - \mathfrak{c}_1^2,$$

где в гиперболических координатах $x_1 = \operatorname{ch} \alpha$, $x_2 = \pm 1$, $x_3 = \operatorname{sh} \alpha \sin \beta$ и $x_4 = \operatorname{sh} \alpha \cos \beta$ на полукуносе C_+

$$\mathfrak{d}_3 = \mathbf{i} \left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \operatorname{cth} \alpha \cos \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \mathfrak{d}_4 = \mathbf{i} \left(\cos \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \operatorname{cth} \alpha \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right).$$

Функции Лежандра появляются здесь как решения дифференциального уравнения [5]

$$\operatorname{csch} \alpha \frac{d}{d\alpha} \left(\operatorname{sh} \alpha \frac{dA}{d\alpha} \right) + \left[\left(\frac{1}{4} + p_2^2 \right) - q_2^2 \operatorname{csch} \alpha^2 \right] A = 0$$

методом разделения переменных. Тогда частные значения функции, подобной функции A , связаны с общим индексным интегральным преобразованием Меллера—Фока [45]

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) P_{-1/2+it}^k(s) dt,$$

что приводит к интересным результатам для этого преобразования и в целом для функции Лежандра первого рода. Например, в работе [38] с помощью формулы обращения этого преобразования переоткрыта ранее известная формула [9, формула 2.17.27.9]

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x \operatorname{sh}(\pi x) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu + \mathbf{i}x, \frac{1}{2} - \mu - \mathbf{i}x, \nu + \frac{\mathbf{i}x}{2}, \nu - \frac{\mathbf{i}x}{2}\right) P_{\mathbf{i}x-1/2}^{\mu}(c) dx = \\ = 2^{3/2-2\nu} \pi^{3/2} c^{\mu-2\nu-1/2} (c^2 - 1)^{-\mu/2} \Gamma\left(2\nu - \mu + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(где $\operatorname{Re}(\mu) \leq 1/2$ и $\operatorname{Re}(\nu) \geq 0$), которая получила теоретико-групповую трактовку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин Н. Я. Гипергеометрические функции от нескольких переменных и вырожденные представления группы $SL(n, \mathbb{R})$ // Изв. вузов. Мат. — 1970. — № 4. — С. 50–55.
2. Виленкин Н. Я., Шлейникова М. А. Интегральные соотношения для функций Уиттекера и представления трехмерной группы Лоренца// Мат. сб. — 1970. — 81. — С. 185–191.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. — М.: Наука, 1963.
4. Ключанцев М. И. Сингулярные дифференциальные операторы с $r-1$ параметрами и функции Бесселя векторного индекса// Сиб. мат. ж. — 1983. — 24, № 3. — С. 47–62.
5. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. — ИЛ, 1963.
6. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
7. Наймарк М. А. Теория представлений групп. — М.: Наука, 1976.
8. Николов А. В. Структура и параметризация групп $O(p, q)$ и $U(p, q)$ // Bulg. J. Phys. II. — 1976. — № 6. — С. 537–545.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986.
10. Чой Дж., Нижников А. И., Шилин И. А. Об одной сумме интегральных преобразований Ганкеля–Клиффорда функций Уиттекера// Чебышев. сб. — 2019. — 20, № 3. — С. 349–360.
11. Хасанов А., Эргашев Т. Г. Формулы аналитического продолжения для гипергеометрических функций Лауричелла от трех переменных// Bull. Inst. Math. — 2019. — № 5. — С. 50–58.
12. Шилин И. А. Двойные $SO(2, 1)$ -инвариантные интегралы и формулы для функций Уиттекера// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 5. — С. 56–66.
13. Шилин И. А., Чой Дж. Метод континуальных теорем сложения и интегральные соотношения между функциями Кулона и функцией Аппеля F_1 // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2022. — 62, № 9. — С. 1522–1531.
14. Шилин И. А., Чой Дж. Некоторые формулы для обычных функций и гиперфункций Бесселя–Клиффорда, связанные с собственной группой Лоренца// Фундам. прикл. мат. — 2019. — 22, № 5. — С. 195–208.
15. Шилин И. А., Чой Дж. О переходах между базисами пространства представления группы $SO(2, 2)$ // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — 61, № 8. — С. 1235–1244.
16. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965.
17. Эллиот Дж., Добер П. Симметрия в физике. Т. 1. — М.: Мир, 1983.
18. Bezrodnykh S. I. Analytic continuation of the Lauricella function $F_D^{(N)}$ with arbitrary number of variables// Int. Transforms Spec. Funct. — 2018. — 29, № 1. — P. 21–42.
19. Bezrodnykh S. I. Analytic continuation of the Lauricella's functions $F_A^{(N)}$, $F_B^{(N)}$ and $F_D^{(N)}$ // Int. Transforms Spec. Funct. — 2020. — 31, № 11. — P. 921–940.
20. Choi J., Shilin I. A. A generalization of certain associated Bessel functions in connection with a group of shifts// Commun. Math. — 2022. — 30, № 1. — P. 103–118.
21. Clifford W. K. On Bessel functions// in: Mathematical Papers. — London: Oxford Univ. Press, 1882. — P. 346–349.
22. Datolli G., Maino G., Chiccoli C., Lorenzutta S., Torre A. A unified point of view on the theory of the generalized Bessel functions// Comput. Math. Appl. — 1995. — 30, № 7. — P. 111–125.
23. Datolli G., Torre A., Lorenzutta S., Maino G., Chiccoli C. Generalized Bessel functions within the group representation formalism// Nuovo Cim. B. — 1996. — 111. — P. 143–164.
24. Deleruer P. Sur le calcul symbolique a n variables et les fonctions hyperbesseliennes// Ann. Soc. Sci. Bruxelles. — 1953. — 67, № 3. — P. 229–274.
25. Dzieciol A., Yngve S., Froman P. O. Coulomb wave functions with complex values of the variable and the parameters// J. Math. Phys. — 1999. — 40. — P. 6145–6166.
26. Gaspard D. Connection formulas between Coulomb wave functions// J. Math. Phys. — 2018. — 59. — 112104.
27. Hayek N. Sobre la transformación de Hankel// Act. VIII Reunión An. Mat. Epanol. — 1967. — P. 47–60.
28. Kalnins E. G., Manocha H. L., Miller W. The Lie theory of two-variable hypergeometric functions// Stud. Appl. Math. — 1980. — 62, № 2. — P. 143–173.
29. Kiryakova V. From the hyper-Bessel operators of Dimovski to the generalized fractional calculus// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2014. — 17. — P. 977–1000.

30. *Kiryakova V.* Transmutation method for solving hyper-Bessel differential equations based on the Poisson–Dimovski transformation// *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 2008. — 11. — P. 299–316.
31. *Lipnevich V., Luchko Yu.* The Write function: its properties, applications, and numerical evaluation// *AIP Conf. Proc.* — 2010. — 1301. — P. 614–622.
32. *Mainardi F.* Fractional Calculus and Special Functions. — Bologna: Univ. of Bologna, 2010.
33. *Miller W.* Lie theory and the Lauricella functions F_D // *J. Math. Phys.* — 1972. — 13. — P. 1393–1399.
34. *Miller W.* Lie theory and the Appell functions F_1 // *SIAM J. Math. Anal.* — 1973. — 4, № 4. — P. 638–655.
35. *Mendez Perez J. M. R., Socas Robayna M. M.* A pair of generalized Hankel–Clifford transformations and their applications// *J. Math. Anal. Appl.* — 1991. — 154, № 2. — P. 543–557.
36. *Mushtaq S., Raza M., Din M. U.* Certain geometric properties of Lommel and hyper-Bessel functions *Mathematics*. — 2019. — 7. — 240.
37. *Paneva-Konovska J.* A family of hyper-Bessel functions and convergent series in them// *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 2014. — 17, № 4. — P. 1001–1015.
38. *Shilin I. A., Choi J.* Certain connections between the spherical and hyperbolic bases on the cone and formulas for related special functions// *Int. Transforms Spec. Funct.* — 2014. — 25, № 5. — P. 374–383.
39. *Shilin I. A., Choi J.* Certain relations between Bessel and Whittaker functions related to some diagonal and block-diagonal 3×3 -matrices// *J. Nonlin. Sci. Appl.* — 2017. — 10. — P. 560–574.
40. *Shilin I. A., Choi J.* Certain relations between hyper Bessel–Clifford, Macdonald and Meijer functions and hyper Bessel–Clifford integral transforms// submitted.
41. *Shilin I. A., Choi J.* Maximal subalgebras in $\mathfrak{so}(2, 1)$, additions theorems and Bessel–Clifford functions// *J. Anal.* — 2022.
42. *Shilin I. A., Choi J., Lee J. W.* Some integrals involving Coulomb functions associated with the three-dimensional proper Lorentz group// *AIMS Math.* — 2020. — 5, № 6. — P. 5664–5682.
43. *Tricomi F. G.* Funzioni Ipergeometriche Confluenti. — Rome: Cremonese, 1954.
44. *Vilenkin N. Ya., Klimyk A. U.* Representations of Lie Groups and Special Functions. Vol. 3. Classical and Quantum Groups and Special Functions. — Dordrecht: Kluwer, 1992.
45. *Yakubovich S. B.* Index Transforms. — Singapore: World Scientific, 1996.

Шилин Илья Анатольевич

Национальный исследовательский университет МЭИ;

Московский педагогический государственный университет

E-mail: ilyashilin@li.ru

Choi Junesang

Университет Донггук, Республика Корея

E-mail: junesang@mail.dongguk.ac.kr

CONTENTS

Geometry of almost 3-quasi-Sasakian manifolds of the second kind (<i>S. V. Galaev</i>)	3
Geometry of cyclic and anticyclic spaces (<i>N. I. Guseva</i>)	10
Invariant Ricci solitons on metric Lie groups with a semisymmetric connection (<i>P. N. Klepikov, E. D. Rodionov, O. P. Khromova</i>)	19
On the limits of Kähler–Ricci flow on Fano group compactifications (<i>Yan Li, ZhenYe Li</i>)	30
Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. III (<i>V. M. Morozov, V. I. Kalenova, M. G. Rak</i>)	42
On the Einstein metrics of three-dimensional Lie groups with a semisymmetric connection (<i>A. A. Pavlova, O. P. Khromova</i>)	64
On mutual arrangements of two M -curves of degree 4 (<i>N. D. Puchkova</i>)	69
On the geometry of holomorphic torse-forming vector fields on almost contact metric manifolds (<i>A. R. Rustanov, O. E. Arsen'eva, S. V. Kharitonova</i>)	83
On the Lie algebra of derivations of the Jordan algebra of a bilinear symmetric form (<i>A. Ya. Sultanov, M. V. Glebova</i>)	94
On Weil bundles (<i>A. Ya. Sultanov, O. A. Monakhova, G. A. Sultanova</i>)	100
Spontaneous clustering in Markov chains. III. Monte Carlo Algorithms (<i>V. V. Uchaikin, E. V. Kozhemiakina</i>)	115
On Cartan's canonical projective connection (<i>Yu. I. Shevchenko, E. V. Skrydlova, A. V. Vyalova</i>)	134
Lie algebras and special functions related to the isotropic cone (<i>I. A. Shilin, J. Choi</i>)	141

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антонинович,
д.ф.-м.-н. (ВИНТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович