ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 217 (2022)

Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 217 (2022)

Дата публикации 14 ноября 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года — Выходит 15 раз в год

Редакторы-составители выпуска	Е. Ю. Лискина, М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска	Е. Е. Букжалёв
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782–4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-3-10
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-11-19
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-20-28
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-29-36
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-37-40
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-41-50
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-51-62
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-63-72
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-73-80
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-81-96
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-97-106
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-217-107-137

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 217

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 3–10
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-3-10

УДК 517.925.52

О ВЕТВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. **В. В. АБРАМОВ, Е. Ю. ЛИСКИНА**

Аннотация. Исследована нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. Получены условия существования и устойчивости периодического решения, которое при нулевом значении параметра удовлетворяет линейной однородной системе. В основе рассуждений лежит анализ свойств правого оператора монодромии.

***Ключевые слова*:** дифференциальное уравнение, периодическое решение, малый параметр, оператор монодромии.

ON BRANCHING OF PERIODIC SOLUTIONS OF QUASILINEAR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2022 **V. V. ABRAMOV, E. Yu. LISKINA**

Abstract. In this paper, a normal system of ordinary differential equations with a small parameter is examined. We obtain conditions for the existence and stability of a periodic solution, which, at the zero value of the parameter, satisfies a linear homogeneous system. The reasoning is based on the analysis of properties of the monodromy operator.

***Keywords and phrases*:** differential equation, periodic solution, small parameter, monodromy operator.

***AMS Subject Classification*:** 34C25

1. Введение. В монографии И. Г. Малкина [7] изложены классические результаты по проблеме существования и устойчивости периодических решений системы вида $\dot{x} = Ax + f(t) + \mu F(t, x, \mu)$, зависящей от малого вещественного параметра μ. Рассматривались как резонансный, так и нерезонансный случаи по линейному приближению. В частности, условия существования периодического решения устанавливались с помощью теоремы о неявной функции. Аналогичные результаты приведены Е. А. Гребениковым и Ю. А. Рябовым в [3], где акцент сделан на вычислении решений.

В данной работе предлагается развитие подхода, предложенного И. Г. Малкиным, на основе результатов, полученных в [1, 2, 4, 5].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \tag{1}$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ — малый параметр, правая часть ω-периодическая интегрируемая по t при всех x и μ, функция $f(t,x,\mu)$ гладко зависит от x и от μ, а также удовлетворяет условию

$$f(t,x,0_m) \equiv 0_n \tag{2}$$

(0_l — нулевой l-мерный вектор).

Задача. Найти условия существования и устойчивости ω-периодического решения $x(t,a,\mu)$, $x(0,a,\mu)=a$ системы (1) в терминах свойств первого приближения для усреднения на периоде функции $f(t,x,\mu)$ вдоль решений соответствующей линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3}$$

причем $x(t,a,0_m)$ — ненулевое решение системы (3).

Решение задачи в такой постановке целесообразно для формулировки коэффициентных признаков, пригодных для проверки с помощью компьютерных вычислений.

2. Необходимые условия существования периодического решения. При малых значениях параметра правая часть системы (1) близка к линейной. Поэтому для решений системы (1) с помощью оператора монодромии можно определить сдвиг начальной точки на период. Установим структуру этого оператора, чтобы построить недифференциальное уравнение относительно начального значения и параметра, определяющих периодическое решение. Кроме того, на основе свойств возмущений оператора сдвига по траекториям можно исследовать проблему устойчивости периодического решения (см. [6]).

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (3), нормированная условием $X(0)=E$. Решение системы (1) имеет вид

$$x(t,a,\mu) = X(t)a + \tilde{x}(t,a,\mu), \tag{4}$$

в котором

$$\tilde{x}(t,a,\mu) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau,a,\mu),\mu)\,d\tau.$$

По условию (2) справедливо тождество

$$\tilde{x}(t,a,0_m) \equiv X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau,a,0_m),0_m)\,d\tau \equiv 0_n, \tag{5}$$

из которого следует, что равенство (4) можно представить в виде

$$x(t,a,\mu) = X(t)a + \tilde{x}_1(t,a,\mu) + \tilde{x}_2(t,a,\mu), \tag{6}$$

где

$$\tilde{x}_1(t,a,\mu) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, X(\tau)a,\mu)\,d\tau, \quad \tilde{x}_2(t,a,\mu) = \tilde{x}(t,a,\mu) - \tilde{x}_1(t,a,\mu).$$

В силу равенства (4) по формуле Лагранжа вычислим

$$\tilde{x}_2(t,a,\mu) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)(f(\tau, X(\tau)a + \tilde{x}(\tau,a,\mu),\mu) - \tilde{x}(\tau, X(\tau)a,\mu))\,d\tau = \frac{\partial \tilde{x}_1(t,\tilde{a},\mu)}{\partial a}\tilde{x}(t,a,\mu).$$

Значит, из тождества (5) следует, что справедливо условие

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} \frac{\|\tilde{x}_2(t,a,\mu)\|}{\|\tilde{x}_1(t,a,\mu)\|} \equiv 0$$

(здесь и далее тождественное равенство применяем для обозначения равномерной сходимости).

Итак, подставив $t=\omega$ в равенство (6), получим для системы (1) вид оператора монодромии

$$x(\omega,a,\mu) = Xa + p(a,\mu) + \varphi(a,\mu), \tag{7}$$

в котором $X = X(\omega)$ — матрица монодромии системы (3); $p(a,\mu)$ — первое приближение функции $\tilde{x}_1(\omega,a,\mu)$ при $\|\mu\| \to 0$, то есть $\tilde{x}_1(\omega,a,\mu) = p(a,\mu) + \tilde{p}(a,\mu)$ и

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} \frac{\|\tilde{p}(a,\mu)\|}{\|p(a,\mu)\|} \equiv 0; \quad \varphi(a,\mu) = \tilde{p}(a,\mu) + \tilde{x}_2(\omega,a,\mu).$$

Из равенства (7) следует, что для системы (1) определяющее уравнение (уравнение относительно начального значения и параметра, определяющих периодическое решение) имеет вид

$$Ba + p(a,\mu) + \varphi(a,\mu) = 0_n, \tag{8}$$

где $B = X - E$.

Установим необходимые условия существования периодического решения.

Пусть $\|Ba\| \neq 0$. Так как

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} \|p(a,\mu) + \varphi(a,\mu)\| \equiv 0,$$

то существует такое $\delta > 0$, что для всех значений μ: $\|\mu\| < \delta$ справедлива оценка

$$\|x(\omega,a,\mu) - a\| \geqslant \|Ba\| - \|p(a,\mu) + \varphi(a,\mu)\| > \frac{\|Ba\|}{2} > 0.$$

При этом пара (a,μ) не удовлетворяет уравнению (8) и решение $x(t,a,\mu)$ не является периодическим. Итак, для существования периодического решения системы (1) необходимо чтобы выполнялось условие

$$Ba_0 = 0_n. \tag{9}$$

Тогда $x(t,a_0,0_m) = X(t)a_0$ в силу равенства (6). Поэтому далее будем предполагать, что имеет место критический случай по линейному приближению

$$\det(X - E) = 0, \tag{10}$$

и рассматривать случай ветвления периодического решения системы (1) от ненулевого периодического решения системы (3).

Допустим, что вектор-функция $p(a,\mu)$ в уравнении (8) при любых значениях a, μ и $\alpha > 0$ удовлетворяет условию

$$p(a,\alpha\mu) = \alpha^k p(a,\mu), \quad k > 0. \tag{11}$$

При условии (10) система (9) имеет фундаментальную $(n \times r)$-матрицу решений K, где

$$r = \dim\ker(X - E).$$

Подставим в определяющее уравнение (8) значения

$$a = a_0 + Kz, \quad \mu = \alpha(\mu_0 + \lambda),$$

где $a_0 \neq 0_n$ — какое-либо фиксированное решение системы (9), μ_0 — направление ветвления параметра системы (1), $z \in \mathbb{R}^r$ и $\lambda \in \mathbb{R}^m$ — произвольные векторы, $\alpha > 0$ — малый параметр. Так как $B(a_0 + Kz) \equiv 0_n$, то в силу равенства (11) определяющее уравнение имеет вид

$$p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) + \alpha^{-k}\varphi(a_0 + Kz, \alpha(\mu_0 + \lambda)) = 0_n. \tag{12}$$

Так как

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} \frac{\|\varphi(a,\mu)\|}{\|p(a,\mu)\|} \equiv 0,$$

то

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^{-k}\varphi(a_0 + Kz, \alpha(\mu_0 + \lambda)) \equiv 0_n.$$

При условии $p(a_0,\mu_0) \neq 0_n$ существует такое $\delta > 0$, что для всех значений z: $\|z\| < \delta$, λ: $\|\lambda\| < \delta$ и α: $\alpha < \delta$ справедлива оценка

$$\|x(\omega,a,\mu) - a\| \geqslant \alpha^k \Big| \|p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda)\| + \|\alpha^{-k}\varphi(a_0 + Kz, \alpha(\mu_0 + \lambda))\| \Big| > \alpha^k \frac{\|p(a_0,\mu_0)\|}{2} > 0.$$

Значит, условие (12) не выполняется, то есть система (1) не имеет периодического решения. Поэтому направление ветвление параметра и начальное значение порождающего периодического решения системы (3) должны удовлетворять условию

$$p(a_0, \mu_0) = 0_n. \tag{13}$$

3. Достаточные условия существования периодического решения. При условии (13) получим разложение

$$p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) = p'_a(a_0, \mu_0)Kz + p'_\mu(a_0, \mu_0)\lambda + q(z, \lambda),$$

в котором

$$\lim_{\gamma \to 0} \|q(\gamma z, \gamma \lambda)\| \equiv 0.$$

Допустим, что выполняется условие

$$\operatorname{rang} P = n \leqslant r + m, \tag{14}$$

в котором

$$P = \begin{bmatrix} p'_a(a_0, \mu_0)K & p'_\mu(a_0, \mu_0) \end{bmatrix}.$$

При этом можно выполнить разложение

$$p'_a(a_0, \mu_0)Kz + p'_\mu(a_0, \mu_0)\lambda = Dv + D_1 v_1,$$

где матрица D составлена из n линейно независимых столбцов матрицы P. Выберем $v_1 = 0_{n-m-r}$. Тогда $p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) = Dv + q(v)$,

$$\lim_{\gamma \to 0} \gamma^{-1} \|q(\gamma v)\| \equiv 0.$$

При сделанных предположениях обозначим $\tilde{\varphi}(\alpha, v) = \alpha^{-k} \varphi(a_0 + Kz, \alpha(\mu_0 + \lambda))$. Получим, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \|\tilde{\varphi}(\alpha, v)\| \equiv 0.$$

Поэтому, применив условие $\tilde{\varphi}(0, v) \equiv 0_n$, устраним разрыв функции $\tilde{\varphi}(\alpha, v)$ при $\alpha = 0$. Таким образом, определяющее уравнение преобразовано к виду

$$g(\alpha, v) = Dv + \tilde{q}(v) + \tilde{\varphi}(\alpha, v) = 0_r. \tag{15}$$

Так как $g(0, 0_n) = 0_n$, $g'_v(0, 0_n) = D$ и $\det D \neq 0$, то по теореме о неявной функции уравнение (15) определяет функцию $v = v(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha < \Delta$, для которой $g(\alpha, v(\alpha)) \equiv 0_n$ и $v(0) \equiv 0_n$. Тогда существуют функции $z = z(\alpha)$, $\lambda = \lambda(\alpha)$, удовлетворяющие уравнению (12). Значит, пара (a^*, μ^*), в которой $a^* = a_0 + Kz(\alpha)$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda(\alpha))$, является решением уравнения (8), то есть определяет ω-периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (1).

4. Устойчивость периодического решения. Допустим, что выполняются условия (9), (11), (13) и (14). Тогда согласно установленному в пункте 3 система (1) имеет периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$. Составим для этого решения систему в вариациях, которая в силу равенств (7) и (11) имеет матрицу монодромии

$$x'_a(\omega, a^*, \mu^*) = X + p'_a(a^*, \mu^*) + \varphi'_a(a^*, \mu^*) = X + \alpha^k P_1 + W(\alpha), \tag{16}$$

в которой $P_1 = p'_a(a_0, \mu_0)$,

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-k} W(\alpha) = 0_{nn}$$

(0_{ll} — нулевая $l \times l$-матрица).

Предположим, что при любом достаточно малом $\gamma > 0$ имеет место неравенство

$$\|X + \gamma P_1\| \leqslant 1 - \gamma b, \tag{17}$$

в котором $\| * \|$ — какая-либо матричная норма, $b > 0$ — некоторое число. Тогда из равенства (15) следует, что при всех достаточно малых $\alpha > 0$ справедлива оценка

$$\|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| \leqslant \|X + \alpha^k P_1(a_0, \mu_0)\| + \|W(\alpha)\| \leqslant 1 - \frac{\alpha^k b}{2}. \tag{18}$$

Так как спектральный радиус любой матрицы H равен нижней грани множества ее матричных норм $\rho(H) = \inf\{\|H\|\}$ (см. [8]), то из оценки (18) следует условие

$$\rho(x'_a(\omega, a^*, \mu^*)) \leqslant \|x'_a(\omega, a^*, \mu^*)\| < 1,$$

при котором периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ асимптотически устойчиво по линейному приближению (см. [6]).

5. Основной результат. Итак, на основе выводов, полученных в пунктах 3 и 4, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (9), (11), (13), (14) *и* (17), *то система* (1)–(2) *имеет асимптотически устойчивое ω-периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, в котором $a^* = a_0 + Kz(\alpha)$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda(\alpha))$,*

$$\lim_{\alpha\to 0} z(\alpha) = 0_r, \quad \lim_{\alpha\to 0} \lambda(\alpha) = 0_m.$$

На основе проведенных рассуждений можно сделать выводы о структуре периодического решения. Допустим, что правая часть системы (1) удовлетворяет условию

$$f(t, x, \mu) = f_1(t, x, \mu) + f_2(t, x, \mu), \tag{19}$$

в котором $f_1(t, x, \alpha\mu) \equiv \alpha^k f_1(t, x, \mu)$,

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^{-k}\|f_2(t, x, \alpha\mu)\| \equiv 0.$$

Если функция $f_1(t, x, \mu)$, являющаяся первым приближением для $f(t, x, \mu)$ при $\mu \to 0_m$, не аннулируется в результате усреднения на периоде вдоль решений системы (3), то в равенстве (7)

$$p(a, \mu) = y_1(\omega, a, \mu) = X(\omega)\int_0^\omega X^{-1}(\tau) f_1(\tau, X(\tau)a, \mu)d\tau,$$

где $y_1(t, a, \mu)$ — главная часть бесконечно малой $\tilde{x}_1(t, a, \mu)$ при $\mu \to 0_m$. Вычислив направление ветвления параметра и начальное значение порождающего периодического решения системы (3) по условиям (9) и (13), в силу равенств (6) и (19) получим вид периодического решения системы (1)

$$x(t, a^*, \mu^*) = X(t)a_0 + X(t)Kz(\alpha) + \alpha^k X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau) f_1(\tau, X(\tau)a_0, \mu_0)d\tau + y(t, \alpha),$$

в которой порядок малости функции $z(\alpha)$ определяется в результате применения теоремы о неявной функции к уравнению (15),

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^{-k}\|y(t, \alpha)\| \equiv 0.$$

Рассмотрим частный случай установленной здесь теоремы 1. Допустим, что

$$B = 0_{nn}, \tag{20}$$

то есть условие (9) выполняется тождественно и все решения системы (3) являются периодическими. При этом $X = E$ в равенстве (7) и $K = E$ в уравнении (12). Тогда из оценки (17) следует, что $\det P_1 \neq 0$ (см. [8]). Следовательно, выполняется условие (14). Итак, из теоремы 1 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (20), (11), (13) *и* (17), *то система* (1)–(2) *имеет асимптотически устойчивое ω-периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, в котором $a^* = a_0 + z(\alpha)$, $\mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda(\alpha))$,*

$$\lim_{\alpha\to 0} z(\alpha) = 0_r, \quad \lim_{\alpha\to 0} \lambda(\alpha) = 0_m.$$

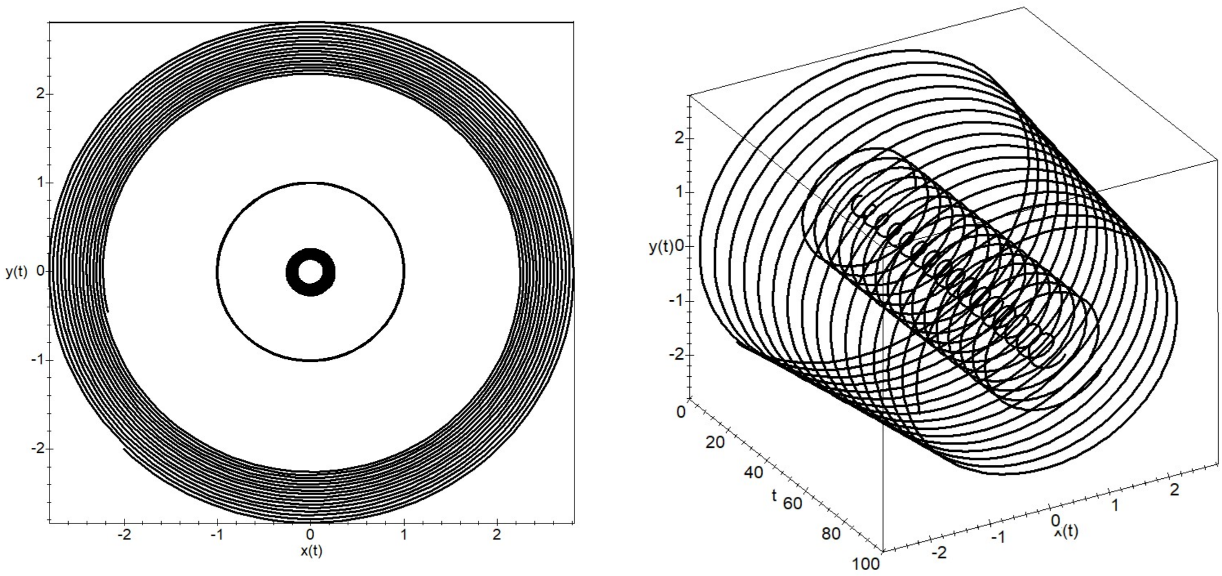

Рис. 1. Траектории и интегральные кривые системы (21) при $\mu = 0{,}001(1;1)^T$.

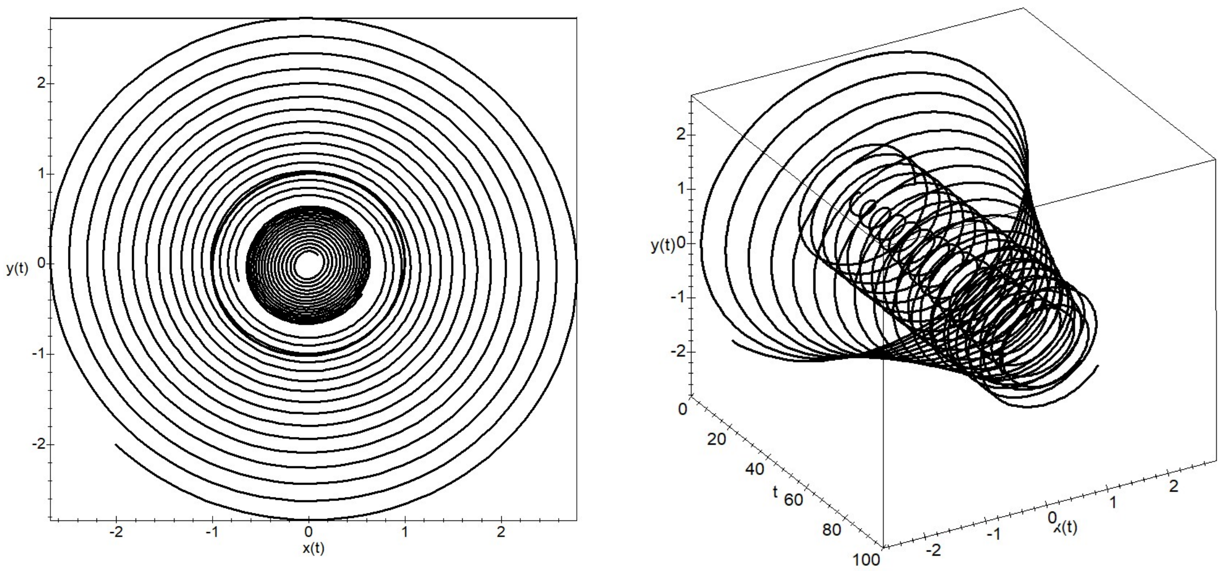

Рис. 2. Траектории и интегральные кривые системы (21) при $\mu = 0{,}005(1;1)^T$.

6. Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \mu_1(6\cos t + 3x_2 + (-3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2)\sin t), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu_2(-2{,}5\sin t + 2x_1 - 3x_2 + (2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2)\cos t). \end{cases} \tag{21}$$

Это система вида (1)–(2), в которой $\omega = 2\pi$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t,x,\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1(6\cos t + 3x_2 + (-3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2)\sin t) \\ \mu_2(-2{,}5\sin t + 2x_1 - 3x_2 + (2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2)\cos t) \end{pmatrix}.$$

Так как

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

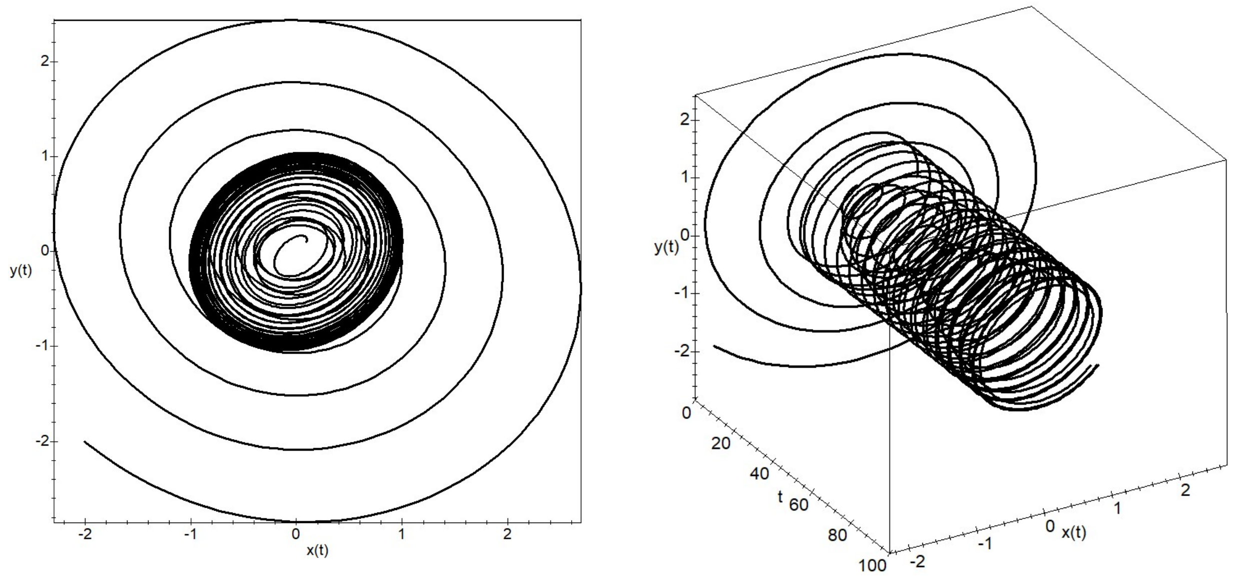

Рис. 3. Траектории и интегральные кривые системы (21) при $\mu = 0{,}02(1;1)^T$.

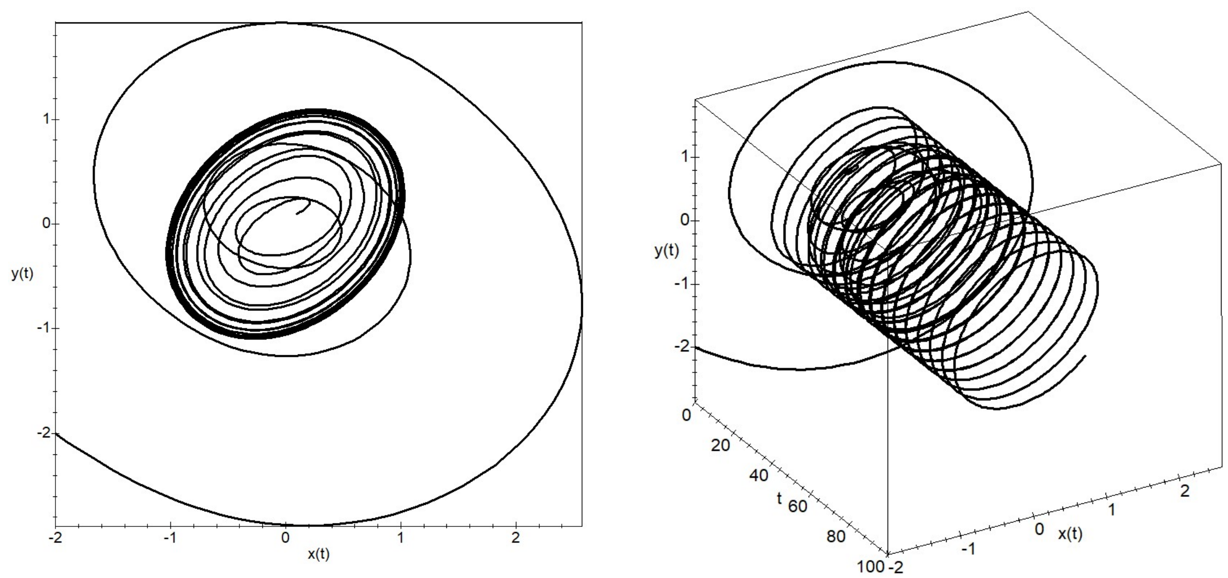

Рис. 4. Траектории и интегральные кривые системы (21) при $\mu = 0{,}05(1;1)^T$.

для соответствующей системы вида (3), то для системы (21) выполняется условие (20). В равенстве вида (7) имеем

$$p(a,\mu) =$$
$$= \pi \begin{pmatrix} 6\mu_1 - 2{,}5\mu_2 - 3\mu_2 a_1 + (3\mu_1 - 2\mu_2)a_2 + (0{,}5\mu_2 - \mu_1)a_1^2 + (2\mu_1 - 2\mu_2)a_1 a_2 + (\mu_1 - 0{,}5\mu_2)a_2^2 \\ (2\mu_2 - 3\mu_1)a_1 - 3\mu_2 a_2 + \mu_2 a_1^2 + (\mu_2 - 2\mu_1)a_1 a_2 + (2\mu_1 - \mu_2)a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Значит, выполняется условие (11), в котором $k = 1$. При

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

справедливо равенство (13). Кроме того, матрица

$$P_1 = p'_a(a_0, \mu_0) = \pi \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет отрицательно доминирующую главную диагональ. Поэтому для строчной матричной нормы, индуцированной векторной нормой $\| * \|_\infty$, имеет место оценка (17). Итак, выполняются условия теоремы 2, в силу которых при отклонении параметра от нулевого значения по направлению

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

в системе (21) происходит ветвление асимптотически устойчивого 2π-периодического решения от порождающего решения

$$X(t)a_0 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

соответствующей системы вида (3).

Полученный вывод согласуется с расположением траекторий и интегральных кривых с начальными значениями

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad a_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

построенных для системы (21) в пакете Maple (рисунки 1–4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. В.* Устойчивость малого периодического решения// Вестн. РАЕН. — 2013. — *13*, № 4. — С. 3–5.
2. *Абрамов В. В.* К задаче об устойчивости малого периодического решения// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *148*. — С. 3–9.
3. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979.
4. *Лискина Е. Ю.* Ненулевые периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений/ Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-матю наук — Саранск: МГУ им. Н. П. Огарева, 2000.
5. *Лискина Е. Ю.* О периодическом решении специального вида системы обыкновенных дифференциальных уравнений// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2000. — *5*, № 4. — С. 472–473.
6. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
7. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: ГИТТЛ, 1956.
8. *Хорн Р. А., Джонсон Ч. Р.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.

Абрамов Владимир Викторович
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: `v.abramov@365.rsu.edu.ru`

Лискина Екатерина Юрьевна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: `e.liskina@365.rsu.edu.ru, katelis@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 11–19
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-11-19

УДК 517.9

СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА—СИДОРОВА—ДИРИХЛЕ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

© 2022 г. **Е. В. БЫЧКОВ**

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения задачи Шоуолтера—Сидорова—Дирихле для одного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка. Для рассматриваемой начально-краевой задачи построено приближенное решение по методу Галеркина в виде разложения по системе собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа. Доказательство $*$-слабой сходимости галеркинских приближений к точному решению основано на априорных оценках, теоремах вложения и лемме Гронуолла.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, задача Шоуолтера—Сидорова, метод Галеркина, $*$-слабая сходимость.

CONVERGENCE OF AN APPROXIMATE SOLUTION OF THE SHOWALTER–SIDOROV–DIRICHLET PROBLEM FOR THE MODIFIED BOUSSINESQ EQUATION

© 2022 **E. V. BYCHKOV**

Abstract. In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a unique solution of the Showalter–Sidorov–Dirichlet problem for a second-order, semilinear Sobolev-type equation. For the initial-boundary-value problem considered, using the Galerkin method, we construct an approximate solution as an expansion in the system of eigenfunctions of the homogeneous Dirichlet problem for the Laplace operator. The proof of the $*$-weak convergence of the Galerkin approximations to the exact solution is based on a priori estimates, embedding theorems, and the Gronwall lemma.

Keywords and phrases: Sobolev-type equation, Showalter–Sidorov problem, Galerkin method, $*$-weak convergence.

AMS Subject Classification: 35S16, 35L76, 35R25, 65M60

1. Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ $T \in \mathbb{R}_+$. В цилиндре $C = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим модифицированное уравнение Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} - \alpha^2\Delta u + u^3 = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

где $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, с однородными краевыми условиями Дирихле

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \tag{2}$$

и условиями Шоуолтера—Сидорова

$$P(u(x, 0) - u_0(x)) = 0, \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где P некоторый спектральный проектор, который будет определен в дальнейшем. Условие (3) являются естественным обобщением условий Коши для уравнений соболевского типа (см. [8]). Уравнение имеет множество приложений в различных областях естествознания. Например, моделирует распространение волн на мелкой воде с учетом капиллярных эффектов. В этом случае функция $u = u(x,t)$ определяет высоту волны. В монографии [13] построена линейная математическая модель распространения волн на мелкой воде. В [15] исследована (модифицированная) математическая модель распространения волн на мелкой воде в одномерной области и получено солитонное решение уравнения (1). В [21] доказано существование единственного глобального решения задачи Коши для уравнения (1), при $\lambda = 1$, $\alpha = 1$. В [1] получено аналогичное для описания взаимодействия ударных волн.

В [15] получено решение в виде уединенных продольных волн деформации для уравнения Похгаммера—Кри

$$u_{tt} - u_{ttxx} - u_{xx} - \frac{1}{p}((u^p))_{xx} = 0,$$

с $p = 2, 3, 5$ и численно исследовано взаимодействие двух уединенных волновых решений. Для

$$f(u) = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3, \quad f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5$$

в [25] получены явные уединенные волновые решения последнего уравнения, используя метод приведения к алгебраическому уравнения. Также было исследовано бифуркационное поведение фазовых портретов для соответствующего уравнения бегущей волны.

Во всех перечисленных выше работах существенным условием является непрерывная обратимость оператора при старшей производной по переменной t. Однако оператор $\lambda - \Delta$ может быть вырожденным. Уравнения, не разрешимые относительно старшей производной по времени, согласно [19, 20] такие уравнения называют уравнениями соболевского типа.

В [14] была исследована задача Шоуолтера—Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \quad P(\dot{u}(0) - u_1) = 0, \tag{4}$$

для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка

$$L\ddot{u} - Mu + N(u) = 0, \tag{5}$$

где $\dot{u}$, $\ddot{u}$ — первая и вторая производные по t. Используя теорию относительно p-ограниченных операторов и метод фазового пространства, разработанные Г. А. Свиридюком и его учениками (см. [9, 10]), доказана теорема о существовании единственного локального решения, а также отмечается, что в случае монотонности оператора N фазовое пространство будет простым многообразием.

Уравнение (1) относится к уравнениям соболевского типа высокого порядка, изучаемому, например, в [3, 24]. Уравнения соболевского типа тесно связаны с алгебро-дифференциальными уравнениями (см. [7,12]). В настоящее время все чаще теория уравнений соболевского типа с ограниченных областей пространства $\mathbb{R}^n$ переносится на геометрические графы (см. [23]), пространство дифференцируемых k-форм на римановых многообразиях (см. [18]). С помощью уравнений соболевского типа моделируются многие физические явления (см. [2, 5, 6]), а также технические и экономические процессы (см. [17]). Этим объясняется неугасающий к ним интерес.

Статья устроена следующим образом. В первом параграфе мы введем некоторые предварительные сведения. Во втором параграфе докажем вспомогательную теорему, обобщающую теорему Пикара на алгебро-дифференциальные системы. В третьем параграфе докажем сходимость приближенного решения, полученного методом Галеркина, к точному в смысле $*$-слабой сходимости. В следующем параграфе докажем единственность решения на основе теоремы вложения и неравенства Гронуолла.

2. Предварительные сведения.

Определение 1. Пусть X некоторое банахово пространство, X^* — сопряженное для X пространство относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Говорят, что последовательность $f_n \in X^*$ сходится $*$-слабо к $f \in X$, если для любого $g \in B$ выполняется $\langle f_n, g \rangle \to \langle f, g \rangle$ при $n \to \infty$.

Вообще говоря, $*$-слабая сходимость слабее обычной слабой сходимости, однако, если X — рефлексивное банахово пространство, то $*$-слабая и слабая сходимость эквиваленты.

Лемма 1 (см. [4]). *Пусть O — ограниченная область в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_l и g — такие функции из $L^q(O)$, $1 < q < \infty$, что $\|g_l\|_{L^q(O)} \leqslant C$, $g_l \to g$ п. в. в $L^q(O)$. Тогда $g_l \to g$ слабо в $L^q(O)$.*

Лемма 2 (свойство максмин). *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство ненулевой размерности и оператор $A\colon H \to H$ — линейный компактный самосопряженный и неотрицательно определенный. Спектр оператора A состоит из конечного или счетного множества собственных значений λ_n, имеющих единственную предельную точку, равную нулю. Поскольку все собственные значения A вещественны и конечнократны, то их можно занумеровать по невозрастанию*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \ldots$$

Тогда для любого $n \geqslant 1$ имеют место соотношения

$$\lambda_n = \min_{H_{n-1}} \max_{\substack{x \perp H_{n-1} \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2},$$

где H_{n-1} — произвольное $(n-1)$-мерное подпространство в H.

Лемма 3 (см. [4]). *Если $f \in L^p(0,T;X)$ и $\dot f \in L^p(0,T;X)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty$, X — банахово пространство$)$, то f будет непрерывным отображением $[0,T] \to X$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль из интервала $(0,T)$).*

Лемма 4 (лемма Гронуолла; см. [16]). *Пусть $g(t) \geqslant 0$ и $f(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant t_0$, а также $g, f \in C[t_0, +\infty]$, причем при $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство*

$$g(t) \leqslant c + \int\limits_{t_0}^{t} f(s) g(s) ds,$$

где c — неотрицательная константа. Тогда при $t \geqslant t_0$ имеет место неравенство

$$g(t) \leqslant c \exp\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} f(s) ds \right\}.$$

Кроме того, если $c = 0$, то $g(t) = 0$.

Лемма 5 (теорема вложения Реллиха—Кондрашова; см. [11]). *Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область с границей класса C^s, $s \geqslant 1$, $s > l$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $s - n/p \geqslant l - n/q$. Тогда вложение*

$$W^s_p(\Omega) \subset W^l_q(\Omega)$$

вполне непрерывно (компактно).

Ранее задача (4), (5) исследовалась методами теории относительно p-ограниченных операторов, далее приводится некоторые ее положения. Пусть X, Y — банаховы пространства, L — линейный непрерывный оператор ($L \in \mathcal{L}(X;Y)$), а M — линейный и плотно определенный оператор ($M \in \mathcal{C}l(X;Y)$). Множество

$$\rho^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(Y;X) \right\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора M относительно оператора L (или L-*резольвентным множеством* оператора M). Множество $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется *спектром* оператора M относительно оператора L (или L-*спектром* оператора M).

Оператор-функции

$$(\mu L - M)^{-1}, \quad R^L_\mu = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$$

с областью определения $\rho^L(M)$ называются, соответственно, *резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой* оператора M относительно оператора L (короче, L-*резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой оператора M*).

Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a>0\ \forall \mu\in\mathbb{C}:(|\mu|>a)\Rightarrow(\mu\in\rho^L(M)).$$

Пусть оператор $M(L,\sigma)$ ограничен. Тогда операторы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}R^L_\lambda(M)d\lambda,\quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}L^L_\lambda(M)d\lambda$$

являются проекторами в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно. Здесь $\Gamma=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=r>a\}$ (см. [20, с. 89]).

Обозначим через $T\mathfrak{P}$ касательное расслоение простого многообразия без края $\mathfrak{P}$, моделируемое банаховым пространством X, а через $T_{u_0}\mathfrak{P}$ касательное пространство в точке u_0. Тогда запись $(u_0,u_1)\in T\mathfrak{P}$ будем понимать в следующем смысле: $u_0\in\mathfrak{P}$ и $(u_0,u_1)\in T_{u_0}\mathfrak{P}$.

Определение 2. Множество $\mathfrak{P}$ называется фазовым пространством уравнения (5), если

(i) для любых $(u_0,u_1)\in T\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (4), (5);
(ii) любое решение $u=u(t)$ уравнения (5) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория.

Пусть $\ker L\neq\{0\}$ и оператор $M(L,0)$-ограничен; тогда в силу теоремы о расщеплении (см. [9]) уравнение (7) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases}0=(\mathbb{I}-Q)(M+N)(u),\\ \ddot u^1=L_1^{-1}Q(M+N)(u),\end{cases}$$

где $u^1=Pu$. Тогда фазовым пространством $\mathfrak{P}$ уравнения (5) является множество

$$\mathfrak{P}=\big\{u\in\mathfrak{U}:(\mathbb{I}-Q)(M+N)(u)=0\big\}.$$

Таким образом, в [14] было доказано существование единственного локального решения.

3. Алгебро-дифференциальная система. Приведем обобщение классической теоремы Пикара на случай алгебро-дифференциальных уравнений. При решении начально-краевых задач для вырожденных уравнений в частных производных (уравнений соболевского типа) методом Галеркина возникают алгебро-дифференциальная система вида

$$A\ddot x=F(x),\tag{6}$$

где $x(t)\in\mathbb{R}^m$, $t\in[0,T]$, $\operatorname{rank}A=k$, $k<m$. Преобразуем систему (6) к системе первого порядка, введем новую переменную $y(t)\in\mathbb{R}^{2m}$ и новые матричные операторы

$$y(t)=\begin{pmatrix}\dot x(t)\\ x(t)\end{pmatrix},\quad \bar A=\begin{pmatrix}A&\mathbb{O}\\ \mathbb{O}&\mathbb{I}\end{pmatrix},\quad \bar F=\begin{pmatrix}\mathbb{O}&F(\cdot)\\ \mathbb{I}&\mathbb{O}\end{pmatrix},$$

получим

$$\bar A\dot y=\bar F(y),\tag{7}$$

$$\operatorname{rank}\bar A=k+m.\tag{8}$$

Систему (7) разобьем на две подсистемы

$$0=\bar F^0(y),\tag{9}$$

$$Q\bar A\dot y=\bar F^1(y),\tag{10}$$

где $\bar F^0=\bar P\bar Q\bar F(y)$, $\bar F^1(y)=(\mathbb{I}-\bar P)\bar Q\bar F(y)$, матрица $\bar Q$ получена из единичной путем замены верхних строк базисными векторами левого ядра матрицы (коядра) $\bar A$, $\bar P$ — проектор на левое ядро матрицы $\bar Q\bar A$. Система (9), (10) и система (7) эквивалентны в том смысле, что их решения совпадают, если они они существуют хотя бы у одной из них. Поэтому решение системы (7) лежат во множестве $\mathfrak{M}=\{y\in\mathbb{R}^{2m}:\bar F(y)=0\}$.

Пусть функция $\bar F\in C^s$, $s\geqslant 1$; тогда имеет смысл условие

$$\operatorname{rank}(\bar F^0)'_{y_0}=l,\tag{11}$$

где $(\bar{F}^0)'_{y_0}$ — матрица Якоби функции $\bar{F}^0$ в точке y_0. Пусть существует такой $y_0 \in \mathfrak{M}$, что в некоторой окрестности $O(y_0) \cap \mathfrak{M}$ выполнено условие (11). Тогда $O(y_0) \cap \mathfrak{M}$ есть C^s-многообразие размерности $2m - l \geqslant k$, и уравнение (9) можно привести к виду

$$(\bar{F}^0)'_y \dot{y} = 0, \quad y(0) = y_0. \tag{12}$$

Предположим, что в окрестности $O(y_0)$ выполнено условие

$$\ker \bar{Q}\bar{A} \cap \ker (\bar{F}^0)'_{y_0} = \{0\} \tag{13}$$

(символом $\ker T$ обозначено правое ядро матрицы T). Тогда матрица $\bar{Q}A + (\bar{F}^0)'_{y_0}$ обратима в этой окрестности, и система (10), (12) приводится к виду

$$\dot{y} = (\bar{Q}\bar{A} - (\bar{F}^0)'_{y_0})^{-1}\bar{F}^1, \quad y(0) = y_0, \tag{14}$$

с гладкой правой частью.

Возвращаясь к исходным переменным, в силу [7, теорема 1] получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для системы* (6) *выполнены условия* (8), $F \in C^s$, $s \geqslant 1$, *и пусть найдется такой элемент* $(x_0, x_1) \in T\mathfrak{M}$, *что в некоторой окрестности* $O(x_0, x_1) \cap T\mathfrak{M}$ *выполнены условия* (11) *и* (13). *Тогда для некоторого* $t_0 > 0$ *существует по крайней мере одно решение* $x \in C^s(0, t_0; \mathfrak{M})$ *уравнения* (6), *удовлетворяющее условиям* $x(0) = x_0$ *и* $\dot{x}(0) = x_1$. *Если к тому же* $s \geqslant 2$, *то решение будет единственным.*

4. Теорема существования. В некоторых частных случаях нелинейного оператора можно ответить не только на вопрос о существовании и единственности решения, но и на вопрос как найти данное решение. Сформулируем и докажем теорему, отвечающую на вопрос, как найти решение задачи (1)–(3)

Для решения нам понадобятся несколько функциональных пространств. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Положим $Q = \Omega \times (0, T)$. Зададим пространства $L^4(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ и введем обозначение $B = L^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Кроме того, зададим пространства распределений (функций со значениями в банаховом пространстве) $L^\infty(0, T; B)$ и $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Сопряженные им пространства строятся по теореме Данфорда—Петтиса:

$$(L^\infty(0, T; B))^* \simeq L^1(0, T; L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \cup H^{-1}(\Omega)), \quad (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^* \simeq L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Пусть λ_k — собственные значения однородной задачи Дирихле (2) для оператора Δ, пронумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а φ_k — соответствующие им собственные функции. Кроме того, линейная оболочка $\operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ при $m \to \infty$ плотна в B и ортонормирована (в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$). Определим оператор

$$L = \lambda - \Delta \colon H^1 \to H^{-1*}, \quad \langle Lu, v\rangle = \int\limits_\Omega (\lambda uv + \nabla u \nabla v) dx.$$

Поскольку оператор L не имеет M-присоединенных векторов, то проектор P можно заменить оператором L.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$, $u_0 \in B = H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Тогда существует единственное решение* $u = u(x, t)$ *задачи* (1)–(3), *удовлетворяющее условиям*

$$Lu \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)), \quad L\dot{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Доказательство. Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде галеркинского приближения

$$u^m(t) = \sum_{k=1}^m a_k^m(t)\varphi_k. \tag{15}$$

Коэффициенты $a_k^m(t)$ находятся из следующей задачи:

$$\langle L\ddot{u}^m, \varphi_k\rangle - \alpha^2\langle \Delta u^m, \varphi_k\rangle + \langle (u^m)^3, \varphi_k\rangle = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{16}$$

$$\begin{cases} \langle Lu(0), \varphi_k\rangle = \langle Lu^m(0), \varphi_k\rangle = \langle L{u_0}^m, \varphi_k\rangle = \beta_k^m, \\ \langle L\dot{u}(0), \varphi_k\rangle = \langle L\dot{u}^m(0), \varphi_k\rangle = \langle Lu_1^m, \varphi_k\rangle = \gamma_k^m, \end{cases} \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{17}$$

где

$$Lu_0^m = \sum_{k=1}^m \beta_k^m \varphi_k \to u_0 \quad \text{в } B \text{ при } m \to \infty,$$

$$Lu_1^m = \sum_{k=1}^m \gamma_k^m \varphi_k \to u_1 \quad \text{в } L^2(\Omega) \text{ при } m \to \infty.$$

Применим к задаче (16), (17) теорему 1. Предположим, что λ совпало с первым собственным значением λ_1; поскольку оно первое, его кратность равна 1. Выпишем требуемые матрицы, обозначая символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ единичную и нулевую матрицы необходимой размерности:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{2m-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_{2m-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} - \bar{P} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{2m-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix} \bar{Q} = \mathbb{I}_{2m}, \\ \bar{F}^0 = \left(-\alpha^2 a_1^m(t) - \langle (u^m)^3,\ \varphi_1\rangle\right), \end{matrix} \quad \bar{F}^1 = \begin{pmatrix} -\alpha^2 a_2^m(t) - \langle (u^m)^3, \varphi_2\rangle \\ -\alpha^2 a_3^m(t) - \langle (u^m)^3, \varphi_3\rangle \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\alpha^2 a_m^m(t) - \langle (u^m)^3, \varphi_m\rangle \\ -\alpha^2 \dot{a}_1^m(t) - \langle (\dot{u}^m)^3, \varphi_1\rangle \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\alpha^2 \dot{a}_m^m(t) - \langle (\dot{u}^m)^3, \varphi_m\rangle \end{pmatrix},$$

причем $T\mathfrak{M} = \{y \in R^{2m} : \bar{F}(y) = 0\}$. Каждый элемент матриц $\bar{F}^0$, $\bar{F}^0$ является многочленом третьей степени от переменных a_k^m, поэтому $\bar{F}^0 \in C^\infty$ и $\bar{F}^1 \in C^\infty$. Таким образом, нетрудно проверить условия (11) и (13) в окрестности, содержащейся в касательном пространстве. Таким образом, выполнены условия Теоремы 1, а значит, существует единственное локальное решение $u^m = u^m(t,x)$, $t \in [0, t^m]$.

Получим априорные оценки. Умножая уравнение (16) на $\dot{a}_k^m(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и суммируя по k от 1 до m, получим

$$\langle L\ddot{u}^m, \dot{u}^m\rangle - \alpha^2\langle \Delta u^m, \dot{u}^m\rangle + \langle (u^m)^3, \dot{u}^m\rangle = 0. \tag{18}$$

Введем в пространстве $\operatorname{coim} L \cap L^2(\Omega)$ $(L^2(\Omega) = \operatorname{coim} L \oplus \ker L)$ норму $|\dot{u}|^2 = \langle L\dot{u}, \dot{u}\rangle$; в силу леммы 2 эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства $L^2(\Omega)$.

Используя самосопряженность L и Δ, получим

$$2\langle L\ddot{u}^m, \dot{u}^m\rangle = \frac{d}{dt}\langle L\dot{u}^m, \dot{u}^m\rangle, \quad 2\langle \Delta u^m, \dot{u}^m\rangle = -\frac{d}{dt}\langle \nabla u^m, \nabla u^m\rangle, \quad 4\langle (u^m)^3, \dot{u}^m\rangle = \frac{d}{dt}\|u^m\|^4_{L^4(\Omega)},$$

и уравнение (18) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left[|\dot{u}^m|^2 + \alpha^2\langle \nabla u^m, \nabla u^m\rangle + \frac{1}{2}\|u^m\|^4_{L^4}\right] = 0. \tag{19}$$

Проинтегрируем на отрезке $[0, t]$, $t \leqslant t_m$

$$|\dot{u}^m|^2 + \alpha^2\|u^m\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|u^m\|^4_{L^4} \leqslant |u_1^m|^2 + \alpha^2|u_0^m|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|u_0^m\|^4_{L^4}.$$

Так как правая часть равенства ограничена (по условию), то имеет место неравенство

$$|\dot{u}^m|^2 + \alpha^2\|u^m\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|u^m\|^4_{L^4} \leqslant C. \tag{20}$$

Константа C не зависит от t_m и, следовательно, $t_m = T$.

Замечание 1. В силу неравенства (20) при $m \to \infty$, последовательность функций $\dot{u}_m$ — ограничена в пространстве $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, u — ограничена в $L^\infty(0,T;B)$.

В силу того, что u^m и $\dot{u}^m$ ограниченны в пространствах $L^\infty(0,T;B)$ и $L^\infty(0,T;L^2\Omega)$, соответственно, являющиеся сопряженными пространствами для сепарабельных банаховых пространств $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)\cup L^{4/3}(\Omega))$ и $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Из них можно выбрать такие $*$-слабо сходящиеся подпоследовательности u^{m_l} и $\dot{u}^{m_l}$, что $u^{m_l} \to u$ $*$-слабо в $L^\infty(0,T;B)$, $L\dot{u}^{m_l} \to L\dot{u}$ $*$-слабо в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. При этом $\dot{u}^{m_l}$ понимается как обобщенная производная в пространстве распределений. Также из ограниченности $\dot{u}^m$ в пространстве $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, u^m в $L^2(0,T;B)$ (в силу замечания 1 и свойств пространств Лебега) следует, что u^m ограничена в $H^1(Q)$. В силу леммы 5 имеет место вполне непрерывное вложение $H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$. Поэтому можно считать, что

$$u^{m_l} \to u \quad \text{сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду.} \tag{21}$$

В силу ограниченности последовательности $\{(u^{m_l})^3\}$ в пространстве $L^\infty(0,T;L^{4/3}(\Omega))$, она сходится к некоторому элементу z этого пространства:

$$(u^{m_l})^3 \to z \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T;L^{4/3}(\Omega)). \tag{22}$$

Следствие 1. *Положим $O = Q$, $g_l = (u^{m_l})^3$, $g = u^3$. Тогда $z = u^3$ в силу леммы* 1, (21) *и* (22).

Теперь можно перейти почленно к пределу в равенстве (16), полагая $m_l = l$. Пусть k фиксировано и $l > k$; тогда получим

$$\langle L\ddot{u}^l, \varphi_k\rangle + \alpha^2\langle \nabla u^l, \nabla\varphi_k\rangle + \langle (u^l)^3, \varphi_k\rangle = 0. \tag{23}$$

В силу замечания 1 справедливы предельные переходы

$$\langle L\dot{u}^l, \varphi_k\rangle \to \langle Lu, \varphi_k\rangle \qquad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T);$$
$$\langle \nabla u^l, \nabla\varphi_k\rangle \to \langle \nabla u, \nabla\varphi_k\rangle \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T)$$

и, следовательно,

$$\langle L\ddot{u}^l, \varphi_k\rangle = \frac{d}{dt}\langle L\dot{u}^l, \varphi_k\rangle \to \langle L\ddot{u}, \varphi_k\rangle \quad \text{слабо в } L^\infty(0,T),$$

а в силу следствия 1

$$\langle (u^l)^3, \varphi_k\rangle \to \langle u^3, \varphi_k\rangle \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T).$$

Таким образом, из (23) выводим

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle Lu, \varphi_k\rangle + \alpha^2\langle \nabla u, \nabla\varphi_k\rangle + \langle u^3, \varphi_k\rangle = 0. \tag{24}$$

Ввиду плотности системы функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ в пространстве B при $m \to \infty$ и произвольности выбора φ_k следующее равенство имеет место для произвольного $v \in B$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle Lu, v\rangle + \alpha^2\langle \nabla u, \nabla v\rangle + \langle u^3, v\rangle = 0. \tag{25}$$

Проверим выполнение начальных условий. С одной стороны, $Lu_l(0) = Lu_l^0 \to Lu_0$ слабо в $H^1(\Omega)$ в силу (17), с другой стороны, $u^l(0) \to u(0)$ в B в силу замечания 1; следовательно, $u(0) = u_0$.

В силу замечания 1

$$\langle L\ddot{u}^l, \varphi_k\rangle \to \langle L\ddot{u}, \varphi_k\rangle \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T);$$

следовательно, учитывая лемму 3, получим

$$\langle L\dot{u}^l(0), \varphi_k\rangle \to \langle L\dot{u}(t), \varphi_k\rangle|_{t=0} = \langle L\dot{u}(0), \varphi_k\rangle.$$

С другой стороны, в силу разложения начальных функций в ряд

$$\langle L\dot{u}^l(0), \varphi_k\rangle \to \langle Lu_1, \varphi_k\rangle.$$

Таким образом, для всех k имеем

$$\langle L\dot{u}(0), \varphi_k\rangle = \langle Lu_1, \varphi_k\rangle.$$

Таким образом, функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям, т.е. является решением. $\square$

5. Теорема единственности.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *и леммы* 5 *решение задачи* (1)–(3) *единственно.*

Доказательство. Пусть u и v — два различных решения задачи (1)–(3); введем обозначение $w = u - v$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$Lw_{tt} - \alpha^2 \Delta w = v^3 - u^3, \tag{26}$$

а условия Шоуолтера—Сидорова преобразуются к виду

$$Lw(x,0) = 0, \quad Lw_t(x,0) = 0, \quad w \in \Omega. \tag{27}$$

Аналогично предыдущему разделу преобразуем уравнение (26), однако вместо стандартных норм пространств L_2 и H_0^1 будем использовать им эквивалентные, определенные формулами

$$|\dot{w}|^2_{L^2(\Omega)} = \langle L\dot{w}, \dot{w}\rangle, \quad |w|^2_{H_0^1} = \langle \alpha^{-2}\nabla w, \nabla w\rangle.$$

Получим

$$\frac{d}{dt}\left[|\dot{w}|^2_{L^2} + |w|^2_{H_0^1}\right] = 2\langle (v)^3 - (u)^3, \dot{w}^m\rangle. \tag{28}$$

Очевидно,

$$2\langle v^3 - u^3, \dot{w}^m\rangle \leqslant 6\int\limits_\Omega \sup(|u|^2, |v|^2)|w||\dot{w}|dx.$$

Используя неравенство Гёльдера, оценим правую часть предыдущего неравенства:

$$\int\limits_\Omega \sup(|u|^2, |v|^2)|w||\dot{w}|dx \leqslant C(\||u|^2\|_{L^4} + \||v|^2\|_{L^4})\|w\|_{L^4}\|\dot{w}\|_{L^2}.$$

Далее используя теоремы вложения и свойства нормы, получим оценку

$$C\Big(\||u|^2\|_{L^4} + \||v|^2\|_{L^4}\Big)\|w\|_{L^4}|\dot{w}|_{L^2} \leqslant C\Big(|u|^2_{L^4} + |v|^2_{L^4}\Big)|w|_{H_0^1}|\dot{w}|_{L^2} \leqslant$$
$$\leqslant C|w|_{H^1}|\dot{w}|_{L^2} \leqslant 2C(|w|^2_{H_0^1} + |\dot{w}|^2_{L^2}).$$

Тогда (28) приводит к неравенству

$$\left[|\dot{w}|^2_{L^2} + |w|^2_{H_0^1}\right] \leqslant 2C\int\limits_0^t (|w|^2_{H_0^1} + |\dot{w}|^2_{L^2})ds,$$

откуда в силу леммы 4 имеет место равенство $|\dot{w}|^2_{L^2} + |w|^2_{H_0^1} = 0$. Следовательно, $w \equiv 0$. Таким образом, $u \equiv v$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Д. Г., Хабахпашев Г. А.* Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах// Письма в ЖЭТФ. — 2011. — *39*, № 8. — С. 469–472.
2. *Богатырева Е. А., Манакова Н. А.* Численное моделирование процесса неравновесной противоточной капиллярной пропитки// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — *56*, № 1. — С. 125–132.
3. *Замышляева А. А.* Математические модели соболевского типа высокого порядка// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. прогр. — 2014. — *7*, № 2. — С. 5–28.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
5. *Манакова Н. А., Богатырева Е. А.* О решении задачи Дирихле—Коши для уравнения Баренблатта—Гильмана// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2014. — *7*. — С. 52–60.
6. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.

7. *Свиридюк Г. А.* О разрешимости сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений// Диффер. уравн. — 1987. — *23*, № 9. — С. 1637–1639.
8. *Свиридюк Г. А., Загребина С. А.* Задача Шоуолтера—Сидорова как феномен уравнений соболевского типа// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2010. — *3*, № 1. — С. 104–125.
9. *Свиридюк Г. А., Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 2. — С. 252–260.
10. *Свиридюк Г. А., Сукаева Т. Г.* Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева// Диффер. уравн. — 1990. — *26*, № 2. — С. 250–258.
11. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
12. *Чистяков В. Ф., Чистякова Е. В.* Применение метода наименьших квадратов для решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений// Сиб. ж. вычисл. мат. — 2013. — *16*, № 1. — С. 81–95.
13. *Bogolubsky I. L.* Some examples of inelastic soliton interaction// Comput. Phys. Commun. — 1977. — *13*, № 2. — P. 49–55.
14. *Bychkov E. V., Zamyshlyaeva A. A.* Numerical solution of Showalter–Sidorov and Cauchy problems of ion-acoustic waves propagation mathematical model// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*, № 1. — 012001.
15. *Clarcson P. A., LeVeque R. J., Saxton R.* Solitary wave interactions in elastic rods// Stud. Appl. Math. — 1986. — *75*, № 1. — P. 95–122.
16. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. — New York–London–Sydney: Wiley, 1964.
17. *Keller A. V.* On the computational efficiency of the algorithm of the numerical solution of optimal control problems for models of Leontieff type// J. Comput. Eng. Math. — 2015. — *2*, № 2. — P. 39–59.
18. *Shafranov D. E., Kitaeva O. G.* The Barenblatt–Zheltov–Kochina model with the Showalter–Sidorov condition and additive white noise in spaces of differential forms on Riemannian manifolds without boundary// Global Stochast. Anal. — 2018. — *5*, № 2. — P. 145–159.
19. *Showalter R. E.* The Sobolev equation, I// Appl. Anal. — 1975. — *5*, № 1. — P. 15–22.
20. *Showalter R. E.* The Sobolev equation, II// Appl. Anal. — 1975. — *5*, № 2. — P. 81–89.
21. *Wang S., Chen G.* Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *274*. — P. 846–866.
22. *Xu Runzhang, Liu Yacheng* Global existence and blow-up of solutions for generalized Pochhammer–Chree equations// Acta Math. Sci. — 2010. — *30*, № 5. — P. 1793–1807.
23. *Zamyshlyaeva A. A., Lut A. V.* Numerical investigation of the Boussinesq–Love mathematical models on geometrical graphs// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. прогр. — 2017. — *10*, № 2. — С. 137–143.
24. *Zamyshlyaeva A. A., Manakova N. A., Tsyplenkova O. N.* Optimal control in linear Sobolev type mathematical models// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. прогр. — 2020. — *13*, № 1. — С. 5–27.
25. *Zhang W, Ma W.* Explicit solitary wave solutions to generalized Pochhammer–Chree equations// Appl. Math Mech. — 1999. — *20*, № 6. — P. 625–632.

Бычков Евгений Викторович
Южно-Уральский государственный университет
E-mail: `bychkovev@susu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 20–28
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-20-28

УДК 517.956

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ КОВАРИАНТНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В $\mathbb{R}^3$

© 2022 г. **Ю. П. ВИРЧЕНКО, А. Э. НОВОСЕЛЬЦЕВА**

Аннотация. Рассмотрен класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ систем квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Такие системы $\dot{\boldsymbol{u}} = \mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$ описывают изменение со временем $t \in \mathbb{R}$ векторных полей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Класс $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ состоит из всех систем, инвариантных относительно трансляций времени $t \in \mathbb{R}$ и пространства $\mathbb{R}^3$, а также преобразующихся ковариантным образом при вращении $\mathbb{R}^3$. Дается описание этого класса нелинейных дифференциальных операторов L первого порядка, действующих в функциональном пространстве $C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, которые являются генераторами эволюции таких систем. Найдено необходимое и достаточное условие того, что оператор L из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ порождает гиперболическую систему.

Ключевые слова: дифференциальный оператор первого порядка, квазилинейная система уравнений, гиперболичность, векторное поле, ковариантность, сферическая симметрия.

HYPERBOLIC FIRST-ORDER COVARIANT EVOLUTION EQUATIONS FOR VECTOR FIELDS IN $\mathbb{R}^3$

© 2022 **Yu. P. VIRCHENKO, A. E. NOVOSELTSEVA**

Abstract. The class $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ of systems of first-order quasilinear partial differential equations is considered. Such systems $\dot{\boldsymbol{u}} = \mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$ describe the evolution of vector fields $\boldsymbol{u}(\ boldsymbolx, t)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ in time $t \in \mathbb{R}$. The class $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ consists of all systems that are invariant under translations in time $t \in \mathbb{R}$ and space $\mathbb{R}^3$ and are covariant under rotations of $\mathbb{R}^3$. We describe the class of first-order nonlinear differential operators L acting in the functional space $C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ that are evolution generators of such systems. We obtain a necessary and sufficient condition for the operator $\mathsf{L} \in \mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ to generate a hyperbolic system.

Keywords and phrases: first-order differential operator, quasilinear system, hyperbolicity, vector field, covariance, spherical symmetry.

AMS Subject Classification: 35F60

1. Введение. В этой статье мы продолжаем начатое нами в предыдущих работах исследование специальных бесконечномерных динамических систем, описывающих эволюцию полей на $\mathbb{R}^3$ (см. вышедшие к настоящему времени работы [2–6,14]). Эти динамические системы выделены тем, что они обладают фундаментальными физическими симметриями, что обуславливает возможность их применения в математической физике с точки зрения описания динамики конденсированных сред. В настоящей работе мы рассматриваем эволюционное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t) = (\mathsf{L}[\boldsymbol{u}])(\boldsymbol{x}, t), \tag{1}$$

в функциональном пространстве $C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ локально непрерывно дифференцируемых полей на $\mathbb{R}^3$, описывающих изменение со временем $t \in \mathbb{R}$ векторных полей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, то есть уравнения, которым подчинены функции $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$. Здесь и далее точка, поставленная над функцией, обозначает частную производную по t, а генератор эволюции $\mathsf{L}[\cdot]$ в (1) обозначает оператор, действующий в пространстве $C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Так как векторы $\boldsymbol{u} = \langle u_j; j \in \{1,2,3\}\rangle$ в $\mathbb{R}^3$ бывают двух различных типов: полярные и аксиальные, то, соответственно, векторные поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \langle u_j(\boldsymbol{x},t); j \in \{1,2,3\}\rangle$ на $\mathbb{R}^3$ также подразделяются на два типа: полярные и аксиальные (псевдовекторные), в зависимости от типа значений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, принимаемых функциями $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$. Далее мы изучаем динамические системы, связанные с полярными векторными полями.

В связи с тем, что генератор эволюции осуществляет отображение $\mathsf{L}[\cdot]\colon C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \mapsto C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, то он, естественным образом, разлагается на декартовы компоненты $\mathsf{L}[\cdot] = \langle \mathsf{L}_j[\cdot]; j \in \{1,2,3\}\rangle$, согласно декартовым компонентам $u_j(\boldsymbol{x},t)$; $j \in \{1,2,3\}$, векторных полей в левой части (1). Каждая такая компонента осуществляет отображение $\mathsf{L}_j[\cdot]\colon C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \mapsto C_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $j \in \{1,2,3\}$.

Далее, мы будем считать, что компоненты $\mathsf{L}_j[\cdot]$, $j \in \{1,2,3\}$, полностью определяющие генератор $\mathsf{L}[\cdot]$ в уравнении (1), имеют вид

$$(\mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}])(\boldsymbol{x},t) = (a_{jkl}\nabla_k u_l + H_j)(\boldsymbol{x},t), \quad j \in \{1,2,3\}, \tag{2}$$

где коэффициенты a_{jkl} и слагаемые H_j представляют собой значения в точке $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ непрерывных на $\mathbb{R}^3$ функций $a_{jkl} \equiv a_{jkl}(\boldsymbol{u})$, $H_j \equiv H_j(\boldsymbol{u})$; $j,k,l \in \{1,2,3\}$. Кроме того, в формуле (2) и далее в работе посредством ∇_k обозначены дифференциальные операторы $\partial/\partial x_k$, $k \in \{1,2,3\}$ и, таким образом, $\nabla_k u_l \equiv \partial u_l(\boldsymbol{x})/\partial x_k$, $k,l \in \{1,2,3\}$. Наконец, в этой формуле и далее во всех математических выражениях работы предполагается, что наличие в них повторяющихся парным образом индексов указывает на присутствие в этих формулах суммирования по каждому из таких индексов, по всем возможным для них значениям 1, 2, 3.

Таким образом, в терминах декартовых компонент $\mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}]$, $j \in \{1,2,3\}$, уравнение (1) представляет собой систему квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u_j(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{jkl}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t))\frac{\partial u_l(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_k} + H_j(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)), \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{3}$$

Мы будем далее рассматривать класс систем уравнений (3), подчиненных дополнительным требованиям, которые мы опишем в следующем разделе. Целью же исследования настоящей работы является нахождение необходимых и достаточных условий гиперболичности системы из этого класса. Эти условия формулируются в виде ограничений на коэффициенты $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$.

2. Системы класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Дополнительное ограничение, накладываемое на рассматриваемые в настоящей работе системы квазилинейных уравнений, состоит в использовании таких генераторов $\mathsf{L}[\cdot]$ в уравнении (1), которые обладают ковариантностью по отношению к преобразованиям группы $\mathbb{O}_3$ на пространстве $\mathbb{R}^3$.

Заметим, прежде всего, что уравнения (1) с генераторами вида (2) обладают свойствами однородности при трансляциях времени и пространства $\mathbb{R}^3$, так как коэффициенты $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ и функции $H_j(\boldsymbol{u})$ не зависят явно от времени $t \in \mathbb{R}$ и вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. В этом случае уравнение (1) инвариантно относительно трансляций времени $t \Rightarrow t+s$, $s \in \mathbb{R}$ и пространства $\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$.

Группа $\mathbb{O}_3$ состоит из ортогональных 3×3-матриц $\mathcal{A}$, то есть таких, которые обладают свойством $\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^T\mathcal{A} = \mathcal{I}$. Обозначим посредством $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\cdot]$ дифференциальный оператор, который получается в результате преобразования оператора $\mathsf{L}[\cdot]$ матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$. Так как $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ — векторное поле, то при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ его значения в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ преобразуются в $(\mathcal{A}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x},t)$. В этом случае требование ковариантности уравнения (1) означает, что оператор $\mathsf{L}[\cdot]$ обладает свойством $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\mathcal{A}\boldsymbol{u}] = \mathcal{A}\mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$.

Выясним те ограничения, которые накладывает сформулированное свойство ковариантности на дифференциальный оператор первого порядка.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (1) *с генератором* $\mathsf{L}[\cdot]$, *определенным формулой* (2), *удовлетворяло условию ковариантности, необходимо и достаточно, чтобы при преобразовании* *этого уравнения матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$ набор $H_j(\boldsymbol{u})$, $j \in \{1,2,3\}$, и алгебраический объект* [1] *третьего ранга $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ преобразовывались в фиксированной точке $\langle \boldsymbol{x}, t\rangle \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, соответственно, как вектор и тензор третьего ранга.*

Доказательство. Ввиду того, что набор $\dot{u}_j(\boldsymbol{x},t)$, $j \in \{1,2,3\}$, в фиксированной точке $\langle \boldsymbol{x}, t\rangle$ представляет вектор в $\mathbb{R}^3$, то набор компонент с $j \in \{1,2,3\}$ выражения в правой части (1) также составляет вектор по отношению к преобразованиям матрицами $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$. Далее, так как набор компонент векторного поля $u_j(\boldsymbol{x},t)$, $j \in \{1,2,3\}$, и матрица производных $\nabla_k u_l(\boldsymbol{x},t)$, $k,l \in \{1,2,3\}$, являются независимыми функциями, то независимыми являются функции, представляемые первым и вторым слагаемым в правой части уравнения. Поэтому каждое из этих слагаемых представляет собой компоненты вектора. Таким образом, набор $H_j(\boldsymbol{u})$, $j \in \{1,2,3\}$, представляет компоненты вектора в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим первое слагаемое. Матрица производных $\nabla_k u_l(\boldsymbol{x})$, $k,l \in \{1,2,3\}$, представляет тензор второго ранга, ковариантный по индексу l и контравариантный по индексу k. В самом деле, преобразуя матрицу производных в фиксированной точке $\boldsymbol{x}$ посредством матрицы $(\mathcal{A})_{jk} = A_{jk}$, $(\mathcal{A}^{-1})_{jk} = A_{kj}$, при учете указанного выше соглашения о суммировании по парным индексам, находим

$$A_{k'k}A_{ll'}\frac{\partial u_{l'}(\boldsymbol{x})}{\partial x_{k'}} = (\mathcal{A}^{-1})_{kk'}(\mathcal{A})_{ll'}\frac{\partial u_{l'}(\boldsymbol{x})}{\partial x_{k'}} = \frac{\partial(\mathcal{A}\boldsymbol{u})_l(\boldsymbol{x})}{\partial(\mathcal{A}\boldsymbol{x})_k} = \frac{\partial u'_l(\boldsymbol{x})}{\partial x'_k} \equiv \nabla'_k u'_l,$$

что доказывает указанное положение.

Преобразование набора, представленного первым векторным слагаемым в уравнении (2), матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$ приводит его к виду

$$\begin{aligned} A_{jj'}a_{j'mn}\nabla_m u_n(\boldsymbol{x}) &= A_{jj'}a_{j'k'l'}\delta_{k'm}\delta_{l'n}\nabla_m u_n(\boldsymbol{x}) = \\ &= A_{jj'}A_{k'k}A_{ll'}a_{j'k'l'}(A_{mk}A_{ln}\nabla_m u_n(\boldsymbol{x})) = \\ &= A_{jj'}A_{k'k}A_{ll'}a_{j'k'l'}\nabla'_k u'_l(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

С другой стороны, в преобразованной посредством матрицы $\mathcal{A}$ системе координат это слагаемое согласно определению ковариантности должно иметь вид $a'_{jkl}\nabla'_k u'_l$. Сравнивая два полученных выражения при учете произвольности матрицы производных $\nabla'_k u'_l$, получаем равенство

$$a'_{jkl} = A_{jj'}A_{k'k}A_{ll'}a_{j'k'l'}.$$

Отсюда следует, что алгебраический объект a_{jkl}, $j,k,l \in \{1,2,3\}$, преобразуется как тензор третьего ранга, который ковариантен по первому и третьему индексам и контравариантен по второму. Таким образом, необходимость сформулированного в утверждении теоремы условия доказана. Достаточность же его очевидна. $\square$

В дальнейшем, для простоты изложения, мы не делаем различая между ковариантными и контравариантными векторами и тензорами.

Частным случаем систем уравнений (1) являются системы, у которых оператор (2) имеет вид

$$(\mathsf{L}_j[\boldsymbol{u}])(\boldsymbol{x},t) = (\nabla_k S_{jk}(\boldsymbol{u}) + H_j)(\boldsymbol{x},t), \quad j \in \{1,2,3\}, \tag{4}$$

где $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ — непрерывно дифференцируемая тензор-функция на $\mathbb{R}^3$. Ввиду функциональной независимости тензор-функции $\nabla_k u_l$ от вектор-функции $\boldsymbol{u}$ из равенства

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial u_l}\nabla_k u_l = 0$$

следует $\partial S_{jk}/\partial u_l = 0$, то есть функция $S_{jk}(\boldsymbol{u})$ определена однозначно с точностью до произвольной постоянной матрицы. Такие системы мы будем называть системами *дивергентного типа*. Очевидно, что можно установить связь между тензор-функциями $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ и $S_{jk}(\boldsymbol{u})$:

$$\frac{\partial S_{jk}(\boldsymbol{u})}{\partial u_l} = a_{jkl}(\boldsymbol{u}), \quad j,k,l \in \{1,2,3\}. \tag{5}$$

[1] Здесь мы используем терминологию монографии [12].

В связи со сформулированным свойством ковариантности уравнения (1), возникает важная, с точки зрения физических приложений, задача об описании класса систем дифференциальных уравнений, обладающих этим свойством. Вследствие доказанной теоремы, такое описание сводится к описанию всех тензор-функций $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ и вектор-функций $H_j(\boldsymbol{u})$.

Описание тензор-функции $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ дается в терминах разложения

$$a_{jkl}(\boldsymbol{u}) = \sum_{s=1}^{N} f^{(s)} a^{(s)}_{jkl}(\boldsymbol{u}), \tag{6}$$

где набор $\{a^{(s)}_{jkl}(\boldsymbol{u});\ s = 1 \div N\}$ составляет т. н. *целый рациональный базис* форм-инвариантных тензор-функций (см. [13]) или, в другой терминологии (см. [8]), комитантов. Этим базисным функциям соответствует набор $\{f^{(s)};\ s = 1 \div N\}$, который состоит из произвольных непрерывных функций, зависящих от набора алгебраически независимых инвариантов группы $\mathbb{O}_3$. Таким образом, решение указанной выше задачи состоит в построении целого рационального базиса вместе с определением его размерности N и нахождении набора независимых инвариантов.

Класс дифференциальных операторов $\mathsf{L}[\cdot]$, обладающих свойством ковариантности, будем далее обозначать так же, как и класс соответствующих им систем уравнений, посредством $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$.

В случае систем дивергентного типа с генератором эволюции (4), их описание дается в терминах разложения

$$S_{jk}(\boldsymbol{u}) = \sum_{s=1}^{N_d} g^{(s)} S^{(s)}_{jk}(\boldsymbol{u}), \tag{7}$$

на основе *целого рационального базиса* $\left\{S^{(s)}_{jk}(\boldsymbol{u}); s = 1 \div N_d\right\}$ форм-инвариантных функций, представляющих тензоры второго ранга, и соответствующего набора $\{g^{(s)};\ s = 1 \div N\}$ непрерывных функций от того же самого набора инвариантов. Таким образом, описание таких систем состоит в построении целого рационального базиса для тензоров второго ранга с размерностью N_d.

Укажем решение описанной задачи в т. н. сферически симметричном случае, когда набор образующих тензорной алгебры, в рамках которой строится целый рациональный базис, состоит из универсального инвариантного тензора второго ранга $\boldsymbol{\delta}$ — символа Кронекера с компонентами $\delta_{jk} = \{1, j = k; 0, j \neq k\}$ и вектора $\boldsymbol{u}$, а набор инвариантов представляется единственным инвариантом вектора $\eta \equiv \boldsymbol{u}^2$. В этом случае все допустимые вектор-функции $H_j(\boldsymbol{u})$ даются формулой $H_j(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}h(\eta)$, где $h(\cdot)$ — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

На основе указанных выше образующих элементов тензорной алгебры можно построить только лишь два линейно независимых тензора второго ранга, которые являются мономами относительно операций тензорного умножения и свертки, а именно их компоненты даются выражениями δ_{jk} и $u_j u_k$, $j, k \in \{1, 2, 3\}$, которые представляют тензоры второго ранга и которые составляют целый рациональный базис для разложения (7). Точно так же убеждаемся, что имеется только лишь четыре линейно независимых монома, которые представляют тензоры третьего ранга: $\delta_{jk}u_l$, $\delta_{kl}u_j$, $\delta_{jl}u_k$ и $u_j u_k u_l$, $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Они составляют целый рациональный базис в разложении (6). Заметим, что недопустимо использование в качестве образующей тензорной алгебры символ Леви-Чивиты ε_{jkl}, так как он является псевдотензором и поэтому на его основе невозможно построение тензоров в отсутствие аксиального вектора среди образующих тензорной алгебры.

Таким образом, мы получаем, что $N = 4$ и $N_d = 2$ и разложение (6) и (7), соответственно, принимают вид

$$a_{jkl}(\boldsymbol{u}) = f^{(1)}\delta_{jk}u_k + f^{(2)}\delta_{kl}u_j + f^{(3)}\delta_{jl}u_k + f^{(4)}u_j u_k u_l, \tag{8}$$

$$S_{jk}(\boldsymbol{u}) = g^{(1)}\delta_{jk} + g^{(2)}u_j u_k \tag{9}$$

с непрерывными функциями $f^{(s)} \equiv f^{(s)}(\eta)$, $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $g^{(s)} \equiv g^{(s)}(\eta)$, $s \in \{1, 2\}$ от единственного инварианта $\eta = \boldsymbol{u}^2$.

Выпишем список линейно независимых дифференциальных операторов первого порядка $a^{(s)}_{jkl}(\boldsymbol{u})\nabla_k u_l$, $s \in \{1, 2, 3, 4\}$, соответствующих элементам целого рационального базиса. Нумерация элементов из этого списка соответствует указанному выше порядку элементов базиса:

$$(\boldsymbol{u}, \nabla_j \boldsymbol{u}), \quad u_j(\nabla, \boldsymbol{u}), \quad (\boldsymbol{u}, \nabla) u_j, \quad u_j(\boldsymbol{u}, (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}). \tag{10}$$

Соответственно общий вид уравнений из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ дается формулой

$$\dot{u}_j = f^{(1)}(\boldsymbol{u}, \nabla_j \boldsymbol{u}) + f^{(2)} u_j(\nabla, \boldsymbol{u}) + f^{(3)}(\boldsymbol{u}, \nabla) u_j + f^{(4)} u_j(\boldsymbol{u}, (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}) + u_j h, \tag{11}$$

где круглыми скобками обозначена операция скалярного умножения заключенных в них векторов. Сформулируем полученный результат в виде отдельного утверждения.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (1) *квазилинейных уравнений первого порядка с оператором* (2) *принадлежала классу* $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ *ковариантных уравнений для векторного поля* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ *на* $\mathbb{R}^3$, *необходимо и достаточно, чтобы она имела вид* (11) *с коэффициентами* $f^{(m)}(\boldsymbol{u}^2)$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ *и* $h(\boldsymbol{u}^2)$, *представленными непрерывными функциями на* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

В частности, из (5) и (9) следует общий вид уравнений дивергентного типа из этого класса.

Следствие 1. *Для того чтобы система* (1) *квазилинейных уравнений первого порядка с оператором* (2) *принадлежала классу* $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ *ковариантных уравнений для векторного поля* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ *на* $\mathbb{R}^3$ *и при этом была системой дивергентного типа, необходимо и достаточно, чтобы она имела следующий вид*

$$\dot{u}_j = \nabla_j g^{(1)} + \nabla_k (g^{(2)} u_j u_k) + u_j h. \tag{12}$$

с коэффициентами $g^{(m)}(\boldsymbol{u}^2)$, $m \in \{1, 2\}$, *представленными непрерывно дифференцируемыми функциями, и непрерывной функцией* $h(\boldsymbol{u}^2)$ *на* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

На основе формулы (5) для коэффициентов $a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ в случае, если уравнение (1) является уравнением дивергентного типа, находим

$$\nabla_k S_{jk} = 2 g^{(1)\prime} \nabla_j u_l + 2 g^{(2)\prime} u_j u_k u_l + g^{(2)} (\delta_{jl} u_k + \delta_{kl} u_j) \nabla_k u_l,$$

где штрих указывает производную по η и поэтому

$$a_{jkl}(\boldsymbol{u}) = 2 g^{(1)\prime} \delta_{jk} u_l + 2 g^{(2)\prime} u_j u_k u_l + g^{(2)} (\delta_{jl} u_k + \delta_{kl} u_j).$$

Сравнение этого разложения с (8) дает следующие связи между коэффициентами

$$2(g^{(1)})' = f^{(1)}, \quad g^{(2)} = f^{(2)} = f^{(3)}, \quad 2(g^{(2)})' = f^{(4)}. \tag{13}$$

В частности, совместность выражений для $f^{(s)}$, $s \in \{2, 3, 4\}$, является критерием того, что уравнение (1) с оператором (2) является уравнением дивергентного типа.

Приведем пример простейшего приложения результата, сформулированного в Теореме 2. Поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ назовем унимодальным, если оно подчинено условию $\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x}, t) = u^2 = \mathrm{const}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы система квазилинейных уравнений первого порядка для унимодального векторного поля* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ *на* $\mathbb{R}^3$ *с оператором* (2) *принадлежала классу* $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ *ковариантных уравнений, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$\dot{u}_j = \gamma (\boldsymbol{u}, \nabla) u_j, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Доказательство. При выполнении условия $\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x}, t) = u^2$ в уравнении (11), очевидным образом, исчезают слагаемые с коэффициентами $f^{(1)}$ и $f^{(4)}$, ввиду тождеств $(\boldsymbol{u}, \nabla_j \boldsymbol{u}) = \nabla_j \boldsymbol{u}^2/2$, $(\boldsymbol{u}, (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}^2/2$. Далее, при этом условии все коэффициенты $f^{(m)}$, $m \in \{2, 3\}$, и функция h становятся постоянными. Тогда, умножая скалярно обе части (14) на $u_j(\boldsymbol{x}, t)$ и учитывая, что $u_j \dot{u}_j = \dot{u}^2/2 = 0$ и $u_j (\boldsymbol{u}, \nabla) u_j = (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}^2/2 = 0$ для унимодального поля, получаем равенство

$$f^{(2)} u^2 (\nabla, \boldsymbol{u}) + u^2 h = 0. \tag{15}$$

Так как это равенство должно выполняться тождественно для любого унимодального поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in C^3_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, то положим

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cos(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b} \sin(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}),$$

где векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}$ представляют тройку взаимно ортогональных векторов и подчинены условию $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2 = u^2$. Тогда это поле унимодально и соленоидально, то есть имеет место равенство $(\nabla, \boldsymbol{u}) = 0$. Подставляя поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ в (15), получаем, что должно иметь место $h = 0$. С другой стороны, кроме приведенного явным образом векторного поля, существуют унимодальные поля, которые не являются соленоидальными и поэтому их подстановка в (15) приводит к равенству $f^{(2)} = 0$. □

3. Гиперболичность систем квазилинейных уравнений класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$. Введем понятие гиперболической системы квазилинейных уравнений (см. [11, с. 25]). В применении к системе, определяемой уравнением (1) с оператором (2), это понятие вводится посредством сопоставления уравнению (1) линеризованного уравнения, которому подчиняется векторное поле $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \langle v_j(\boldsymbol{x}, t);\ j = 1, 2, 3\rangle$ при фиксации поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$:

$$\dot{v}_j(\boldsymbol{x}, t) = \left(a_{jkl}(\boldsymbol{u})\nabla_k v_l + \frac{\partial H_j(\boldsymbol{u})}{\partial u_l} v_l\right)(\boldsymbol{x}, t), \quad j \in \{1, 2, 3\}. \tag{16}$$

Определение 1. Уравнение (1) с оператором (2) называется гиперболическим в области $\{\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}\rangle \in \Omega : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\}$, $\boldsymbol{q} = \langle q_j; j = 1, 2, 3\rangle \in \mathbb{R}^3$, если в соответствующем ему уравнении (16) матрица $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})$ с матричными элементами $(\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}))_{jl} \equiv T_{jl}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) = q_k a_{jkl}(\boldsymbol{u})$ является диагонализуемой, все собственные числа $\omega^{(m)} \equiv \omega^{(m)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q})$, $m = 1, 2, 3$, которой вещественны. Уравнение (1) называется гиперболическим, если $\Omega = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Таким образом, условие гиперболичности уравнения (1) состоит в вещественности корней $\omega^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, кубического уравнения

$$\det(\omega - \mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})) = 0 \tag{17}$$

относительно ω.

Записывая уравнение (17) в виде

$$\det(\omega - q_l a_{jkl}(\boldsymbol{u})) = 0, \tag{18}$$

находим, что при любом вещественном $\mu \neq 0$ и $\langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}\rangle \in \Omega$, для решений ω уравнения (17) имеет место

$$\det(\omega\mu - (\mu q_l)a_{jkl}(\boldsymbol{u})) = \mu^3 \det(\omega - q_l a_{jkl}(\boldsymbol{u})) = 0,$$

то есть $\omega\mu$ является вещественным собственным числом для матрицы $\mathcal{T}(\mu\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})$.

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Область гиперболичности уравнения* (1) *инвариантна относительно умножения вектора* $\boldsymbol{q}$ *на любое число* $\mu \in \mathbb{R}$.

Для определения условий гиперболичности уравнения (11) определим соответствующую ему матрицу $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})$. На основании (8) находим ее матричные элементы $T_{jl}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) = q_k a_{jkl}(\boldsymbol{u})$:

$$T_{jl}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) = f^{(1)} q_j u_l + f^{(2)} u_j q_l + f^{(3)} \delta_{jl}\xi + f^{(4)}\xi u_j u_l, \tag{19}$$

где введено обозначение $\xi = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})$. Соответствующее линеаризованное уравнение (см. (16)) для поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ имеет вид:

$$\dot{v}_j = T_{jl}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})v_l + v_j h + 2u_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})h',$$

$$T_{jl}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})v_l \equiv f^{(1)}(\boldsymbol{u}, \nabla_j \boldsymbol{v}) + f^{(2)} u_j(\nabla, \boldsymbol{v}) + f^{(3)}(\boldsymbol{u}, \nabla)v_j + f^{(4)} u_j(\boldsymbol{u}, (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{v}).$$

В частности, для уравнения дивергентного типа (12) матрица $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u})$ определяется матричными элементами следующего вида

$$T_{jl}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) = 2g^{(1)\prime} q_j u_l + g^{(2)}(\xi\delta_{jl} + u_j q_l) + 2\xi g^{(2)\prime} u_j u_l. \tag{20}$$

На основе формулы (19) вычислим собственные числа матрицы. Представим ее в виде суммы

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}) = \xi f^{(3)}\mathcal{I} + \mathcal{P}, \tag{21}$$

где матрица $\mathcal{P}$ определяется матричными элементами

$$(\mathcal{P})_{jl} = P_{jl} = f^{(1)} q_j u_l + f^{(2)} u_j q_l + f^{(4)}\xi u_j u_l. \tag{22}$$

При этом собственные числа $\lambda^{(m)}$ матрицы $\mathcal{P}$, которые являются решениями уравнения $\det(\lambda - \mathcal{P}) = 0$, связаны с собственными числами $\omega^{(m)}$ равенством

$$\omega^{(m)} = \lambda^{(m)} + \xi f^{(3)}, \quad m \in \{1,2,3\}. \tag{23}$$

Одно из собственных чисел $\lambda^{(1)}$ матрицы $\mathcal{P}$ равно нулю. Ему соответствует собственный вектор с компонентами $\varepsilon_{lmn}u_m q_n$, $l \in \{1,2,3\}$, так как $\varepsilon_{lmn}u_l u_m q_n = \varepsilon_{lmn}u_m q_n q_l = 0$, ввиду полной антисимметрии символа ε_{lmn}. Тогда $\det\mathcal{P} = 0$ и поэтому спектральное уравнение $\det(\lambda - \mathcal{P}) = 0$ для матрицы $\mathcal{P}$ принимает вид

$$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{Sp}\mathcal{P} + \frac{1}{2}\lambda[(\operatorname{Sp}\mathcal{P})^2 - \operatorname{Sp}\mathcal{P}^2] = 0,$$

где символом Sp обозначена операция вычисления следа матрицы. Следовательно, ненулевые собственные числа матрицы $\mathcal{P}$ определяются как решения квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp}\mathcal{P} + \frac{1}{2}[(\operatorname{Sp}\mathcal{P})^2 - \operatorname{Sp}\mathcal{P}^2] = 0. \tag{24}$$

Так как $\operatorname{Sp}\mathcal{P} = \xi(f^{(1)} + f^{(2)}) + \xi\eta f^{(4)}$ и

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}^2)_{jl} = P_{jk}P_{kl} = (f^{(1)}q_j u_k + f^{(2)}u_j q_k + f^{(4)}\xi u_j u_k)(f^{(1)}q_k u_l + f^{(2)}u_k q_l + f^{(4)}\xi u_k u_l) =\\ = q_j u_l \xi f^{(1)}(f^{(1)} + f^{(4)}\eta) + u_j q_l \xi f^{(2)}(f^{(2)} + f^{(4)}\eta) +\\ + u_j u_l(f^{(1)}f^{(2)}\zeta + f^{(1)}f^{(4)}\xi^2 + f^{(2)}f^{(4)}\xi^2 + (f^{(4)})^2\xi^2\eta) + q_j q_l f^{(1)}f^{(2)}\eta,\end{aligned}$$

где $\zeta \equiv \boldsymbol{q}^2$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp}\mathcal{P}^2 = \xi^2 f^{(1)}(f^{(1)} + f^{(4)}\eta) + \xi^2 f^{(2)}(f^{(2)} + f^{(4)}\eta) +\\ + \eta(f^{(1)}f^{(2)}\zeta + (f^{(1)} + f^{(2)})f^{(4)}\xi^2 + (f^{(4)})^2\xi^2\eta) + f^{(1)}f^{(2)}\zeta\eta =\\ = 2f^{(1)}f^{(2)}\eta\zeta + \xi^2((f^{(1)})^2 + (f^{(2)})^2 + 2f^{(4)}(f^{(1)} + f^{(2)})\eta + (f^{(4)})^2\eta^2) =\\ = 2f^{(1)}f^{(2)}\eta\zeta + \xi^2[(f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(4)}\eta)^2 - 2f^{(1)}f^{(2)}] = \xi^2(\operatorname{Sp}\mathcal{P})^2 + 2f^{(1)}f^{(2)}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2\end{aligned}$$

и поэтому

$$\frac{1}{2}[\operatorname{Sp}\mathcal{P}^2 - (\operatorname{Sp}\mathcal{P})^2] = f^{(1)}f^{(2)}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2,$$

где использовано обозначение векторного произведения векторов $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]$ пары векторов. Следовательно, уравнение (24) принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp}\mathcal{P} - f^{(1)}f^{(2)}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2 = 0.$$

Таким образом, ненулевые собственные числа матрицы $\mathcal{P}$ даются формулой

$$\lambda^{(m)} = \frac{1}{2}[(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})(f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(4)}\eta) \pm ((\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})^2(f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(4)}\eta)^2 + 4f^{(1)}f^{(2)}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2)^{1/2}], \tag{25}$$

$m \in \{2,3\}$.

Для вещественности собственных чисел $\omega^{(m)}$, согласно (23), необходима и достаточна вещественность чисел $\lambda^{(m)}$, $m \in \{1,2,3\}$, что имеет место в том и только в том случае, если

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})^2(f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(4)}\eta)^2 + 4f^{(1)}f^{(2)}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}]^2 \geqslant 0.$$

Для того чтобы это условие выполнялось для всех векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{q}$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f^{(1)}(\eta)$ и $f^{(2)}(\eta)$ удовлетворяли условию $f^{(1)}(\eta)f^{(2)}(\eta) \geqslant 0$. Необходимость этого условия следует из возможности выбора векторов ортогональными друг другу.

Так как при наличии трех различных собственных чисел матрица $\mathcal{P}$ диагонализируема, то матрица $\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$ также диагонализируема. Если же имеет место $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}] = 0$, либо $f^{(1)}f^{(2)} = 0$, то появляется второе нулевое решение спектрального уравнения (24). Однако, несмотря на кратность нулевого решения, ему отвечают два взаимно ортогональных собственных вектора, один из которых равен $\varepsilon_{lmn}q_m u_n$, а второй находится в плоскости векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{q}$. Следовательно, и в этом вырожденном случае матрица $\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$ диагонализируема вместе с матрицей $\mathcal{P}$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 5. *Гиперболичность ковариантного уравнения* (1) *с оператором* $\mathsf{L}[\cdot]$ *в форме, определяемой* (2) *и* (8), *имеет место тогда и только тогда, когда* $f^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)f^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) \geqslant 0$.

Следствие 2. *Гиперболичность ковариантного уравнения* (1) *с оператором* $\mathsf{L}[\cdot]$ *дивергентного типа в форме, определяемой* (4) *и* (9), *имеет место тогда и только тогда, когда* $[g^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)]'g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) \geqslant 0$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулами связи (13) между функциями $f^{(m)}$ и $g^{(m)}$, $m \in \{1,2\}$. $\square$

Замечание 1. Уравнение с оператором дивергентного типа было исследовано нами, с точки зрения гиперболичности, ранее в [1] на основе другой техники, однако остался неисследованным вырожденный случай $[g^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)]'g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) = 0$. Кроме того, в этой работе не рассматривался «исключительный» случай, при котором $2[g^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)]' + g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) = 0$. В этом случае, очевидно, с точки зрения Следствия 2 уравнение не является гиперболическим, так как $[g^{(1)}(\boldsymbol{u}^2)]'g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2) = -[g^{(2)}(\boldsymbol{u}^2)]^2/2 < 0$.

4. Заключение. Задача, решению которой посвящена работа, имеет важное значение для математической физики. Она является частным случаем общей проблемы, связанной с разработкой физически обоснованных математических методов, направленных на конструирование адекватных эволюционных уравнений для описания изменения со временем макроскопических состояний сложным образом устроенных конденсированных сред. Такие уравнения должны удовлетворять фундаментальным, с физической точки зрения, принципам симметрии относительно пространственных и временных трансляций и относительно вращений пространства погружения среды.

В настоящей работе представлен, по нашему мнению, окончательный ответ на вопрос, каким образом должно выглядеть эволюционное уравнение в том случае, когда полное описание макроскопического состояния среды осуществляется посредством векторного поля (полярного), но при этом произведено пренебрежение протекающими в среде физическими диссипативными процессами. В этом направлении очень важно продолжить изучение квазилинейных систем первого порядка с точки зрения их гиперболичности, которые являются ковариантными в смысле определения, данного в настоящей работе. На следующем шаге важно описать класс возможных гиперболических ковариантных систем уравнений в том случае, когда ее состояние описывается (связанной) парой векторных полей. В частности, с теоретической точки зрения важно выделить среди этого класса эволюционных уравнений такие, которые являются гамильтоновыми, например, в смысле работ [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вирченко Ю. П., Новосельцева А. Э.* Гиперболические уравнения первого порядка в $\mathbb{R}^3$// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021). — Воронеж: ВГУ, 2021. — С. 81.
2. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *170*. — С. 15–30.
3. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Математические задачи конструирования эволюционных уравнений динамики конденсированных сред// Мат. Междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (Стерлитамак, 25-29 июня 2018 г.). — Уфа: БашГУ, 2018. — С. 262–264.
4. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Уравнения динамики конденсированных сред с локальным законом сохранения// Мат. V Междунар. науч. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 4-7 декабря 2018 г.). — Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2018. — С. 59.
5. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля// Мат. IV Всеросс. науч.-практ. конф. «Современные проблемы физико-математических наук». Часть 1 (Орёл, 22-25 ноября 2018 г.). — Орёл: ОГУ им. И. С. Тургенева, 2018. — С. 83–86.

6. *Вирченко Ю. П., Субботин А. В.* Ковариантные дифференциальные операторы первого порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *187*. — С. 19–30.
7. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1979.
8. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
9. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* О гамильтоновом подходе к динамике сплошных сред// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 2. — С. 283–296.
10. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией// Физ. элемент. частиц атом. ядра. — 1996. — *27*, № 2. — С. 431–492.
11. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
12. *Mac-Connell A. J.* Application of Tensor Analysis. — New York: Dover, 1957.
13. *Spencer A. G. M.* Theory of invariants// in: Continuum Physics, I. Part III (*Eringen A. C.*, ed.). — New York: Academic Press, 1971. — P. 239–353.
14. *Virchenko Yu. P. Subbotin A. V.* The class of evolutionary ferrodynamic equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — *44*, № 15. — P. 11913–11922.

Вирченко Юрий Петрович
Белгородский государственный университет
E-mail: virch@bsu.edu.ru

Новосельцева Алина Эдуардовна
Белгородский государственный технологический университет
E-mail: novoseltseva@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 29–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-29-36

УДК 517.956.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА

© 2022 г. **И. В. ДЕНИСОВ**

Аннотация. Представлен обзор результатов по развитию метода угловых пограничных функций для нелинейных уравнений. В прямоугольнике рассматривается сингулярно возмущенное параболическое уравнение

$$\epsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\epsilon)$$

с краевыми условиями первого рода. Функция F предполагается нелинейной по переменной u. Наиболее подробно исследован случай, когда в угловых точках прямоугольника функция F является квадратичной или кубической относительно переменной u. Исследуется возможность построения полного асимптотического разложения решения задачи при $\epsilon\to 0$.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC EQUATIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE FIRST KIND

© 2022 **I. V. DENISOV**

Abstract. This paper is a review of applications of the method of angular boundary functions to nonlinear equations. We consider the first boundary-value problem for the following singularly perturbed parabolic equation in a rectangle:

$$\epsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\epsilon),$$

where the function F is nonlinear with respect to the variable u. We consider the case where the function F is quadratic or cubic in the variable u at the corner points of the rectangle and examine the possibility of constructing a complete asymptotic expansion of the solution of the problem as $\epsilon\to 0$.

Keywords and phrases: boundary layer, asymptotic approximation, singularly perturbed equation.

AMS Subject Classification: 34E10

1. Введение. В области $\Omega \coloneqq \{(x,t)\mid 0<x<1,\ 0<t<T\}$ переменных (x,t) рассматривается сингулярно возмущенное параболическое уравнение

$$\epsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\epsilon),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0,\epsilon)=\phi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{2}$$

и краевыми условиями первого рода

$$u(0,t,\epsilon)=\psi_1(t),\quad u(1,t,\epsilon)=\psi_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3}$$

Область Ω представляет собой прямоугольник, его граница не является гладкой кривой и содержит так называемые угловые точки. В этом случае для построения асимптотического разложения решения задачи (1)–(3) используется метод угловых пограничных функций, предложенный В. Ф. Бутузовым в [1]. Для задач (1)–(3) этот метод позволил исследовать случай, когда функция F является линейной относительно переменной u (см. [2]). В нелинейном случае возникали трудности, связанные с разрешимостью дифференциальных уравнений того же типа, что и исходное нелинейное уравнение (1). Этих проблем удавалось избегать при замене условий (3) на краевые условия второго рода, что снимало необходимость рассмотрения нелинейных параболических уравнений.

В нелинейном случае исследование задач (1)–(3) впервые было проведено в [7], где предполагалось, что в угловых точках прямоугольника функция F является квадратичной и монотонной по переменной u. В предыдущем обзоре [6] были рассмотрены модельные задачи химической кинетики, приводящие к задачам типа (1)–(3). Для таких задач были представлены результаты, полученные к 2019 году.

В предлагаемой работе представлен обзор результатов по развитию метода угловых пограничных функций для нелинейных уравнений, полученных при исследовании задачи (1)–(3) в последние два года (см. [4, 5, 10]).

2. Решение задачи. Метод угловых пограничных функций предполагает построение приближенного решения задачи (1)–(3) в виде асимптотического ряда относительно параметра ϵ с последующим доказательством равномерности такого приближения при $\epsilon \to 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$. С учетом структуры области Ω искомое приближение составляется из следующих частей:

$$u(x,t,\epsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \tag{4}$$

Здесь через $\bar{u}$ обозначена функция, называемая регулярной частью асимптотики. Эта функция представляет асимптотическое решение уравнения (1) или решение задачи (1)–(3) во внутренней части прямоугольника Ω без учета начальных и краевых условий. Слагаемые Π, Q и Q^* — это так называемые пограничные функции, которые призваны осуществить гладкий переход от регулярной части асимптотики к граничным условиям на сторонах прямоугольника Ω. Слагаемые P и P^* называются угловыми пограничными функциями, их роль заключается в сглаживании невязок, вносимых пограничными функциями вблизи вершин прямоугольника Ω: $(0,0)$ и $(1,0)$ соответственно.

Для задачи (1)–(3) предполагаются выполненными следующие стандартные условия.

Условие I. Функции $F(u,x,t,\epsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими, и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений:

$$\phi(0) = \psi_1(0), \quad \phi(1) = \psi_2(0). \tag{5}$$

Условие II. Вырожденное уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$ имеет решение

$$u = \bar{u}_0(x,t). \tag{6}$$

В силу нелинейности функции вырожденное уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ может иметь не одно решение. Налагаемые условия касаются только одного из возможных решений, которое обозначено как $u = \bar{u}_0(x,t)$.

Условие III. Производная $F'_u(\bar{u}_0(x,t),x,t,0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Условие IV. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \tau \geqslant 0, \quad \Pi_0(x,0) = \phi(x) - \bar{u}_0(x,0), \tag{7}$$

имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x,\infty) = 0$.

Условие V. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2\frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k,t) + z_1, k, t, 0), \tag{8}$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k,t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0,0)$ при $y \to \infty$ (здесь t — параметр, $k = 0$ или 1).

В нелинейном случае условий I–V оказывается недостаточно для того, чтобы гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Поэтому в дальнейшем будут накладываться дополнительные условия, связанные с типом нелинейности.

Согласно методу угловых пограничных функций при построении полной асимптотики решения необходимо перейти к растянутым переменным

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\epsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\epsilon^2}. \tag{9}$$

Каждая функция в представлении (4) строится в виде асимптотического ряда по степеням ϵ:

$$\bar{u}(x,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}_k(x,t), \quad \Pi(x,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \Pi_k(x,\tau), \quad Q(\xi,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k Q_k(\xi,t),$$

$$Q^*(\xi_*,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k Q_k^*(\xi_*,t), \quad P(\xi,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k P_k(\xi,\tau), \quad P^*(\xi_*,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k P_k^*(\xi_*,\tau).$$

Правая часть уравнения (1) в соответствии с (4) заменяется суммой

$$F(u,x,t,\epsilon) = \bar{F} + (\Pi F + QF + Q^*F) + (PF + P^*F), \tag{10}$$

где

$$\bar{F} \coloneqq F(\bar{u},x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{F}_k,$$

$$\Pi F \coloneqq (F(\bar{u}+\Pi,x,t,\varepsilon) - \bar{F})|_{t=\varepsilon^2\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k F,$$

$$QF \coloneqq (F(\bar{u}+Q,x,t,\varepsilon) - \bar{F})|_{x=\varepsilon\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k F,$$

$$Q^*F \coloneqq (F(\bar{u}+Q^*,x,t,\varepsilon) - \bar{F})|_{x=1-\varepsilon\xi_*} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^* F,$$

$$PF \coloneqq (F(\bar{u}+\Pi+Q+P,x,t,\varepsilon) - \Pi F - QF + \bar{F})\Big|_{\substack{x=\varepsilon\xi \\ t=\varepsilon^2\tau}} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k F,$$

$$P^*F \coloneqq (F(\bar{u}+\Pi+Q^*+P^*,x,t,\varepsilon) - \Pi F - Q^*F + \bar{F})\Big|_{\substack{x=1-\varepsilon\xi_* \\ t=\varepsilon^2\tau}} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k^* F.$$

В результате подстановки выражений (4) и (10) в уравнение (1) задача распадается на части: регулярную, три погранслойные и две угловые. Построение регулярной и погранслойных частей асимптотики предполагает рассмотрение одного функционального и трех обыкновенных дифференциальных уравнений соответственно. Методика решения таких задач хорошо отработана (см. [3]).

Основные трудности доставляет построение угловых пограничных функций P и P^*, так как этот процесс связан с разрешимостью нелинейных уравнений, аналогичных исходному уравнению (1). Задача для определения функции $P_0(\xi,\tau)$ ставится в первой четверти

$$\mathbb{R}_+^2 \coloneqq \{(\xi,\tau) \mid \xi > 0, \ \tau > 0\}$$

плоскости растянутых переменных (ξ,τ) и имеет вид

$$a^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_0}{\partial\tau}=F(\bar u_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0(\xi,\tau),0,0,0)-\\ -F(\bar u_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau),0,0,0)-F(\bar u_0(0,0)+Q_0(\xi,0),0,0,0),\quad \xi>0,\quad \tau>0, \tag{11}$$

$$P_0(0,\tau)=-\Pi_0(0,\tau),\quad P_0(\xi,0)=-Q_0(\xi,0),\quad P_0(\xi,\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \xi+\tau\to\infty. \tag{12}$$

Для функций $P_k(\xi,\tau)$, $k\geqslant 1$, в области $\mathbb{R}^2_+$ получаются линейные задачи

$$a^2\frac{\partial^2 P_k}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_k}{\partial\tau}=F'_u(\bar u_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0(\xi,\tau),0,0,0)P_k+h_k, \tag{13}$$

$$P_k(0,\tau)=-\Pi_k(0,\tau),\quad P_k(\xi,0)=-Q_k(\xi,0),\quad P_k(\xi,\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \xi+\tau\to\infty, \tag{14}$$

где неоднородности h_k удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi,\tau)|\leqslant C\exp(-\kappa(\xi+\tau)), \tag{15}$$

если такого же вида оценкам удовлетворяют функции $P_0,\dots,P_{k-1}$. Здесь C и κ — некоторые положительные числа.

Необходимо разрешить три основные проблемы:

1. Имеет ли задача (11), (12) решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида (15)?
2. Если задача (11), (12) имеет решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке вида (15), то имеют ли задачи (13), (14) решения, удовлетворяющие подобным оценкам?
3. Если задачи (11)–(14) разрешимы, т. е. если ряд (4) может быть построен, то имеет ли задача (1)–(3) решение, для которого этот ряд будет асимптотическим приближением при $\epsilon\to 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$?

Задачи для определения функций $P^*_k(\xi_*,\tau)$, $k\geqslant 0$ ставится аналогично.

В [7] при исследовании задачи (11), (12) с помощью метода верхних и нижних решений удалось построить подходящие барьерные функции и тем самым доказать разрешимость первой проблемы. Более того, построенные барьерные функции гарантировали положительность коэффициента

$$F'_u(\bar u_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0(\xi,\tau),0,0,0)$$

при $P_k(\xi,\tau)$, $k\geqslant 1$, в линейных задачах (13), (14), что снимало вторую проблему. В завершение была обоснована равномерность построенного приближения в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}$.

Однако оказалось, что ограничениям, поставленным в работе [7], удовлетворяют не все квадратичные функции. В связи с этим обстоятельством исследования по квадратичной нелинейности были продолжены. В [8] метод был распространен на произвольные функции F, являющиеся в угловых точках прямоугольника Ω квадратичными относительно переменной u на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения.

Дальнейшие исследования проводились по двум направлениям:

1. в монотонном случае — обобщение результатов, полученных для квадратичных функций, на произвольную нелинейность;
2. в немонотонном случае — рассмотрение квадратичных функций в качестве модельных.

3. Монотонный случай. В [9] для произвольных нелинейностей были получены результаты, аналогичные квадратичному случаю. Доказательство существования подходящего решения нелинейной задачи (11), (12) было проведено методом верхних и нижних решений с использованием барьерных функций того же вида, что и в квадратичном случае. Однако в общем случае не удалось доказать выполнение необходимых неравенств, эти неравенства пришлось постулировать. Кроме рассмотренных ранее квадратичных нелинейностей этим неравенствам удовлетворяли и некоторые другие нелинейные функции, что, несомненно, являлось продвижением в исследовании общей задачи. Тем не менее, класс подходящих нелинейных функций не был полностью изучен.

В [10] были рассмотрены кубические функции следующего вида.

Условие VI. В угловых точках $(k,0)$, $k=0,1$, прямоугольника Ω функция F имеет вид

$$F(u,k,0,0)=u^3-\bar{u}_0^3, \tag{16}$$

где числа $\bar{u}_0=\bar{u}_0(k,0)$ положительны и могут различаться в угловых точках $(0,0)$ и $(1,0)$. Кроме этого, граничные значения $\phi(k,0)>\bar{u}_0(k,0)$.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если выполнены условия* I–VI, *то задача* (11), (12) *имеет решение* $P_0(\xi,\tau)$, *удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида* (15).

Для доказательства существования решения задачи (11), (12) использовался метод верхних и нижних решений дифференциальных уравнений, основанный на разрешимости дифференциальных неравенств (см. [13–15]). Этот метод заключается в том, что задача

$$L(Z)=0 \text{ в области } D, \quad Z=h \text{ на границе } \partial D \tag{17}$$

имеет решение Z в промежутке между барьерными функциями $Z_-\leqslant Z\leqslant Z_+$, если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+)\leqslant 0, \quad L(Z_-)\geqslant 0, \quad Z_-\leqslant Z_+, \tag{18}$$

а на ее границе

$$Z_-\leqslant h\leqslant Z_+. \tag{19}$$

Было доказано, что в задаче (11), (12) на роль барьерных подходят функции

$$Z_-(\xi,\tau)=-2\sqrt{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)} \quad \text{и} \quad Z_+(\xi,\tau)=0,$$

и тем самым было установлено существование решения $P_0(\xi,\tau)$ задачи (11), (12) в промежутке между этими барьерными функциями:

$$-2\sqrt{\Pi_0(0,\tau)Q_0(\xi,0)}\leqslant P_0(\xi,\tau)\leqslant 0.$$

Так как обе барьерные функции удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида (15), то такого же вида оценке удовлетворяет и решение $P_0(\xi,\tau)$ задачи (11), (12).

Теорема 2. *Если выполнены условия* I–VI, *то задачи* (13), (14) *имеют решения* $P_k(\xi,\tau)$, *удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида* (15).

Доказательство теоремы 2 получается из того, что построенные барьерные функции обеспечивают положительность коэффициента

$$F'_u(\bar{u}_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0(\xi,\tau),0,0,0)$$

при $P_k(\xi,\tau)$, $k\geqslant 1$, в линейных задачах (13), (14).

Теоремы 1, 2 доказывают, что условия I–VI обеспечивают формальное построение асимптотического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(\bar{u}_k(x,t)+\Pi_k(x,\tau)+Q_k(\xi,t)+Q_k^*(\xi_*,t)+P_k(\xi,\tau)+P_k^*(\xi_*,\tau)). \tag{20}$$

Для завершения исследования задачи (1)–(3) требуется обоснование полученной асимптотики решения. Установлена следующая теорема.

Теорема 3. *Если выполнены условия* I–VI, *то для достаточно малых* ϵ *задача* (1)–(3) *имеет решение* $u(x,t,\epsilon)$, *для которого ряд* (20) *является асимптотическим представлением при* $\epsilon\to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Omega}$.

Доказательство теоремы 3 наиболее просто получается методом дифференциальных неравенств, предложенным Н. Н. Нефедовым (см. [11]).

4. Немонотонный случай. Ранее (см. [4]) был исследован случай, когда от функции F по переменной u в угловых точках прямоугольника не требовалось монотонности на промежутке от корня $\bar{u}_0$ вырожденного уравнения до граничного значения ϕ. В немонотонном случае верхнее и нижнее решения задачи (11), (12) не удается построить сразу во всем квадранте $\mathbb{R}^2_+$ в виде одной гладкой функции. Приходится сначала строить так называемые кусочно гладкие барьеры, а затем сглаживать их.

Определение 1. Функции $Z_+(\xi,\tau)$ и $Z_-(\xi,\tau)$ называются кусочно гладкими верхним и нижним решениями задачи (17), если

(i) $Z_+(\xi,\tau)$ и $Z_-(\xi,\tau)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$;
(ii) существует разбиение области D на конечное число подобластей, на внутренности каждой из которой выполняются неравенства (18);
(iii) на границе области D выполняются неравенства (19).

Если предположить, что нелинейная задача (11), (12), определяющая главный член угловой части асимптотики, разрешима, то в силу условия III и экспоненциальных оценок убывания производная функции F на полном нулевом приближении оказывается гарантированно положительной в области вида

$$\Omega_0 = \{(\xi,\tau) \mid \xi \geqslant \rho,\ \tau \geqslant \rho\},$$

где ρ — некоторое положительное число. В приграничных полосах

$$\Omega_1 = \{(\xi,\tau) \mid \xi \geqslant \tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant \rho\} \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \{(\xi,\tau) \mid 0 \leqslant \xi \leqslant \rho,\ \tau \geqslant \xi\}$$

производная может принимать отрицательные значения, в связи с чем задачи (13), (14) не всегда могут иметь решения, удовлетворяющие оценкам вида (15). Введем следующее дополнительное условие.

Условие VII. Для угловой точки $(0,0)$ прямоугольника Ω задача (11), (12) имеет решение $P_0(\xi,\tau)$ с оценкой вида (15), и в приграничных полосах Ω_1 и Ω_2 области $\mathbb{R}^2_+$ производная F'_u на полном нулевом приближении принимает отрицательные значения, но при этом

$$F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) \geqslant -q^2, \tag{21}$$

где q — некоторое число на промежутке $q \in (0, \pi a/(2\rho))$. Аналогичное условие должно выполняться и для угловой точки $(1,0)$.

Отметим, что условие VII является естественным ограничением разрешимости дифференциальных неравенств, которые возникают при доказательстве существования верхних и нижних решений. Это условие аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений, когда разрешимость подобных задач связана с неравенством Чаплыгина (см. [12]). Число $\pi a/2$ получается из-за невозможности найти положительное монотонное решение неравенства $a^2 y'' + y \leqslant 0$ на промежутке длиной больше, чем $\pi a/2$. При условии VII была доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Если выполнены условия* I–V *и* VII, *то задачи* (13), (14) *имеют решения* $P_k(\xi,\tau)$, *удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида* (15).

Для доказательства этой теоремы также применялся метод верхних и нижних решений. Барьерные функции для решений задач (13), (14) строились отдельно в каждой из трех подобластей Ω_0, Ω_1 и Ω_2, а затем эти куски гладко стыковались друг с другом.

Было также доказано существование решения задачи (1)–(3) и равномерность приближения этого решения с помощью построенного асимптотического ряда.

Теорема 5. *Если выполнены условия* I–V *и* VII, *то для достаточно малых* ϵ *задача* (1)–(3) *имеет решение* $u(x,t,\epsilon)$, *для которого ряд* (20) *является асимптотическим представлением при* $\epsilon \to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\overline{\Omega}$.

Доказательство теоремы 5 получается методами, аналогичными доказательству теоремы 3.

В работе [5] исследование немонотонного случая было продолжено. Основное внимание было уделено исследованию нелинейной задачи (11), (12), существование подходящего решения которой ранее постулировалось. В качестве модельной была рассмотрена функции F, которая в угловых точках прямоугольника является квадратичной и немонотонной относительно переменной u на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения. Исследование было проведено при следующем дополнительном условии.

Условие VIII. В угловых точках $(k,0)$, $k=0,1$, прямоугольника Ω функция F имеет вид

$$F(u,k,0,0) = -A(u-\bar{u}_0)(u-\beta), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k,0),$$

где числа $A = A(k)$ — положительны, а граничные значения $\phi = \phi(k)$ и числа $\beta = \beta(k)$ удовлетворяют неравенствам

$$\bar{u}_0 < \frac{\bar{u}_0 + \beta}{2} < \phi < \beta. \tag{22}$$

Была доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Если выполнены условия* I–V *и* VIII, *то задача* (11), (12) *имеет решение* $P_0(\xi,\tau)$, *удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида* (15).

При доказательстве использовалась схема, предложенная в [4]: область $\mathbb{R}^2_+$ была разбита на три подобласти Ω_0, Ω_1 и Ω_2 и в каждой из них строились свои верхние и нижние решения.

В области Ω_0 барьерные функции были получены в виде

$$P_\pm(\xi,\tau) = \pm r\exp(-\kappa(\xi+\tau)),$$

где r и κ — некоторые положительные числа.

В области Ω_1 барьерные функции получены в виде

$$P_\pm(\xi,\tau) = \pm h(\tau)\exp(-\kappa\xi),$$

а в области Ω_2 — в симметричном виде

$$P_\pm(\xi,\tau) = \pm h(\xi)\exp(-\kappa\tau),$$

где κ — достаточно малые положительные числа. Функция $h(x)$ на промежутке $x\in[0,\rho]$ выбиралась с учетом выполнения условий

$$h(x)\geqslant 0, \quad h(\rho) = r\exp(-\kappa\rho), \quad h'(x) > 0, \quad h''(x) < 0. \tag{23}$$

Несмотря на симметричность барьерных функций в областях Ω_1 и Ω_2, они получались из решения несимметричных задач, в связи с чем доказательство потребовало применения различных методов.

Построенные в областях Ω_0, Ω_1 и Ω_2 гладкие куски барьерных функций с учетом условий (21) непрерывно, но не гладко стыкуются между собой на общих частях границ подобластей. Существует общая теория сглаживания верхних кусочно гладких решений (см. [14]). Эта теория применяется, когда гладкость функции нарушается на гладкой линии. Кроме этого, при прохождении через эту линию по нормали производная кусочно гладкого решения не должна испытывать положительного скачка. Функция P_+ построена именно таким образом: при прохождении по нормали через общие границы областей Ω_0, Ω_1 и Ω_2 производная испытывает отрицательный скачок.

Однако в нашем случае граница не является гладкой линией, а состоит из трех гладких кусков, сходящихся в точке (ρ,ρ):

$$\Gamma_{01} = \{(\xi,\tau)\mid \xi\geqslant\rho,\ \tau=\rho\}, \quad \Gamma_{02} = \{(\xi,\tau)\mid \xi=\rho,\ \tau\geqslant\rho\}, \quad \Gamma_{12} = \{(\xi,\tau)\mid \xi=\tau,\ 0\leqslant\tau\leqslant\rho\}.$$

Из-за этого сглаживание барьерных функций проводится «вручную». Сначала рассматриваются линии Γ_{01} и Γ_{02}, которые являются границей области Ω_0 с областями Ω_1 и Ω_2. Процесс сглаживания «сбрасывает» негладкость барьерных функций с этих линий на отрезок биссектрисы

$$\Gamma_\delta = \{(\xi,\tau)\mid \xi=\tau,\ \rho\leqslant\tau\leqslant\rho+\delta\},$$

являющийся продолжением линии Γ_{12}, в область Ω_0. Положительное число δ определяется величиной люфта: построенные функции пригодны в качестве барьерных в областях несколько больших, чем Ω_0, Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Обеспечивая гладкость модифицированных барьерных функций на линиях Γ_{01} и Γ_{02}, мы не забываем обеспечить отрицательность скачка производных этих функций при прохождении по нормали через линию Γ_δ. Это дает возможность применить общую теорию сглаживания на линии $\Gamma_{12} \cup \Gamma_\delta$ и завершить процесс построения гладких барьерных функций во всей области $\mathbb{R}^2_+$. Построенные барерные функции обеспечивают существование подходящего (в смысле выполнения экспоненциальной оценки убывания) решения нелинейной задачи (11), (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В. Ф.* Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1972. — *12*, № 3. — С. 582–597.
2. *Бутузов В. Ф., Нестеров А. В.* Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 1978. — № 2. — С. 49–56.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
4. *Денисов А. И., Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 1. — С. 102–117.
5. *Денисов А. И., Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 9. — С. 1581–1590.
6. *Денисов А. И., Денисов И. В.* Математические модели процессов горения// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *185*. — С. 82–88.
7. *Денисов И. В.* Первая краевая задача для квазилинейного сингулярно возмущенного параболического уравнения в прямоугольнике// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1996. — *36*, № 10. — С. 56–72.
8. *Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 2. — С. 255–274.
9. *Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2018. — *58*, № 4. — С. 1–11.
10. *Денисов И. В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — *61*, № 2. — С. 256–267.
11. *Нефедов Н. Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями// Диффер. уравн. — 1995. — *31*, № 7. — С. 1132–1139.
12. *Чаплыгин С. А.* Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. — М.: 1919.
13. *Amann H.* On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary-value problems// Indiana Univ. Math. J. — 1971. — *21*, № 2. — P. 125–146.
14. *Amann H.* Periodic solutions of semilinear parabolic equations// in: Nonlinear Analysis. A Collection of Papers in Honor of E. H. Rothe (*Cesari L., Kannan R., Weinberger H.*, eds.). — New York: Academic Press, 1978. — P. 1–29.
15. *Sattinger D. H.* Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary-value problems// Indiana Univ. Math. J. — 1972. — *21*, № 11. — P. 979–1000.

Денисов Игорь Васильевич

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

E-mail: den_tspu@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 37–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-37-40

УДК 517.95

ПОВЕДЕНИЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ С БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ ГЁЛЬДЕРА С ПОКАЗАТЕЛЕМ МЕНЬШЕ $1/2$

© 2022 г. **А. Н. КОНЕНКОВ**

Аннотация. Для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной рассматриваются решения первой краевой задачи в области с боковой границей, имеющей модельную особенность: кривая, задающая боковую границу, гладкая, за исключением одной точки, и принадлежит классу Гёльдера с показателем меньше $1/2$. При условии, что решение положительно в некоторой окрестности особой точки и равно нулю на боковой границе в этой окрестности, устанавливается, что первая производная решения неограниченно растет при приближении к особой точке.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, первая краевая задача, негладкая боковая граница, метод барьеров.

BOUNDARY BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION IN A DOMAIN WHOSE LATERAL BOUNDARY SATISFIES THE HÖLDER CONDITION WITH EXPONENT LESS THAN $1/2$

© 2022 **A. N. KONENKOV**

Abstract. For the heat equation with one space variable, we examine solutions of the first boundary-value problem in a domain whose lateral boundary possesses a model singularity, namely, the curve describing the lateral boundary is smooth everywhere except for one point and belongs to the Hölder class with exponent less than $1/2$. We prove that if a solution is positive in some neighborhood of the singular point and vanishes on the lateral boundary in this neighborhood, then the first derivative of this solution unboundedly increases in any neighbourhood of the singular point.

Keywords and phrases: heat equation, first boundary-value problem, nonsmooth lateral boundary, barrier method.

AMS Subject Classification: 35A08, 35K10, 35D30

Гладкости решений параболических краевых задач в области с гладкой, за исключением одной точки, боковой границей посвящено много работ. И. Г. Петровский [3] для уравнения теплопроводности рассмотрел нецилиндрическую область и получил необходимые и достаточные условия на порядок касания граничной поверхности плоскостью $t = 0$ для разрешимости первой краевой задачи. Также много работ посвящено исследованию регулярности решений в областях с коническими точками (см. [2] и цитированную там литературу).

В [1] для параболического уравнения с одной пространственной переменной рассматриваются различные области, на границе которых есть точка, в которой боковая граница касается характеристики $t = 0$. При этом область лежит по разные стороны от этой прямой. Исследована гладкость решений. В частности, выписан главный член асимптотики решения вблизи особой точки. Боковая граница вблизи особой точки принадлежала классу Гёльдера $C^{1/2}$. В настоящей работе решения уравнения теплопроводности исследуются в области с менее гладкой боковой границей, имеющей модельную особенность из класса Гёльдера C^{α}, где $\alpha \in (0, 1/2)$. А именно рассматривается первая краевая задача в области Ω, которая в некоторой окрестности точки $(0, 1)$ задается неравенством $x > |1-t|^{\alpha}$. Решение полагается сохраняющим знак в некоторой окрестности особой точки границы и равным нулю на границе. Мы показываем, что при этих условиях решение не может иметь ограниченной в области производной первого порядка по пространственной переменной. Это вытекает из получаемой степенной оценки снизу на рост производной на границе области.

Теорема 1. *Пусть функция $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t - u_{xx} = 0$ в Ω и в некоторой окрестности точки $(1, 0)$ положительна в Ω и равна нулю на боковой границе. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ и константа $C > 0$ такие, что для $t \in (1-\varepsilon, 1)$ справедлива оценка*

$$u_x|_{\Sigma} \geqslant C(1-t)^{\alpha - 1/2}. \tag{1}$$

Доказательство. Распрямим боковую границу области с помощью замены переменных $(x, t) \to (x + |1-t|^{\alpha}, t)$. При этом область Ω в окрестности точки $(0, 1)$ переходит в область, задаваемую неравенством $x > 0$, а уравнение теплопроводности в

$$Lu = u_t - \frac{1}{2} u_{xx} - \alpha(1-t)^{\alpha-1} u_x = 0.$$

Рассмотрим прямоугольник $Q_{\varepsilon,\delta} = (0, \varepsilon) \times (1-\delta, 1)$, $0 < \varepsilon, \delta \leqslant 1$. Требуемый результат имеет локальный характер. Достаточно доказать оценку из утверждения теоремы в области такого вида для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$.

Так как функция u является гладкой при $t < 1$ и положительной в достаточно малой области $Q_{\varepsilon,\delta}$, то u удовлетворяет следующим неравенствам

$$\begin{gathered} u(0, t) = 0, \\ C_1 x \leqslant u(x, 1-\delta) \leqslant C_2 x, \\ C_3 \leqslant u(\varepsilon, t) \leqslant C_4, \end{gathered} \tag{2}$$

для некоторых постоянных $C_i > 0$.

Обозначим через $PQ_{\varepsilon,\delta}$ параболическую границу $Q_{\varepsilon,\delta}$. Пусть v — другое решение уравнения теплопроводности с такими же свойствами. Тогда можно подобрать $K_1, K_2 > 0$ так, что $K_1 v \leqslant u \leqslant K_2 v$ на $PQ_{\varepsilon,\delta}$ и, в силу принципа максимума, в $Q_{\varepsilon,\delta}$.

Если же функция v удовлетворяет неравенству $Lv \leqslant 0$, то $K_1 v \leqslant u$ в $Q_{\varepsilon,\delta}$ и

$$u_x(0, t) = \lim_{x \to 0+} \frac{u(x, t) - u(x, 0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{u(x, t)}{x} \geqslant K_1 \lim_{x \to 0+} \frac{v(x, t)}{x} = K_1 v_x(0, t).$$

Для доказательства утверждения теоремы воспользуемся методом барьеров. Построим функцию v с асимптотикой (1) у производной $v_x(0, t)$.

Обозначим через $Z(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp\{-x^2/4t\}$ фундаментальное решение уравнения теплопроводности и для функции $\psi(x) = |x|^{2\alpha} \operatorname{sign} x$ рассмотрим потенциал Пуассона

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x-y, 1-t) \psi(y) dy.$$

Так как ψ нечетна, то $v(0,t)=0$ и $v(x,t)>0$ при $x>0$. Производная v_x при $x=0$ выписывается явно:

$$v_x(0,t)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_x(y,1-t)\psi(y)dy=\frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)(1-t)^{\alpha-1/2}}{\sqrt{\pi}},$$

и имеет нужную асимптотику при $t\to 1-0$.

Так как $v_t=-v_{xx}$, осталось доказать неравенство $Lv=-2v_{xx}-\alpha(1-t)^{\alpha-1}v_x\leqslant 0$.

Обозначим $\tau=1-t$ и положим

$$w(x,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x-y,\tau)\psi(y)dy.$$

Тогда $Lv=-2w_{xx}-\alpha\tau^{\alpha-1}w_x$. Знак производных в правой части не меняется при $x>0$:

$$w_x(x,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x-y,\tau)\psi'(y)dy>0,$$

$$w_{xx}(x,\tau)=\int\limits_{0}^{\infty} (Z(x-y,\tau)-Z(x+y,\tau))\psi''(y)dy<0.$$

Покажем, что $\alpha\tau^{\alpha-1}w_x\geqslant |w_{xx}|$.

Рассмотрим два случая. Сначала пусть $x\leqslant\tau^{1/2}$. Так как $\psi(kx)=k^{2\alpha}\psi(x)$, $k>0$, то $w(x,\tau)=k^{-2\alpha}w(kx,k^2\tau)$ и $w_x(x,\tau)=k^{1-2\alpha}w_x(kx,k^2\tau)$. Положив $k=\tau^{1/2}$, получим

$$w_x(x,\tau)=\tau^{\alpha-1/2}w_x(x\tau^{-1/2},1)$$

и

$$w_x(x,\tau)\geqslant\tau^{\alpha-1/2}\min_{0\leqslant y\leqslant 1}w_x(y,1)=C\tau^{\alpha-1/2}$$

для $0\leqslant x\leqslant\tau^{1/2}\leqslant 1$. Таким же образом, используя равенство $w_{xx}(x,\tau)=k^{2-2\alpha}w_x(kx,k^2\tau)$, получаем

$$|w_{xx}(x,\tau)|\leqslant\tau^{\alpha-1}\max_{0\leqslant y\leqslant 1}|w_{xx}(y,1)|=C\tau^{\alpha-1}.$$

Объединяя эти оценки, заключаем, что для достаточно малых $\tau>0$

$$Lv=-\alpha\tau^{\alpha-1}w_x-w_{xx}\leqslant -C_1\tau^{\alpha-1}\tau^{\alpha-1/2}+C_2\tau^{\alpha-1}=C_1\tau^{\alpha-1}(-\tau^{\alpha-1/2}+C_3)\leqslant 0.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $x>\tau^{1/2}$. Изучим сначала поведение функции w при $t=1$. Покажем, что

$$w(x,1)=x^{2\alpha}+O(x^{2\alpha-1}),\quad x\to+\infty.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
w(x,1)&=\psi(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x-y,1)(\psi(y)-\psi(x))dy=\\
&=\psi(x)+\int\limits_{x/2}^{3x/2} Z(x-y,1)(\psi(y)-\psi(x))dy+O(e^{-x^2/16})=\\
&=\psi(x)+\int\limits_{x/2}^{3x/2} Z(x-y,1)(\psi(y)-\psi(x)-\psi'(x)(x-y))dy+O(e^{-x^2/16})=\\
&=x^{2\alpha}+O(x^{2\alpha-1}),\quad x\to+\infty,
\end{aligned}$$

поскольку

$$\left|\int\limits_{x/2}^{3x/2} Z(x-y,1)(\psi(y)-\psi(x)-\psi'(x)(x-y))dy\right| \leqslant \frac{1}{2}|\psi''(x/2)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x-y,1)(x-y)^2 dy = Cx^{2\alpha-1}.$$

Здесь мы воспользовались четностью фундаментального решения по x и монотонностью функции ψ'' при $x > 0$. Точно так же выводятся асимптотические формулы

$$\begin{aligned} w_x(x,1) &= 2\alpha x^{2\alpha-1} + O(x^{2\alpha-2}), && x \to +\infty, \\ w_{xx}(x,1) &= 2\alpha(2\alpha-1)x^{2\alpha-2} + O(x^{2\alpha-3}), && x \to +\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Из положительности $w_x(x,1)$ при $x > 0$ и (3) следует, что существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$w_x(x,1) \geqslant Cx^{2\alpha-1}, \quad x \geqslant 1.$$

Из равенства $w_x(x,\tau) = k^{1-2\alpha} w_x(kx, k^2\tau)$ при $k = \tau^{-1/2}$ получаем, что

$$w_x(x,t) = \tau^{\alpha-1/2} w_x(x\tau^{-1/2}, 1) \geqslant C\tau^{\alpha-1/2}(x\tau^{-1/2})^{2\alpha-1} = Cx^{2\alpha-1}.$$

Из (3) имеем:

$$|w_{xx}(x,\tau)| \leqslant Cx^{2\alpha-2}.$$

Для достаточно малого $\tau > 0$

$$\begin{aligned} Lv &= -\alpha\tau^{\alpha-1} w_x - w_{xx} \leqslant -C_1 x^{2\alpha-1}\tau^{\alpha-1} + C_2 x^{2\alpha-2} = \\ &= C_1 x^{2\alpha-2}(-\tau^{\alpha-1/2}(x\tau^{-1/2}) + C_3) \leqslant C_1 x^{2\alpha-2}(-\tau^{\alpha-1/2} + C_3) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Таким образом, барьерная функция v обладает всеми требуемыми свойствами в некотором прямоугольнике $Q_{\varepsilon,\delta}$.

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арефьев В. Н., Багиров Л. А.* О решениях уравнения теплопроводности в областях с особенностями// Мат. заметки. — 1998. — *64*, № 2. — С. 163–179.
2. *Козлов В. А., Мазья В. Г.* Об особенностях решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях с конической точкой// Изв. вузов. Мат. — 1987. — № 2. — С. 38–46.
3. *Петровский И. Г.* О решении первой краевой задачи для уравнения теплопроводности// Уч. зап. МГУ. — 1934. — № 2. — С. 55–59.

Коненков Андрей Николаевич
Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина
E-mail: a.konenkov@365.rsu.edu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 41–50
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-41-50

УДК 517.929

ЭФФЕКТ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

© 2022 г. **Д. А. КУЛИКОВ**

Аннотация. В работе изучается математическая модель макроэкономики, известная под названием «спрос-предложение» или «модель рынка». Классический вариант этой модели не имеет циклов. Показано, что введение запаздывания приводит к возможности появления в соответствующем нелинейном дифференциальном уравнении периодических решений, в том числе устойчивых. Найдена минимальная величина запаздывания, превышение которой может привести к возникновению циклов. При анализе соответствующего дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом использованы методы теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий. Получены асимптотические формулы для найденных периодических решений.

Ключевые слова: модель «спрос-предложение», запаздывание, устойчивость, бифуркация, асимптотика.

DELAY EFFECT AND BUSINESS CYCLES

© 2022 **D. A. KULIKOV**

Abstract. In this paper, we study a mathematical model of macroeconomics known as “demand-supply” or “market model.” The classical version of this model has no cycles. We show that the introduction of a delay may lead to the appearance of periodic solutions, including stable solutions, and find the minimum value of such a delay. Our analysis is based on methods of the theory of dynamical systems with infinite-dimensional spaces of initial conditions. For periodic solutions detected, we obtain asymptotic formulas.

Keywords and phrases: model “supply-demand”, delay, stability, bifurcation, asymptotics.

AMS Subject Classification: 34K18, 37G05, 37N40

1. Введение. Одной из наиболее известных моделей макроэкономики следует считать модель, известную под названием «модель рынка» (рынка «одного товара») [9, 18, 19]. Иначе эту модель принято называть «спрос-предложение». В основе модели рынка лежит закон Сэя, согласно которому предложение товара создает спрос. Приведем эту математическую модель в форме, которую приводят в литературе, посвященной математическому моделированию в макроэкономике [9, 18, 19]. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{p} = D(p) - S(p). \tag{1}$$

Здесь $p = p(t)$ — цена, $D(p)$ — функция, характеризующая спрос, $S(p)$ — предложение товара на рынке. При этом считают, что эти функции обладают следующими свойствами (см. [9, 18, 19]):

(i) обе эти функции определены при $p \in (0, \infty)$ и достаточно гладко зависят от p;
(ii) при всех $p \in (0, \infty)$ справедливы неравенства $D(p) > 0$, $S(p) > 0$, $D'(p) < 0$, $S'(p) > 0$;
(iii) $\lim\limits_{p\to 0+} D(p) = \infty$, $\lim\limits_{p\to\infty} D(p) = 0$;
(iv) $\lim\limits_{p\to 0+} S(p) = 0$, $\lim\limits_{p\to\infty} S(p) = S_\infty$ ($S_\infty \in \mathbb{R}$ или $S_\infty = \infty$).

Замечание 1. Приемлем вариант, когда одна из этих функций или обе определены при $p \in [0, \infty)$. Тогда обычно считают, что $D(0) = D_0$, где D_0 — достаточно большая положительная постоянная, а $S(0) = 0$.

Подчеркнем, что с экономической точки зрения все эти предположения достаточно естественны и характерны для модели «спрос-предложение». Вполне нормально, что спрос на товар падает при росте на него цены и, напротив, предложение растет при увеличении стоимости товара. При очень большой цене спрос на товар будет предельно мал и достаточно велик, если цена очень мала. Понятно, что $S(0) = 0$ ($\lim_{p\to 0} S(p) = 0$), так как при «нулевой» цене предложение товара с экономической точки зрения нецелесообразно.

Рассмотрим функцию $F(p) = D(p) - S(p)$. Из свойств (i)–(iv) функций $D(p)$ и $S(p)$ вытекает, что для нее выполнены следующие свойства:

(i) предел $\lim\limits_{p\to 0} F(p)$ равен ∞ или достаточно большой положительной константе;

(ii) предел $\lim\limits_{p\to \infty} F(p)$ равен $-\infty$ или достаточно большой по абсолютной величине отрицательной постоянной;

(iii) $F'(p) < 0$ при всех $p \in (0, \infty)$.

Следовательно, уравнение $F(p) = 0$ имеет один положительный корень $p = p_0$. В частности, $a_1 = F'(p_0) < 0$. При $p \in (p_0, \infty)$ справедливо неравенство $F(p) < 0$. Кроме того, $F(p) > 0$, если $p \in (0, p_0)$. Поэтому все решения, у которых начальное условие $p(0) \in (0, p_0)$ монотонно возрастают ($p' = F(p)$) и, напротив, решения $p(t)$ монотонно убывают, если $p(0) \in (p_0, \infty)$.

Из этих замечаний вытекает, что состояние равновесия p_0 ($F'(p_0) < 0$) асимптотически устойчиво и область притяжения представляет собой все $p(0) > 0$. Следовательно, следуя терминологии монографии [2, с. 248], можно утверждать, что состояние равновесия уравнения (1) асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво и $p = p_0$ единственный аттрактор для решений дифференциального уравнения (1) с положительными начальными условиями). Эти замечания позволяют, в частности, сделать вывод о том, что уравнение (1) не может иметь предельных циклов, для которых $p(t) > 0$ ($p(t) \geqslant 0$) при всех t.

Вместе с тем, для макроэкономических процессов в условиях рыночной экономики характерна цикличность, когда подъемы экономической активности сменяют спады. Таким образом традиционный вариант модели «спрос-предложение» (модель рынка в других терминах) не полностью адекватен экономической динамике и такая модель должна быть скорректирована или заменена на иные более содержательные. В частности, иные модели можно найти в уже упомянутых монографиях [9, 18, 19]. В первую очередь, это математические модели, в которых предлагается увеличить число уравнений до двух: модель бизнес-цикла Кейнса, мультипликатор-аксельратор. Вместе с тем в середине прошлого века М. Калецки выдвинул идею (см., например, обсуждения в монографии [9, 18, 19]) о том, что одним из основных факторов цикличности следует считать запаздывание. Суть его в экономике состоит в том, что на динамику цены в силу специфики экономических процессов влияние имеют экономические показатели предшествующего периода, предшествующего «торгового» дня (см., например, [6]).

В работах [7, 15] был предложен один вариант учета запаздывания, который предполагал вместо уравнения (1) рассмотреть уравнение вида

$$\dot{p} = D(p) - S(p_h),$$

где $p_h = p_h(t) = p(t - h)$, $h > 0$. Вместе с тем запаздывание может влиять не только на функцию предложения, но и на функцию спроса. В данной работе предполагается учесть и такую возможность и рассмотреть уравнение

$$\dot{p} = D(p_h) - S(p_h) \tag{2}$$

вместо двух предшествующих. Ниже будет показано, что учет фактора запаздывания уже в обеих функциях (функциях спроса и предложения) также приводит к появлению предельных циклов. Аналогичная идея, т. е. переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям с отклоняющимся аргументом, была реализована уже в другой экономической модели, известной под названием «модель Солоу» (Солоу—Свана) [8, 11, 12, 14, 16].

Преобразуем уравнение (2) и положим $p(t) = p_0 + x(t)$, $p(t-h) = p_0 + x(t-h)$. Для новой функции $x(t)$ получим также дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = D(p_0 + y(t)) - S(p_0 + y(t)), \tag{3}$$

где $y(t) = x(t-h)$. Естественно, дифференциальное уравнение (3) имеет нулевое состояние равновесия и в его окрестности уравнение (3) можно переписать в следующем виде

$$\dot{x} = -ay + a_2 y^2 + a_3 y^3 + o(y^3). \tag{4}$$

При этом, разумеется, использовалась формула Тейлора и, следовательно,

$$a = -F'(p)|_{p=p_0}, \quad a_2 = \left.\frac{F''(p)}{2}\right|_{p=p_0}, \quad a_3 = \left.\frac{F'''(p)}{6}\right|_{p=p_0}, \quad F(p) = D(p) - S(p).$$

Далее вместо анализа состояния равновесия $p = p_0$ уравнения (2) изучению подлежит нулевое состояние равновесия вспомогательного дифференциального уравнения (4).

Дополним уравнение (4) начальным условием

$$x(t) = f(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{5}$$

где $f(t) \in \mathbb{C}^k[-h, 0]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. пространству k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[-h, 0]$. Из результатов, изложенных в монографии [13], вытекает, что решения задачи Коши (4), (5) порождают гладкий локальный полупоток. Это делает возможным (см., например, [13, 17]) использовать теорему Андронова—Хопфа для изучения бифуркаций периодических решений в окрестности нулевого состояния равновесия дифференциального уравнения (4). Наличие предельного цикла у дифференциального уравнения (4) означает, что модель «спрос-предложение» с учетом эффекта запаздывания позволяет, в отличие от традиционной модели (1), объяснить цикличность в рыночной экономике.

2. Об устойчивости состояния равновесия. Использование бифуркационной теоремы Андронова—Хопфа предполагает анализ устойчивости нулевого состояния равновесия (см., например, гл. 11 из монографии [13], с. 179 монографии [1]). В свою очередь, для этого следует рассмотреть линеаризованный вариант дифференциального уравнения (4), т. е. дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -ay, \tag{6}$$

где $a = -F'(p)|_{p=p_0} > 0$. Хорошо известно [10, 13], что анализ устойчивости решений дифференциального уравнения (6) может быть сведен к анализу характеристического уравнения

$$\lambda = -a \exp(-\lambda h) \quad (h > 0), \tag{7}$$

у которого при малых h все корни находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости.

При увеличении h у характеристического уравнения (7) могут появиться корни в правой полуплоскости. Для этого сначала найдем наименьшее положительное h, при котором у характеристического уравнения (7) могут появиться корни $\pm i\sigma$ на мнимой оси. Сразу подчеркнем, что уравнение (7) не может иметь нулевого корня. Поэтому искомая величина $h = H$ и соответствующее σ находится после анализа уравнения

$$i\sigma = -a \exp(-i\sigma h).$$

Следовательно, $\sigma > 0$ и $h > 0$ $(H > 0)$ следует искать как решения системы

$$a \cos \sigma h = 0, \quad a \sin \sigma h = \sigma.$$

Пусть $\sigma h = \omega$. Тогда получаем счетный набор решений

$$\omega_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad h_n = \frac{\pi/2 + 2\pi n}{a \sin(\pi/2 + 2\pi n)}, \quad \sigma_n = \frac{\omega_n}{h_n}.$$

Подходящее решение получаем при $n = 0$, т. е. $\omega = \omega_0 = \pi/2$, $H = \pi/2a$, $\sigma = \sigma_0 = a$.

Пусть теперь $h = H(1 + \mu)$, где μ — малый параметр. Тогда уравнение (7) следует переписать в следующем виде

$$\lambda(\mu) = -a \exp(-\lambda(\mu) H(1 + \mu)),$$

корни которого зависят от μ. Пусть

$$\lambda_0' = \tau_0' + i\sigma_0' = \left.\frac{d\lambda(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=0}, \quad \lambda_0 = \lambda(0) = i\sigma_0.$$

Из последнего уравнения для $\lambda(\mu)$ находим, что

$$\lambda_0' = \frac{\frac{\pi}{2}a}{1+i\frac{\pi}{2}}, \quad \tau_0' = \frac{2\pi a}{\pi^2+4} > 0, \quad \sigma_0' = -\frac{\pi^2 a}{\pi^2+4}.$$

Следовательно, при увеличении h (при $\mu > 0$) корни характеристического уравнения (7), равные $\pm i\sigma(\sigma = a)$, переходят в правую полуплоскость комплексной плоскости и нулевое состояние равновесия нелинейного дифференциального уравнения теряет устойчивость. Подчеркнем также, что остальные корни характеристического уравнения остаются в левой полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\alpha_0 < 0$ (см., например, [10, 13]). Уместно подчеркнуть, что положительная постоянная α_0 не зависит от ε.

В этом разделе работы проверена возможность реализации первой группы условий бифуркационной теоремы Андронова—Хопфа (условий, обозначенных H_1, H_2 в [1]). В следующем разделе будет использован метод интегральных многообразий и нормальных форм для проверки второй группы условий теоремы Андронова—Хопфа (см. теорему 2.4 и условие H_3 из главы 3 монографии [1], в которой теорема Андронова—Хопфа сформулирована в связи с анализом обыкновенных дифференциальных уравнений).

3. Периодические решения нелинейного уравнения. Возвратимся к анализу нелинейного дифференциального уравнения (4) в случае, когда

$$h = H(1+\gamma\varepsilon).$$

Здесь ε — малый положительный параметр, $\gamma = \pm 1$. Выбор знака для γ будет осуществлен в конце данного раздела и зависит от параметров анализируемой задачи, коэффициентов нормальной формы. Величина H была определена в предыдущем разделе.

Для удобства дальнейшего анализа введем новое нормированное время, положив

$$t = \tau(1+\gamma\varepsilon).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (4) можно и удобно переписать в виде

$$u_\tau = \frac{du}{d\tau} = (1+\gamma\varepsilon)[-av + a_2v^2 + a_3v^3 + o(v^3)], \tag{8}$$

где $u = u(\tau) = x((1+\gamma\varepsilon)\tau)$, $v = v(\tau) = u(\tau - H)$. Добавим, что в данном случае линеаризованное дифференциальное уравнение (8), т. е. дифференциальное уравнение

$$u_\tau = -a(1+\gamma\varepsilon)v$$

имеет решения

$$u(\tau) = \exp(\lambda(\varepsilon)\tau), \quad \overline{u}(\tau) = \exp(\overline{\lambda}(\varepsilon)\tau),$$

где

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_1(\varepsilon) \pm i\lambda_2(\varepsilon), \quad \lambda_1(\varepsilon) = \varepsilon\gamma\sigma\frac{2\pi}{\pi^2+4} + o(\varepsilon), \quad \lambda_2(\varepsilon) = \sigma + \frac{4\gamma\sigma}{\pi^2+4}\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \sigma = a.$$

Из предыдущих утверждений вытекает, что в фазовом пространстве решений дифференциального уравнения (8) существует локально инвариантное двумерное притягивающее многообразие $M_2(\varepsilon)$ (см., например, [17]), а также работу [5], в которой приведена более подробная библиография). Решения на нем могут быть восстановлены после анализа обыкновенного дифференциального уравнения — нормальной формы Пуанкаре (см., например, гл. 1 и гл. 3 из монографии [1]).

$$z_s' = (\alpha + i\beta)z + (d+ic)z|z|^2, \tag{9}$$

если, конечно, первая ляпуновская величина $d \neq 0$. Здесь $z = z(s) = z_1(s) + iz_2(s)$, $s = \varepsilon\tau$.

Замечание 2. Нормальная форма (9) — это «укороченный» вариант нормальной формы Пуанкаре, в котором отброшены члены, имеющие порядок малости $O(\varepsilon)$. Такой вариант нормальной формы приемлем, если $d \neq 0$ (первая ляпуновская величина отлична от нуля). При $d = 0$ требуется дополнительное уточнение правой части дифференциального уравнения (8). Следует учесть члены, имеющие более высокий порядок малости.

Решения дифференциального уравнения (8), принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, можно и удобно искать (см., например, [8, 14, 16]) в форме

$$u(\tau, z, \overline{z}, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(\tau, z, \overline{z}) + \varepsilon u_2(\tau, z, \overline{z}) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, z, \overline{z}) + O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

где

$$u_1(\tau, z, \overline{z}) = zq + \overline{zq}, \quad z = z(s), \quad q = q(\tau) = \exp(i\sigma\tau),$$

а функции $u_2(\tau, z, \overline{z})$, $u_3(\tau, z, \overline{z})$ будут найдены ниже в процессе реализации модифицированной версии алгоритма Крылова—Боголюбова, адаптированного к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом. Функции u_2, u_3 зависят гладко от своих аргументов и имеют по переменой τ период $2\pi/\sigma(\sigma = a)$, а также для них справедливы равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} u_j(\tau, z, \overline{z}) \exp(\pm i\sigma\tau) d\tau = 0, \quad j = 2, 3, \ldots,$$

если считать временно s независимой от τ переменной (параметром).

Замечание 3. Напомним известный факт [13]. Неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{u} + av = f(\tau),$$

где $v = u(t - H)$, а $f(\tau)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/\sigma$ имеет периодическое решение с тем же периодом, если выполнены условия разрешимости

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} f(\tau) \exp(\pm i\sigma\tau) d\tau = 0.$$

При этом равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} u(\tau) \exp(\pm i\sigma\tau) d\tau = 0$$

выделяют одно такое решение $u(\tau)$ неоднородного дифференциального уравнения.

Приступим к изложению алгоритма нахождения нормальной формы. Сумму (10) подставим в дифференциальное уравнение (8) и выделим слагаемые при ε и $\varepsilon^{3/2}$. В результате получим два неоднородных дифференциальных уравнения

$$\dot{u}_2 + av_2 = a_2 v_1^2, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_3 + av_3 = -(z'q + \overline{z}'\overline{q}) - \gamma a(zq \exp(-i\sigma H) + \overline{zq} \exp(i\sigma H)) + \\ + aH(z'q \exp(-i\sigma H) + \overline{z}'\overline{q} \exp(i\sigma H)) + 2a_2 v_1 v_2 + a_3 v_1^3, \end{aligned} \tag{12}$$

где $v_j = u_j(\tau - H)$. Добавим также, что $\sigma H = \omega = \pi/2$ и поэтому $\exp(i\sigma H) = i$, $\exp(-i\sigma H) = -i$. Уравнение (11) разрешимо в классе $2\pi/\sigma$ периодических функций, так как справедливы равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} v_1^2 \exp(\pm i\sigma\tau) d\tau = 0 \quad (\sigma = a).$$

Напомним, что $u_1 = u_1(\tau, z, \overline{z}) = zq + \overline{zq}$, $q = \exp(i\sigma\tau)$, а $v_1 = u_1(\tau - H)$.

Из дифференциального уравнения (11) находим, что подходящим периодическим его решением будет следующая функция

$$u_2 = u_2(\tau, z, \overline{z}) = \eta_2 q^2 z^2 + \eta_0 |z|^2 + \overline{\eta}_2 \overline{q}^2 \overline{z}^2,$$

где

$$\eta_2 = \frac{a_2(1+2i)}{5a}, \quad \eta_0 = \frac{2a_2}{a}.$$

Из условий разрешимости линейных неоднородных уравнений вытекает, что дифференциальное уравнение (12) имеет $2\pi/a$ периодическое решение, если справедливо равенство

$$-(1 + i\frac{\pi}{2})z' + i\gamma a z + (d_1 + ic_1)z|z|^2 = 0,$$

где

$$d_1 + ic_1 = -i\left[3a_3 + \frac{2}{5a}a_2^2(11+2i)\right].$$

Из него и получаем дифференциальное уравнение (9) — нормальную форму. Ее коэффициенты определены равенствами

$$\alpha = \frac{2a\pi\gamma}{4+\pi^2}, \quad \beta = \frac{4a\gamma}{4+\pi^2},$$

$$d = \frac{2}{5a(4+\pi^2)}[2a_2^2(4-11\pi) - 15\pi a a_3], \quad c = -\frac{4}{5a(4+\pi^2)}[15aa_3 + 2a_2^2(11+\pi)].$$

Справедливо утверждение

Лемма 1. *Дифференциальное уравнение* (9) *имеет периодическое решение*

$$C_0 : z(s) = \rho_0 \exp(i\delta s), \quad \rho_0 = \sqrt{-\frac{\alpha}{d}}, \quad \delta = \beta + c\rho^2,$$

если $\alpha d < 0$. *При* $d < 0$ $(\alpha > 0)$ *оно устойчиво и неустойчиво, если* $d > 0$ $(\alpha < 0)$.

Замечание 4. Выбор знака коэффициента α нормальной формы (9) зависит в нашем случае только от выбора знака γ. Действительно, $\alpha > 0$, если $\gamma = 1$ и нулевое решение нормальной формы неустойчиво. Напротив, при $\gamma = -1$ получаем, что $\alpha < 0$, т. е. нулевое решение (9) асимптотически устойчиво.

Доказательство леммы 1. Положим

$$z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s)), \quad \rho(s) \geqslant 0.$$

Для ненулевых решений $\rho(s) > 0$ в новых переменных уравнение (9) перепишется в виде двух действительных уравнений

$$\begin{aligned} \rho' &= \alpha\rho + d\rho^3, \\ \varphi' &= \beta + c\rho^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Первое уравнение системы (13) имеет нулевое состояние равновесия, а также положительное состояние равновесия $\rho_0 = \sqrt{-\alpha/d}$, которое существует, если $\alpha d < 0$. Такое решение устойчиво, если $\alpha > 0$ $(d < 0)$ и неустойчиво, если $\alpha < 0$ $(d > 0)$.

Пусть теперь $\rho = \rho_0$. Тогда $\varphi' = \beta + c\rho_0^2$ и, следовательно, $\varphi(s) = \delta s + \varphi_0$, $\delta = \beta + c\rho_0^2$, а $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Построенное периодическое решение $z(s)$ устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво), если $d < 0$ $(\alpha > 0)$ и неустойчиво при $d > 0$ $(\alpha < 0)$.

Тогда из результатов работ [3,4] вытекает справедливость утверждения (см. теорему 5 на с. 750 из работы [4], в которой речь идет о сохранении инвариантных торов при возмущении у широкого класса автономных дифференциальных уравнений и в том числе с бесконечномерным фазовым пространством). □

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ циклу C_0 соответствует цикл дифференциального уравнения* (8) *с наследованием свойств устойчивости. Для решений формирующих данный цикл дифференциального уравнения* (8) *справедливо асимптотическое представление*

$$u(\tau,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\sqrt{-\frac{\alpha}{d}}\Big[\exp(i(a+\varepsilon\delta)\tau + i\varphi_0) + \exp(-i(a+\varepsilon\delta)\tau - i\varphi_0)\Big] - \\ - \varepsilon\frac{\alpha}{d}\Big[\eta_2\exp(2i(a+\varepsilon\delta)\tau + 2i\varphi_0) + \eta_0 + \overline{\eta}_2\exp(-2i(a+\varepsilon\delta)\tau - 2i\varphi_0)\Big] + o(\varepsilon).$$

Следовательно, периодические решения дифференциального уравнения (4) *приобретают следующий вид*

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\sqrt{-\frac{\alpha}{d}}\left[\exp\left(i(a+\varepsilon\delta)\frac{t}{1+\gamma\varepsilon} + i\varphi_0\right) + \exp\left(-i(a+\varepsilon\delta)\frac{t}{1+\gamma\varepsilon} - i\varphi_0\right)\right] - \\ - \varepsilon\frac{\alpha}{d}\left[\eta_2\exp\left(2i(a+\varepsilon\delta)\frac{t}{1+\gamma\varepsilon} + 2i\varphi_0\right) + \eta_0 + \overline{\eta}_2\exp\left(-2i(a+\varepsilon\delta)\frac{t}{1+\gamma\varepsilon} - 2i\varphi_0\right)\right] + o(\varepsilon), \quad (14)$$

где φ_0 — произвольная действительная постоянная, $\eta_0 = 2a_2/a$, $\eta_2 = a_2(1+2i)/5a$.

Наконец, если возвратиться к первоначальной неизвестной функции p, то в результате получаем, что при $h = H(1+\gamma\varepsilon)$ уравнение (2) имеет периодическое решение

$$p(t,\varepsilon) = p_0 + x(t,\varepsilon),$$

где второе слагаемое определено асимптотической формулой (14).

4. Некоторые комментарии к основной теореме. В предыдущем разделе была сформулирована теорема, которая в достаточно общей форме дает ответ на вопрос об условиях существования предельных циклов. Ответ фактически зависит от знака величины d, т. е. реальной части коэффициента при нелинейном слагаемом нормальной формы (9). Его принято называть первой ляпуновской величиной, а коэффициент $d + ic$, в свою очередь, называют комплексной ляпуновской величиной.

В общем случае для дифференциального уравнения (4) анализ знака первой ляпуновской величины d затруднителен. Фиксирован только знак a ($a > 0$). Свойства функций $D(p)$, $S(p)$ (см. свойства (i), (iv)) не дают возможности для однозначного выбора величин a_2, a_3. Можно привести лишь примеры возможного выбора таких функций с сохранением основных свойств, характерных для данной математической модели макроэкономики.

Вместе с тем, как правило, при математическом анализе модели «спрос-предложение» принято и с прикладной точки зрения вполне допустимо выбирать функции $D(p)$, $S(p)$ в более конкретном виде с сохранением, разумеется, необходимых для них свойств. Наиболее типичным вариантом их выбора будут следующие функции:

$$D(p) = \alpha p^{-k}, \quad S(p) = \beta p^m,$$

где α, β, k, m — положительные постоянные. При таком их выборе можно нормировать эволюционную переменную t и неизвестную функцию $p(t)$. Это позволит упростить уравнение (2) при предложенном выборе функций $D(p)$ и $S(p)$.

Положим $t = \Theta t_1$, $p = \xi p_1$, где $\Theta = \alpha^{1-m/(k+m)}$, $\xi = \alpha^{1/(k+m)}\beta^{-1/(k+m)}$. В результате получим уравнение

$$p_1' = p^{-k}(t-h_1) - p^m(t-h_1),$$

где штрихом обозначена производная по t_1, а $h_1 = h/\Theta$. Для упрощения записи далее индекс 1 будем опускать. В результате получим дифференциальное уравнение

$$\dot{p} = p_h^{-k} - p_h^m, \quad (15)$$

где, как и ранее, $p_h = p_h(t) = p(t-h)$, $h > 0$. При таком варианте модели «спрос-предложение» полученные ранее результаты приобретают более конкретную форму.

Уравнение (15) имеет положительное состояние равновесия $p_0 = 1$. Замены

$$p(t) = 1 + x(t), \quad p_h(t) = 1 + y(t) \quad (y(t) = x(t-h))$$

позволяют получить дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -ay + a_2 y^2 + a_3 y^3 + o(y^3), \tag{16}$$

где

$$a = k + m, \quad a_2 = \frac{k(k+1) - m(m-1)}{2}, \quad a_3 = -\frac{k(k+1)(k+2) + m(m-1)(m-2)}{6}.$$

Естественно, уравнение (16) — частный случай уравнения (4). В последнем случае, т. е. в случае выбора уравнения (16), оказалось, что

$$\begin{aligned} H &= \frac{\pi}{2(k+m)}, \quad \sigma = k+m, \\ d &= \pi\frac{k+m}{4+\pi^2}\left(\frac{4-11\pi}{5\pi}(k-m+1)^2 + k^2 - km + m^2 + 3(k-m) + 2\right), \\ c &= 2\frac{k+m}{4+\pi^2}\left(k^2 - km + m^2 + 3(k-m) + 2 - (k-m+1)^2\left(\frac{11+\pi}{5}\right)\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Одним из самых естественных вариантов можно считать выбор, когда $k = b$, $m = 1$, где, естественно, $b > 0$. Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} H &= \frac{\pi}{2(1+b)}, & \sigma &= 1+b, \\ d &= \frac{2b(1+b)}{5(4+\pi^2)}[5\pi + (2-3\pi)b], & c &= \frac{2b(1+b)}{5(4+\pi^2)}[10 - (6+\pi)b]. \end{aligned} \tag{18}$$

Если даже ограничиться частным случаем выбора $D(p)$ и $S(p)$, который предложен в данном разделе работы, то при этом могут реализоваться оба типа бифуркаций: послекритические бифуркации и докритические бифуркации. Первый из них реализуется, если $d < 0$, $\gamma > 0$. В таком случае при потере устойчивости состоянием равновесия $p = p_0$ в его окрестности возникает устойчивый предельный цикл («мягкое» возбуждение колебаний). При $d > 0$, $\gamma < 0$ реализуются докритические бифуркации, когда в достаточно малой окрестности состояния равновесия $p = p_0$ возникает неустойчивый предельный цикл («жесткое» возбуждение колебаний). Подчеркнем, что в рассматриваемых вариантах выбора функций $D(p)$ и $S(p)$ возможны оба варианта бифуркаций.

Так, например, анализ знака d в случае формулы (18) показал, что $d > 0$, если $b \in (0, b_*)$, где $b_* \approx 2{,}1156$. При $b \in (b_*, \infty)$ справедливо неравенство $d < 0$.

Если рассматривать более общий вариант для определения d (см. формулу (17)), то в плоскости параметров k и m можно выделить области, где ляпуновская величина d имеет определенный знак. На рис. 1 приведено разбиение области параметров k и m $(k, m > 0)$ на подобласти сохранения знаков. Так, через D_1, D_3 обозначены множества значений k, m, где $d < 0$, а через D_2 обозначено множество тех k, m, для которых $d > 0$.

В нашем случае, если $(k, m) \in D_1$ или D_3 для экономической динамики характерна цикличность. Например, такой вариант реализуется, если m велико, а k относительно мало. В этом случае предложение интенсивно, а спрос достаточно вялый. Такая ситуация была характерна для ведущих стран с рыночной экономикой в период между первой и второй мировыми войнами. Это, как известно, привело к сильному кризису, известному в мировой экономической литературе как «великая депрессия». Пусть, наоборот, k велико, а m относительно мало. Последняя часть этого замечания допускает простую интерпретацию. Если k — велико, а m сравнительно мало, то это означает, что спрос более интенсивный, чем предложение. Такой вариант более предпочтителен для рыночной экономики. Отметим также, что если $k + m$ — достаточно малая постоянная, то период колебаний $2\pi/(k+m)$ велик и это означает, что реализуются варианты возможных «длинных экономических волн» Кондратьева [9] — циклов с достаточно большим периодом.

Если $(k, m) \in D_2$, то состояние равновесия дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (4) еще асимптотически устойчиво, но бассейн притяжения для состояния равновесия

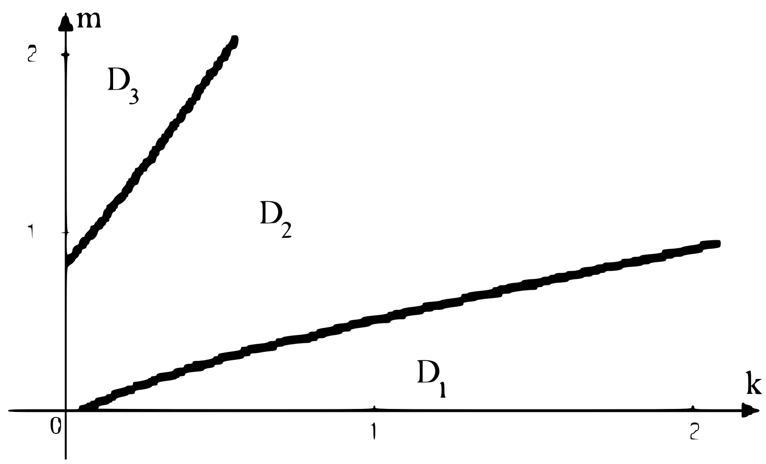

Рис. 1

мал и «ограничен» неустойчивым периодическим решением, которое не реализуется при экономической практике. При относительно больших отклонениях начальных условий от этого состояния равновесия возможно возбуждение колебаний экономических показателей, которые сильно отличаются от гармонических. Такое поведение решений динамической системы принято называть жестким возбуждением колебаний. Добавим, что если пара (k, m) принадлежит границе раздела между областями, то первая ляпуновская величина $d = 0$ и вариант нормальной формы (9) требует уточнения, учета остальных слагаемых в формуле Тейлора для функции $D(p) - S(p)$.

5. Заключение. В работе показано, что учет эффекта запаздывания проводит к возможному появлению предельных циклов в базисной модели «спрос-предложение» если, конечно, дифференциальное уравнение (1) заменить на дифференциальное уравнение (2). При этом возможны варианты как мягкого, так и жесткого возбуждения колебаний. Это можно отметить, если даже ограничиться частным вариантом модели «спрос-предложение» (см. уравнение (15), формулы (17) и (18)).

Подчеркнем, что анализ данной модели показал, что цикличность возникает при относительно большом запаздывании. В тоже время относительно большое запаздывание достаточно характерно для современной экономики. Действительно, цикличность стала проявлять себя с середины XIX века, когда появились достаточно сложные макроэкономические системы с относительно высоким развитием технологий и разделением труда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. — М.: МЦНМО, 2005.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
3. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 5. — С. 584–601.
4. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 6. — С. 738–753.
5. *Куликов А. Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *186*. — С. 122–131.
6. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Эффект запаздывания и экономические циклы// Таврич. вестн. информ. мат. — 2015. — *2*. — С. 87–100.
7. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Математические модели рынка и эффект запаздывания// в кн.: Математика в Ярославском университете. — Ярославль, 2016. — С. 132–151.

8. *Куликов Д. А.* Устойчивость и локальные бифуркации в модели Солоу с запаздыванием// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2018. — *20*, № 2. — С. 225–234.
9. *Лебедев В. В., Лебедев К. В.* Математическое моделирование нестационарных процессов. — М.: eТест, 2011.
10. *Bellman R., Cooke L.* Differential-Difference Equations. — London: Academic Press, 1963.
11. *Bianca C., Guerrini L.* Existence of limit cycles in the Solow model with delayed-logistic populaion growth// Scientific World J. — 2014. — *2014*. — 207806.
12. *Ferrara M., Guerrini L., Sodini M.* Nonlinear dynamics in a Solow model with delay and non-convex technology// Appl. Math. Comput. — 2014. — *228*. — P. 1–12.
13. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1977.
14. *Kulikov A., Kulikov D., Radin M.* Periodic cycles in the Solow model with a delay effect// Math. Model. Anal. — 2019. — *24*, № 2. — P. 297–310.
15. *Kulikov D. A.* About a mathematical model of market// J. Phys. Conf. Ser. — 2017. — *788*. — 012024.
16. *Kulikov D. A.* The generalized Solow model// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — *1205*. — 012033.
17. *Marsden J. E., McCraken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.
18. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
19. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Куликов Дмитрий Анатольевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: `kulikov_d_a@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 51–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-51-62

УДК 517.925.42

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА У НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

© 2022 г. **Е. Ю. ЛИСКИНА**

Аннотация. Исследуется автономная нелинейная система дифференциальных уравнений второго порядка, матрица линейного приближения которой имеет пару чисто мнимых собственных значений, а нелинейная часть может быть представлена в виде суммы форм порядка, не ниже второго относительно компонент фазового вектора. Получены достаточные условия существования центра или фокуса в окрестности нулевого решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, критический случай, сложный фокус, центр, проблема различения центра и фокуса.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF A CENTER IN A SECOND-ORDER NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM IN A CRITICAL CASE

© 2022 **E. Yu. LISKINA**

Abstract. We study an autonomous nonlinear system of second-order differential equations whose linear approximation matrix has a pair of purely imaginary eigenvalues and whose nonlinear part can be represented as the sum of forms of order $\geqslant 2$ with respect to the components of the phase vector. We obtain sufficient conditions for the existence of a center or focus in a neighborhood of the zero solution.

Keywords and phrases: differential equation, critical case, complex focus, center, distinguishing between center and focus.

AMS Subject Classification: 34C05, 34C25

1. Введение. Решению классической проблемы различения центра и фокуса посвящено достаточно большое количество исследований [1–4, 6, 10–12]. Аналитическая разрешимость проблемы доказана в [10]. Однако с точки зрения приложений и компьютерных вычислений особый интерес представляют коэффициентные условия различения центра и фокуса, которые на данный момент получены для систем, имеющих в нелинейной части одночлены или суммы одночленов нечетной степени по совокупности фазовых переменных [11, 12].

Данная работа продолжает и развивает исследования [8] по получению условий существования изохронных ненулевых периодических решений. Для получения условий существования ненулевых периодических решений в окрестности нулевого состояния равновесия используется метод вспомогательного параметра. В отличие от результатов, полученных в [9], когда вспомогательный параметр вводился и по координатам и по времени, в данном исследовании вспомогательный параметр вводится только по координатам, как и в [8].

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений
$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{1}$$
в которой $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ — двумерное вещественное векторное пространство,
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -a \end{pmatrix}$$
— матрица, имеющая пару собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ ($\omega = \sqrt{bc - a^2}$, $a^2 < bc$, $bc > 0$; см. [8]); $f(x)$ — вектор-функция, компонентами которой являются суммы форм не ниже второго порядка относительно компонент вектора x,
$$\|x\| = \max_{i=\overline{1;2}}\{|x_i|\}.$$
Система (1) на множестве $\Omega(\varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leqslant \varepsilon_0\}$ удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Требуется получить условия существования такой окрестности состояния равновесия $x \equiv 0$, через каждую точку которой проходит ненулевое периодическое решение системы (1).

3. Преобразование системы (1). Выполним замену переменных $x = (E + M)\bar{x}$, где $M = (m_{ij}(\mu))^2_{i,j=1}$ — матрица, элементами которой являются многочлены $m_{ij}(\mu)$ относительно компонент вектора $\mu \in \mathbb{R}^m$, $M(0) = 0_{22}$, E — единичная 2×2-матрица. Пусть норма матрицы
$$\|M\| = \max_{i=\overline{1;m}}\{|m_{i1}| + |m_{i2}|\},$$
тогда матричный ряд
$$(E + M)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i$$
равномерно сходится на множестве $\mathrm{W}(\varepsilon_1) = \{\mu \in \mathbb{R}^m : \|\mu\| \leqslant \varepsilon_1 \Rightarrow \|M\| < 1\}$. С учетом сказанного при сохранении прежних обозначений для переменной x систему (1) можно переписать следующим образом:
$$\dot{x} = (A + (AM - MA))x + \left(\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i(M^iA - M^{i-1}AM)\right)x + \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i f((E + M)x). \tag{2}$$

Определим множество $\mathrm{U}(\delta) = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 : \|\alpha\| \leqslant \delta\}$, $\|\alpha\| \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$. Состояние равновесия $x \equiv 0$ является решением системы (2). Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_0 \in (0; \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\})$, что для любого вектора $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0)$ и любого вектора $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$ решение $x(t, \alpha, \mu)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0, \alpha, \mu) = \alpha$, определено и непрерывно зависит от начальных условий и μ на промежутке $[0; T]$ ($T = 2\pi/\omega$), и при любых $t \in [0; T]$ удовлетворяет неравенству $\|x(t, \alpha, \mu)\| < \varepsilon$. Система (2) на множестве $[0; T] \times \mathrm{U}(\delta_0) \times \mathrm{W}(\delta_0)$ удовлетворяет условию существования и единственности решения.

Определение 1. Решение $x(t, \alpha, \mu)$ системы (2), $x(0, \alpha, \mu) = \alpha$, будем называть малым T-периодическим решением, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют числа $\bar{\alpha} \in \mathrm{U}(\delta_0)$ и $\bar{\mu} \in \mathrm{W}(\delta_0)$ такие, что $x(T, \bar{\alpha}, \bar{\mu}) - \bar{\alpha} = 0_2$ и при всех $t \in [0; T]$ выполнено неравенство $\|x(t, \bar{\alpha}, \bar{\mu})\| < \varepsilon$.

Из непрерывности правых частей системы (2) следует, что ее решение $x(t, \alpha, \mu)$ ($x(0, \alpha, \mu) = \alpha$) стремится к нулю при $\alpha \to 0$ равномерно по $(t, \mu) \in [0; T] \times \mathrm{W}(\delta_0)$.

Так как $f(x)$ содержит суммы форм не ниже второго порядка относительно компонент вектора x, то справедливо представление $f(x) = F(x)x$, в котором $F(x)$ — 2×2-матрица, непрерывная по $x \in \Omega(\delta_0)$. Аналогично, так как $f((E + M)x)$ содержит суммы форм не ниже второго порядка относительно компонент вектора x, то справедливо представление $f((E+M)x) = F((E+M)x)x$, в котором $F((E + M)x)$ — 2×2-матрица, непрерывная по $(x, \mu) \in \Omega(\delta_0) \times \mathrm{W}(\delta_0)$.

Введем обозначения

$$B(\mu) = (AM - MA) + \left(\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i(M^iA - M^{i-1}AM)\right),$$
$$g(x,\mu) = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i f((E+M)x), \tag{3}$$

причем справедливо представление $g(x,\mu) = G(x,\mu)x$, $G(x,\mu)$ — 2×2-матрица, непрерывная по $(x,\mu) \in \Omega(\delta_0)\times \mathrm{W}(\delta_0)$.

Вместе с системой (2) рассмотрим системы

$$\dot{y} = Ay + B(\mu)y + g(x(t,\alpha,\mu),\mu). \tag{4}$$
$$\dot{z} = Az + B(\mu)z + G(x(t,\alpha,\mu),\mu)z, \tag{5}$$

Из условия единственности решения системы (4) следует, что если решения систем (2) и (4) для любого фиксированного $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$ удовлетворяют условию $x(0,\alpha,\mu) = y(0,\alpha,\mu) = \alpha$, то эти решения совпадают всюду на промежутке $[0;T]$. Аналогичное утверждение справедливо для решений систем (2) и (5).

Пусть $Z(t,\alpha,\mu)$ и $X(t)$ — фундаментальные матрицы решений систем (5) и $\dot{x} = Ax$ соответственно, $Z(0,\alpha,\mu) = X(0) = E$. Тогда решение $z(t,\alpha,\mu)$ системы (5), удовлетворяющее начальному условию $z(0,\alpha,\mu) = \alpha$, можно записать так

$$z(t,\alpha,\mu) = Z(t,\alpha,\mu)\alpha. \tag{6}$$

Лемма 1. *Для матрицы $Z(t,\alpha,\mu)$ справедливо представление*

$$Z(t,\alpha,\mu) = X(t) + \Phi(t,\alpha,\mu), \tag{7}$$

в котором матрица $\Phi(t,\alpha,\mu)$ определяется выражением

$$\Phi(t,\alpha,\mu) = Z(t,\alpha,\mu)\int_0^t Z^{-1}(\tau,\alpha,\mu)(B(\mu) + G(x(\tau,\alpha,\mu),\mu))X(\tau)d\tau \tag{8}$$

и обладает следующими свойствами:

(i) $\Phi(0,\alpha,\mu) = 0_{22}$;

(ii) *матрица $\Phi(t,\alpha,\mu)$ непрерывна по $(t,x,\mu) \in [0;T]\times \mathrm{U}(\delta_0)\times \mathrm{W}(\delta_0)$*;

(iii) *при $\|\alpha\| \to 0$, $\|\mu\| \to 0$ справедливо, что $\Phi(t,\alpha,\mu) \to 0$ равномерно по $t \in [0;T]$.*

Доказательство. Положим $\Phi(t,\alpha,\mu) = Z(t,\alpha,\mu) - X(t)$. Тогда имеет место представление (7). Подставим его представление в систему (5), получим

$$\dot{X}(t) + \dot{\Phi}(t,\alpha,\mu) = AX(t) + (A + B(\mu) + G(x(t,\alpha,\mu),\mu))\Phi(t,\alpha,\mu) + (B(\mu) + G(x(t,\alpha,\mu),\mu))X(t).$$

Учитывая $\dot{X}(t) \equiv AX(t)$, получим матричное линейное неоднородное дифференциальное уравнение для отыскания матрицы $\Phi(t,\alpha,\mu)$

$$\dot{\Phi}(t,\alpha,\mu) = (A + B(\mu) + G(x(t,\alpha,\mu),\mu))\Phi(t,\alpha,\mu) + (B(\mu) + G(x(t,\alpha,\mu),\mu))X(t). \tag{9}$$

Так как $Z(t,\alpha,\mu)$ — фундаментальная матрица однородной системы, соответствующей системе (5), то $Z(t,\alpha,\mu)$ является фундаментальной матрицей однородной системы, соответствующей системе (9). Отсюда методом вариаций произвольных постоянных получаем общее решение системы (9):

$$\Phi(t,\alpha,\mu) = Z(t,\alpha,\mu)C + Z(t,\alpha,\mu)\int_0^t Z^{-1}(\tau,\alpha,\mu)(B(\mu) + G(x(\tau,\alpha,\mu),\mu))X(\tau)d\tau.$$

Здесь C — произвольная постоянная матрица. $Z(0,\alpha,\mu) = X(0) = E$, то из (7) следует, что $\Phi(0,\alpha,\mu) = 0_{nn}$. Таким образом, доказано первое свойство матрицы $\Phi(t,\alpha,\mu)$. Тогда $C = 0$, и для определения матрицы $\Phi(t,\alpha,\mu)$ получаем выражение (8), из которого непосредственно следует, что матрица $\Phi(t,\alpha,\mu)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $[0;T]\times \mathrm{U}(\delta_0)\times \mathrm{W}(\delta_0)$ по переменным t, α, μ. Свойство (ii) доказано. Далее, так как

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} B(\mu)=0, \quad \lim_{\|\alpha\|\to 0}\|\alpha\|^{-1}g(t,\alpha,\mu)=0$$

равномерно по $t\in[0;T]$ и $\mu\in \mathrm{W}(\delta_0)$, а также справедливо равенство $g(x,\mu)=G(x,\mu)x$, то из вида выражения (8) следует свойство (iii). Лемма 1 доказана. □

Пусть $y(t,\alpha,\mu)$ — решение системы (4), удовлетворяющее начальному условию $y(0,\alpha,\mu)=\alpha$; $X(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot y = Ay$, удовлетворяющая условию $X(0)=E$. Тогда общее решение системы (4) можно записать в виде

$$y(t,\alpha,\mu)=X(t)\alpha+X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau,\alpha,\mu)\Big(B(\mu)y(\tau,\alpha,\mu)+g(x(\tau,\alpha,\mu),\mu)\Big)d\tau. \tag{10}$$

Так как для любого фиксированного $\mu\in \mathrm{W}(\delta_0)$ при $x(0,\alpha,\mu)=z(0,\alpha,\mu)=y(0,\alpha,\mu)=\alpha$ решение системы (5) совпадает с решением системы (2) и решение системы (4) совпадает с решением системы (2) всюду на промежутке $t\in[0;T]$, то всюду на этом промежутке

$$x(t,\alpha,\mu)=z(t,\alpha,\mu)=y(t,\alpha,\mu).$$

Так как

$$z(t,\alpha,\mu)=Z(t,\alpha,\mu)\alpha=(X(t)+\Phi(t,\alpha,\mu))\alpha,$$
$$g(x(t,\alpha,\mu),\mu)=G(x(t,\alpha,\mu),\mu)z(t,\alpha,\mu),$$

то выражение (10) можно представить в виде

$$y(t,\alpha,\mu)=X(t)\alpha+$$
$$+X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau,\alpha,\mu)\Big(B(\mu)\big(X(\tau)+\Phi(\tau,\alpha,\mu)\big)+G\big(x(\tau,\alpha,\mu),\mu\big)\big(X(\tau)+\Phi(\tau,\alpha,\mu)\big)\alpha\Big)d\tau. \tag{11}$$

С учетом представлений (7) и $f((E+M)x)=F((E+M)x)x$ непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$f\Big((E+M)(X(t)+\Phi(t,\alpha,\mu))\alpha\Big)=\bar F(X(t)\alpha)\alpha+\bar{\bar F}\Big(\Phi(t,\alpha,\mu)+M(X(t)+\Phi(t,\alpha,\mu))\Big)\alpha,$$

где $\bar F(X(t)\alpha)$ — 2×2-матрица, элементами которой являются суммы форм порядка не ниже $(k-1)$ относительно компонент вектора $X(t)\alpha$.

С учетом (11) условие существования малого T-периодического решения $y(T,\alpha,\mu)-\alpha=0$ системы (2) будет иметь вид

$$(X(T)-E)\alpha+X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)AX(t)\alpha dt+X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)(AM-MA)X(t)\alpha dt+$$
$$+X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i(M^iA-M^{i-1}AM)X(t)\alpha dt+X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)\bar F(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt+$$
$$+X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^iM^i\bar F(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt+\psi(\alpha,\mu)=0_2, \tag{12}$$

где $\psi(\alpha,\mu)$ — выражение, в которое входят слагаемые, содержащие интегралы с участием матрицы $\Phi(t,\alpha,\mu)$. Заметим, что

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{-1}\psi(\alpha,\mu)=0,$$

где $\rho=\max\{\|\alpha\|,\|\mu\|\}$.

Непосредственными вычислениями установлены следующие утверждения.

1. Для рассматриваемой матрицы A фундаментальная матрица линейной системы $\dot{x} = Ax$, удовлетворяющая условию $X(0) = E$, имеет вид
$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t + \dfrac{a}{\omega}\sin\omega t & \dfrac{b}{\omega}\sin\omega t \\ -\dfrac{c}{\omega}\sin\omega t & \cos\omega t - \dfrac{a}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix}.$$
Отсюда следует, что $X(T) = E$.
2. Для рассматриваемой матрицы A и любой матрицы M справедливо
$$\int\limits_0^T X^{-1}(t)(AM - MA)X(t)\alpha dt = 0_2.$$
3. Если $T = 2\pi/\omega$, то
$$\int\limits_0^T \sin^s \omega t \cos^q \omega t \equiv 0$$
при s или q нечетном и
$$\int\limits_0^T \sin^s \omega t \cos^q \omega t \neq 0$$
при s и q четных.
4. Для рассматриваемой матрицы A и любой матрицы M
$$\int\limits_0^T X^{-1}(t)(M^2A - MAM)X(t)\alpha dt = -\frac{\pi}{\omega^3}h(\mu)A\alpha,$$
где $h(\mu) = 4a^2m_{12}m_{21} - bc(m_{11} - m_{22})^2 - 2a(m_{11} - m_{22})(cm_{12} - bm_{21}) - (cm_{12} + bm_{21})^2$.

Лемма 2. *Для рассматриваемой матрицы A и любой матрицы M если порядок всех форм, входящих в $f(x)$, четный, то*
$$\int\limits_0^T X^{-1}(t)\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt = 0_2.$$

Доказательство. Для рассматриваемой матрицы A в силу вида матрицы $X(t)$ в компоненты вектора $X(t)\alpha$ входят функции $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Тогда непосредственным вычислением устанавливаем, что для любой матрицы M в формуле (12) компоненты матрицы $X^{-1}(t)\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)$ содержат слагаемые вида $\sin^s\omega t\cos^q\omega t$, где $s + q = k + 1$. Тогда при k четном число $k + 1 = s + q$ является нечетным, следовательно, одно из чисел s или q нечетное, и
$$\bar{G}(\alpha)\alpha \equiv \int\limits_0^T X^{-1}(t)\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt = 0_2.$$
Лемма доказана. □

Замечание 1. Если хотя бы одна из форм, входящих в $f(x)$, имеет нечетный порядок k, то число $k + 1 = s + q$ является четным, следовательно, числа s и q четные или нечетные одновременно. Тогда вектор-функция
$$\bar{G}(\alpha)\alpha \equiv \int\limits_0^T X^{-1}(t)\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt$$

может быть как нулевой, так и ненулевой.

Обозначим

$$\bar{\psi}(\alpha,\mu) = \int\limits_0^T X^{-1}(t)\sum_{i=3}^{+\infty}(-1)^i(M^iA - M^{i-1}AM)X(t)\alpha dt +$$
$$+\int\limits_0^T X^{-1}(t)\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^iM^i\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt + \psi(\alpha,\mu).$$

Очевидно, что

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{-1}\bar{\psi}(\alpha,\mu) = 0.$$

С учетом утверждений 1–4, леммы 2 и замечания 1 систему уравнений (12) можно рассматривать для двух случаев: $\bar{G}(\alpha)\alpha \neq 0_2$ и $\bar{G}(\alpha)\alpha = 0_2$. Рассмотрим оба случая.

4. Случай 1. Пусть $\bar{G}(\alpha)\alpha \neq 0_2$. Обозначим l — наименьший порядок форм, входящих в вектор-функцию $\bar{G}(\alpha)\alpha$, относительно компонент вектора α. Тогда условие существования ненулевого T-периодического решения системы (2) примет вид

$$-\frac{\pi}{\omega^3}h(\mu)A\alpha + \bar{G}(\alpha)\alpha + \bar{\psi}(\alpha,\mu) = 0_2. \tag{13}$$

Умножим систему (13) слева на матрицу A^{-1}. Обозначим $A^{-1}\bar{G}(\alpha) = (g_{ij}(\alpha))_{i,j=1}^2$. Построим элементы $m_{ij}(\mu)$ $(i,j = \overline{1;2})$ матрицы M в виде форм порядка $l-1$ относительно компонент вектора $\mu \in \mathbb{R}^m$, $l \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$. Тогда имеет место представление

$$-\frac{\pi}{\omega^3}h(\mu)E\alpha + A^{-1}\bar{G}(\alpha)\alpha = s_l(\alpha,\mu) + \bar{s}_l(\alpha,\mu), \tag{14}$$

где вектор-функция $s_l(\alpha,\mu)$ содержит формы порядка l относительно вектора (α,μ), а вектор-функция $\bar{s}_l(\alpha,\mu)$ — формы порядка выше l относительно вектора (α,μ). С учетом (14) условие (13) существования ненулевого T-периодического решения системы (2) примет вид

$$s_l(\alpha,\mu) + o(\rho^l) = 0_2. \tag{15}$$

Введем обозначения: $\alpha = \rho\beta$, $\mu = \rho\lambda$, $\zeta = (\beta,\lambda)$, $O(\rho) = \rho^{-l}o(\rho^l)$,

$$\lim_{\rho\to 0} O(\rho) = 0.$$

Тогда $\|\zeta\| = 1$, $s_l(\alpha,\mu) = \rho^l\tilde{s}_l(\zeta)$, $\bar{s}_l(\alpha,\mu) + \bar{\psi}(\alpha,\mu) = o(\rho)$, а систему (15) можно записать так:

$$\tilde{s}_l(\zeta) + O(\rho) = 0_2. \tag{16}$$

Следующая теорема представляет условие отсутствия ненулевых T-периодических решений системы (2) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Теорема 1. *Если при любом ζ $(\|\zeta\| = 1)$ выполнено неравенство $\tilde{s}_l(\zeta) \neq 0$, то существует такое число $\delta' \in (0;\delta_0)$, что для любых векторов $\alpha \in \mathrm{U}(\delta') \setminus \{0\}$, $\mu \in \mathrm{W}(\delta')$, система (2) не имеет ненулевых T-периодических решений.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что при всех $\zeta \in \mathbb{R}^{2+m}$ $(\|\zeta\| = 1)$ выполняется неравенство $\tilde{s}_l(\zeta) \neq 0_2$, то найдется число

$$L = \inf_{\|\zeta\|=1}\|\tilde{s}_l(\zeta)\| > 0$$

такое, что $\|\tilde{s}_l(\zeta)\| > L$. Выберем число $\delta' \in (0;\delta_0)$ так, чтобы при любом $\zeta \in \mathbb{R}^{2+m}$ $(\|\zeta\| = 1)$, некотором фиксированном $\rho \in (0;\delta')$ выполнялось неравенство $\|O(\rho)\| < L/2$. Тогда при любом $\zeta \in \mathbb{R}^{2+m}$ $(\|\zeta\| = 1)$ имеет место неравенство $\tilde{s}_l(\zeta) + O(\rho) \neq 0_2$. Следовательно, система (15) в ε-окрестности начала координат не имеет других решений, кроме нулевого. Это означает, что при всех $\alpha \in \mathrm{U}(\delta') \setminus \{0\}$, $\mu \in \mathrm{W}(\delta')$ система (2) не имеет ненулевых T-периодических решений. Теорема 1 доказана. □

Из теремы 1 следует, что необходимым условием существования ненулевых T-периодических решений системы (2) является существование вектора $\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2+m}$ ($\|\zeta_0\| = 1$), для которого выполняется неравенство $\tilde{s}_l(\zeta_0) \neq 0$.

Обозначим множество $\mathrm{Z}_0 = \{\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\zeta_0\| = 1 \wedge \tilde{s}_l(\zeta_0) = 0\}$. Для каждого вектора $\zeta_0 \in \mathrm{Z}_0$ найдется такое число $\rho \in (0;\delta_0)$, что существует вектор $(\alpha_0, \mu_0) \in \mathrm{U}(\delta_0)\backslash\{0\}\times\mathrm{W}(\delta_0)$, $(\alpha_0, \mu_0) = \rho\zeta_0$ и $\bar{s}_l(\alpha_0, \mu_0) = 0$.

Лемма 3. *Для существования вектора* $\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2+m}$ ($\|\zeta_0\| = 1$), *удовлетворяющего уравнению* $\tilde{s}_l(\zeta) = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор* $\alpha_0 \in \mathrm{U}(\delta_0) \setminus \{0\}$, *что*

$$\Big(cg_{11}(\alpha_0) + ag_{21}(\alpha_0)\Big)\alpha_{01}^2 + \Big(cg_{12}(\alpha_0) + a(g_{11}(\alpha_0) + g_{22}(\alpha_0)) + bg_{21}(\alpha_0)\Big)\alpha_{01}\alpha_{02} + \\ + \Big(ag_{12}(\alpha_0) + bg_{22}(\alpha_0)\Big)\alpha_{02}^2 = 0 \quad (17)$$

при всех $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$, $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02})$.

Доказательство. Пусть существует вектор $\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2+m}$ ($\|\zeta_0\| = 1$), $\tilde{s}_l(\zeta_0) = 0_2$, что равносильно существованию вектора $(\alpha_0, \mu_0) \in \mathrm{U}(\delta_0) \setminus \{0\} \times \mathrm{W}(\delta_0)$, $(\alpha_0, \mu_0) = \rho\zeta_0$, $\rho \in (0;\delta_0]$ и $\bar{s}_l(\alpha_0, \mu_0) = 0_2$. Последнее равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{\omega^3}h(\mu_0)(a\alpha_{01} + b\alpha_{02}) + g_{11}\alpha_{01} + g_{12}\alpha_{02} = 0, \\ \dfrac{\pi}{\omega^3}h(\mu_0)(c\alpha_{01} + a\alpha_{02}) + g_{11}\alpha_{01} + g_{12}\alpha_{02} = 0. \end{cases}$$

Исключая из обоих уравнений $\pi h(\mu_0)/\omega^3$ и выполняя тождественные преобразования, получим формулу (17) при всех $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$. Лемма 1 доказана. □

Пусть $D\tilde{s}_l(\zeta_0)$ — $(2 \times (2+m))$-матрица Якоби функции $\tilde{s}_l(\zeta)$, вычисленная при $\zeta = \zeta_0$. Следующая теорема устанавливает достаточные условия существования ненулевого T-периодического решения системы (2).

Теорема 2. *Если для вектора* $\zeta_0 \in \mathrm{Z}_0$ *справедливо равенство* $\operatorname{rank} D\tilde{s}_l(\zeta_0) = 2$, *то существует такое число* $\delta_1 \in (0;\delta_0)$, *что на множестве* $\mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\zeta - \zeta_0\| < \delta_1\}$ *система* (2) *имеет ненулевое* T*-периодическое решение* $\bar{x}(t, \alpha, \mu)$, *удовлетворяющее начальным условиям* $\bar{x}(0, \alpha, \mu) = \alpha$. *Начальные значения* $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0)$ *решений семейства определяются соотношениями* $(\alpha, \mu) = \rho(\zeta_0 + \Delta\zeta^*)$, $\zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta^*) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta)$.

Доказательство. В силу условий теоремы для любого фиксированного вектора $\zeta_0 \in \mathrm{Z}_0$ по формуле Тейлора имеем

$$\tilde{s}_l(\zeta) = \tilde{s}_l(\zeta_0) + D\tilde{s}_l(\zeta_0)\Delta\zeta + \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta) = D\tilde{s}_l(\zeta_0)\Delta\zeta + \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta), \quad (18)$$

где $\zeta_0 = (\beta_0, \lambda_0)$, $\alpha = \rho\beta$, $\mu = \rho\lambda$, $D\tilde{s}_l(\zeta_0)$ — $2\times(2+m)$-матрица Якоби функции $\tilde{s}_l(\zeta)$, вычисленная при $\zeta = \zeta_0$; $p_i(\zeta_0; \Delta\zeta)$ — непрерывная вектор-форма порядка i относительно $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0$; $\Delta\zeta = (\Delta\beta, \Delta\lambda)$. Из условия $\operatorname{rank} D\tilde{s}_l(\zeta_0) = 2$ следует представление

$$D\tilde{s}_l(\zeta_0)\Delta\zeta = S(\zeta_0)v + \tilde{S}(\zeta_0)w, \quad (19)$$

в котором $S(\zeta_0)$ и $\tilde{S}(\zeta_0)$ — матрицы размерностей 2×2 и $2 \times m$ соответственно; v — двумерный, w — m-мерный векторы из компонент вектора $\Delta\zeta$, выбранные так, чтобы $\det S(\zeta_0) \neq 0$. тогда из равенства (18) следует, что

$$\sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta) = \sum_{i=2}^{l} q_i(\zeta_0; v) + \tilde{q}(\zeta_0; v; w), \quad (20)$$

где в вектор-форму $q_i(\zeta_0; v)$ компоненты вектора v входят в степени i, $i \in \overline{2;k}$; $q_i(\zeta_0; 0) = 0$ для всех $i \in \overline{2;k}$. Для любого v

$$\lim_{\|w\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0; v; w) = 0$$

равномерно по v на множестве $\|v\| \leqslant \delta_1$, где $\delta_1 \in (0;\delta_0)$; $\tilde{q}(\zeta_0;v;0) = 0$. С учетом равенств (18)–(20) система (16) примет вид

$$S(\zeta_0)v + \tilde{S}(\zeta_0)w + \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0;\Delta\zeta) = \sum_{i=2}^{l} q_i(\zeta_0;v) + \tilde{q}(\zeta_0;v;w) + O(\rho) = 0. \tag{21}$$

Так как $\det S(\zeta_0) \neq 0$, то при всех v и w, любом $\rho \in (0;\delta_0]$ равенство (21) определяет некоторый нелинейный непрерывный по v оператор

$$\mathbf{H}v = S^{-1}(\zeta_0)\left(\tilde{S}(\zeta_0)w + \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0;\Delta\zeta) = \sum_{i=2}^{l} q_i(\zeta_0;v) + \tilde{q}(\zeta_0;v;w) + O(\rho)\right). \tag{22}$$

Из того, что для всех $i \in \overline{2;k}$ $q_i(\zeta_0;0) = 0$,

$$\lim_{\|w\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0;v;w) = 0$$

равномерно по $\|v\| \leqslant \delta_1$, где $\delta_1 \in (0;\delta_0)$; $\tilde{q}(\zeta_0;v;0) = 0$, и определения $O(\rho)$ следует, что существуют числа δ' и δ'', $\delta' \in (0;\delta_1]$, $\delta'' \in (0;\delta_0]$, такие, что при всех $\|v\| \leqslant \delta'$, $\|w\| < \delta'$, $\rho \in (0;\delta'')$ справедливы оценки

$$\|S^{-1}(\zeta_0)\| \cdot \|\tilde{S}(\zeta_0)\| \cdot \|w\| < \frac{\delta_1}{4}, \quad \|S^{-1}(\zeta_0)\| \cdot \left\|\sum_{i=2}^{l} q_i(\zeta_0;v)\right\| < \frac{\delta_1}{4},$$
$$\|S^{-1}(\zeta_0)\| \cdot \|\tilde{q}(\zeta_0;v;w)\| < \frac{\delta_1}{4}, \quad \|S^{-1}(\zeta_0)\| \cdot \|O(\rho)\| < \frac{\delta_1}{4},$$

из которых следует, что для любых фиксированных $\|w\| < \delta'$, $\rho \in (0;\delta'')$ оператор $\mathbf{H}$ непрерывен по v и отображает множество $\mathrm{V}(\delta') = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \leqslant \delta'\}$ в себя. По теореме Брауэра существует такой вектор $v^* \in \mathrm{V}(\delta')$, что $\mathbf{H}v^* = v^*$. Зафиксируем произвольные w^*, ρ^* так, что $\|w^*\| < \delta'$, $\rho^* \in (0;\delta'')$. Из компонент векторов v^* и w^* построим векторы $\Delta\zeta^* = (\Delta\beta^*, \Delta\lambda^*)$ и $\zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta^*) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1)$. По вектору $\zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta^*)$ найдем $\alpha = \rho^*(\beta_0 + \Delta\beta^*)$, $\mu = \rho^*(\lambda_0 + \Delta\lambda^*)$. Тогда решение $\bar{x}(t,\alpha,\mu)$, удовлетворяющее начальным условиям $\bar{x}(0,\alpha,\mu) = \alpha$, является искомым ненулевым T-периодическим решением. Теорема 2 доказана. □

Замечание 2. Подставляя найденное решение системы (2) в выражение $x = (E+M)\bar{x}$, получим семейство ненулевых T-периодических решений системы (1) $x(t,\alpha) = (E+M)\bar{x}(t,\alpha,\mu)$ с начальными условиями $x(0,\alpha) = \alpha$.

Замечание 3. Количество периодических решений системы (2) с начальными условиями $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0) \setminus \{0\}$ определяется количеством решений системы $\tilde{s}_l(\zeta) = 0_2$. Если эта система имеет конечное множество решений, в окрестности $\mathrm{U}(\delta_0)$ точка $x \equiv 0$ является центро-фокусом. В силу леммы 3 возможен случай, когда существует бесконечное множество решений системы $\tilde{s}_l(\zeta) = 0_2$, что соответствует случаю центра в окрестности $\mathrm{U}(\delta_0)$ (см [8]).

Если для вектора $\zeta_0 \in \mathrm{Z}_0$ справедливо неравенство $\operatorname{rank} D\tilde{s}_l(\zeta_0) = 1$, то с использованием (18) систему (16) запишем в виде

$$D\tilde{s}_l(\zeta_0)\Delta\zeta + p_2(\zeta_0;\Delta\zeta) + o(\|\Delta\zeta\|^2) + O(\rho) = 0, \tag{23}$$

в котором $p_2(\zeta_0;\Delta\zeta)$ — вектор-форма второго порядка относительно компонент вектора $\Delta\zeta$,

$$o(\|\Delta\zeta\|^2) = \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0;\Delta\zeta), \quad \lim_{\|\Delta\zeta\|\to 0} \frac{o(\|\Delta\zeta\|^2)}{\|\Delta\zeta\|^2} = 0.$$

Далее систему (23) умножим слева на неособенную матрицу

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\zeta_{0\alpha_2}}{\zeta_{0\alpha_1}} & 1 \end{pmatrix},$$

тогда, вводя обозначения

$$KD\tilde{s}_l(\zeta_0) = \begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_l(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $D_1\tilde{s}_l(\zeta_0)$ — первая строка матрицы $D\tilde{s}_l(\zeta_0)$;

$$Kp_2(\zeta_0;\Delta\zeta) = \begin{pmatrix} p_{2(1)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \\ \tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) = p_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) - \frac{\zeta_{0\alpha_2}}{\zeta_{0\alpha_1}} p_{2(1)}(\zeta_0;\Delta\zeta);$$

$\tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) = Ko(\|\Delta\zeta\|^2)$, $\tilde{O}(\rho) = KO(\rho)$, приведем ее к следующему виду

$$\begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_l(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix}\Delta\zeta + \begin{pmatrix} p_{2(1)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \\ \tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \end{pmatrix} + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho) = 0_2. \tag{24}$$

Введем в рассмотрение множество $\Lambda_{\zeta_0}(\delta_1) = \{\Delta\zeta \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\Delta\zeta\| \leqslant \delta_1 \wedge (\zeta_0 + \Delta\zeta) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1)\}$.

Теорема 3. *Если при всех $\Delta\zeta \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$ выполнено неравенство $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \neq 0$, то существует такое число $\delta'' \in (0;\min\{\delta_0,\delta_1\})$, что при всех $(\alpha,\mu) \in \mathrm{U}(\delta'')\setminus\{0\}\times\mathrm{W}(\delta'')$ система* (2) *не имеет ненулевых малых T-периодических решений.*

Доказательство. Так как при всех $\Delta\zeta \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$ выполняется неравенство $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \neq 0$, то в силу непрерывности формы $\tilde{p}_{2(2)}$ найдется число

$$L = \inf_{\Delta\zeta\in\Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)} |\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta)| > 0$$

такое, что $|\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta)| > L$. Выберем число $\delta'' \in (0;\min\{\delta_0,\delta_1\})$ так, чтобы при любом $\Delta\zeta \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta'')$, некотором фиксированном $\rho \in (0;\delta'')$ выполнялись неравенства $|\tilde{o}_{(2)}(\|\Delta\zeta\|^2)| < L/3$, $|\tilde{O}_{(2)}(\rho)| < L/3$. Тогда при любом $\Delta\zeta \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta'')$ имеет место неравенство $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) + \tilde{o}_{(2)}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}_{(2)}(\rho) \neq 0$. Следовательно, система (24) в δ''-окрестности начала координат не имеет других решений, кроме нулевого. Это означает, что при всех $(\alpha,\mu) \in \mathrm{U}(\delta'')\setminus\{0\}\times\mathrm{W}(\delta'')$ система (2) не имеет ненулевых T-периодических решений. Теорема 3 доказана. □

Пусть существует вектор $\Delta\zeta_0 \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$, при котором выполняется равенство $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta_0) = 0$. Обозначим $D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)$ — матрицу Якоби вектор-функции $Kp_2(\zeta_0;\Delta\zeta)$, вычисленную при $\Delta\zeta_0$, $(KD\tilde{s}_l(\zeta_0)|D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0))$ — матрицу, составленную приписыванием к матрице $KD\tilde{s}_l(\zeta_0)$ столбцов матрицы $D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)$. Определим множество $\mathrm{S}_{\Delta\zeta_0}(\delta_1) = \{\Delta\xi \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\xi\| \equiv \|\Delta\zeta - \Delta\zeta_0\| \leqslant \delta_1 \wedge \Delta\zeta_0 \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)\}$.

Теорема 4. *Если для вектора $\Delta\zeta_0 \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$, удовлетворяющего условию $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta_0) = 0$, справедливо равенство*

$$\operatorname{rank}(KD\tilde{s}_l(\zeta_0)|D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)) = 2,$$

то существует такое число $\delta_2 \in (0;\min\{\delta_0,\delta_1\})$, что на множестве $\mathrm{S}_{\Delta\zeta_0}(\delta_2)$ система (2) *имеет ненулевое T-периодическое решение $\bar{x}(t,\alpha,\mu)$, удовлетворяющее начальным условиям $\bar{x}(0,\alpha,\mu) = \alpha$. Начальные значения $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0)$ решений семейства определяются соотношениями*

$$(\alpha,\mu) = \rho(\zeta_0 + \Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi), \quad \zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1) \oplus \mathrm{S}_{\Delta\zeta_0}(\delta_2).$$

Доказательство. Предположим, что существует вектор $\Delta\zeta_0 \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$, удовлетворяющий условию $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta_0) = 0$. Разложим вектор-функцию $Kp_2(\zeta_0;\Delta\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности $\Delta\zeta_0$. Тогда система (24) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_l(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix}\Delta\zeta + D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)\Delta\xi + \sum_{i=2}^{j} q_i(\zeta_0,\Delta\zeta_0,\Delta\xi) + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho) = 0_2, \tag{25}$$

в котором $q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi)$ — вектор-форма порядка i относительно $\Delta\xi = \Delta\zeta - \Delta\zeta_0$. Так как $\operatorname{rank}(KD\tilde{s}_l(\zeta_0)|D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)) = 2$, то справедливо представление

$$\begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_l(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix} \Delta\zeta + D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)\Delta\xi = P_1\bar{w} + P_2\bar{\bar{w}}, \tag{26}$$

где P_1, P_2 — матрицы размерностей 2×2 и $2\times m$ соответственно, векторы $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$ имеют размерности 2 и m соответственно и выбраны так, чтобы $\|\bar{w}\| \neq 0$ и $\det P_1 \neq 0$. Тогда в силу вида вектор-форм $q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi)$ имеет место представление

$$\sum_{i=2}^{j} q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi) = \sum_{i=2}^{j} \left(\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) + \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})\right) + \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}), \tag{27}$$

в котором $\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w})$, $\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})$ — формы порядка i относительно компонент векторов $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$ соответственно, $i = \overline{2;j}$, $\tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}})$ — сумма форм не ниже второго порядка по совокупности компонент векторов $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$. Для всех $i = \overline{2;j}$ справедливы равенства $\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$, $\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$,

$$\lim_{\|\bar{\bar{w}}\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0 \quad \text{равномерно по } \bar{w} \text{ на множестве } \|\bar{w}\| \leqslant \delta_2,$$
$$\lim_{\|\bar{w}\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0 \quad \text{равномерно по } \bar{\bar{w}} \text{ на множестве } \|\bar{\bar{w}}\| \leqslant \delta_2,$$

где $\delta_2 \in (0; \min\{\delta_0, \delta_1\})$. С учетом (26) и (27) система (25) примет вид

$$P_1\bar{w} + P_2\bar{\bar{w}} + \sum_{i=2}^{j}(\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) + \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})) + \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho) = 0_2. \tag{28}$$

Так как $\det P_1 \neq 0$, то при всех $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$ и любом $\rho \in (0;\delta_2)$ уравнение (28) определяет некоторый нелинейный непрерывный по $\bar{w}$ оператор

$$\mathbf{B}\bar{w} = -P_1^{-1}P_2\bar{\bar{w}} - P_1^{-1}\sum_{i=2}^{j}(\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) + \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})) - - P_1^{-1}(\tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho)). \tag{29}$$

Так как для всех $i = \overline{2;j}$ справедливы равенства $\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$, $\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$,

$$\lim_{\|\bar{\bar{w}}\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0 \quad \text{равномерно по } \bar{w} \text{ на множестве } \|\bar{w}\| \leqslant \delta_2,$$
$$\lim_{\|\bar{w}\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0 \quad \text{равномерно по } \bar{\bar{w}} \text{ на множестве } \|\bar{\bar{w}}\| \leqslant \delta_2,$$

а также из определения $\tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2)$ и $\tilde{O}(\rho)$ следует, что существуют такие числа δ, δ' и δ'', $\delta \in (0;\delta_2]$, $\delta' \in (0;\delta_2]$, $\delta'' \in (0;\delta_2]$, что при всех $\|\bar{w}\| \leqslant \delta$, $\|\bar{\bar{w}}\| < \delta$, $\|\Delta\zeta\| < \delta'$, $\rho \in (0;\delta'')$ справедливы оценки

$$\|P_1^{-1}\|\|P_2\|\|\bar{\bar{w}}\| < \frac{\delta}{6}, \quad \|P_1^{-1}\| \left\|\sum_{i=2}^{j}(\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}))\right\| < \frac{\delta}{6}, \quad \|P_1^{-1}\| \left\|\sum_{i=2}^{j}(\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}}))\right\| < \frac{\delta}{6},$$
$$\|P_1^{-1}\|\|\tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}})\| < \frac{\delta}{6}, \quad \|P_1^{-1}\|\|\tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) < \frac{\delta}{6}, \quad \|P_1^{-1}\|\|\tilde{O}(\rho)\| < \frac{\delta}{6},$$

из которых следует, что для любых фиксированных $\|\bar{\bar{w}}\| < \delta$, $\|\Delta\zeta\| < \delta'$ $\rho \in (0;\delta'')$ оператор $\mathbf{B}$ непрерывен по $\bar{w}$ и отображает множество $\bar{\mathrm{V}}(\delta) = \{\bar{w} \in \mathbb{R}^2 : \|\bar{w}\| \leqslant \delta\}$ в себя. По теореме Брауэра существует такой вектор $\bar{w}^* \in \bar{\mathrm{V}}(\delta)$, что $\mathbf{B}\bar{w}^* = \bar{w}^*$. Зафиксируем произвольные $\bar{\bar{w}}^*$, $\Delta\zeta^*$, ρ^* так, что $\|\bar{\bar{w}}^*\| < \delta$, $\|\Delta\zeta^*\| < \delta'$, $\rho^* \in (0;\delta'')$. Из компонент векторов $\bar{w}^*$ и $\bar{\bar{w}}^*$ построим векторы $(\alpha, \mu) = \rho^*(\zeta_0 + \Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi^*)$, $\zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi^*) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1) \oplus \mathrm{S}_{\Delta\zeta_0}(\delta_2)$. Тогда решение $\bar{x}(t, \alpha, \mu)$, удовлетворяющее начальным условиям $\bar{x}(0, \alpha, \mu) = \alpha$, является искомым ненулевым T-периодическим решением. Теорема 3 доказана. □

Замечание 4. Подставляя найденное решение системы (2) в выражение $x = (E + M)\bar{x}$, получим семейство ненулевых T-периодических решений системы (1) $x(t, \alpha) = (E + M)\bar{x}(t, \alpha, \mu)$ с начальными условиями $x(0, \alpha) = \alpha$.

Замечание 5. Количество периодических решений системы (2) с начальными условиями $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0) \setminus \{0\}$ определяется количеством решений уравнения $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta) = 0$. Если это уравнение имеет конечное множество решений, то в окрестности $\mathrm{U}(\delta_0)$ точка $x \equiv 0$ является центро-фокусом. В силу леммы 3 возможен случай, когда существует бесконечное множество решений системы $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta) = 0_2$, что соответствует случаю центра в окрестности $\mathrm{U}(\delta_0)$.

Если же $\operatorname{rank} D\tilde{s}_l(\zeta_0) = 0$, то для системы (32) следует повторить рассуждения случая 1 для форм $p_i(\zeta_0, \Delta\zeta)$ порядка $i \geqslant 2$, получающихся при разложении вектор-формы $\tilde{s}_l(\zeta_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки ζ_0 (теоремы 1 и 2).

5. Случай 2. Пусть $\bar{G}(\alpha)\alpha \equiv 0_2$. Тогда условие существования ненулевого T-периодического решения системы (2) примет вид

$$-\frac{\pi}{\omega^3} h(\mu) A\alpha + \bar{\psi}(\alpha, \mu) = 0_2. \tag{30}$$

Умножим систему (30) слева на матрицу A^{-1} и на число $-\omega^3/\pi$. Обозначим $(-\omega^3/\pi)A^{-1}\bar{\psi}(\alpha, \mu) = \tilde{\psi}(\alpha, \mu)$. Построим элементы $m_{ij}(\mu)$ $(i, j = \overline{1; 2})$ матрицы M в виде форм порядка l относительно компонент вектора $\mu \in \mathbb{R}^m$, $l \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$. Тогда имеет место представление

$$h(\mu) E\alpha = s_{l+1}(\alpha, \mu), \tag{31}$$

где вектор-функция $s_{l+1}(\alpha, \mu)$ содержит формы порядка $l+1$ относительно вектора (α, μ). С учетом представления (31) условие (30) существования ненулевого T-периодического решения системы (2) примет вид

$$s_{l+1}(\alpha, \mu) + o(\rho^{l+1}) = 0_2. \tag{32}$$

В силу вида вектор-вормы $s_{l+1}(\alpha, \mu)$ всегда существует размерность $m_0 \in \mathbb{N}$ и вектор $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$, что $s_{l+1}(\alpha, \mu_0) = 0_2$. Для указанной размерности $m_0 \in \mathbb{N}$ и любого вектора $(\alpha, \mu_0) \in \mathbb{R}^{2+m_0}$ справедливо равенство $\operatorname{rank} Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0) \leqslant 1$, где $Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0)$ — матрица Якоби вектор-формы $s_{l+1}(\alpha, \mu)$, вычисленная для любого вектора $(\alpha, \mu_0) \in \mathbb{R}^{2+m_0}$. Если $\operatorname{rank} Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0) = 1$, то вопрос о существовании ненулевых T-периодических решений системы (2) рассматривается аналогично случаю 1 (теоремы 3 и 4). Если же $\operatorname{rank} Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0) = 0$, то для системы (32) следует повторить рассуждения случая 1 для форм порядка не ниже 2, получающихся при разложении вектор-формы $s_{l+1}(\alpha, \mu_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (α, μ_0) (теоремы 1 и 2).

Таким образом, получен алгоритм нахождения условий существования ненулевого решения системы (32), длительность которого зависит от выбора значения l.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амелькин В. В., Лукашевич Л. А., Садовский А. П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. — Минск: Изд-во БГУ, 1982.
2. *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. — Минск: Вышэйшая школа, 1979.
3. *Андреев А. Ф., Андреева И. А.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. — Lambert Academic, 2017.
4. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1991.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. *Ильяшенко Ю. С., Яковенко С. Ю.* Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Т. 1. — М.: МЦНМО, 2013.
7. *Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Кудряшова Е. В., Кузнецова О. А.* Современные методы символьных вычислений: ляпуновские величины и 16-я проблема Гильберта// Тр. СПИИРАН. — 2011. — № 16. — С. 5–36.
8. *Лискина Е. Ю.* О достаточных условиях существования центра нелинейной динамической системы второго порядка// Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2007. — № 12. — С. 32–38.
9. *Лискина Е. Ю.* Проблема существования множества ненулевых периодических решений нелинейной автономной динамической системы второго порядка// Вестн. РАЕН. — 2015. — *254*, № 3. — С. 70–77.
10. *Медведева Н. Б.* Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2006. — *254*. — С. 11–100.

11. *Садовский А. П.* Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний// Диффер. уравн. — 1997. — *33*, № 2. — С. 236–244.
12. *Терехин М. Т.* Малые периодические решения системы дифференциальных уравнений// Диффер. уравн. мат. модел. — 2020. — № 1. — С. 64–92.

Лискина Екатерина Юрьевна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru, katelis@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 63–72
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-63-72

УДК 517.95

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ С ТРЕХКОМПОНЕНТНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

© 2022 г. **Л. Г. ШАГАЛОВА**

Аннотация. На ограниченном отрезке времени рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби эволюционного типа в случае, когда размерность фазовой переменной равна единице. Гамильтониан зависит от фазовой и импульсной переменных, при этом зависимость от импульсной переменной экспоненциальна. Область, в которой рассматривается уравнение, разбивается на три подобласти. Внутри каждой из трех областей гамильтониан непрерывен, а на границах этих областей терпит разрыв по фазовой переменной. На основе минимаксного/вязкостного подхода вводится непрерывное обобщенное решение рассматриваемой задачи, доказывается его существование. Обобщенное решение является единственным, если задача рассматривается в ограниченной по фазовой переменной области.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона—Якоби, разрывный гамильтониан, некоэрцитивный гамильтониан, обобщенное решение, вязкостное решение.

GENERALIZED SOLUTION OF THE HAMILTON–JACOBI EQUATION WITH A THREE-COMPONENT HAMILTONIAN

© 2022 **L. G. SHAGALOVA**

Abstract. On a bounded time interval, we consider the Cauchy problem for the of evolutionary Hamilton–Jacobi equation in the case where the dimension of the phase variable is equal to one. The Hamiltonian depends on the phase and momentum variables and the dependence on the momentum variable is exponential. The domain in which the equation is considered is divided into three subdomains. Inside each of the three subdomains, the Hamiltonian is continuous, while at the boundaries of these subdomains it is discontinuous with respect to the phase variable. Based on the minimax/viscosity approach, we introduce the notion of a continuous generalized solution of the problem and prove its existence. The generalized solution is unique if the problem is considered in a domain bounded with respect to the phase variable.

Keywords and phrases: Hamiltonian–Jacobi equation, discontinuous Hamiltonian, noncoercive Hamiltonian, generalized solution, viscosity solution.

AMS Subject Classification: 35F21, 35F25

1. Введение. В теории уравнений Гамильтона—Якоби известны различные концепции обобщенного решения (см., например [1, 4, 8, 9, 12]). В рамках этих концепций рассмотрены решения начальных и краевых задач различных типов, доказаны теоремы существования и единственности, изучены свойства решений и разработаны методы их построения. При этом на входные данные задачи, в частности, на гамильтониан, накладываются определенные требования, обеспечивающие существование решения. Как правило, гамильтониан предполагается непрерывным и удовлетворяющим при этом некоторым дополнительным условиям, таким как липшицевость, условие подлинейного роста или условие коэрцитивности по импульсной переменной.

Вместе с тем ряд практических задач (например, в кристаллографии [14]) приводят к уравнениям Гамильтона—Якоби, в которых гамильтониан не удовлетворяет указанным требованиям, и известные теоремы существования обобщенных решений не выполнены. Для таких задач приходится вводить новые определения решений.

В данной работе рассматривается уравнение Гамильтона—Якоби с гамильтонианом, зависящим от фазовой и импульсной переменной. Фазовая переменная одномерна, а зависимость от импульсной переменной экспоненциальна. Задачи с экспоненциальной зависимостью гамильтониана от импульсной переменной нетипичны для теории уравнений Гамильтона—Якоби. Вместе с тем такие уравнения возникают в прикладных исследованиях, в частности, в молекулярной генетике [11]. Ранее уравнение подобного типа исследовалось [5–7] в ограниченной по x замкнутой области $G = \{(t,x) \mid t \in [0,T],\ x \in [-1;1]\}$. В [5] непрерывный гамильтониан не удовлетворял условию коэрцитивности на границе, и для задачи Коши не существовало вязкостного [8, 9] решения, что потребовало ввести новое определение обобщенного решения. При этом обобщенное решение было неединственным. В [6] представлены достаточные условия существования глобального решения, сохраняющего структуру, задаваемую начальным многообразием, в [7] исследовано поведение такого решения при больших значениях времени.

В настоящей работе область, в которой рассматривается уравнение, прямыми вида $x = x_*$ и $x = x^*$, где $x_* < x^*$, разбивается на три подобласти, в которых гамильтониан задается разными формулами. Внутри каждой из областей гамильтониан непрерывен, но на линиях, разделяющих эти области, терпит разрыв по фазовой переменной. В каждой из областей гамильтониан является выпуклым по импульсной переменной, но для него не выполнены известные условия существования вязкостого (минимаксного [4, 12]) решений.

Для рассматриваемой задачи Коши на основе вязкостного/минимаксного подхода вводится непрерывное обобщенное решение, доказывается его существование. Доказательство основано на анализе поведения решений характеристической системы и имеет конструктивный характер — сначала строится решение в замыкании средней области $\operatorname{cl} G_0 = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ x_* \leqslant x \leqslant x^*\}$, которое затем непрерывно продолжается на области $G_- = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ x < x_*\}$ и $G_+ = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ x > x_*\}$. Обобщенное решение является единственным, если задача рассматривается в ограниченной по фазовой переменной области $G^M = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ -M < x < M*\}$, где $M > \max\{|x_*|, |x^*|\}$.

2. Постановка задачи.

2. Постановка задачи. Рассматривается следующая задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби эволюционного типа.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Здесь T — заданный момент времени, $T > 0$, $u_0(\cdot)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Предполагается, что заданы непрерывно дифференцируемые функции $h(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а также $f(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(\cdot)$ является монотонно возрастающей, а $g(\cdot)$ — монотонно убывающей. Пусть существуют точки x_* и x^* такие, что $f(x_*) = 0$, $g(x^*) = 0$, и справедливо неравенство $x_* < x^*$.

Задача (1), (2) рассматривается в предположении, что гамильтониан имеет вид

$$H(x,p) = \begin{cases} g(x)e^{-p}, & x < x_*,\ p \in \mathbb{R} \\ h(x) + f(x)e^{p} + g(x)e^{-p}, & x_* \leqslant x \leqslant x^*,\ p \in \mathbb{R} \\ f(x)e^{p}, & x > x^*,\ p \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

Введя функции

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad h_{[x_*,x^*]}(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [x_*, x^*] \\ 0, & x \notin [x_*, x^*], \end{cases}$$

гамильтониан (3) можно записать в виде
$$H(x,p) = h_{[x_*,x^*]}(x) + f^+(x)e^p + g^+(x)e^{-p}.$$

Определим области
$$G_- = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x < x_*\},$$
$$G_0 = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x_* < x < x^*\},$$
$$G_+ = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x < x^*\}.$$

Справедливо равенство
$$[0,T] \times \mathbb{R} = \operatorname{cl} G_- \cup \operatorname{cl} G_0 \cup \operatorname{cl} G_+,$$
где $\operatorname{cl} G$ обозначает замыкание множества G.

Таким образом, область $[0,T) \times \mathbb{R}$, в которой рассматривается задача (1), (2), разбивается на три подобласти, в каждой из которых гамильтониан определяется соответствующей непрерывной функцией, и если $h(x_*) \neq 0$, $h(x^*) \neq 0$, на границах этих областей гамильтониан разрывен.

Для задачи Коши (1)–(3) с разрывным гамильтонианом требуется определить непрерывное обобщенное решение, исследовать вопросы существования и единственности такого решения.

3. Вязкостное решение в области $\operatorname{cl} G_0$**.** Обобщенное решение задачи (1)–(3) будет строиться на базе понятия вязкостного решения, которое при определенных условиях (например, липшицевости гамильтониана по фазовой и импульсной переменным) эквивалентно введенному А. И. Субботиным минимаксному решению [4, 12].

Напомним одно из эквивалентных определений вязкостного решения для уравнения с непрерывным гамильтонианом. Приведем его для актуального в данной работе случая одномерной фазовой переменной.

Пусть задано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Символом $C(W)$ будем обозначать класс функций, непрерывных на множестве W.

Пусть $u(\cdot) \in C(W)$ и $(t,x) \in W$. Субдифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество
$$D^-u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \liminf_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\ (\tau,y)\in W}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geqslant 0 \right\}. \tag{4}$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество
$$D^+u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \limsup_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\ (\tau,y)\in W}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leqslant 0 \right\}.$$

Определение 1. Функция $u \in C(W)$ называется нижним вязкостным решением уравнения (1) на множестве W, если справедливо неравенство
$$a + H(x,s) \leqslant 0, \quad \forall (t,x) \in W,\ \forall (a,s) \in D^+u(t,x). \tag{5}$$
Функция $u \in C(W)$ называется верхним вязкостным решением уравнения (1) на W, если справедливо неравенство
$$a + H(x,s) \geqslant 0, \quad \forall (t,x) \in W,\ \forall (a,s) \in D^-u(t,x). \tag{6}$$
Непрерывная функция $u(\cdot)$ называется вязкостным решением уравнения (1) на W, если она является одновременно нижним и верхним решением (1) на W.

Если множество W ограничено и замкнуто, функция $u(\cdot)$, являющаяся вязкостным решением уравнения (1) на этом множестве, согласно определению 1 должна удовлетворять обоим неравенствам (5),(6) как во внутренних, так и в граничных точках множества W.

В работе [8] обобщенное решение уравнения (1) на ограниченном замкнутом множестве $\operatorname{cl} W$ определялось как функция, являющаяся вязкостным решением на внутренности множества W

и верхним вязкостным решением на границе ∂W этого множества — этих условий достаточно для существования и единственности решения, удовлетворяющего заданному начальному условию. Таким образом, в граничных точках множества W для вязкостного решения следует проверять только неравенство (6).

Отметим, что в граничных точках множества W субдифференциал $D^-u(t,x)$, если он непуст, является неограниченным множеством. Действительно, пусть $(t_*,y_*)\in\partial W$, $(a,s)\in D^-u(t_*,y_*)$, а вектор (n_1,n_2) является внешней нормалью к множеству $\operatorname{cl}W$ в точке (t_*,y_*). Тогда, как нетрудно заметить из определения (4) субдифференциала, для любого положительного числа k справедливо

$$(a+kn_1,s+kn_2)\in D^-u(t_*,y_*).$$

Построим вязкостное решение задачи (1), (2) на замкнутом множестве $\operatorname{cl}G_0$. Согласно (3) гамильтониан в этой области имеет вид

$$H(x,p)=h(x)+f(x)e^p+g(x)e^{-p}. \tag{7}$$

Поскольку в рассматриваемой области функции f и g неотрицательны, гамильтониан является выпуклым. Кроме того, в открытой области G_0 гамильтониан (7) удовлетворяет условию коэрцитивности

$$H(x,p)\to+\infty \quad \text{при} \quad |p|\to\infty. \tag{8}$$

На границах $x=x_*$ и $x=x^*$ условие (8) не выполняется.

Для $\varepsilon>0$ определим область

$$G_0^\varepsilon=\{(t,x)\mid 0\leqslant t<T,\ x_*+\varepsilon\leqslant x\leqslant x^*-\varepsilon\}.$$

Из результатов пункта (5) в [8, Theorem X.I, p. 678] получаем, что в области $G_0^\varepsilon\subset G_0$ существует единственное вязкостное решение. При этом его значение в точке $(t,x)\in G_0^\varepsilon$ равно

$$u(t,x)=\inf\left\{u_0(\xi(0))+\int\limits_0^t H^*(\xi(s),\dot\xi(s))ds:\xi(0)=y,\ \xi(t)=x,\ y\in[x_*+\varepsilon;\ x^*-\varepsilon]\right\}. \tag{9}$$

Здесь H^* — функция, сопряженная к гамильтониану, определяемая следующим образом

$$H^*(x,q)=\sup_{p\in\mathbb{R}}\{pq-H(x,p)\}.$$

Функции ξ, по которым ищется инфимум в (9), принадлежат классу $C^1(0,T;[x_*+\varepsilon;x^*-\varepsilon])$ непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[0,T]$ и принимающих значения из отрезка $[x_*+\varepsilon;x^*-\varepsilon]$.

Характеристическая система (см., например, [2,13]) для задачи (1), (2) с гамильтонианом (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot x=H_p(x,p)=f(x)e^p-g(x)e^p,\\
&\dot p=-H_x(x,p)=-h'(x)-f'(x)e^p-g'(x)e^{-p},\\
&\dot z=pH_p(x,p)-H(x,p)=p(f(x)e^p-g(x)e^p)-f(x)e^p-g(x)e^p-h(x)
\end{aligned} \tag{10}$$

и рассматривается с начальными условиями

$$x(0,y)=y,\quad p(0,y)=u_0'(y),\quad z(0,y)=u_0(y),\quad y\in[x_*+\varepsilon;x^*-\varepsilon]. \tag{11}$$

Здесь $H_x(x,p)=\partial H(x,p)/\partial x$, $H_p(x,p)=\partial H(x,p)/\partial p$, а символом $f'(x)$ обозначается производная функции $f(x)$. Решения системы (10), (11) называются характеристиками. Компоненты $x(\cdot,y)$, $p(\cdot,y)$ и $z(\cdot,y)$ решения называются соответственно фазовыми, импульсными и ценовыми характеристиками.

Выписывая необходимые условия экстремума для вариационной задачи (9), можно показать, что инфимум достигается на фазовых характеристиках, и согласно методу обобщенных характеристик [10,13] значение (9) вязкостного решения в точке $(t,x)\in G_0^\varepsilon$ равно

$$u(t,x)=\min\left\{u_0(y)+\int\limits_0^t(p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau))-H(x(\tau),p(\tau)))d\tau:x(t,y)=x\right\}. \tag{12}$$

где $x(t) = x(t,y)$ и $p(t) = p(t,y)$ являются соответственно фазовой и импульсной компонентами решения характеристической системы (10), (11), определяемого параметром $y \in [x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon]$.

Покажем, что вязкостное решение, определенное в открытой области G_0 репрезентативной формулой (12), можно непрерывно продолжить на границы области $x = x_*$ и $x = x^*$, и полученное продолжение будет вязкостным решением в области $\operatorname{cl} G_0$.

Рассмотрим в системе (10) уравнение для импульсной компоненты характеристики. Поскольку функции h, f и g, рассматриваемые на ограниченном отрезке $[x_*, x^*]$, непрерывно дифференцируемы, а f и g, кроме того, являются соответственно строго возрастающей и строго убывающей функциями, можно получить следующую оценку

$$-Ae^{p} - B < \dot p < Ae^{-p} + B,$$

где $A > 0$, $B \geqslant 0$. Используя эту оценку, можно показать, что найдутся числа $K > 0$, C_1 и C_2 такие, что

$$-Kt + C_1 < p(t) < Kt + C_2.$$

Из (3) получаем, что $p(t)$ внутри области G_0 принимают конечные значения, поэтому импульсные компоненты характеристик (10), как и фазовые компоненты, продолжимы либо до момента $t = T$, либо до верхней ($x = x^*$) или нижней ($x = x_*$) границы области G_0. Таким образом, устремляя ε к нулю, мы непрерывно продолжим заданную в областях G_0^ε функцию $u(t,x)$ на $\operatorname{cl} G_0$.

По схеме, аналогичной использованной в работе [5] для доказательства супердифференцируемости обобщенного решения, можно доказать, что функция $u(t,x)$ является субдифференцируемой в $\operatorname{cl} G_0$, то есть

$$\forall (t,x) \in \operatorname{cl} G_0 \quad D^-(t,x) \neq \emptyset.$$

Заметим, что если функция u дифференцируема в точке (t,x), тогда

$$D^-(t,x) = D^+(t,x) = \left\{ \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \right) \right\}.$$

Покажем, что на границах $x = x_*$ и $x = x^*$ выполняется дифференциальное неравенство (6).

Символом $\operatorname{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)$ дифференцируема. Определим множество

$$\partial u(t,x) = \operatorname{co}\Bigg\{ (a,s) : a = \lim_{i\to\infty} \frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t},\ s = \lim_{i\to\infty} \frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x}; \\ (t_i,x_i) \to (t,x) \text{ при } i \to \infty,\ (t_i,x_i) \in \operatorname{Dif}(u) \Bigg\}. \quad (13)$$

Для $0 < t < T$ справедливы включения

$$D^-(t,x_*) \subset \{(a, s+k) \mid (a,s) \in \partial u(t,x_*),\ k > 0\},$$
$$D^-(t,x^*) \subset \{(a, s-k) \mid (a,s) \in \partial u(t,x_*),\ k > 0\}.$$

Таким образом, в силу (7), для проверки выполнения неравенства (6) на верхней границе области $\operatorname{cl} G_0$ достаточно показать, что если

$$a + h(x^*) + f(x^*)e^{p} \geqslant 0,$$

тогда для всех $s > 0$ выполняется

$$a + h(x^*) + f(x^*)e^{p+s} \geqslant 0. \quad (14)$$

Поскольку $f(x^*) > 0$, неравенство (14) справедливо. Итак, на верхней границе $x = x^*$ выполнено дифференциальное неравенство (6) для субдифференциала функции $u(\cdot)$.

Для проверки неравенства (6) на нижней границе $x = x_*$ области $\operatorname{cl} G_0$ достаточно показать, что если

$$a + h(x_*) + g(x_*)e^{-p} \geqslant 0,$$

тогда для всех $s > 0$ выполняется

$$a + h(x_*) + g(x_*)e^{-(p-s)} = a + h(x_*) + g(x_*)e^{-p+s} \geqslant 0. \tag{15}$$

Неравенство (15) справедливо, так как $g(x_*) > 0$. Таким образом, в точках нижней границы $x = x_*$ выполнено дифференциальное неравенство (6), и это завершает доказательство того, что построенная в области $\operatorname{cl} G_0$ функция $u(\cdot)$ является вязкостным решением. Поскольку гамильтониан (7) и функция $u_0(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы, из результатов [8] следует, что вязкостное решение в замкнутой области $\operatorname{cl} G_0$ единственно.

4. Свойства решения на границах областей. Прежде чем перейти к построению решения задачи в областях G_- и G_+ (1)–(3), изучим свойства построенного в области $\operatorname{cl} G_0$ вязкостного решения $u(\cdot)$ на линиях $x = x_*$ и $x = x^*$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = u(t, x^*), \quad t \in [0, T].$$

По построению $\varphi(0) = u_0(x^*)$.

Пусть $\Delta > 0$. Согласно (12) существует $y_\Delta \in (x_*, x^*)$ такое, что

$$\varphi(\Delta) = u_0(y_\Delta) + \int_0^\Delta (p_\Delta(\tau)H_p(x_\Delta(\tau), p_\Delta(\tau)) - H(x_\Delta(\tau), p_\Delta(\tau)))d\tau, \tag{16}$$

где $x_\Delta(t)$ и $p_\Delta(t)$ являются соответственно фазовой и импульсной компонентами решения характеристической системы (10), (11), определяемого параметром y_Δ.

При малых значениях Δ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка величину $p_\Delta(t)$ можно считать равной значению $u_0'(x^* - y_\Delta)$, а фазовую характеристику $x_\Delta(t)$ — отрезком прямой, соединяющей точки $(0, x^* - y_\Delta)$ и $(0, \Delta)$. При этом значение интеграла в выражении (16) по теореме о среднем будет равно $K\Delta^2$.

Поскольку $y_\Delta \to x^*$ при $\Delta \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\varphi(\Delta) - \varphi(0)}{\Delta} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{u_0(y_\Delta) + K\Delta^2 + o(\Delta) - u_0(x^*)}{\Delta} = u_0'(x^*).$$

Итак, функция $\varphi(\cdot)$ в точке $t = 0$ имеет правую производную, значение которой равно производной начальной функции $u_0'(\cdot)$ в точке x^*.

$$\varphi_+'(0) = u_0'(x^*).$$

Поскольку построенное в области $\operatorname{cl} G_0$ вязкостное решение $u(\cdot)$ субдифференцируемо, функция $\varphi(\cdot)$ также является субдифференцируемой, то есть для неё справедливо свойство

$$\forall t \in [0, T] \quad D^-\varphi(t) \neq \emptyset. \tag{17}$$

Функция одной переменной, субдифференцируемая на ограниченном отрезке, имеет на этом отрезке не более конечного числа точек недифференцируемости. Таким образом, из (17) следует, что функция $\varphi(\cdot)$ является кусочно дифференцируемой.

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi(t) = u(t, x_*), \quad t \in [0, T].$$

По построению $\psi(0) = u_0(x_*)$. Так же, как и для функции $\varphi(\cdot)$, можно доказать, что

$$\forall t \in [0, T] \quad D^-\psi(t) \neq \emptyset,$$

и функция $\psi(\cdot)$ кусочно дифференцируема. Кроме того, функция $\psi(\cdot)$ в точке $t = 0$ имеет правую производную, и

$$\psi_+'(0) = u_0'(x_*).$$

5. Построение решения в областях G_+ и G_-. В области G_+ гамильтониан задачи (1)–(3) имеет вид

$$H(x,p) = f(x)e^p, \quad f(x) > 0,$$

и соответствующая характеристическая система записывается следующим образом.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = f(x)e^p, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) =) - f'(x)e^p, \\ \dot{z} &= pH_p(x,p) - H(x,p). \end{aligned} \tag{18}$$

Начальное многообразие, с которого согласно методу обобщенных характеристик [10,13] следует выпускать характеристики, разбивается на две части

$$\{(t,x,z) \mid t = 0,\ x \geqslant x_*,\ z = u_0(x)\} \cup \{(t,x,z) \mid 0 \leqslant t < T,\ x = x^*,\ z = \varphi(t) = u(t,x^*)\},$$

поэтому система (18) должна рассматриваться с двумя наборами начальных условий.

Начальные условия для характеристик, стартующих в момент $t = 0$, имеют вид

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad z(0,y) = u_0(y), \quad y \in [x^*;\infty). \tag{19}$$

Для характеристик, стартующих в момент $\tau \in [0,T)$ из точек, расположенных на линии $x = x^*$, начальные условия записываются следующим образом

$$x(\tau) = x^*, \quad p(\tau) \in D^-\varphi(\tau), \quad z(\tau) = \varphi(\tau) = u(\tau,x^*). \tag{20}$$

Если функция $\varphi(\cdot)$ дифференцируема в точке τ, тогда в этой точке её субдифференциал состоит из единственного элемента, и

$$D^-\varphi(\tau) = D^+\varphi(\tau) = \varphi'(\tau).$$

В точках недифференцируемости $\varphi(\cdot)$ супердифференциал пуст, а субдифференциал является отрезком. Таким образом, если в точке τ функция $\varphi(\cdot)$ недифференцируема, из точки (τ,x^*) выпускается пучок характеристик.

Рассмотрим первые два уравнения (для фазовой и импульсной компонент характеристики) системы (18). Разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{f'(x)}{f(x)},$$

получим

$$p(x) = p(x_0) - \ln f(x).$$

Подставив это выражение для p в первое уравнение характеристической системы (18), получим, что фазовые компоненты характеристик являются прямыми вида

$$x = x_0 + e^{p(x_0)}t.$$

Определим множество

$$\Gamma_+ = \{(t,x,) \mid t = 0,\ x \geqslant x^*\} \cup \{(t,x) \mid 0 \leqslant t < T,\ x = x^*\}.$$

Для точки $(\bar{t},\bar{x}) \in G_+$ определим $X(\Gamma_+;\bar{t},\bar{x})$ как множество всех фазовых характеристик $x(\cdot)$, выпущенных из точек множества Γ_+, таких, что для них справедливо условие

$$x(\bar{t}) = \bar{x}.$$

Используя метод обобщенных характеристик, можно показать, что функция

$$u(t,x) = \min_{X(\Gamma_+;t,x)} \left\{ u(\tau^\natural,x^\natural) + \int\limits_{\tau^\natural}^{t} (p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau)))d\tau \right\}$$

является вязкостным решением задачи (1)–(3) в области G_+. Здесь $(\tau^\natural, x^\natural)$ — точка из множества Γ_+, из которой выпущена фазовая характеристика $x(\cdot)$; $p(\cdot)$ — соответствующая импульсная характеристика,

$$u(\tau^\natural, x^\natural) = \begin{cases} u_0(x^\natural), & \text{если } \tau^\natural = 0, \\ \varphi(\tau^\natural), & \text{если } 0 \leqslant \tau^\natural < T,\ x^\natural = x^*. \end{cases}$$

Аналогично строится вязкостное решение в области G_-. В этой области гамильтониан имеет вид

$$H(x,p) = g(x)e^{-p}, \quad g(x) > 0,$$

а соответствующая характеристическая система записывается следующим образом.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = -g(x)e^{-p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) =) - g'(x)e^{-p}, \\ \dot{z} &= pH_p(x,p) - H(x,p). \end{aligned} \tag{21}$$

Для характеристик, выпускаемых в момент $t = 0$, начальные условия имеют вид

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad z(0,y) = u_0(y), \quad y \in (-\infty; x_*]. \tag{22}$$

Начальные условия для характеристик, стартующих в момент $\tau \in [0, T)$ из точек, расположенных на линии $x = x_*$, записываются следующим образом

$$x(\tau) = x_*, \quad p(\tau) \in D^-\psi(\tau), \quad z(\tau) = \psi(\tau) = u(\tau, x_*). \tag{23}$$

Несложно проверить, что фазовые характеристики являются прямыми вида

$$x = x_0 - e^{-p(x_0)}t.$$

Определим множество

$$\Gamma_- = \{(t, x,) \mid t = 0,\ x \leqslant x_*\} \cup \{(t,x) \mid 0 \leqslant t < T,\ x = x_*\}.$$

Для точки $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_-$ определим множество $X(\Gamma_-; \bar{t}, \bar{x})$ как множество всех фазовых характеристик $x(\cdot)$, выпущенных из точек множества Γ_-, таких, что для них справедливо условие

$$x(\bar{t}) = \bar{x}.$$

Функция

$$u(t,x) = \min_{X(\Gamma_-; t, x)} \left\{ u(\tau^\natural, x^\natural) + \int\limits_{\tau^\natural}^{t} (p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau)))d\tau \right\}$$

является вязкостным решением задачи (1)–(3) в области G_-. Здесь $(\tau^\natural, x^\natural)$ — точка из множества Γ_-, из которой выпущена фазовая характеристика $x(\cdot)$; $p(\cdot)$ — соответствующая импульсная характеристика,

$$u(\tau^\natural, x^\natural) = \begin{cases} u_0(x^\natural), & \text{если } \tau^\natural = 0, \\ \psi(\tau^\natural), & \text{если } 0 \leqslant \tau^\natural < T,\ x^\natural = x_*. \end{cases}$$

6. Обобщенное решение. Основываясь на проведенных построениях, дадим следующее определение.

Определение 2. Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем непрерывную функцию $u(\cdot)\colon [0; T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую начальному условию (2) и такую, что её сужения $u_{|G_-}(\cdot)$, $u_{|G_+}(\cdot)$ и $u_{|\,\mathrm{cl}\, G_0}(\cdot)$ на области G_- и G_+ и на замыкание области G_0 являются вязкостными решениями уравнения (1) с гамильтонианом вида (3) на этих множествах.

Замечание 1. Проверка того, что сужения функции $u(\cdot)$ являются вязкостными решениями, сводится к проверке выполнения дифференциальных неравенств (5), (6). Следует подчеркнуть, что для точек (t,x), принадлежащих границе области G_0 (лежащих на линиях $x = x_*$ и $x = x^*$), субдифференциал $D^-u(t,x)$ и супердифференциал $D^+u(t,x)$ функции $u(\cdot)$ не совпадают с соответствующими субдифференциалом и супердифференциалом сужения $D^-u_{|\,\mathrm{cl}\,G_0}(t,x)$ и $D^+u_{|\,\mathrm{cl}\,G_0}(t,x)$. В частности, $D^-u(t,x)$ является ограниченным и замкнутым (возможно, пустым) множеством, а множество $D^-u_{|\,\mathrm{cl}\,G_0}(t,x)$ неограниченно.

Из построений, представленных выше, следует утверждение.

Теорема 1. *Для задачи* (1)–(3) *существует обобщенное в смысле определения* 1 *решение* $u(\cdot)\colon [0;T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

В ограниченной и замкнутой области $\mathrm{cl}\,G_0$ вязкостное решение задачи (1)–(3) единственно, но на неограниченных открытых множествах $G_-\times\mathbb{R}$ и $G_+\times\mathbb{R}$ гамильтониан H, задаваемый формулой (3), не удовлетворяет известным достаточным условиям единственности вязкостного решения, поэтому на множестве $[0;T]\times\mathbb{R}$ обобщенное решение может быть не единственным.

Пусть $M>0$ такое, что

$$M > \max\{|x_*|, |x^*|\}. \tag{24}$$

Рассмотрим задачу (1)–(3) для $(t,x)\in[0,T]\times(-M;M)$, то есть в ограниченной по x открытой области. Можно показать, что в этом случае значения импульсных компонент характеристических систем (18), (19), (20) и (21), (22), (23) будут ограничены, и

$$p(t)\in P,\quad t\in[0,T],$$

для всех $t\in[0,T]$, где P — ограниченный отрезок.

Определим

$$G_-^M = \{(t,x)\mid 0<t<T,\ -M<x<x_*\},\quad G_+^M = \{(t,x)\mid 0<t<T,\ x^*<x<M\}.$$

Гамильтониан $H(x,p)$ непрерывно дифференцируем на ограниченных замкнутых множествах $\mathrm{cl}\,G_-^M\times P$ и $\mathrm{cl}\,G_+^M\times P$, следовательно, на этих множествах он удовлетворяет условию Липшица. Поэтому вязкостные решения задачи (1)–(3) в областях $[0,T)\times G_-^M$ и $[0,T)\times G_+^M$ единственны. Отсюда следует единственность обобщенного решения задачи (1)–(3), рассматриваемой в ограниченной по x области $[0,T]\times(-M;M)$.

Таким образом, доказано следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть* M *удовлетворяет условию* (24). *Тогда для задачи* (1)–(3), *рассматриваемой в области* $[0,T]\times(-M;M)$, *обобщенное в смысле определения* 1 *решение* $u(\cdot)\colon[0;T]\times(-M;M)\to\mathbb{R}$ *существует и единственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I// Мат. сб. — 1966. — *70 (112)*, № 3. — С. 394–415.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1961.
4. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона—Якоби. — М.: Наука, 1991.
5. *Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г.* О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби с фазовыми ограничениями// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — *17*, № 2. — С. 191–208.
6. *Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г.* О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2015. — *21*, № 2. — С. 220–235.
7. *Шагалова Л. Г.* Непрерывное обобщенное решение уравнения Гамильтона—Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *186*. — С. 144–151.
8. *Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.* Hamilton–Jacobi equations with state constraints// Trans. Am. Math. Soc. — 1990. — *318*, № 2. — P. 643–683.

9. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — *377*, № 1. — P. 1–42.
10. *Mirică Ş.* Generalized solutions by Cauchy's method of characteristics// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1987. — *77.* — P. 317–350.
11. *Saakian D. B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and Crow–Kimura models for molecular evolution// Phys. Rev. E. — 2008. — *78*, № 4. — 041908.
12. *Subbotin A. I.* Generalized Solutions of First-Order Partial Differential Equations. The Dynamical Optimization Perspective. — Boston: Birkhäuser, 1995.
13. *Subbotina N. N.* The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization// Mod. Math. Appl. — 2004. — *20.* — P. 2955–3091.
14. *Yokoyama E., Giga Y., Rybka P.* A microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation// Phys. D. — 2008. — *237.* — P. 2845–2855.

Шагалова Любовь Геннадьевна
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения РАН, Екатеринбург
E-mail: `shag@imm.uran.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 73–80
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-73-80

УДК 519.866

АНАЛИЗ УРОВНЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЗАПАСОВ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ О ЗАТРАТАХ

© 2022 г. **С. А. НИКИТИНА**

Аннотация. Рассматривается применение теории нечетких множеств для анализа уровня материальных запасов предприятия. Для организации производственного процесса на предприятии создается некоторый уровень запасов, который необходимо пополнять в определенные промежутки времени. Большое количество запасов приведет к исключению из оборота и замораживанию финансовых средств. Нехватка материальных запасов приводит к перерывам в работе производства. Возникает необходимость в проведении анализа уровня запасов. Предлагается при проведения такого анализа использовать информацию о затратах, которая может носить нечеткий характер.

***Ключевые слова*:** задача управления запасами, нечеткая информация о затратах, лингвистическая классификация.

ANALYSIS OF INVENTORY LEVELS BASED ON FUZZY COST INFORMATION

© 2022 **S. A. NIKITINA**

Abstract. In this paper, we consider the application of the theory of fuzzy sets for the analysis of the level of material inventories of an enterprise. To organize the production process at the enterprise, a certain level of inventories is created, which must be replenished at certain intervals. A large amount of inventory leads to exclusion funds from circulation; lack of inventories leads to interruptions in production. A need of analyzing the level of inventories appears. We propose to use fuzzy cost information for performing this analysis.

***Keywords and phrases*:** inventory management problem, fuzzy cost information, linguistic classification.

***AMS Subject Classification*:** 93A30, 93C95

1. Введение. Задачи управления запасами относятся к задачам управления, решение которых имеет важное прикладное значение. Определение стратегии управления запасами позволяет повысить эффективность используемых ресурсов. Как правило, на действующих предприятиях такие задачи характеризуются наличием ряда параметров, создающих неопределенность.

Одним из способов учета в математической модели неопределенности — это применение вероятностных методов. Однако для их использования необходимо знать распределения неопределенных параметров, что не всегда возможно. В такой ситуации альтернативным является подход построения экономико-математических моделей, основанный на применении аппарата нечетких множеств. Отметим, что некоторые параметры складской системы в условиях неопределенности невозможно описать четко. Например, ожидаемая цена приобретения запасов может зависеть от уровня насыщения рынка, состояния отрасли, политики продвижения товаров и т. д. Затраты на транспортировку могут зависеть от текущего состояния дороги, погодных условий, квалификации водителя и пр. Применение моделей складской системы, учитывающих нечеткость в описании параметров, может повысить качество управления такой системой.

Исследования подобных моделей уже проводились. Так, в работе [7] рассмотрена дискретная модель запасов с линейной скоростью спроса без регулярного предложения. Вводится критерий для расчета чистой прибыли, исходя из которого строится управление. В [8] представлены результаты моделирования динамики производства и заказов для системы поставок с дискретным временем. Получены оценки границ диапазона колебаний запасов при неизвестном спросе.

В [3] предложен подход для решения задачи управления запасами в дискретном случае. Записан алгоритм построения управления, которое обеспечивает удержание фазовой точки в заданном семействе множеств при любой допустимой реализации помехи. В работе [5] была рассмотрена задача удержания фазовой точки в заданном семействе множеств в дискретные моменты времени, приведены необходимые и достаточные условия возможности удержания.

В данной статье продолжается начатое ранее исследование, а именно рассматривается применение теории нечетких множеств для анализа уровня материальных запасов предприятия. Предлагается при проведения такого анализа использовать информацию о затратах, которая может носить нечеткий характер. Это позволит исследовать уровень запаса качественно. Изложенный в статье способ анализа основан на методике, разработанной в [2]. Для представления параметров модели, заданных нечеткими числами, используется понятие серой шкалы Поспелова [4].

2. Изложение метода анализа уровня материальных запасов. Построенная система анализа на основе нечеткой информации о затратах позволяет сделать вывод об уровне материальных запасов на предприятии.

Сначала введем лингвистическую переменную H — «уровень материальных запасов». Значения (термы) этой лингвистической переменной следующие:

(1) H_1 — «очень высокий уровень материальных запасов»;
(2) H_2 — «высокий уровень материальных запасов»;
(3) H_3 — «средний уровень материальных запасов»;
(4) H_4 — «низкий уровень материальных запасов»;
(5) H_5 — «очень низкий уровень материальных запасов».

Каждый терм H_j, $j = 1, \ldots, 5$, является нечетким числом, заданным на отрезке $[0; 1]$.

Будем рассматривать в качестве значений лингвистической переменной H трапециевидные нечеткие числа. Функция принадлежности такого нечеткого числа имеет вид

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leqslant x \leqslant b; \\ 1, & \text{если } b \leqslant x \leqslant c; \\ \dfrac{x-d}{c-d}, & \text{если } c \leqslant x \leqslant d; \\ 0, & \text{если } x \geqslant d. \end{cases} \tag{1}$$

Зададим функции принадлежности для каждого терма H_j, $j = 1, \ldots, 5$.

Для терма H_1 — «очень высокий уровень материальных запасов»:

$$\mu_{H_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}75; \\ 1 - 10(0{,}85 - x), & \text{если } 0{,}75 \leqslant x \leqslant 0{,}85; \\ 1, & \text{если } 0{,}85 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

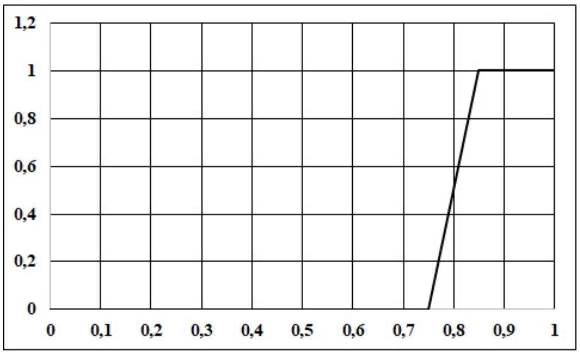

Рис. 1

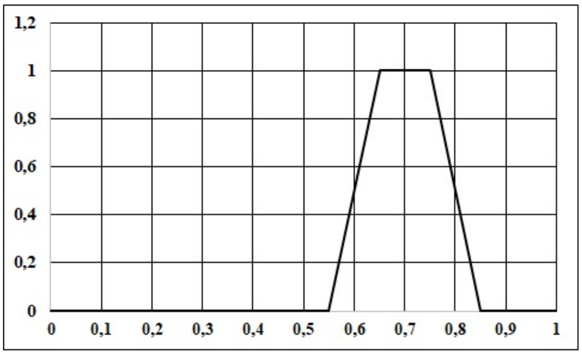

Рис. 2

Для терма H_2 — «высокий уровень материальных запасов»:

$$\mu_{H_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}55; \\ 1 - 10(0{,}65 - x), & \text{если } 0{,}55 \leqslant x \leqslant 0{,}65; \\ 1, & \text{если } 0{,}65 \leqslant x \leqslant 0{,}75; \\ 10(0{,}85 - x), & \text{если } 0{,}75 \leqslant x \leqslant 0{,}85; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}85. \end{cases}$$

Для терма H_3 — «средний уровень материальных запасов»:

$$\mu_{H_3}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}35; \\ 1 - 10(0{,}45 - x), & \text{если } 0{,}35 \leqslant x \leqslant 0{,}45; \\ 1, & \text{если } 0{,}45 \leqslant x \leqslant 0{,}55; \\ 10(0{,}65 - x), & \text{если } 0{,}55 \leqslant x \leqslant 0{,}65; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}65. \end{cases}$$

Для терма H_4 — «низкий уровень материальных запасов»:

$$\mu_{H_4}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}15; \\ 1 - 10(0{,}25 - x), & \text{если } 0{,}15 \leqslant x \leqslant 0{,}25; \\ 1, & \text{если } 0{,}25 \leqslant x \leqslant 0{,}35; \\ 10(0{,}45 - x), & \text{если } 0{,}35 \leqslant x \leqslant 0{,}45; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}45. \end{cases}$$

Для терма H_5 — «очень низкий уровень материальных запасов»:

$$\mu_{H_5}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}15; \\ 1 - 10(0{,}25 - x), & \text{если } 0{,}15 \leqslant x \leqslant 0{,}25; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}25. \end{cases}$$

Графики функций принадлежности $\mu_{H_1}(x)$–$\mu_{H_5}(x)$ изображены на рис. 1–5.

Изложим теперь метод по шагам.

Шаг 1. Отобрать показатели $D_1, D_2, \ldots, D_n$ деятельности складской системы предприятия, которые имеют наибольшее отношение к оценке уровня запаса. При выборе показателей нужно учитывать следующее условие (см. [2]): рост показателя должен приводить к снижению уровня запасов.

Согласно [6] на уровень запаса на складе значительное влияние оказывают затраты на хранение, на выполнение заказа (организацию) и на потери от дефицита товара. При увеличении доли

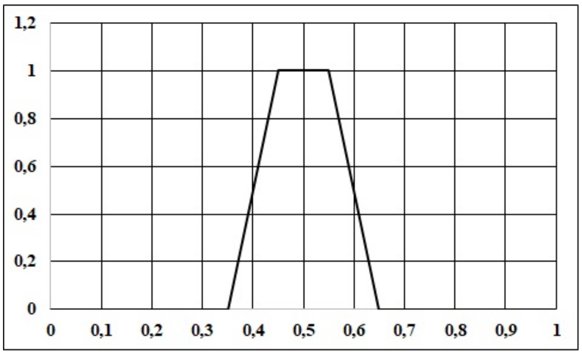

Рис. 3

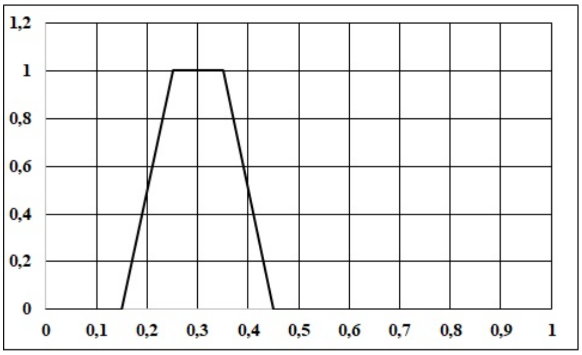

Рис. 4

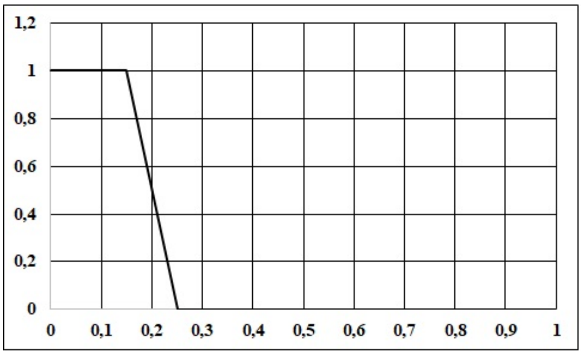

Рис. 5

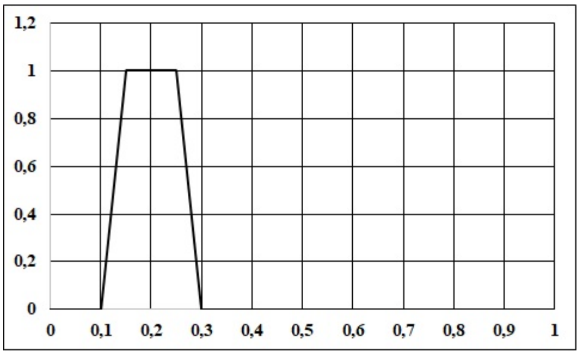

Рис. 6

указанных затрат в суммарных затратах, происходит снижение финансовых вложений в приобретение продукции. Следствием этого является уменьшение величины пополнения товаров, т.е. происходит снижение уровня материальных запасов.

В дальнейшем в качестве показателей будем рассматривать следующие:

(1) D_1 — доля затрат на хранение;
(2) D_2 — доля затрат на выполнение заказа;
(3) D_3 — доля затрат на потери от дефицита.

Пусть d_i, $i = 1, \dots, 3$, — значения уровня показателя i в текущий период времени.

Шаг 2. Определить, какие из отобранных показателей являются наиболее, а какие наименее значимыми при влиянии на уровень запаса материальных ресурсов. Расположить показатели по убыванию их значимости. Присвоить показателям весовые коэффициенты ω_i, $i = 1, \dots, n$, в зависимости от их значимости.

Весовые коэффициенты можно определить по правилу Фишберна (см. [1]). Если выбранные показатели не могут быть расположены в порядке убывания их значимости, то весовые коэффициенты для них выбирают одинаковыми.

Шаг 3. Фаззифицировать выбранные показатели, т.е. ввести лингвистические переменные.

Предположим, что терм-множество этих лингвистических переменных содержит следующие значения: «очень низкий показатель», «низкий показатель», «средний показатель», «высокий показатель», «очень высокий показатель». Каждому значению лингвистической переменной необходимо сопоставить функцию принадлежности. Для этого удобно применить систему нечетких чисел трапециевидного типа, удовлетворяющую условию серой шкалы Поспелова (см. [4]). Этот шаг далее будет описан подробнее.

Шаг 4. Установить уровень принадлежности i-го показателя к j-й лингвистической классификации по результатам значений имеющихся входных параметров d_i. Обозначим этот уровень принадлежности через μ_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots 5$.

Шаг 5. Найти интегральный показатель уровня материальных запасов

$$h = \sum_{j=1}^{5} h_j \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \mu_{ij}, \tag{2}$$

где $h_j = 0{,}9 - 0{,}2(j-1)$ — середина промежутка носителя терма H_j, $j = 1, \dots, 5$. Из формулы (2) следует, что интегральный показатель уровня материальных запасов есть результат двумерной свёртки показателей принадлежности, с двумя системами весов — весов для показателей и весов характерных точек для заданной лингвистической классификации. Чем больше значение этого показателя, тем ниже уровень запасов.

Фаззификация выбранных показателей Для выполнения процедуры фаззификации введем следующие обозначения для значений лингвистических переменных:

(1) Δ_{i1} — «очень низкий уровень показателя D_i»;
(2) Δ_{i2} — «низкий уровень показателя D_i»;
(3) Δ_{i3} — «средний уровень показателя D_i»;
(4) Δ_{i4} — «высокий уровень показателя D_i»;
(5) Δ_{i5} — «очень высокий уровень показателя D_i»; $i = 1, \dots, 3$.

Рассмотрим показатель D_1 — долю затрат на хранение. Как известно (см. [6]), в среднем доля затрат на хранение принимает значение 15-25% от общей суммы затрат. Отклонения от этого значения можно рассматривать как высокое или низкое значение показателя.

Запишем функции принадлежности для соответствующих термов как трапециевидные нечеткие числа.

Функция принадлежности для терма Δ_{13} — «средний уровень доли затрат на хранение»:

$$\mu_{13}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}1; \\ 20x - 2, & \text{если } 0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}15; \\ 1, & \text{если } 0{,}15 \leqslant x \leqslant 0{,}25; \\ 20x - 5, & \text{если } 0{,}25 \leqslant x \leqslant 0{,}3; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}3. \end{cases}$$

График функции принадлежности $\mu_{13}(x)$ изображен на рис. 6.

Функция принадлежности для терма Δ_{12} — «низкий уровень доли затрат на хранение»:

$$\mu_{12}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}01; \\ 25x - 0{,}25, & \text{если } 0{,}01 \leqslant x \leqslant 0{,}05; \\ 1, & \text{если } 0{,}05 \leqslant x \leqslant 0{,}1; \\ 3 - 20x, & \text{если } 0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}15; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}2. \end{cases}$$

Функция принадлежности для терма Δ_{11} — «очень низкий уровень доли затрат на хранение»:

$$\mu_{11}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}01; \\ 1{,}25 - 25x, & \text{если } 0{,}01 \leqslant x \leqslant 0{,}05; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}05. \end{cases}$$

Функция принадлежности для терма Δ_{14} — «высокий уровень доли затрат на хранение»:

$$\mu_{14}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}25; \\ 6 - 20x, & \text{если } 0{,}25 \leqslant x \leqslant 0{,}3; \\ 1, & \text{если } 0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}35; \\ 8 - 20x, & \text{если } 0{,}35 \leqslant x \leqslant 0{,}4; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}4. \end{cases}$$

Функция принадлежности для терма Δ_{15} — «очень высокий уровень доли затрат на хранение»:

$$\mu_{15}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}35; \\ 20x - 7, & \text{если } 0{,}35 \leqslant x \leqslant 0{,}4; \\ 1, & \text{если } 0{,}4 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим показатель D_2 — долю затрат на выполнение заказа. В среднем доля затрат на выполнение заказа принимает значение 10-20% от общей суммы затрат (см. [6]). Для показателя D_3 — доли затрат на потери от дефицита — средние значения будут составлять 5-10% от общей суммы затрат. Отклонения от этих значений можно рассматривать как высокое или низкое значение показателя.

Функции принадлежности для соответствующих термов показателей D_2 и D_3 приведены в следующей таблице:

Терм	Функция принадлежности
Δ_{21}	$\mu_{21}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}01; \\ 1{,}5 - 50x, & \text{если } 0{,}01 \leqslant x \leqslant 0{,}03; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}03. \end{cases}$
Δ_{22}	$\mu_{22}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}01; \\ 50x - 0{,}5, & \text{если } 0{,}01 \leqslant x \leqslant 0{,}03; \\ 1, & \text{если } 0{,}03 \leqslant x \leqslant 0{,}05; \\ 2 - 20x, & \text{если } 0{,}05 \leqslant x \leqslant 0{,}1; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}1. \end{cases}$
Δ_{23}	$\mu_{23}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}05; \\ 20x - 1, & \text{если } 0{,}05 \leqslant x \leqslant 0{,}1; \\ 1, & \text{если } 0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}2; \\ 5 - 20x, & \text{если } 0{,}2 \leqslant x \leqslant 0{,}25; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}25. \end{cases}$
Δ_{24}	$\mu_{24}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}2; \\ 20x - 4, & \text{если } 0{,}2 \leqslant x \leqslant 0{,}25; \\ 1, & \text{если } 0{,}25 \leqslant x \leqslant 0{,}3; \\ 7 - 20x, & \text{если } 0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}35; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}35. \end{cases}$
Δ_{25}	$\mu_{25}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}3; \\ 20x - 6, & \text{если } 0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}35; \\ 1, & \text{если } 0{,}35 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$
Δ_{31}	$\mu_{31}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}005; \\ 2 - 200x, & \text{если } 0{,}005 \leqslant x \leqslant 0{,}01; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}01. \end{cases}$

Δ_{32}	$\mu_{32}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}005; \\ 200x - 1, & \text{если } 0{,}005 \leqslant x \leqslant 0{,}01; \\ 1, & \text{если } 0{,}01 \leqslant x \leqslant 0{,}03; \\ 2{,}5 - 50x, & \text{если } 0{,}03 \leqslant x \leqslant 0{,}05; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}05. \end{cases}$
Δ_{33}	$\mu_{33}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}03; \\ 50x - 1{,}5, & \text{если } 0{,}03 \leqslant x \leqslant 0{,}05; \\ 1, & \text{если } 0{,}05 \leqslant x \leqslant 0{,}15; \\ 4 - 20x, & \text{если } 0{,}15 \leqslant x \leqslant 0{,}2; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}2. \end{cases}$
Δ_{34}	$\mu_{34}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}15; \\ 20x - 3, & \text{если } 0{,}15 \leqslant x \leqslant 0{,}2; \\ 1, & \text{если } 0{,}2 \leqslant x \leqslant 0{,}25; \\ 6 - 20x, & \text{если } 0{,}25 \leqslant x \leqslant 0{,}3; \\ 0, & \text{если } x \geqslant 0{,}3. \end{cases}$
Δ_{35}	$\mu_{35}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0{,}25; \\ 20x - 5, & \text{если } 0{,}25 \leqslant x \leqslant 0{,}3; \\ 1, & \text{если } 0{,}3 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

3. Модельный пример. Пусть в текущий период времени состояние затрат предприятия характеризуется следующими значениями: $d_1 = 0{,}27$ — доля затрат на хранение; $d_2 = 0{,}29$ — доля затрат на выполнение заказа; $d_3 = 0{,}153$ — доля затрат на потери от дефицита. Оценим уровень материальных запасов. Определим значения функций принадлежности для этих значений показателей:

$$\mu_{11}(0{,}27) = 0; \quad \mu_{12}(0{,}27) = 0;$$
$$\mu_{13}(0{,}27) = 20 \cdot 0{,}27 - 5 = 0{,}4; \quad \mu_{14}(0{,}27) = 6 - 20 \cdot 0{,}27 = 0{,}6; \quad \mu_{15}(0{,}27) = 0.$$

Дальнейшие вычисления представим в таблице:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$\mu_{1j}(0{,}27)$	0	0	0,4	0,6	0
$\mu_{2j}(0{,}29)$	0	0	0	1	0
$\mu_{3j}(0{,}153)$	0	0	0,94	0,06	0

Будем считать, что показатели являются равнозначными, поэтому весовые коэффициенты равны $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/3$.

Для нахождения интегрального показателя уровня материальных запасов вычислим значения середин промежутка носителя терма H_j по формуле

$$h_j = 0{,}9 - 0{,}2(j - 1).$$

Получим

$$h_1 = 0{,}9, \quad h_2 = 0{,}7, \quad h_3 = 0{,}5, \quad h_4 = 0{,}3, \quad h_5 = 0{,}1.$$

Расчеты согласно (2) приведены в таблице:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$\mu_{1j}(0{,}27)\cdot\omega_1$	0	0	0,133	0,200	0
$\mu_{2j}(0{,}29)\cdot\omega_2$	0	0	0	0,333	0
$\mu_{3j}(0{,}153)\cdot\omega_3$	0	0	0,313	0,020	0
$\sum\limits_{i=1}^{3}\omega_i\cdot\mu_{ij}$	0	0	0,446	0,553	0
h_j	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1
$h_j\sum\limits_{i=1}^{3}\omega_i\cdot\mu_{ij}$	0	0	0,223	0,166	0

Значит,

$$h=\sum_{j=1}^{5}h_j\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\mu_{ij}=0{,}223+0{,}166=0{,}389.$$

Далее вычислим значения функций принадлежности для значений лингвистической переменной H — «уровень материальных запасов» при $h=0{,}389$:

$$\mu_{H_1}(0{,}389)=0;\quad \mu_{H_2}(0{,}389)=0;\quad \mu_{H_3}(0{,}389)=1-10\cdot(0{,}45-0{,}389)=0{,}39;$$
$$\mu_{H_4}(0{,}389)=10\cdot(0{,}45-0{,}389)=0{,}61;\quad \mu_{H_5}(0{,}389)=0.$$

На основании полученных данных можно сделать вывод о том, что уровень материальных запасов предприятия оценивается как средний или низкий. Причем состояние H_4 — «низкий уровень материальных запасов» — оценивается с большей степенью принадлежности, чем состояние H_3 — «средний уровень материальных запасов».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдулаева З. И., Недосекин А. О.* Стратегический анализ инновационных рисков. — СПб: Изд-во СПбГУ, 2013.
2. *Батыршин И. З., Недосекин А. О., Стецко А. А. и др.* Нечеткие гибридные системы. Теория и практика. — М.: Физматлит, 2007.
3. *Никитина С. А., Ухоботов В. И.* Об одной задаче управления запасами при наличии помехи// Челяб. физ.-мат. ж. — 2020. — *5*, № 3. — С. 306–315.
4. *Поспелов Д. А.* «Серые» и/или «черно-белые»// Прикл. эргономика. — 1994. — *1*. — С. 29–33.
5. *Ухоботов В. И., Никитина С. А.* Управление дискретной динамической системой с помехой// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *168*. — С. 105–113.
6. *Шрайбфедер Дж.* Эффективное управление запасами. — М.: Альпина Бизнес Букс, 2008.
7. *Wang Y., Xu L.* Dynamics and control on a discrete multi-inventory system// J. Control Sci. Eng. — 2019. — *2019*. — P. 1–7.
8. *Yongchang W., Fangyu C., Hongwei W.* Inventory and production dynamics in a discrete-time vendor-managed inventory supply chain system// Discr. Dyn. Nature Soc. — 2018. — *2018*. — P. 1–15.

Никитина Светлана Анатольевна
Челябинский государственный университет
E-mail: nikitina@csu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 81–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-81-96

УДК 517.977, 519.7

ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ РАЗНЫХ СПОСОБАХ ЗАДАНИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

© 2022 г. **С. С. ПОСТНОВ**

Аннотация. Статья посвящена исследованию фазовой динамики линейных систем дробного порядка с управлением. Наиболее подробно рассматриваются двумерные системы с сосредоточенными параметрами в случаях, когда операторы дробного дифференцирования в определяющих уравнениях понимаются в смысле Капуто—Фабрицио. Также рассматриваются аналогичные системы, моделируемые уравнениями с операторами Атанганы—Балеану и Прабхакара. Получены и исследованы аналитические решения определяющих уравнений и вычислены граничные траектории систем, определяющие область допустимых значений фазовых координат системы. Проанализирована возможность постановки l-проблемы моментов для рассматриваемых систем и её разрешимость. Приведён пример решения данной проблемы в случае, когда управление является существенно ограниченной функцией на отрезке.

Ключевые слова: динамическая система дробного порядка, оптимальное управление, дробная производная, l-проблема моментов.

FEATURES OF THE PHASE DYNAMICS OF FRACTIONAL TWO-DIMENSIONAL LINEAR CONTROL SYSTEMS FOR VARIOUS DIFFERENTIATION OPERATOR

© 2022 **S. S. POSTNOV**

Abstract. This paper is devoted to the study of the phase dynamics of fractional linear systems with control. Two-dimensional systems with concentrated parameters are considered in most detail in the cases where the fractional differentiation operators in the governing equations are understood in the Caputo–Fabrizio sense. Systems modeled by equations with Atangana–Baleano and Prabhakara operators are also considered. We obtain and examine analytic solutions and boundary trajectories of systems, which determine domains of admissible values of the phase coordinates. The statement of the moment l-problem for the systems considered and its solvability are analyzed. An example of solving this problem in the case where the control is an essentially bounded function on a interval is given.

Keywords and phrases: fractional dynamical system, optimal control, fractional derivative, l-problem of moments.

AMS Subject Classification: 49N05, 49J21, 93C23, 34K35, 34A08

1. Введение. Динамические системы дробного порядка представляют интерес в качестве объекта исследований для многих отраслей современной науки (см. [7,14]). Эффекты, обусловленные «дробной динамикой» и наличием у системы нелокальных пространственно-временных свойств, проявляются в различных физических системах (неоднородные упругие системы, диэлектрики, полупроводники и т. д.). С другой стороны, дробное исчисление является обобщением классического анализа и представляет интерес с позиций современной теории функций, дифференциальных и интегральных уравнений. Приложения дробного исчисления в области моделирования динамики систем (в том числе систем с управлением) также активно исследуются с позиций математической кибернетики, теоретической информатики, теории систем и теории управления.

Одной из отличительных черт дробного исчисления является неединственность определения операторов дробного дифференцирования и интегрирования, которая обусловливает большое разнообразие тенденций поведения систем дробного порядка. При этом поведение систем, описываемых одинаковыми по форме уравнениями, которые отличаются только типом входящего в них оператора дробного дифференцирования, не всегда является заметно разным. В определённых условиях норма и время управления, а также оптимальное управление и фазовые траектории таких систем могут быть близки не только качественно, но и количественно (см. [11,13]).

В данной работе рассматриваются двумерные управляемые системы дробного порядка с сосредоточенными параметрами. Подробно рассмотрены системы, моделируемые уравнениями с операторами дробного дифференцирования Капуто—Фабрицио. Для них построены аналитические решения уравнений динамики, вычислены граничные траектории и обоснована корректность и разрешимость l-проблемы моментов. В ряде случаев получены аналогичные результаты также для уравнений с операторами Атанганы—Балену и Прабхакара.

2. Постановка задачи. Рассматриваются двумерные системы дробного порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha_1} q_1(t) &= q_2(t) + C_1, \\ {}_0D_t^{\alpha_2} q_2(t) &= a q_1(t) + u(t) + C_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $q_{1,2}(t)$ — состояние системы, $u(t)$ — управление, a и $C_{1,2}$ — действительные числа, $t \in [0,T]$. Оператор дробного дифференцирования ${}_0D_t^{\alpha_{1,2}}$ понимается в смысле Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану или Прабхакара. В последнем случае подразумевается, что показатели дробного дифференцирования являются составными (см. ниже). При $a = 0$ система (1) представляет собой двойной интегратор дробного порядка, а при $a < 0$ (в частности, при $a = -1$) — маятник дробного порядка. Рассматриваются управления $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$, и состояния $q_{1,2}(t)$, такие что $q'_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$.

Будем рассматривать динамику системы (1) на отрезке $t \in [0,T]$ и поставим начальные и конечные условия в локальном виде:

$$q_{1,2}(0) = q_{1,2}^0, \tag{2}$$

$$q_{1,2}(T) = q_{1,2}^T. \tag{3}$$

Для системы (1) представляет интерес исследование задачи оптимального управления на отрезке $[0,T]$ как задачи поиска управления с минимальной нормой или как задачи быстродействия (см. [1,3]). Как известно, такая задача может быть сведена к l-проблеме моментов и при целых значениях показателя дифференцирования (см. [1,3]), и при дробных (см. [5]). В данной работе исследуются условия корректности и разрешимости l-проблемы моментов для системы (1). В случае, когда эти условия выполнены, решение l-проблемы моментов и соответствующей задачи оптимального управления может быть построено аналитически.

Задача 1 (l-проблема моментов)**.** Пусть дана система функций $g_n(\tau) \in L_{p'}[0,T]$ и набор чисел c_n, $n = 1,\ldots,N$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, а также задано число $l > 0$. Необходимо построить такую функцию $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$, $1/p + 1/p' = 1$, что выполняются соотношения

$$\int_0^T g_n(\tau)u(\tau)d\tau = c_n \tag{4}$$

и условие

$$\|u(t)\|_{L_p} \leqslant l. \tag{5}$$

Определение 1. Будем говорить, что постановка l-проблемы моментов в форме задачи 1 корректна, если определена норма функций $g_n(\tau)$ в пространстве $L_{p'}[0,T]$, моменты c_n определены и ограничены и хотя бы один из них отличен от нуля.

Необходимым и достаточным условием разрешимости l-проблемы моментов в форме задачи 1 является линейная независимость функций $g_n(\tau)$ или, что эквивалентно, выполнение условия

$$\Lambda_N > 0, \tag{6}$$

где число Λ_N определяет норму оптимального управления и является решением следующей задачи условной минимизации (см. [1,3]).

Задача 2. Найти

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_N}\left(\int_{t_0}^T\left|\sum_{i=1}^N \xi_i g_i(t)\right|^{p'}dt\right)^{1/p'} = \left(\int_{t_0}^T\left|\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t)\right|^{p'}dt\right)^{1/p'} = \frac{1}{\Lambda_N} \tag{7}$$

при условии

$$\sum_{i=1}^N \xi_i c_i = \sum_{i=1}^N \xi_i^* c_i = 1. \tag{8}$$

Также в работе анализируются особенности качественной динамики систем — вычисляются фазовые траектории системы (1) при предельных значениях управления.

Определение 2. Пусть управление $u(t)$ ограничено по абсолютной величине почти всюду на отрезке $[0,T]$: $|u(t)| \leqslant l$. Тогда граничными траекториями системы (1) будем называть её фазовые траектории, соответствующие граничным (предельным) значениям управления $u(t) = \pm l$, $t > 0$, $l > 0$.

Замечание 1. Граничные траектории системы ограничивают на фазовой плоскости область, в которой сосредоточены все допустимые траектории системы (траектории, соответствующие допустимым управлениям). В случае систем целого порядка эти траектории принято называть границами интегральной воронки дифференциального включения, соответствующего системе (см. [2]).

3. Предварительные сведения.

Определение 3. Пусть задана функция $q(t)$, такая, что $q'(t) \in L_1[0,T]$. Тогда дробная производная Капуто—Фабрицио определяется следующим образом (см. [9]):

$${}_0^{CF}D_t^{\alpha}q(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_0^t \frac{dq(\tau)}{d\tau}\exp\left[-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]d\tau, \tag{9}$$

где $\alpha \in (0,1)$, $M(\alpha)$ — нормирующая функция, такая, что $M(0) = M(1) = 1$.

Определение 4. Пусть задана функция $q(t) \in L_1[0,T]$. Интегралом Капуто—Фабрицио дробного порядка будем называть оператор, обратный к оператору (9) и выражающийся как линейная комбинация функции $q(t)$ и её первообразной (см. [12]) следующего вида:

$${}_0^{CF}I_t^{\alpha}q(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)}q(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)}\int_0^t q(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Определение 5. Пусть задана такая функция $q(t)$, что $q'(t) \in L_1[0,T]$. Тогда дробная производная Атанганы—Балеану определяется следующим образом (см. [8]):

$$ {}_0^{AB}D_t^{\alpha} q(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int\limits_0^t \frac{dq(\tau)}{d\tau} E_\alpha \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha \right] d\tau, \tag{11} $$

где $\alpha \in (0,1)$, $E_\alpha(z)$ — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера, $M(\alpha)$ — некоторая нормирующая функция, такая, что $M(0) = M(1) = 1$.

Определение 6. Пусть задана функция $q(t) \in L_1[0,T]$. Интегралом Атанганы—Балеану дробного порядка будем называть оператор, обратный к оператору (11) и выражающийся в виде следующей линейной комбинации функции $q(t)$ и её дробного интеграла Римана—Лиувилля (см. [8]):

$$ {}_0^{AB}I_t^{\alpha} q(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} q(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{q(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}. \tag{12} $$

Определение 7. Дробный интеграл Прабхакара от некоторой функции $q(t) \in L_1[0,T]$ может быть вычислен по следующей формуле (см. [10]):

$$ {}_0^{P}I_{\rho,\mu,\omega,t}^{\gamma} q(t) = \int\limits_0^t \frac{E_{\rho,\mu}^{\gamma}[\omega(t-\tau)^\rho]}{(t-\tau)^{1-\mu}} q(\tau) d\tau. \tag{13} $$

Здесь $E_{\rho,\mu}^{\gamma}[z]$ — функция Прабхакара, являющаяся обобщением функции Миттаг-Леффлера:

$$ E_{\rho,\mu}^{\gamma}[z] = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\rho k+\mu)} \frac{z^k}{k!}, \tag{14} $$

$\gamma, \rho, \mu, \omega \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mathrm{Re}(\mu) > 0$.

Определение 8. Пусть задана такая функция $q(t)$, что $q'(t) \in L_1[0,T]$. Тогда дробная производная Прабхакара определяется следующей формулой (см. [10]):

$$ {}_0^{PC}D_{\rho,\mu,\omega,t}^{\gamma} q(t) = {}_0^{P}I_{\rho,1-\mu,\omega,t}^{-\gamma} q'(t), \tag{15} $$

$\gamma, \rho, \omega \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mu \in (0,1)$. В данном случае можно записать набор показателей оператора (15) в виде составного показателя $\alpha = \{\gamma, \rho, \mu, \omega\}$.

Далее будем называть систему (1) системой Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану или Прабхакара соответственно в случаях, когда операторы дробного дифференцирования в уравнениях (1) понимаются в смысле вышеприведённых определений Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану или Прабхакара.

Теорема 1. *Пусть задана система* (1) *при* $a = 0$, $C_1 = -q_2^0$, $C_2 = -aq_1^0 - u(0)$ *с начальными условиями* (2), *операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Капуто—Фабрицио и при этом* $q_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $q_{1,2}'(t) \in L_1[0,T]$, $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$. *Тогда решение системы* (1) *при* $a = 0$ *существует, единственно и может быть представлено в виде:*

$$ q_1(t) = q_1^0 + \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(t) - u(0)] + \\ + \int\limits_0^t \frac{\alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_2(1-\alpha_1) + \alpha_1\alpha_2(t-\tau)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(\tau) - u(0)]d\tau, \tag{16} $$

$$ q_2(t) = q_2^0 + \frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)}[u(t) - u(0)] + \frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)} \int\limits_0^t [u(\tau) - u(0)]d\tau. \tag{17} $$

Доказательство см. в [5, теорема 9]. □

Теорема 2. *Пусть задана система* (1) *при* $a = 0$, $C_1 = C_2 = 0$ *с начальными условиями* (2), *операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Атанганы—Балеану и при этом* $q_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$. *Тогда решение системы* (1) *при* $a = 0$ *существует, единственно и может быть представлено в виде*

$$q_1(t) = q_1^0\left(1 + \frac{t^{\alpha_1}}{M(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1)}\right) + \frac{1-\alpha_1}{M(\alpha_1)}q_2^0 + \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}u(t) + \frac{1}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times$$
$$\times\int_0^t \left[\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)(t-\tau)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)(t-\tau)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{\alpha_1\alpha_2(t-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\right]u(\tau)d\tau, \quad (18)$$

$$q_2(t) = q_2^0 + \frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)}u(t) + \frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha_2}}. \quad (19)$$

Доказательство см. в [5, теорема 13]. □

Теорема 3. *Пусть задана система* (1) *при* $a = 0$, $C_1 = C_2 = 0$ *с начальными условиями* (2), *операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Прабхакара,* $\alpha_i = \{\gamma_i, \rho, \mu_i, \omega\}$, $i = 1, 2$, *и при этом* $q_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$. *Тогда решение системы* (1) *существует, единственно и определяется формулами*

$$q_1(t) = q_1^0 + q_2^0 t^{\mu_1} E^{\gamma_1}_{\rho,\mu_1+1}(\omega t^\rho) + \int_0^t \frac{E^{\gamma_1+\gamma_2}_{\rho,\mu_1+\mu_2}[\omega(t-\tau)^\rho]}{(t-\tau)^{1-\mu_1-\mu_2}}u(\tau)d\tau, \quad (20)$$

$$q_2(t) = q_2^0 + \int_0^t \frac{E^{\gamma_2}_{\rho,\mu_2}[\omega(t-\tau)^\rho]}{(t-\tau)^{1-\mu_2}}u(\tau)d\tau, \quad (21)$$

Доказательство см. в [6, теорема 4.7]. □

4. Основные результаты. В настоящей работе получен ряд аналитических решений системы (1). На их основе исследованы граничные траектории системы и проанализирована постановка l-проблемы моментов. Основное рассмотрение проведено для системы Капуто—Фабрицио, а в случае $a = 0$ выполнено сравнение этой системы с системами Атанганы—Балеану и Прабхакара. Также построено аналитическое решение l-проблемы моментов для случая $a = 0$, $u(t) \in L_\infty[0,T]$.

4.1. Система Капуто—Фабрицио. Далее будут вычислены аналитические решения уравнений (1) при ненулевом значении коэффициента a в случае системы Капуто—Фабрицио и на их основе рассчитаны граничные траектории системы.

Теорема 4. *Пусть задана система* (1) *при* $a \neq 0$, $C_1 = -q_2^0$, $C_2 = -aq_1^0 - u(0)$ *с начальными условиями* (2) *и при этом* $q_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1[0,T]$, $u(t) \in L_p[0,T]$, $p > 1$. *Тогда решение системы* (1) *существует, единственно и может быть представлено в виде*

$$q_1(t) = q_1^0 + \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0) - u(t)] -$$
$$- \frac{1}{a}\frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\int_0^t R(t-\tau)[u(0) - u(\tau)]d\tau, \quad (22)$$

$$q_2(t) = q_2^0 + \frac{(1-\alpha_2)M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0)-u(t)] + \\ + \frac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)} \times \\ \times \int_0^t [u(0)-u(\tau)]\Big[\alpha_2 - (1-\alpha_2(t-\tau-1))R(t-\tau)\Big]d\tau, \quad (23)$$

где

$$R(x) = \exp\left(-\frac{A}{2}x\right)\begin{cases} A\,\mathrm{ch}(\beta x) + \dfrac{2B-A^2}{2\beta}\,\mathrm{sh}(\beta x), & A^2 > 4B, \\ A\cos(\beta x) + \dfrac{2B-A^2}{2\beta}\sin(\beta x), & A^2 < 4B, \\ A - \dfrac{A^2}{4}x, & A^2 = 4B, \end{cases} \quad (24)$$

$$A = a\frac{\alpha_2(1-\alpha_1)+\alpha_1(1-\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}, \\ B = a\frac{\alpha_1\alpha_2}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}, \quad (25) \\ \beta = \sqrt{\left|\frac{A^2}{4} - B\right|}.$$

Доказательство. Подействовав на обе части уравнений (1) оператором интегрирования Капуто—Фабрицио и учтя начальные условия (2), получим следующее единственное представление (см. [15]):

$$q_1(t) - q_1^0 = \frac{(1-\alpha_1)}{M(\alpha_1)}[q_2(t)-q_2^0] + \frac{\alpha_1}{M(\alpha_1)}\int_0^t [q_2(\tau)-q_2^0]d\tau, \quad (26)$$

$$q_2(t) - q_2^0 = \frac{(1-\alpha_2)}{M(\alpha_2)}\big[aq_1(t)+u(t)-aq_1^0-u(0)\big] + \\ + \frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)}\int_0^t [aq_1(\tau)+u(\tau)-aq_1^0-u(0)]d\tau. \quad (27)$$

Домножим выражение (26) на коэффициент a, затем подставим в него выражение (27) и, вычислив повторный интеграл в получившемся выражении, получим следующее линейное интегральное уравнение для функции $y(t) = aq_1(t) + u(t) - aq_1^0 - u(0)$:

$$y(t) + \int_0^t y(\tau)[A + B(t-\tau)]d\tau = \frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0)-u(t)]; \quad (28)$$

формулы для коэффициентов A и B приведены выше в условии теоремы.

Решение уравнения (28) известно (см. [4, с. 108, п. 2.1.5]) и выражается в виде

$$y(t) = \frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0)-u(t)] - \\ - \frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\int_0^t R(t-\tau)[u(0)-u(\tau)]d\tau; \quad (29)$$

выражение для функции $R(x)$ приведено выше в условии теоремы.

Выразив функцию $q_1(t)$ из выражения (29), получим решение (22), а подставив решение (29) в выражение (27), получим решение (23). Теорема доказана. $\square$

Теорема 5. *Пусть дана система уравнений (1) при $C_1 = -q_2^0$, $C_2 = -aq_1^0 - u(0)$, где операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Капуто—Фабрицио, и заданы начальные условия (2) и пусть $u(t) = \mathrm{const}$ всюду на отрезке $t \in [0, T]$. Задача Коши для такой системы не имеет решений, отличных от константы, определяемой начальными условиями, а при нулевых начальных условиях имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Рассмотрим случай $a = 0$ и подставим $u(t) = \mathrm{const}$ в выражения (16)–(17). Получим:

$$q_1(t) = q_1^0, \quad q_2(t) = q_2^0. \tag{30}$$

Эти же выражения получим в случае $a \neq 0$ из выражений (22) и (23) при $u(t) = \mathrm{const}$. Очевидно, при $q_1^0 = q_2^0 = 0$ решения (30) тривиальны. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Решения (16)–(17) и (22) и (23) отличны от константы для таких управлений, что $u(t) \neq u(0)$, например, равных нулю при $t = 0$ и ненулевой константе на полуинтервале $t \in (0, T]$:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \pm l, & t \in (0, T], \end{cases} \tag{31}$$

$l > 0$, $t \in [0, T]$. Также решения (16)–(17) и (22)–(23) будут отличны от константы для управлений, отличных от нуля лишь в начальный момент:

$$u(t) = \begin{cases} \pm l, & t = 0, \\ 0, & t \in (0, T]. \end{cases}$$

Вычислим теперь граничные траектории рассматриваемой системы. Примем, что управление задано в виде (31), и подставим его в формулы (16)–(17) и (22)–(23). В первом случае, т. е. при $a = 0$ будем иметь:

$$q_1^{\pm l}(t) - q_1^0 = \frac{1-\alpha_1}{M(\alpha_1)}\left(q_2^0 \pm l\frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)}\right) + \frac{\alpha_1}{M(\alpha_1)} q_2^0 t \pm \\ \pm \frac{lt}{2M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\Big[2(\alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_2(1-\alpha_1)) + \alpha_1\alpha_2 t\Big],$$

$$q_2^{\pm l}(t) - q_2^0 = \pm l\frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)} \pm lt\frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)},$$

где $q_{1,2}^{\pm l}(t)$ — значения фазовых координат, соответствующие реализации управления (31).

Выразив время из второго выражения, подставив в первое и приведя подобные, получим уравнение, связывающее значения фазовых координат:

$$q_1^{\pm l} - q_1^0 = \frac{1}{2\alpha_2 M(\alpha_1)}\left[q_2^0 \pm l\frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)}\right]\left[\pm\frac{\alpha_1 M(\alpha_2)}{l} q_2^0 - \alpha_1(1-\alpha_2)\right] \pm \\ \pm \frac{\alpha_1 M(\alpha_2)}{2\alpha_2 M(\alpha_1) l}(q_2^{\pm l})^2 + \frac{q_2^{\pm l}}{\alpha_2 M(\alpha_1)}\left[\alpha_2(1-\alpha_1) \mp \frac{\alpha_1 M(\alpha_2)}{l} q_2^0\right]. \tag{32}$$

Замечание 3. Уравнение (32) представляет собой уравнение параболы, как и в случае двойного интегратора целого порядка (см. [2]).

В случае $a \neq 0$ из формул (22)–(23) при определении управления в виде (31) получим:

$$q_1^{\pm l}(t) - q_1^0 = \begin{cases} \pm\dfrac{l}{a}\dfrac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad\times\left[\dfrac{A}{2\beta}\left(e^{-\frac{A}{2}t}\operatorname{ch}\beta t - 1\right) - e^{-\frac{A}{2}t}\operatorname{sh}\beta t - \dfrac{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right], \quad A^2 > 4B, \\ \pm\dfrac{l}{a}\dfrac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad\times\left[\left(\cos\beta t - \dfrac{A}{2\beta}\sin\beta t\right)e^{-\frac{A}{2}t} - 1 - \dfrac{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right], \qquad A^2 < 4B, \\ \pm\dfrac{l}{a}\dfrac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad\times\left[1 + e^{-\frac{A}{2}t}\left(\dfrac{A}{2}t - 1\right) - \dfrac{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right], \qquad A^2 = 4B, \end{cases} \tag{33}$$

$$q_2^{\pm l}(t) - q_2^0 = \begin{cases} \mp l\dfrac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad\times\Bigg[\alpha_2 t - -(1-\alpha_2)\left(\dfrac{A}{2\beta}\left(e^{-\frac{A}{2}t}\operatorname{ch}\beta t - 1\right) - e^{-\frac{A}{2}t}\operatorname{sh}\beta t - 1\right) - \\ \qquad -\alpha_2 e^{-\frac{A}{2}t}\left(t(2A\operatorname{sh}\beta t - \operatorname{ch}\beta t) + \dfrac{A^4 - 4BA^2 - 4B^2}{8\beta B^2}\operatorname{sh}\beta t\right)\Bigg], \qquad A^2 > 4B, \\ \mp l\dfrac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad\times\Bigg[\alpha_2 t - (1-\alpha_2)\left(e^{-\frac{A}{2}t}\left(\cos\beta t - \dfrac{A}{2\beta}\sin\beta t\right) - 2\right) - \\ \qquad -\alpha_2 e^{-\frac{A}{2}t}\left(t\left(\dfrac{A}{2\beta}\sin\beta t - \cos\beta t\right) + \dfrac{1}{\beta}\sin\beta t\right)\Bigg], \qquad A^2 < 4B, \\ \mp l\dfrac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\times \\ \qquad\times\left[\alpha_2 t\left(1 - \dfrac{A}{2}te^{-\frac{A}{2}t}\right) - (1-\alpha_2)\left(\dfrac{A}{2}t - 1\right)e^{-\frac{A}{2}t}\right], \qquad A^2 = 4B, \end{cases} \tag{34}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть задана система уравнений* (1) *при* $C_1 = -q_2^0$, $C_2 = -aq_1^0 - u(0)$, *где операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Капуто—Фабрицио, и начальные условия* (2). *Тогда граничные траектории этой системы в случае* $a = 0$ *описываются уравнением* (32), *а в случае* $a \neq 0$ *— формулами* (33)–(34).

Рассмотрим теперь решения (16)–(17) и (22)–(23) при $t = T$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что в этом случае упомянутые решения могут быть записаны в виде двумерной l-проблемы моментов (4). Корректность и разрешимость полученной проблемы при $a = 0$ была обоснована ранее (см. [5, теорема 10]). Далее аналогичное доказательство будет дано для случая $a \neq 0$.

Формулы (22)–(23) при $t = T$ можно переписать в виде (4), если справедливы следующие выражения для моментов и функций $g_{1,2}(\tau)$:

$$c_1 = q_1^T - q_1^0 - \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0) - u(T)] - \\ - \frac{u(0)}{a}\frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\int_0^T R(T-\tau)d\tau, \tag{35}$$

$$c_2 = q_2^T - q_2^0 - \frac{(1-\alpha_2)M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}[u(0) - u(T)] +$$
$$+ \frac{u(0)M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)} \int_0^T [\alpha_2 - (1 - \alpha_2(T - \tau - 1))R(T-\tau)]d\tau, \quad (36)$$

$$g_1(\tau) = \frac{1}{a}\frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}R(T-\tau), \quad (37)$$

$$g_2(\tau) = \frac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\Big[(1 - \alpha_2(T-\tau-1))R(T-\tau) - \alpha_2\Big]. \quad (38)$$

Теорема 7. *Пусть задана система* (1) *и выполнены условия теоремы* 4. *Предположим также, что моменты* (35)–(36) *определены и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда l-проблема моментов* (4)–(5) *с учётом* (37)–(36) *будет корректна и разрешима.*

Доказательство. Норма функций $g_{1,2}(\tau)$ (определяемых формулами (37)–(38)) в пространстве $L_{p'}(0,T]$ может быть вычислена по формулам

$$\|g_1(\tau)\|_{L_{p'}} = \left|\frac{1}{a}\frac{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right| \|R(T-\tau)\|_{L_{p'}},$$
$$\|g_2(\tau)\|_{L_{p'}} = \left|\frac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right| \Big\|(1 - \alpha_2(T-\tau-1))R(T-\tau) - \alpha_2\Big\|_{L_{p'}}.$$

Для нормы $\|g_2(\tau)\|_{L_{p'}}$ справедлива оценка:

$$\|g_2(\tau)\|_{L_{p'}} \leqslant \left|\frac{M(\alpha_1)}{a(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) - M(\alpha_1)M(\alpha_2)}\right| \left[(1+2\alpha_2)T^{1/p'} + \alpha_2\frac{T^{1+1/p'}}{(p'+1)^{1/p'}}\right] \|R(T-\tau)\|_{L_{p'}}.$$

Функция $R(T-\tau)$ определяется формулами (24)и, очевидно, для неё определена норма в пространстве $L_{p'}(0,T]$ (в чём можно убедиться непосредственным вычислением). При $\alpha_{1,2} \in (0,1)$, $T > 0$ и $p' \geqslant 1$ выражение в правой части неравенства для нормы $\|g_2(\tau)\|_{L_{p'}}$ ограничено и положительно. Аналогично ограничено и положительно выражение для нормы $\|g_1(\tau)\|_{L_{p'}}$. Следовательно, норма функций $g_{1,2}(\tau)$ в пространстве $L_{p'}(0,T]$ определена.

Функции $g_{1,2}(\tau)$ линейно независимы, в чём можно убедиться непосредственной проверкой. Следовательно, при сделанных выше предположениях проблема моментов (4)–(5) с учётом (37)–(36) разрешима. Теорема доказана. □

4.2. Сравнение результатов для систем Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану и Прабхакара. В этом разделе проводится сравнение некоторых из полученных выше результатов с аналогичными результатами для систем (1) с операторами дробного дифференцирования Атанганы—Балеану или Прабхакара в случае $a = 0$. Положим также в уравнениях (1) $C_1 = C_2 = 0$.

Теорема 8. *Пусть дана система уравнений* (1) *при $C_1 = C_2 = 0$, $a = 0$, где операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Атанганы—Балеану или Прабхакара и заданы начальные условия* (2) *и пусть $u(t) = 0$ всюду на отрезке $t \in [0,T]$. Решение задачи Коши для рассматриваемой системы обладает следующими свойствами*:

(1) *функция $q_2(t)$ на отрезке $t \in [0,T]$ является константой, значение которой определяется начальными условиями* (2);
(2) *при нулевых начальных условиях решение задачи Коши тривиально.*

Доказательство. Рассмотрим сначала систему (1) с операторами Атанганы—Балеану при $a = C_1 = C_2 = 0$. Подставим $u(t) = 0$ в выражения (18)–(19). Получим:

$$q_1(t) = q_1^0\left(1 + \frac{t^{\alpha_1}}{M(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1)}\right) + \frac{1-\alpha_1}{M(\alpha_1)}q_2^0, \quad (39)$$

$$q_2(t) = q_2^0. \quad (40)$$

Из формул (39)–(40) очевидно, что фазовая координата $q_1(t)$ является дробно-степенной функцией времени, а фазовая координата $q_2(t)$ является константой на отрезке $t \in [0, T]$. Очевидно также, что при $q_1^0 = q_2^0 = 0$ решение задачи Коши (39)–(40) вырождается в тривиальное: $q_1(t) = q_2(t) = 0$.

Аналогичным образом рассмотрим случай, когда операторы дробного дифференцирования в уравнениях (1) при $a = C_1 = C_2 = 0$ понимаются в смысле Прабхакара. Из формул (20)–(21) при $u(t) = 0$ получим:

$$q_1(t) = q_1^0 + q_2^0 t^{\mu_1} E^{\gamma_1}_{\rho,\mu_1+1}(\omega t^\rho), \tag{41}$$

$$q_2(t) = q_2^0. \tag{42}$$

Согласно выражениям (41)–(42) фазовая координата $q_1(t)$ нетривиально зависит от времени, а фазовая координата $q_2(t)$ является константой на отрезке $t \in [0, T]$. При $q_1^0 = q_2^0 = 0$ решение (41)–(42), как и выше, вырождается в тривиальное: $q_1(t) = q_2(t) = 0$. □

Вычислим теперь граничные траектории системы (1) по аналогии с рассмотренным выше случаем системы Капуто—Фабрицио. Примем, что управление задано в виде $u(t) = \pm l$, $l > 0$, и вычислим в этом случае решения (18)–(19) и (20)–(21). Для систем Атанганы—Балеану, проведя необходимые преобразования, получим из формул (18)–(19) следующее уравнение:

$$q_1^{\pm l} - q_1^0 = \frac{1-\alpha_1}{M(\alpha_1)} q_2^{\pm l} + \frac{[M(\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)]^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}}{M(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1)} \left(\pm \frac{q_2^{\pm l} - q_2^0}{l} - \frac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \times$$
$$\times \left[q_1^0 + \frac{\alpha_1\alpha_2 B(\alpha_1,\alpha_2)}{\alpha_1+\alpha_2}(q_2^{\pm l} - q_2^0) \pm l \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)}{M(\alpha_2)} \left(1 - \frac{\alpha_2 B(\alpha_1,\alpha_2)}{\alpha_1+\alpha_2} \right) \right]. \tag{43}$$

В случае системы Прабхакара из уравнений (20)–(21) при $u(t) = \pm l$, $l > 0$, получим:

$$q_1^{\pm l} - q_1^0 = \pm l t^{\mu_1+\mu_2} E^{\gamma_1+\gamma_2}_{\rho,\mu_1+\mu_2+1}(\omega t^\rho) + q_2^0 t^{\mu_1} E^{\gamma_1}_{\rho,\mu_1+1}(\omega t^\rho), \tag{44}$$

$$q_2^{\pm l} - q_2^0 = \pm l t^{\mu_2} E^{\gamma_2}_{\rho,\mu_2+1}(\omega t^\rho). \tag{45}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть задана система уравнений* (1) *при* $a = C_1 = C_2 = 0$, *где операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле Атанганы—Балеану или Прабхакара, и начальные условия* (2). *Тогда граничные траектории системы Атанганы—Балеану описываются уравнением* (43), *а граничные траектории системы Прабхакара — формулами* (44)–(45).

Замечание 4. Уравнение (43), в отличие от уравнения (32), является дробно-степенным, что характерно для систем типа (1) с операторами дифференцирования Хильфера, Адамара и др. (см. [5]).

Замечание 5. Как было показано в предыдущем пункте, для системы Капуто—Фабрицио при произвольном значении коэффициента a l-проблема моментов является корректной и разрешимой без каких-либо дополнительных условий. Ранее было показано, что для системы (1) при $a = 0$ с операторами дифференцирования Атанганы—Балеану или Прабхакара возникают дополнительные условия, связывающие показатели дробного дифференцирования с индексом p лебегова пространства, элементом которого является управление (см. [5, 6]).

4.3. Решение l-проблемы моментов для двойного интегратора Капуто—Фабрицио при $u(t) \in L_\infty[0, T]$. Построим решение l-проблемы моментов для системы (1) при $a = 0$ как решение двумерной задачи 2 в случае, когда функции $g_{1,2}(\tau)$ определяются формулами (37)–(36), а управление является существенно ограниченной функцией, $u(t) \in L_\infty[0, T]$.

Введём следующие обозначения:

$$A = \frac{\alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_2(1-\alpha_1)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}, \quad B = \frac{\alpha_1\alpha_2}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)}, \quad C = \frac{\alpha_2}{M(\alpha_2)}. \tag{46}$$

Очевидно, при $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$ и $M(\alpha_{1,2}) > 0$ значения A, B, C положительны и ограничены. При $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$: $A = 0$, $B = C = 1$.

Функция, стоящая под знаком модуля в формуле (7) линейна по аргументу и, следовательно, может менять знак на отрезке $[0,T]$ только в одной точке. Вычислим точку смены знака t', приравняв рассматриваемую функцию нулю:

$$t' = T + \frac{c_1\xi_2}{1-\xi_2 c_2}\frac{M(\alpha_1)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)+\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2}. \tag{47}$$

Как известно (см. [1,3]), если l-проблема моментов корректна и разрешима, то оптимальное управление в случае $u(t) \in L_\infty[0,T]$ является кусочно постоянной функцией времени, точки переключения которой совпадают с точками переключения функции, стоящей под знаком модуля в формуле (7).

Условие $t' \in [0,T]$ с учётом (47) можно переписать в следующем виде:

$$-\frac{\alpha_1}{M(\alpha_1)}\left[T + \frac{\alpha_1(1-\alpha_2)+\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2}\right] \leqslant \frac{c_1\xi_2}{1-\xi_2 c_2} \leqslant -\frac{\alpha_1(1-\alpha_2)+\alpha_2(1-\alpha_1)}{\alpha_2 M(\alpha_1)}. \tag{48}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть дана двумерная l-проблема моментов* (4) *на отрезке* $[0,T]$, *где функции $g_{1,2}$ определяются формулами* (37)–(38), *моменты $c_{1,2}$ определяются формулами* (35)–(36), *а искомое решение является существенно ограниченной функцией. Пусть рассматриваемая проблема корректна и разрешима. Справедливы следующие утверждения*:

(1) *решение рассматриваемой проблемы имеет не более одной точки переключения на отрезке* $[0,T]$;

(2) *при выполнении условия* (48) *решение рассматриваемой проблемы имеет одну точку переключения на отрезке* $[0,T]$, *положение которой определяется формулой* (47).

Будем далее рассматривать случай, когда управление имеет одну точку переключения. Раскрыв модуль в интеграле, входящем в выражение (7) и выполнив необходимые вычисления, получим (с учётом условия (8), формулы (47) и обозначений (46)):

$$\frac{1}{\Lambda_2} = \min_{\xi_2}\int_0^T \left|\frac{1-\xi_2 c_2}{c_1}g_1(\tau) + \xi_2 g_2(\tau)\right| dt = \min_{\xi_2}\left(\frac{a_1\xi_2^2 + a_2\xi_2 + a_3}{c_1 B(1-\xi_2 c_2)}\right), \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (c_2A - c_1C)^2 + c_2BT(c_2A - c_1C) + \frac{1}{2}(c_2BT)^2, \\ a_2 &= 2c_1CA - c_2(2A^2 + B^2T^2) - BT(c_2A - c_1C), \\ a_3 &= A^2 + \frac{1}{2}B^2T^2 + ABT. \end{aligned} \tag{50}$$

Обозначим через $f(\xi_2)$ функцию, стоящую в правой части выражения (49) под знаком минимума:

$$f(\xi_2) = \frac{a_1\xi_2^2 + a_2\xi_2 + a_3}{c_1 B(1-\xi_2 c_2)}. \tag{51}$$

Функция (51) определена и ограничена при $c_1 \neq 0$. Очевидно, функция $f(\xi_2)$ непрерывно дифференцируема произвольное число раз по переменной ξ_2 на вещественной оси. Следовательно, эта функция будет иметь минимум в точке ξ_2^*, где её первая производная равна нулю, а вторая положительна. Первое условие приводит к квадратному уравнению относительно ξ_2, решение которого записывается в виде:

$$\xi_2^{\pm} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + a_1c_2(a_2 + c_2a_3)}}{a_1c_2}. \tag{52}$$

При этом должно выполняться условие неотрицательности дискриминанта упомянутого квадратного уравнения:

$$a_1^2 + a_1c_2(a_2 + c_2a_3) \geqslant 0. \tag{53}$$

Используя (50), можно показать, что

$$a_1 + c_2(a_2 + c_2 a_3) = c_1^2 C^2. \tag{54}$$

Тогда условие (53) запишется в виде

$$a_1 c_1^2 C^2 \geqslant 0,$$

откуда при $c_1 \neq 0$ следует условие

$$a_1 \geqslant 0.$$

Это условие выполняется по умолчанию, поскольку выражение для коэффициента $a1$ может быть переписано в виде суммы квадратов следующего вида (в чём можно убедиться непосредственной проверкой):

$$a_1 = (c_2 A - c_1 C + \frac{1}{2} c_2 BT)^2 + \frac{1}{4}(c_2 BT)^2.$$

Более того, неравенство в данном случае выполняется строго, поскольку по предположению хотя бы один из моментов $c_{1,2}$ отличен от нуля. Таким образом, дискриминант упомянутого квадратного уравнения по умолчанию неотрицателен и это уравнение имеет не более двух вещественных корней, определяемых формулой (52).

Вторая производная функции (51) будет определяться следующим выражением:

$$\frac{d^2 f}{d\xi_2^2} = 2\frac{(1 - \xi_2 c_2)(a_1 + a_2 c_2 + c_2^2 a_3)}{c_1 B (1 - \xi_2 c_2)^4}. \tag{55}$$

Подставив в (55) выражения (52), получим:

$$\frac{d^2 f}{d\xi_2^2} = \mp 2 \frac{c_1^2 C^3}{\sqrt{a_1} B (1 - \xi_2 c_2)^4}.$$

Следовательно, вторая производная функции (51) будет положительна при $c_1 \neq 0$ и выборе корня ξ_2^-, выражение для которого с учётом (54) запишется в виде:

$$\xi_2^* = \frac{1}{c_2}\left(1 - \frac{c_1 C}{\sqrt{a_1}}\right). \tag{56}$$

Полученное выражение (56) для ξ_2^* позволяет воспользоваться формулой (49) и вычислить параметр Λ_2, определяющий норму оптимального управления:

$$\Lambda_2 = \frac{B}{C} \frac{c_2^2}{2\sqrt{a_1} + c_2(2A + BT) - 2c_1 C}. \tag{57}$$

Тогда оптимальное управление с минимальной нормой (решение задачи А) с учётом (37)–(38) будет определяться формулой (см. [1]):

$$u(t) = \Lambda_2 \operatorname{sign}\left[\frac{C}{\sqrt{a_1}}(A + B(T - t)) + \frac{C}{c_2}\left(1 - \frac{c_1 C}{\sqrt{a_1}}\right)\right] = \Lambda_2 \operatorname{sign}(t' - t), \quad t \in [0, T] \tag{58}$$

Решение задачи Б, в свою очередь, будет определяться формулой (см. [1])

$$u(t) = l \operatorname{sign}\left[\frac{C}{\sqrt{a_1}}(A + B(T - t)) + \frac{C}{c_2}\left(1 - \frac{c_1 C}{\sqrt{a_1}}\right)\right] = l \operatorname{sign}(t' - t), \quad t \in [0, T^*] \tag{59}$$

где $l > 0$ считается заданным, а T^* находится как минимальное неотрицательное действительное решение неравенства

$$\Lambda_2(T^*) \leqslant l \tag{60}$$

(см. [1]). Выражение (60) является следствием условия (5) с учётом того, что в качестве нормы управления рассматривается норма оптимального (в смысле минимума нормы) управления, равная величине Λ_2. Положим $u(0) = u(T) = 0$, тогда моменты (35)–(36) не будут зависеть от T. Учтём выражение (57) и рассмотрим случай, когда выражение (60) является равенством. Тогда получим квадратное уравнение относительно T, для корней которого будет справедлива формула

$$T_\pm^* = \frac{-c_2 B \pm \sqrt{2B^2 c_2^2 - 4BCl(c_2 A - c_1 C)}}{BCl}. \tag{61}$$

Кроме того, для существования вещественных корней $T^*_\pm$ необходимо выполнение условия

$$2B^2c_2^2 - 4BCl(c_2A - c_1C) \geqslant 0.$$

Это условие с учётом (46) можно переписать в виде

$$\frac{c_2A - c_1C}{c_2^2} \leqslant \frac{\alpha_1}{2M(\alpha_1)l}, \tag{62}$$

где в правой части неравенства стоит положительная константа, определяемая значением показателя α_1 и заданным положительным числом l, а левая часть зависит от моментов $c_{1,2}$.

Таким образом, справедливы следующие два утверждения.

Теорема 11. *Пусть дана двумерная l-проблема моментов* (4) *на отрезке* $[0, T]$, *где T задано, функции $g_{1,2}$ определяются формулами* (37)–(38), *моменты $c_{1,2}$ определяются формулами* (35)–(36), *а искомое решение является существенно ограниченной функцией. Тогда решение данной проблемы, имеющее минимальную норму, выражается формулой* (58).

Теорема 12. *Пусть дана двумерная l-проблема моментов* (4) *на отрезке* $[0, T]$, *где T заранее не задано, функции $g_{1,2}$ определяются формулами* (37)–(38), *моменты $c_{1,2}$ определяются формулами* (35)–(36), *а искомое решение является существенно ограниченной функцией. Справедливы следующие утверждения*:

(1) *при невыполнении условия* (62) *рассматриваемая проблема при заданном ограничении* (5) *не имеет решения с минимальным носителем*;

(2) *при выполнении условия* (62) *решение данной проблемы, имеющее минимальный носитель при заданном в форме равенства ограничении* (5) *на норму решения, выражается формулой* (59), *а величина носителя в случае $u(0) = u(T) = 0$ определяется наименьшим положительным из значений* (61).

Замечание 6. Полученные результаты выведены без дополнительных предположений и предоставляют общее решение проблемы моментов и соответствующей ей задачи оптимального управления для двойного интегратора Капуто—Фабрицио. Это заметно отличает данный случай от исследованного ранее случая двойного интегратора Хильфера или Адамара, где аналитическое решение задачи в общем виде получить невозможно (поскольку при нахождении величины ξ_2^* возникает алгебраическое уравнение степени, определяемой отношением α_1/α_2, неразрешимое в общем виде), а возможно только в некоторых случаях, например при $c_2 = 0$ или $\alpha_1 = \alpha_2$.

Подставив построенное выше оптимальное управление (58) в решения (16)–(17), можно вычислить фазовые траектории рассматриваемой системы в режиме оптимального управления:

$$q_1^{\mathrm{opt}}(t) = \begin{cases} q_1^0 + [\Lambda_2 - u(0)]\left[\dfrac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)} + At + \dfrac{B}{2}t^2\right], & t < t', \\[2ex] q_1^0 - [\Lambda_2 + u(0)]\left[\dfrac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{M(\alpha_1)M(\alpha_2)} + At + \dfrac{B}{2}t^2\right] + 2t'\Lambda_2\left[A + \dfrac{B}{2}(2t - t')\right], & t > t', \end{cases} \tag{63}$$

$$q_2^{\mathrm{opt}}(t) = \begin{cases} q_2^0 + [\Lambda_2 - u(0)]\left[\dfrac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)} + Ct\right], & t < t', \\[2ex] q_2^0 - [\Lambda_2 + u(0)]\left[\dfrac{1-\alpha_2}{M(\alpha_2)} + Ct\right] + 2t'\Lambda_2 C, & t > t'. \end{cases} \tag{64}$$

Замечание 7. Непосредственным вычислением можно убедиться, что выражения (63)–(64) при $t = T$ сводятся к конечным условиям (3).

Замечание 8. Если считать, что управление (58) определено на отрезке $t \in [0, T]$, то можно вычислить его значение в начальный момент: $u(0) = \Lambda_2$. Подставив это значение в формулы (63)–(64), можно показать, что до момента переключения управления система остаётся в начальном состоянии, а после переключения фазовая траектория системы представляет собой параболу. Если же принять, что формула (58) определяет оптимальное управление на полуинтервале $t \in (0, T]$ и при этом $u(0) = 0$, то до и после момента переключения система будет совершать движение по участкам парабол, направленных в разные стороны.

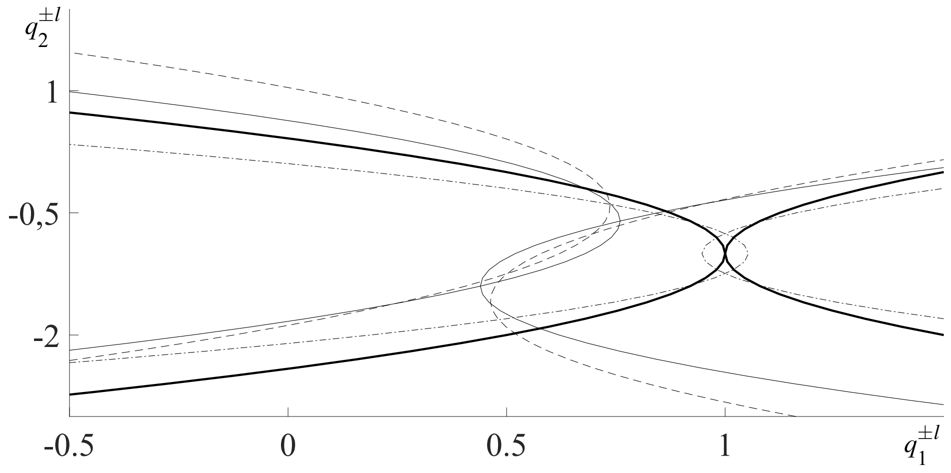

Рис. 1. Граничные траектории системы Капуто—Фабрицио при $a = 0$ при различных значениях показателей дробного дифференцирования: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ (тонкие сплошные линии); $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}7$ (штриховые линии); $\alpha_1 = 1{,}0$, $\alpha_2 = 0{,}7$ (пунктирные линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}0$ (жирные сплошные линии).

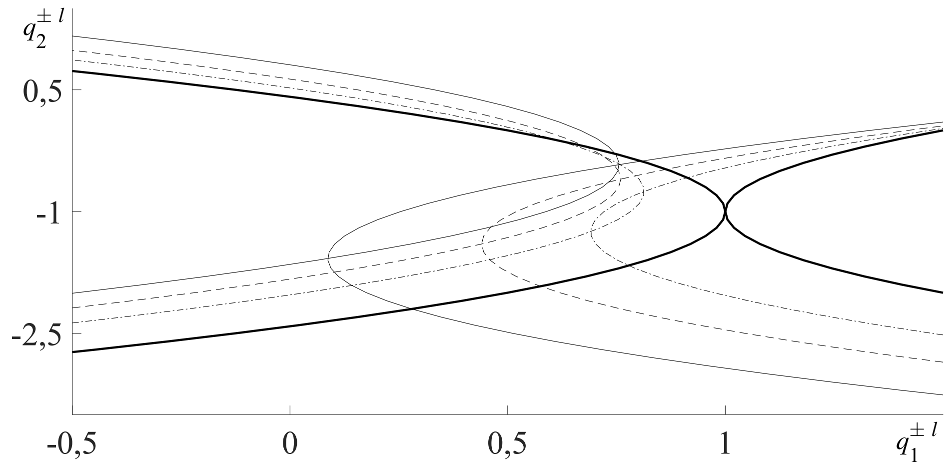

Рис. 2. Граничные траектории системы Капуто—Фабрицио при $a = 0$ при различных значениях показателей дробного дифференцирования: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}3$ (тонкие сплошные линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ (штриховые линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}7$ (пунктирные линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}0$ (жирные сплошные линии).

5. Примеры. В данном разделе рассмотрены примеры вычисления граничных траекторий систем Капуто—Фабрицио и Атанганы—Балеану при $a = 0$. В расчётах нормирующая функция задавалась следующим образом:

$$M(\alpha) = 1 + \alpha(1 - \alpha).$$

Также задавались следующие значения параметров: $q_1^0 = 1$, $q_2^0 = -1$, $l = 1$.

На рис. 1 и 2 показаны примеры граничных траекторий системы Капуто—Фабрицио при различных значениях показателей дробного дифференцирования. Видно, что в данном случае при $\alpha_{1,2} < 1$ области, ограниченные траекториями, соответствующими $u(t) = l$ (справа) и $u(t) = -l$

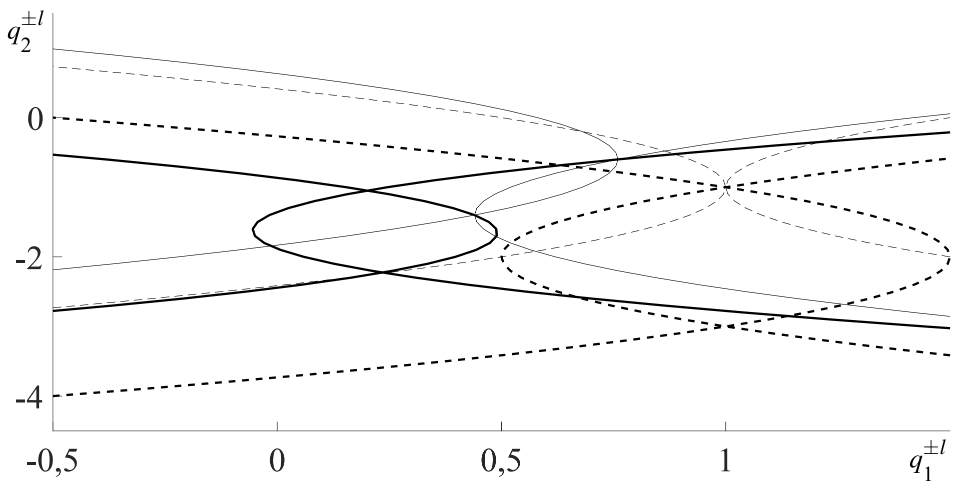

Рис. 3. Сравнение граничных траекторий систем Капуто—Фабрицио (тонкие линии) и Атанганы—Балеану (жирные линии) при $a = 0$: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ (сплошные линии); $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}0$ (штриховые линии).

(слева), перекрываются. При этом площадь перекрытия увеличивается при уменьшении показателей дифференцирования. На практике это может означать, что в такой системе переключение управления не всегда вызывает её переход из одной области значений фазовых координат в другую.

На рис. 3 приведено сравнение граничных траекторий системы Капуто—Фабрицио и системы Атанганы—Балеану. Видно, что для системы Атанганы—Балеану перекрытие областей, ограниченные траекториями, соответствующими $u(t) = l$ и $u(t) = -l$, наблюдается и в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

6. Заключение. В данной работе исследована динамика двумерных систем дробного порядка с управлением в случаях, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто—Фабрицио, Атанганы—Балеану или Прабхакара. Аналитически получены законы движения исследуемых систем и вычислены их граничные траектории. Обоснована корректность и разрешимость l-проблемы моментов для упомянутых систем, что позволяет далее пользоваться методом моментов и явным образом вычислять для них оптимальное управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. — М.: Наука, 1975.
2. *Бутковский А. Г.* Фазовые портреты управляемых динамических систем. — М.: Наука, 1985.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
4. *Полянин А. Д., Манжиров А. В.* Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Физматлит, 2003.
5. *Постнов С. С.* l-Проблема моментов и оптимальное управление для систем, моделируемых уравнениями дробного порядка с многопараметрическими и «несингулярными» производными// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *199*. — С. 86–116.
6. *Постнов С. С.* О постановке и разрешимости l-проблемы моментов для систем дробного порядка// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *206*. — С. 107–124.
7. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
8. *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel// Thermal Sci. — 2016. — *20*, № 2. — P. 763–769.
9. *Caputo M., Fabrizio M.* A new definition of fractional derivative without singular kernel// Progr. Fract. Differ. Appl. — 2015. — *1*, № 2. — P. 73–85.

10. *Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Z.* Hilfer–Prabhakar derivatives and some applications// Appl. Math. Comput. — 2014. — *242.* — P. 576–589.
11. *Kubyshkin V. A., Postnov S. S.* Optimal control problem investigation for linear time-invariant systems of fractional order with lumped parameters described by equations with Riemann–Liouville derivative// J. Control Sci. Eng. — 2016. — *2016.* — 4873083.
12. *Losada J., Nieto J. J.* Properties of a new fractional derivative without singular kernel// Progr. Fract. Differ. Appl. — 2015. — *1*, № 2. — P. 87–92.
13. *Postnov S.* Optimal control problem for linear fractional-order systems, described by equations with Hadamard-type derivative// J. Phys. Conf. Ser. — 2017. — *918.* — 012026.
14. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics. — Berlin: Springer, 2010.
15. *Zhang S., Hu L., Sun S.* The uniqueness of solution for initial value problems for fractional differential equation involving the Caputo–Fabrizio derivative// J. Nonlinear Sci. Appl. — 2018. — *11.* — P. 428–436.

Постнов Сергей Сергеевич
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук, Москва
E-mail: `postnov.sergey@inbox.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 97–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-97-106

УДК 517.547.59

ФОРМУЛА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КАМПЕ ДЕ ФЕРЬЕ

© 2022 г. **А. ХАСАНОВ, Т. К. ЮЛДАШЕВ**

Аннотация. Метод операторов Бурчналла—Чаунди применен для исследования формул разложения гипергеометрической функциеи $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ Кампе де Ферье. При помощи полученных операторных тождеств выведены 14 формул разложения. Найдена новая группа интегральных представлений эйлерова типа для гипергеометрической функции Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ и построено ее аналитическое продолжение.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция Кампе де Ферье, оператор Бурчналла—Чаунди, интегральное представление, формула разложения, аналитическое продолжение.

FORMULA FOR ANALYTIC CONTINUATION OF THE KAMPÉ DE FÉRIET HYPERGEOMETRIC FUNCTION

© 2022 **A. HASANOV, T. K. YULDASHEV**

Abstract. We apply the method of Burchnall—Chaundy operators to the study of expansion formulas for the Kampé de Fériet hypergeometric function $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$. Using the obtained operator identities, we derive 14 expansion formulas. A new group of Euler-type integral representations for the Kampé de Fériet hypergeometric function $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ is found and its analytic continuation is constructed.

Keywords and phrases: Kampé de Fériet hypergeometric function, Bourchnall–Chaundy operator, integral representation, expansion formula, analytic continuation.

AMS Subject Classification: 33C20, 33C65, 44A45

1. Постановка задачи. Исследование кратных гипергеометрических функций мотивировано в основном тем, что решения многих прикладных задач, содержащих частные производные, могут быть получены с помощью таких гипергеометрических функций (см. [13, 14, 18]). Действительно, как это было показано в [12], энергия, поглощаемая некоторой неферромагнитной проводящей сферой, находящейся во внутреннем магнитном поле, рассчитывается с помощью таких функций. Гипергеометрические функции нескольких переменных использовались в физических и квантово-статистических приложениях [5, 17]. В частности, многие проблемы газовой динамики приводят к проблемам вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые затем могут быть решены в терминах нескольких гипергеометрических функций. Среди примеров можно привести задачу об адиабатическом плоскопараллельном течении газа без вихря, задачу об истечении сверхзвукового тока из сосуда с плоскими стенками и ряд других задач, связанных с течением газа [7]. Следует отметить, что функции Римана и фундаментальные решения вырождающихся уравнений в частных производных второго порядка выражаются через гипергеометрические функции многих переменных [8, 22]. При исследовании краевых задач для этих уравнений в частных производных нужны разложения гипергеометрических функций многих переменных по более простым гипергеометрическим функциям типа Гаусса и Аппеля.

Обширную область применения гипергеометрических функций представляют и задачи квантовой химии, в частности, проблема многоцентровых матричных элементов, вычисление которых составляет основную трудность при применении вариационных методов к молекулярным системам [16]. Ввиду разнообразия приложений является важным регулярное исследование множественных гипергеометрических функций. Бурчналл и Чаунди систематически представили ряд формул разложения и разложения некоторых двойных гипергеометрических функций через простейшие гипергеометрические функции (см., например, [2–4]). Их метод основан на следующих обратных парах символьных операторов:

$$\nabla(h) \coloneqq \frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\delta_2+h)}{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+h)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\delta_1)_k(-\delta_2)_k}{(h)_k k!}, \tag{1}$$

$$\Delta(h) \coloneqq \frac{\Gamma(\delta_1+h)\Gamma(\delta_2+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\delta_1+\delta_2+h)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\delta_1)_k(-\delta_2)_k}{(1-h-\delta_1-\delta_2)_k k!}, \tag{2}$$

где $\delta_1 \coloneqq x\dfrac{\partial}{\partial x}; \delta_2 \coloneqq y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Далее Шривастава и Карлссон [18, с. 332—333] начали применять метод Бурчналла—Чаунди для получения новых разложений для гипергеометрических функций [2–4]. Метод Бурчналла—Чаунди с некоторыми изменениями был применен Панди [9] и Шриваставы [15] для вывода формул разложения и разложения (декомпозиции) для тройных гипергеометрических функций $F_A^{(3)}$, F_E, F_K, F_M, F_N, F_P и F_T, H_A, H_C, соответственно (см. [17, раздел 1.5], [19]). Этот метод применен Сингхалом и Бхати [13] при получении аналогичных разложений, связанных с несколькими многомерными гипергеометрическими функциями. Впоследствии, используя формул прямого и обратного преобразования Лапласа в сочетании с принципом многомерной математической индукции, Шривастава установил несколько общих семейств разложений и формул разложения для двойной гипергеометрической функции Кампе де Ферье [1, с. 150] и [18, раздел 1.3]. Близкие результаты, касающиеся двойной гипергеометрической функции Кампе де Ферье, можно также найти в работах Рагаба [12] и Вермы [21].

2. Множество операторных тождеств. Применим пары символических операторов (1), (2) к двойной гипергеометрической функции Кампе де Ферье

$$F^{p;q;k}_{l;i;j}\left[\begin{matrix}(a_p):\ (b_q);\ (c_k);\\ (\alpha_l):\ (\beta_m);\ (\gamma_n);\end{matrix}\ x,y\right] = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{q}(b_j)_r\prod\limits_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{m}(\beta_j)_r\prod\limits_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s r!s!}x^r y^s,$$

находится следующий набор операторных тождеств (см. [1, 18]):

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(d)\,{}_3F_2(b_1,b_2,b_3;d,e;x)\,{}_3F_2(c_1,c_2,c_3;d,f;y), \tag{3}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3;\\ d_1;\quad d_2;\quad d_2;\end{matrix}\ x,y\right] = \nabla(d_2)F^{0:3;3}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}-;\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3;\\ d_1,d_2;\quad -;\quad -;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{4}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a,b_1,b_2;\ a,c_1,c_2;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(a)\Delta(d)F^{1:2;2}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a;\ b_1,b_2;\ c_1,c_2;\\ -;\ d,e;\ d,f;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{5}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a,b_1,b_2;\ a,c_1,c_1;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(a)F^{1:2;2}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a;\ b_1,b_2;\ c_1,c_2;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{6}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a,b_1,b_2;\ a,c_1,c_2;\\ d;\quad d_1;\quad d_1;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(a)\nabla(d_1)F^{1:2;2}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a;\ b_1,b_2;\ c_1,c_2;\\ d,d_1;\quad -;\quad -;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{7}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a_1,a_2,b;\ a_1,a_2,c;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right] = \Delta(a_1)\Delta(a_2)\Delta(d)F^{2:1;1}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2;\ b;\ c;\\ -;\ d,e;\ d,f;\end{matrix}\ x,y\right], \tag{8}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a_1,a_2,b;\ a_1,a_2,c;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)F^{2:1;1}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a_1,a_2;\ b;\ c;\\ d;\ e;\ f;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{9}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a_1,a_2,b;\ a_1,a_2,c;\\ d;\quad d_1;\quad d_1;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)\nabla(d_1)F^{2:1;1}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a_1,a_2;\ b;\ c;\\ d,d_1;\ -;\ -;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{10}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a_1,a_2,a_3;\ a_1,a_2,a_3;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)\Delta(a_3)\Delta(d)F^{3:0;0}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2,a_3;\ -;\ -;\\ -;\ d,e;\ d,f;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{11}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)\Delta(a_3)F^{3:0;0}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a_1,a_2,a_3;\ -;\ -;\\ d;\ e;\ f;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{12}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a_1,a_2,a_3;\ a_1,a_2,a_3;\\ d;\quad d_1;\quad d_1;\end{matrix}\ x,y\right]=\Delta(a_1)\Delta(a_2)\Delta(a_3)\nabla(d_1)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}a_1,a_2,a_3;\\ d,d_1;\end{matrix}x+y\right).\tag{13}$$

Используя прямое и обратное преобразования Меллина, а также контурные интегральные представления Меллина—Барнса для двойной гипергеометрической функции Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$, нетрудно дать альтернативные доказательства всех операторных тождеств (3)—(13) (см., например, [1,6,8]). Детали альтернативных выводов тождеств оператора мы опускаем здесь. Отметим, что интегралы Меллина—Барнса имеют свою раннюю историю, связанную с изучением гипергеометрических функций конца девятнадцатого и начала двадцатого веков. Здесь мы рекомендуем читателей ознакомиться с книгой [11], в которой излагается теория таких интегралов и иллюстрируются их применения в асимптотическом анализе.

3. Формулы разложения (декомпозиции) для функции Кампе де Ферье. Используя принцип суперпозиции операторов, из операторных тождеств (3)—(13) для гипергеометрической функции Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ можно вывести следующие формулы разложения (декомпозиционные формулы):

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(b_1)_i(b_2)_i(b_3)_i(c_1)_i(c_2)_i(c_3)_i}{(d+i-1)_i(d)_{2i}(e)_i(f)_i i!}x^iy^i\times$$
$$\times\,{}_3F_2(b_1+i,b_2+i,b_3+i;d+2i,e+i;x)\,{}_3F_2(c_1+i,c_2+i,c_3+i;d+2i,f+i;y),\tag{14}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3;\\ d_1;\quad d_2;\quad d_2;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(b_1)_i(b_2)_i(b_3)_i(c_1)_i(c_2)_i(c_3)_i}{(d_1)_{2i}(d_2)_{2i}(d_2)_i i!}x^iy^i\times$$
$$\times F^{0:3;3}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}-;\ b_1+i,b_2+i,b_3+i;\ c_1+i,c_2+i,c_3+i;\\ d_1+2i,d_2+2i;\ -;\ -;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{15}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a,b_1,b_2;\ a,c_1,c_2;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}(a)_i(a)_{i+j}(b_1)_{i+j}(b_2)_{i+j}(c_1)_{i+j}(c_2)_{i+j}(d)_{2i}}{(d+i-1)_i(d)^2_{2i+j}(e)_{i+j}(f)_{i+j}i!j!}\times$$
$$\times\,x^{i+j}y^{i+j}F^{1:2;2}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a+i+j;\ b_1+i+j,b_2+i+j;\ c_1+i+j,c_2+i+j;\\ -;\ d+2i+j,e+i+j;\ d+2i+j,f+i+j;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{16}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a,b_1,b_2;\ a,c_1,c_1;\\ d;\quad e;\quad f;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(a)_i(b_1)_i(b_2)_i(c_1)_i(c_2)_i}{(d)_{2i}(e)_i(f)_i i!}x^iy^i\times$$
$$\times F^{1:2;2}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a+i;\ b_1+i,b_2+i;\ c_1+i,c_2+i;\\ d+2i;\ e+i;\ f+i;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{17}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a,b_1,b_2;\ a,c_1,c_2;\\ d;\quad d_1;\quad d_1;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(d_1-a)_i(a)_i(b_1)_i(b_2)_i(c_1)_i(c_2)_i}{(d_1)_i(d)_{2i}(d_1)_{2i}i!}x^iy^i\times$$
$$\times F^{1:2;2}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a+i;\ b_1+i,b_2+i;\ c_1+i,c_2+i;\\ d+2i,d_1+2i;\ -;\ -;\end{matrix}\ x,y\right],\tag{18}$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a,b_1,b_2; & a,c_1,c_2; \\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\; x,y\right]=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(a)_i(a)_{i+j}(b_1)_{i+j}(b_2)_{i+j}(c_1)_{i+j}(c_2)_{i+j}}{(d_1)_i(d)_{2i+2j}(d_1)_{2i+2j}i!j!}x^{i+j}y^{i+j}\times$$
$$\times F^{1:2;2}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a+i+j; & b_1+i+j,b_2+i+j; & c_1+i+j,c_2+i+j; \\ d+2i+2j,d_1+2i+2j; & -; & -;\end{matrix}\; x,y\right], \quad (19)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\; x,y\right]=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{i}}(a_1)_i(a_1)_{\tilde{i}+k}(a_2)_{i+j}(a_2)_{\tilde{i}}(b)_{\tilde{i}}(c)_{\tilde{i}}(d)_{2i}}{(d+i-1)_i(d)^2_{i+\tilde{i}}(e)_{i+\tilde{i}}(f)_{\tilde{i}}i!j!k!}x^{\tilde{i}}\times$$
$$\times y^{\tilde{i}}F^{2:1;1}_{0:2;2}\left[\begin{matrix}a_1+\tilde{i}+k,a_2+\tilde{i}; & b+\tilde{i}; & c+\tilde{i}; \\ -; & d+i+\tilde{i},e+\tilde{i}; & d+i+\tilde{i},f+\tilde{i};\end{matrix}\; x,y\right], \quad (20)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\; x,y\right]=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}(a_1)_i(a_1)_{i+j}(a_2)_{i+2j}(b)_{i+j}(c)_{i+j}}{(d)_{2i+2j}(e)_{i+j}(f)_{i+j}i!j!}x^{i+j}y^{i+j}\times$$
$$\times F^{2:1;1}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a_1+i+j,a_2+i+2j; & b+i+j; & c+i+j; \\ d+2i+2j; & e+i+j; & f+i+j;\end{matrix}\; x,y\right], \quad (21)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c; \\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\; x,y\right]=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}(a_1)_i(a_1)_{i+j}(a_2)_{i+2j}(d_1-a_2)_i(b)_{i+j}(c)_{i+j}}{(d_1)_i(d)_{2i+2j}(d_1)_{2i+2j}i!j!}\times$$
$$\times x^{i+j}y^{i+j}F^{2:1;1}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a_1+i+j,a_2+i+2j; & b+i+j; & c+i+j; \\ d+2i+2j,d_1+2i+2j; & -; & -;\end{matrix}\; x,y\right], \quad (22)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,b; & a_1,a_2,c; \\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\; x,y\right]=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}(a_1)_{i+j}(a_1)_{\tilde{i}}(a_2)_i(a_2)_{\tilde{i}+k}(b)_{\tilde{i}}(c)_{\tilde{i}}}{(d_1)_i(d)_{2\tilde{i}}(d_1)_{2\tilde{i}}i!j!k!}\times$$
$$\times x^{\tilde{i}}y^{\tilde{i}}F^{2:1;1}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a_1+\tilde{i},a_2+\tilde{i}+k; & b+\tilde{i}; & c+\tilde{i}; \\ d+2\tilde{i},d_1+2\tilde{i}; & -; & -;\end{matrix}\; x,y\right], \quad (23)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,a_3; & a_1,a_2,a_3; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\; x,y\right]=\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{j}}(a_1)_i(a_1)_{\tilde{j}+k+l}(a_2)_{i+j}(a_2)_{\tilde{j}+l}(a_3)_{\tilde{i}}(a_3)_{\tilde{j}}(d)_{2i}}{(d+i-1)_i(d)^2_{i+\tilde{j}}(e)_{\tilde{j}}(f)_{\tilde{j}}i!j!k!l!}\times$$
$$\times x^{\tilde{j}}y^{\tilde{j}}F^{3;0;0}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}a_1+\tilde{j}+k+l,a_2+\tilde{j}+l,a_3+\tilde{j}; & -; \\ -; & d+i+\tilde{j},\tilde{j};\end{matrix}\; x,y\right], \quad (24)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\; x,y\right]=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{i}}(a_1)_{\tilde{i}+j+k}(a_2)_i(a_2)_{\tilde{i}+k}(a_3)_{i+j}(a_3)_{\tilde{i}}}{(d)_{2\tilde{i}}(e)_{\tilde{i}}(f)_{\tilde{i}}i!j!k!}x^{\tilde{i}}y^{\tilde{i}}\times$$
$$\times F^{3:0;0}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}a_1+\tilde{i}+j+k,a_2+\tilde{i}+k,a_3+\tilde{i}; & -; & -; \\ d+2\tilde{i}; & e+\tilde{i}; & f+\tilde{i};\end{matrix}\; x,y\right], \quad (25)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,a_3; & a_1,a_2,a_3; \\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\; x,y\right]=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{i}}(a_1)_i(a_1)_{\tilde{i}+k}(a_2)_{\tilde{i}+j+k}(a_3)_{i+j}(a_3)_{\tilde{i}}(d_1-a_2)_i}{(d_1)_i(d)_{2\tilde{i}}(d_1)_{2\tilde{i}}i!j!k!}\times$$
$$\times x^{\tilde{i}}y^{\tilde{i}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}a_1+\tilde{i}+k,a_2+\tilde{i}+j+k,a_3+\tilde{i}; \\ d+2\tilde{i},d_1+2\tilde{i};\end{matrix}\; x+y\right), \quad (26)$$

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & a_1,a_2,a_3; & a_1,a_2,a_3;\\ d; & d_1; & d_1;\end{matrix}\ x,y\right]=\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{-i+\tilde{j}}(a_1)_i(a_1)_{\tilde{j}+k+l}(a_2)_{i+j}(a_2)_{\tilde{j}+l}(a_3)_{\tilde{i}}(a_3)_{\tilde{j}}}{(d)_{2\tilde{j}}(d_1)_i(d_1)_{2\tilde{j}}i!j!k!l!}\times$$
$$\times x^{\tilde{j}}y^{\tilde{j}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}a_1+\tilde{j}+k+l,a_2+\tilde{j}+l,a_3+\tilde{j}\\ d+2\tilde{j},d_1+2\tilde{j}\end{matrix}\ x+y\right), \quad (27)$$

где $\tilde{i}=i+j+k$, $\tilde{j}=\tilde{i}+l$.

Наши оперативные выводы формул разложения (3)—(13) действительно будут параллельны выводам, представленным в более ранних работах, которые мы уже цитировали в предыдущих разделах. В дополнение к различным операторным выражениям и операторным тождествам, перечисленным в разделах 1 и 2, мы отметим, что также используем следующие операторные тождества [9]:

$$(\delta+\alpha)_n\{f(\xi)\}=\xi^{1-\alpha}\frac{d^n}{d\xi^n}\{\xi^{\alpha+n-1}f(\xi)\},\quad (-\delta)_n\{f(\xi)\}=(-\xi)^n\frac{d^n}{d\xi^n}\{f(\xi)\}$$

для каждой аналитической функции $f(\xi)$, где

$$\delta\coloneqq\xi\frac{d}{d\xi};\quad \alpha\in\mathbb{C};\quad n\in\mathbb{N}_0\coloneqq\mathbb{N}\cup\{0\};\quad \mathbb{N}\coloneqq\{1,2,3,\ldots\}.$$

Формулы (14)—(27) применяются при получении формул аналитического продолжения для функции Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$.

4. Интегральные представления для функции Кампе де Ферье. Гипергеометрическая функция Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ в области

$$\mathrm{Re}(b_1)>0,\quad \mathrm{Re}(c_1)>0,\quad \mathrm{Re}(d)>\mathrm{Re}(b_1+c_1)>0,\quad \mathrm{Re}(e)>\mathrm{Re}(b_2)>0,\quad \mathrm{Re}(f)>\mathrm{Re}(c_2)>0$$

имеет следующее интегральное представление типа Эйлера:

$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3;\\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x,y\right]=\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(d-b_1-c_1)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_2)}\times$$
$$\times\int_0^1\ldots\int_0^1 t_1^{b_1-1}t_2^{b_2-1}t_3^{c_1-1}t_4^{c_2-1}(1-t_1)^{d-b_1-c_1-1}(1-t_2)^{e-b_2-1}(1-t_3)^{d-c_1-1}(1-t_4)^{f-c_2-1}\times$$
$$\times[1-xt_1t_2(1-t_3)]^{-b_3}(1-t_3t_4y)^{-c_3}dt_1dt_2dt_3dt_4. \quad (28)$$

Рассмотрим интегральные представления

$$F^{0:3;3}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3;\\ d_1,d_2; & -; & -;\end{matrix}\ x,y\right]=\frac{\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(d_1-b_1-c_1)\Gamma(d_2-b_2-c_2)}\times$$
$$\times\int_0^1\ldots\int_0^1 t_1^{b_1-1}t_2^{b_2-1}t_3^{c_1-1}t_4^{c_2-1}(1-t_1)^{d_1-b_1-c_1-1}(1-t_2)^{d_2-b_2-c_2-1}(1-t_3)^{d_1-c_1-1}\times$$
$$\times(1-t_4)^{d_2-c_2-1}[1-xt_1t_2(1-t_3)(1-t_4)]^{-b_3}(1-t_3t_4y)^{-c_3}dt_1dt_2dt_3dt_4 \quad (29)$$

в области

$$\mathrm{Re}(b_1)>0,\quad \mathrm{Re}(b_2)>0,\quad \mathrm{Re}(c_1)>0,\quad \mathrm{Re}(c_2)>0,$$
$$\mathrm{Re}(d_1)>\mathrm{Re}(b_1+c_1)>0,\quad \mathrm{Re}(d_2)>\mathrm{Re}(b_2+c_2)>0$$

и

$$F^{2:1;1}_{2:0;0}\left[\begin{matrix}a_1,a_2; & b; & c;\\ d_1,d_2; & -; & -;\end{matrix}\ x,y\right]=\frac{\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(d_1-a_1)\Gamma(d_2-a_2)}\times$$
$$\times\int_0^1\int_0^1 t_1^{a_1-1}t_2^{a_2-1}(1-t_1)^{d_1-a_1-1}(1-t_2)^{d_2-a_2-1}(1-xt_1t_2)^{-b}(1-yt_1t_2)^{-c}dt_1dt_2 \quad (30)$$

в области
$$\mathrm{Re}(d_1) > \mathrm{Re}(a_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(d_2) > \mathrm{Re}(a_2) > 0.$$
Применяя разложения (29) и (30), из (28) находим следующие интегральные представления с гипергеометрическими функциями в ядре:
$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ b_1, b_2, b_3;\ c_1, c_2, c_3; \\ d_1; \quad d_2; \end{matrix}\ d_2;\right] x, y = \frac{\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(d_1-b_1-c_1)\Gamma(d_2-b_2-c_2)}\times$$
$$\times\int_0^1\ldots\int_0^1 t_1^{b_1-1}t_2^{b_2-1}t_3^{c_1-1}t_4^{c_2-1}(1-t_1)^{\tilde d_1}(1-t_2)^{\tilde d_2}(1-t_3)^{d_1-c_1-1}(1-t_4)^{d_2-c_2-1}\times$$
$$\times\left[1-xt_1t_2(1-t_3)(1-t_4)\right]^{-b_3}(1-t_3t_4y)^{-c_3}\times$$
$$\times F\left(b_3, c_3; d_2; \frac{t_1t_2t_3t_4(1-t_3)(1-t_4)xy}{[1-xt_1t_2(1-t_3)(1-t_4)](1-t_3t_4y)}\right)dt_1dt_2dt_3dt_4, \quad (31)$$
$\tilde d_i = d_i - b_i - c_i - 1$, $i = 1, 2$, в области
$$\mathrm{Re}(b_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(b_2) > 0, \quad \mathrm{Re}(c_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(c_2) > 0,$$
$$\mathrm{Re}(d_1) > \mathrm{Re}(b_1+c_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(d_2) > \mathrm{Re}(b_2+c_2) > 0$$
и
$$F^{0:3;3}_{1:1;1}\left[\begin{matrix}-;\ a_1, a_2, b;\ a_1, a_2, c; \\ d; \quad d_1; \quad d_1; \end{matrix}\ x, y\right] = \frac{\Gamma(d)\Gamma(d_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(d-a_1)\Gamma(d_1-a_2)}\times$$
$$\times\int_0^1\int_0^1 t_1^{a_1-1}t_2^{a_2-1}(1-t_1)^{d-a_1-1}(1-t_2)^{d_1-a_2-1}(1-xt_1t_2)^{-b}(1-yt_1t_2)^{-c}\times$$
$$\times F^{2:1;0}_{1:1;0}\left[\begin{matrix}b, c; & a_1;\ -; \\ d-a_1; & d_1;\ -; \end{matrix}\ -\frac{xy(1-t_1)(1-t_2)t_1t_2}{(1-xt_1t_2)(1-yt_1t_2)}, -\frac{xy(1-t_1)t_1t_2^2}{(1-xt_1t_2)(1-yt_1t_2)}\right]dt_1dt_2 \quad (32)$$
в области
$$\mathrm{Re}(d) > \mathrm{Re}(a_1) > 0, \quad \mathrm{Re}(d_1) > \mathrm{Re}(a_2) > 0.$$

5. Формула аналитического продолжения функции Кампе де Ферье.

Теорема 0.1. *Пусть* $\mathrm{Re}(d)$, $\mathrm{Re}(e)$ *и* $\mathrm{Re}(f)$ — *такие параметры, что* $\mathrm{Re}(d)$, $\mathrm{Re}(e)$, $\mathrm{Re}(f) \neq 0, -1, -2, \ldots$ *и удовлетворяют следующим условиям*:
$$\mathrm{Re}(b_1-b_2),\ \mathrm{Re}(b_1-b_3),\ \mathrm{Re}(b_2-b_3),\ \mathrm{Re}(c_1-c_2),\ \mathrm{Re}(c_1-c_3),\ \mathrm{Re}(c_2-c_3) \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$
Тогда справедливо следующее тождество:
$$F^{0;3;3}_{1;1;1}\left[\begin{matrix}-;\ b_1, b_2, b_3;\ c_1, c_2, c_3; \\ d; \quad e; \quad f; \end{matrix}\ x, y\right] = \sum_{k=1}^{9} I_k(x, y), \quad (33)$$
где
$$I_1(x,y) = (-x)^{-b_1}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_1+b_1; & b_1, 1-e+b_1; & c_1, 1-f+c_1; \\ -; & 1-b_2+b_1, 1-b_3+b_1; & 1-c_2+c_1, 1-c_3+c_1; \end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$
$$I_2(x,y) = (-x)^{-b_2}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_1+b_2; & b_2, 1-e+b_2; & c_1, 1-f+c_1; \\ -; & 1-b_1+b_2, 1-b_3+b_2; & 1-c_2+c_1, 1-c_3+c_1; \end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$

$$I_3(x,y) = (-x)^{-b_3}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_1+b_3; & b_3, 1-e+b_3; & c_1, 1-f+c_1; \\ -; & 1-b_1+b_3, 1-b_2+b_3; & 1-c_2+c_1, 1-c_3+c_1;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$

$$I_4(x,y) = (-x)^{-b_1}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_2+b_1; & b_1, 1-e+b_1; & c_2, 1-f+c_2; \\ -; & 1-b_2+b_1, 1-b_3+b_1; & 1-c_1+c_2, 1-c_3+c_2;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$

$$I_5(x,y) = (-x)^{-b_2}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_2+b_2; & b_2, 1-e+b_2; & c_2, 1-f+c_2; \\ -; & 1-b_1+b_2, 1-b_3+b_2; & 1-c_1+c_2, 1-c_3+c_2;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$

$$I_6(x,y) = (-x)^{-b_3}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_2+b_3; & b_3, 1-e+b_3; & c_2, 1-f+c_2; \\ -; & 1-b_1+b_3, 1-b_2+b_3; & 1-c_1+c_2, 1-c_3+c_2;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$

$$I_7(x,y) = (-x)^{-b_1}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_3+b_1; & b_1, 1-e+b_1; & c_3, 1-f+c_3; \\ -; & 1-b_2+b_1, 1-b_3+b_1; & 1-c_1+c_3, 1-c_2+c_3;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$

$$I_8(x,y) = (-x)^{-b_2}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_3+b_2; & b_2, 1-e+b_2; & c_3, 1-f+c_3; \\ -; & 1-b_1+b_2, 1-b_3+b_2; & 1-c_1+c_3, 1-c_2+c_3;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right],$$

$$I_9(x,y) = (-x)^{-b_3}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_3+b_3; & b_3, 1-e+b_3; & c_3, 1-f+c_3; \\ -; & 1-b_1+b_3, 1-b_2+b_3; & 1-c_1+c_3, 1-c_2+c_3;\end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right].$$

Доказательство. Действительно, гипергеометрическая функция Кампе де Ферье $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$ может быть легко представлена в виде

$$F^{0;3;3}_{1;1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1, b_2, b_3; & c_1, c_2, c_3; \\ d; & e; & f;\end{matrix}\ x, y\right] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(b_1)_m(b_2)_m(b_3)_m}{(d)_m(e)_m m!}x^m {}_3F_2(c_1, c_2, c_3; d+m, f; y). \qquad (34)$$

Далее, применяя формулу аналитического продолжения для гипергеометрической функции Клаузена

$$\begin{aligned}{}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z) = \\ &= (-z)^{-\alpha_1}\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\alpha_2-\alpha_1)\Gamma(\alpha_3-\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\Gamma(\beta_2-\alpha_1)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, 1-\beta_1+\alpha_1, 1-\beta_2+\alpha_1 \\ 1-\alpha_2+\alpha_1, 1-\alpha_2+\alpha_1\end{matrix}\ \frac{1}{z}\right) + \\ &+ (-z)^{-\alpha_2}\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\alpha_1-\alpha_2)\Gamma(\alpha_3-\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_3)\Gamma(\beta_1-\alpha_2)\Gamma(\beta_2-\alpha_2)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_2, 1-\beta_1+\alpha_2, 1-\beta_2+\alpha_2 \\ 1-\alpha_1+\alpha_2, 1-\alpha_3+\alpha_2\end{matrix}\ \frac{1}{z}\right) +\end{aligned}$$

$$+(-z)^{-\alpha_3}\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\alpha_1-\alpha_3)\Gamma(\alpha_2-\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_1-\alpha_3)\Gamma(\beta_2-\alpha_3)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_3, 1-\beta_1+\alpha_3, 1-\beta_2+\alpha_3 & \dfrac{1}{z}\\ 1-\alpha_1+\alpha_2, 1-\alpha_2+\alpha_3 & \end{matrix}\right) \quad (35)$$

из (34) получим

$$F^{0;3;3}_{1;1;1}\left[\begin{matrix}-; & b_1,b_2,b_3; & c_1,c_2,c_3; & \\ d; & e; & f; & x,y\end{matrix}\right]=I_{11}(x,y)+I_{12}(x,y)+I_{13}(x,y), \quad (36)$$

где

$$I_{11}(x,y)=(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(f)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(d-c_1)\Gamma(f-c_1)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c_1)_n(1-f+c_1)_n(1-d+c_1)_n}{(1-c_2+c_1)_n(1-c_3+c_1)_n m!n!}\left(\frac{1}{y}\right)^n {}_3F_2(b_1,b_2,b_3;e,d-c_1-n;x), \quad (37)$$

$$I_{12}(x,y)=(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(f)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(d-c_2)\Gamma(f-c_2)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c_2)_n(1-f+c_2)_n(1-d+c_2)_n}{(1-c_1+c_2)_n(1-c_3+c_2)_n n!}\left(\frac{1}{y}\right)^n {}_3F_2(b_1,b_2,b_3;e,d-c_2-n;x), \quad (38)$$

$$I_{13}(x,y)=(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(f)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(d-c_3)\Gamma(f-c_3)}\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c_3)_n(1-f+c_3)_n(1-d+c_3)_n}{(1-c_1+c_3)_n(1-c_2+c_3)_n m!n!}x^m\left(\frac{1}{y}\right)^n {}_3F_2(b_1,b_2,b_3;e,d-c_3-n;x). \quad (39)$$

Кроме того, применяя формулу (35) к тождеству (37), находим

$$I_{11}(x,y)=(-x)^{-b_1}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_1+b_1; & b_1,1-e+b_1; & c_1,1-f+c_1; & \dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\\ -; & 1-b_2+b_1,1-b_3+b_1; & 1-c_2+c_1,1-c_3+c_1; & \end{matrix}\right]+$$
$$+(-x)^{-b_2}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_1+b_2; & b_2,1-e+b_2; & c_1,1-f+c_1; & \dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_2,1-b_3+b_2; & 1-c_2+c_1,1-c_3+c_1; & \end{matrix}\right]+$$
$$+(-x)^{-b_3}(-y)^{-c_1}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_2-c_1)\Gamma(c_3-c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_1)\Gamma(d-c_1-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_1+b_3; & b_3,1-e+b_3; & c_1,1-f+c_1; & \dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_3,1-b_2+b_3; & 1-c_2+c_1,1-c_3+c_1; & \end{matrix}\right]. \quad (40)$$

Аналогичным образом находим из формул (38) и (39), что имею место формулы

$$I_{12}(x,y)=(-x)^{-b_1}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_2+b_1; & b_1,1-e+b_1; & c_2,1-f+c_2; & \dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\\ -; & 1-b_2+b_1,1-b_3+b_1; & 1-c_1+c_2,1-c_3+c_2; & \end{matrix}\right]+$$
$$+(-x)^{-b_2}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1-d+c_2+b_2; & b_2,1-e+b_2; & c_2,1-f+c_2; & \dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\\ -; & 1-b_1+b_2,1-b_3+b_2; & 1-c_1+c_2,1-c_3+c_2; & \end{matrix}\right]+$$
$$+(-x)^{-b_3}(-y)^{-c_2}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_1-c_2)\Gamma(c_3-c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_3)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_2)\Gamma(d-c_2-b_3)}\times$$

$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} 1-d+c_2+b_3; & b_3, 1-e+b_3; & c_2, 1-f+c_2; \\ -; & 1-b_1+b_3, 1-b_2+b_3; & 1-c_1+c_2, 1-c_3+c_2; \end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right], \quad (41)$$

$$I_{13}(x,y) = (-x)^{-b_1}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_2-b_1)\Gamma(b_3-b_1)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_1)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_1)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} 1-d+c_3+b_1; & b_1, 1-e+b_1; & c_3, 1-f+c_3; \\ -; & 1-b_2+b_1, 1-b_3+b_1; & 1-c_1+c_3, 1-c_2+c_3; \end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right]+$$
$$+(-x)^{-b_2}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_2)\Gamma(b_3-b_2)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_3)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_2)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_2)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} 1-d+c_3+b_2; & b_2, 1-e+b_2; & c_3, 1-f+c_3; \\ -; & 1-b_1+b_2, 1-b_3+b_2; & 1-c_1+c_3, 1-c_2+c_3; \end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right]+$$
$$+(-x)^{-b_3}(-y)^{-c_3}\frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(b_1-b_3)\Gamma(b_2-b_3)\Gamma(c_1-c_3)\Gamma(c_2-c_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(e-b_3)\Gamma(f-c_3)\Gamma(d-c_3-b_3)}\times$$
$$\times F^{1;2;2}_{0;2;2}\left[\begin{matrix} 1-d+c_3+b_3; & b_3, 1-e+b_3; & c_3, 1-f+c_3; \\ -; & 1-b_1+b_3, 1-b_2+b_3; & 1-c_1+c_3, 1-c_2+c_3; \end{matrix}\ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right]. \quad (42)$$

Подставив формулы (40)–(42) в тождество (36), получим формулу (33) аналитического продолжения для гипергеометрической функции $F^{0:3;3}_{1:1;1}[x,y]$, что завершает доказательство теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appell P., Kampé de Fériet J.* Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques. Polynomes d'Hermite. — Paris: Gauthier-Villars, 1926.
2. *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions// Quart. J. Math. — 1940. — *11.* — P. 249–270.
3. *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions, II// Quart. J. Math. — 1941. — *12.* — P. 112–128.
4. *Chaundy T. W.* Expansions of hypergeometric functions// Quart. J. Math. — 1942. — *13.* — P. 159–171.
5. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vols. 1, 2. — New York: McGraw-Hill, 1953.
6. *Hasanov A., Srivastava H. M., Turaev M.* Decomposition formulas for some triple hypergeometric functions// J. Math. Anal. Appl. — 2006. — *324.* — P. 955–969.
7. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1893. — *7.* — P. 111–158.
8. *Marichev O. I.* Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions: Theory and Algorithmic Tables. — New York: Wiley, 1982.
9. *Poole E. G.* Introduction to the Theory of Linear Differential Equations. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1936.
10. *Pandey R. C.* On the expansions of hypergeometric functions// Agra Univ. J. Res. Sci. — 1963. — *12.* — P. 159–169.
11. *Paris R. B., Kaminski D.* Asymptotics and Mellin–Barnes Integrals. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
12. *Ragab F. M.* Expansions of Kampe de Feriet's double hypergeometric function of higher order// J. Reine Angew. Math. — 1963. — *212.* — P. 113–119.
13. *Singhal J. P., Bhati S. S.* Certain expansions associated with hypergeometric functions of variables// Glasnik Mat. Ser. — 1976. — *3*, № 11. — P. 239–245.
14. *Srivastava H. M.* Hypergeometric functions of three variables// Ganita. — 1964. — *15.* — P. 97–108.
15. *Srivastava H. M.* Some integrals representing triple hypergeometric functions// Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. — 1967. — *16.* — P. 99–115.
16. *Niukkanen A. W.* Generalised hypergeometric series arising in physical and quantum chemical applications// J. Phys. A: Math. Gen. — 1983. — *16.* — P. 1813–1825.
17. *Srivastava H. M.* A class of generalized multiple hypergeometric series in physical and quantum chemical applications// J. Phys. A: Math. Gen. — 1985. — *18.* — P. 227–234.

18. *Srivastava H. M., Karlsson P. W.* Multiple Gaussian Hypergeometric Series. — New York: Wiley, 1985.
19. *Srivastava H. M., Manocha H.* A Treatise on Generating Functions. — New York: Wiley, 1984.
20. *Turaev M.* Decomposition formulas for Srivastava's hypergeometric function on Saran functions// J. Comput. Appl. Math. — 2009. — *233.* — P. 842–846.
21. *Verma A.* Expansions involving hypergeometric functions of two variables// Math. Comput. — 1966. — *20.* — P. 590–596.
22. *Hasanov A., Yuldashev T. K.* Analytic continuation formulas for the hypergeometric functions in three variables of second order// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 2. — P. 386–393.

Хасанов Анварджан
Институт математики им. В. И. Романовского АН Узбекистана, Ташкент;
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М. Т. Уразбаева
АН Узбекистана, Ташкент;
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров
ирригации и механизации сельского хозяйства»
E-mail: anvarhasanov@yahoo.com

Юлдашев Турсун Камалдинович
Ташкентский государственный экономический университет
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 107–137
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-107-137

УДК 512.7

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ, КВАНТОВАНИЕ И ЗАДАЧИ ВОКРУГ ГИПОТЕЗЫ ЯКОБИАНА. V. ГИПОТЕЗА ЯКОБИАНА И ПРОБЛЕМЫ ТИПА ШПЕХТА И БЕРНСАЙДА

© 2022 г. **А. М. ЕЛИШЕВ, А. Я. КАНЕЛЬ-БЕЛОВ, Ф. РАЗАВИНИЯ, Ц.-Т. ЮЙ, В. ЧЖАН**

Аннотация. Работа является завершающей частью обзора результатов, касающихся квантового подхода к некоторым классическим аспектам некоммутативных алгебр. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *213.* — С. 110–144. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *214.* — С. 107–126. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *215.* — С. 95–128. Четвертая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *216.* — С. 153–171.

Ключевые слова: автоморфизм, квантование, гипотеза о Якобиане.

POLYNOMIAL AUTOMORPHISMS, QUANTIZATION, AND JACOBIAN CONJECTURE RELATED PROBLEMS. V. JACOBIAN CONJECTURE AND SPECHT AND BURNSIDE TYPE PROBLEMS

© 2022 **A. M. ELISHEV, A. Ya. KANEL-BELOV, F. RAZAVINIA, J.-T. YU, W. ZHANG**

Abstract. This paper is the final part of a review of results concerning the quantization approach to the some classical aspects of noncommutative algebras. The first part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **213** (2022), pp. 110–144. The second part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **214** (2022), pp. 107–126. The third part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **215** (2022), pp. 95–128. The fourth part is: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **216** (2022), pp. 153–171.

Keywords and phrases: automorphism, quantization, Jacobian conjecture.

AMS Subject Classification: 14R10, 18G85

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00177).

CONTENTS

Chapter 5

JACOBIAN CONJECTURE AND SPECHT AND BURNSIDE TYPE PROBLEMS

This chapter explores an approach to polynomial mappings and the Jacobian Conjecture and related questions, initiated by A. V. Yagzhev, whereby these questions are translated to identities of algebras, leading to a solution in [217] of the version of the Jacobian Conjecture for free associative algebras. (The first version, for two generators, was obtained by Dicks and Levin (see [73, 74]), and the full version by Schofield [175].) We start by laying out the basic framework in this introduction. Next, we set up Yagzhev's correspondence to algebras in In Sec. 5.1, leading to the basic notions of weak nilpotence and Engel type. In Sec. 5.2 we discuss the Jacobian Conjecture in the context of various varieties, including the free associative algebra.

Given any polynomial endomorphism ϕ of the n-dimensional affine space $A^n_{\mathbf{k}} = \mathsf{Spec}\,\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ over a field $\mathbf{k}$, we define its *Jacobian matrix* as the matrix $(\partial\phi^*(x_i)/\partial x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. The determinant of the Jacobian matrix is called the *Jacobian* of ϕ. The celebrated *Jacobian Conjecture* JC_n in dimension $n \geqslant 1$ asserts that *for any field* $\mathbf{k}$ *of characteristic zero, any polynomial endomorphism* ϕ *of* $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ *having Jacobian* 1 *is an automorphism.* Equivalently, one can say that ϕ preserves the standard top-degree differential form $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}})$. References to this well known problem and related questions can be found in [21, 135, 202]. By the Lefschetz principle it is sufficient to consider the case $\mathbf{k} = \mathbb{C}$; obviously, JC_n implies JC_m if $n > m$. The conjecture JC_n is obviously true in the case $n = 1$, and it is open for $n \geqslant 2$.

The *Jacobian Conjecture*, denoted as JC, is the conjunction of the conjectures JC_n for all finite n. The Jacobian Conjecture has many reformulations (such as the Kernel Conjecture and the Image Conjecture, cf. [90, 93, 202, 226, 227] for details) and is closely related to questions concerning quantization. It is stably equivalent to the following conjecture of Dixmier, concerning automorphisms of the Weyl algebra W_n, otherwise known as the *quantum affine algebra.*

Dixmier Conjecture DC_n**.** *Is* $\mathrm{End}(W_n) = \mathrm{Aut}(W_n)$?

The implication $DC_n \to JC_n$ is well known, and the inverse implication $JC_{2n} \to DC_n$ was recently obtained independently by Tsuchimoto [191] (using p-curvature) and Belov and Kontsevich [41, 42] (using Poisson brackets on the center of the Weyl algebra). Bavula [30] has obtained a shorter proof, and also obtained a positive solution of an analog of the Dixmier Conjecture for integro differential operators, cf. [28]. He also proved that every monomorphism of the Lie algebra of triangular polynomial derivations is an automorphism [29] (an analog of Dixmier's conjecture).

The Jacobian Conjecture is closely related to many questions of affine algebraic geometry concerning affine space, such as the Cancellation Conjecture (see Sec. 5.2.4). If we replace the variety of commutative associative algebras (and the accompanying affine spaces) by an arbitrary algebraic variety [1], one easily gets a counterexample to the JC. So, strategically these questions deal with some specific properties of affine space which we do not yet understand, and for which we do not have the appropriate formulation apart from these very difficult questions.

It seems that these properties do indicate some sort of quantization. From that perspective, noncommutative analogs of these problems (in particular, the Jacobian Conjecture and the analog of the Cancellation Conjecture) become interesting for free associative algebras, and more generally, for arbitrary varieties of algebras.

We work in the language of universal algebra, in which an algebra is defined in terms of a set of operators, called its *signature*. This approach enhances the investigation of the Yagzhev correspondence between endomorphisms and algebras. We work with deformations and so-called *packing properties* to be introduced in Secs. 5.2 and 5.2.2.1, which denote specific noncommutative phenomena which enable one to solve the JC for the free associative algebra.

From the viewpoint of universal algebra, the Jacobian conjecture becomes a problem of "Burnside type," by which we mean the question of whether a given finitely generated algebraic structure satisfying given periodicity conditions is necessarily finite, cf. [225]. Burnside originally posed the question of the finiteness of a finitely generated group satisfying the identity $x^n = 1$. (For odd $n \geqslant 661$, counterexamples were found by Novikov and Adian, and quite recently Adian reduced the estimate from 661 to 101). Another class of counterexamples was discovered by Ol'shanskij [151]. Kurosh posed the question of local finiteness of algebras whose elements are algebraic over the base field. For algebraicity of bounded degree, the question has a positive solution, but otherwise there are the Golod-Shafarevich counterexamples.

Burnside type problems play an important role in algebra. Their solution in the associative case is closely tied to Specht's problem of whether any set of polynomial identities can be deduced from a finite subset. The JC can be formulated in the context of whether one system of identities implies another, which also relates to Specht's problem.

In the Lie algebra case there is a similar notion. An element $x \in L$ is called *Engel of degree* n if $[\dots[[y, x], x]\dots, x] = 0$ for any y in the Lie algebra L. Zelmanov's result that any finitely generated Lie algebra of bounded Engel degree is nilpotent yielded his solution of the Restricted Burnside Problem for groups. Yagzhev introduced the notion of *Engelian* and *weakly nilpotent* algebras of arbitrary signature (see Definitions 5.1.7 and 5.1.5), and proved that the JC is equivalent to the question of weak nilpotence of algebras of Engel type satisfying a system of Capelli identities, thereby showing the relation of the JC with problems of Burnside type.

A negative approach. Let us mention a way of constructing counterexamples. This approach, developed by Gizatullin, Kulikov, Shafarevich, Vitushkin, and others, is related to decomposing polynomial mappings into the composition of σ-processes [**?**,96,135,177,204–206]. It allows one to solve some polynomial automorphism problems, including tameness problems, the most famous of which is *Nagata's Problem* concerning the wildness of Nagata's automorphism

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2(xz + y^2)y - (xz + y^2)^2 z,\ y + (xz + y^2)z,\ z),$$

cf. [148]. Its solution by Shestakov and Umirbaev [183] is the major advance in this area in the last decade. The Nagata automorphism can be constructed as a product of automorphisms of $K(z)[x, y]$, some of them having non-polynomial coefficients (in $K(z)$). The following theorem of Abhyankar–Moh–Suzuki [2, 140, 189] can be viewed in this context:

AMS Theorem. *If f and g are polynomials in $K[z]$ of degrees n and m for which $K[f, g] = K[z]$, then n divides m or m divides n.*

Degree estimate theorems are polynomial analogs to Liouville's approximation theorem in algebraic number theory ([49, 106, 137, 143]). T. Kishimoto has proposed using a program of Sarkisov, in particular for Nagata's Problem. Although difficulties remain in applying "σ-processes" (decomposition of birational mappings into standard blow-up operations) to the affine case, these may provide new

[1]Algebraic geometers use word *variety*, roughly speaking, for objects whose local structure is obtained from the solution of system of algebraic equations. In the framework of universal algebra, this notion is used for subcategories of algebras defined by a given set of identities. A deep analog of these notions is given in [34].

insight. If we consider affine transformations of the plane, we have relatively simple singularities at infinity, although for bigger dimensions they can be more complicated. Blow-ups provide some understanding of birational mappings with singularities. Relevant information may be provided in the affine case. The paper [47] contains some deep considerations about singularities.

5.1. The Jacobian Conjecture and Burnside type problems, via algebras

In this section we translate the Jacobian Conjecture to the language of algebras and their identities. This can be done at two levels: At the level of the algebra obtained from a polynomial mapping, leading to the notion of *weak nilpotence* and *Yagzhev algebras* and at the level of the differential and the algebra arising from the Jacobian, leading to the notion of *Engel type*. The Jacobian Conjecture is the link between these two notions.

5.1.1. The Yagzhev correspondence.

5.1.1.1. Polynomial mappings in universal algebra. Yagzhev's approach is to pass from algebraic geometry to universal algebra. Accordingly, we work in the framework of a universal algebra A having signature Ω. $A^{(m)}$ denotes $A \times \cdots \times A$, taken m times.

We fix a commutative, associative base ring C, and consider C-modules equipped with extra *operators* $A^{(m)} \to A$, which we call *m-ary.* Often one of these operators will be (binary) multiplication. These operators will be multilinear, i.e., linear with respect to each argument. Thus, we can define the *degree* of an operator to be its number of arguments. We say an operator $\Psi(x_1, \dots, x_m)$ is *symmetric* if $\Psi(x_1, \dots, x_m) = \Psi(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(m)})$ for all permutations π.

Definition 5.1.1. A *string* of operators is defined inductively. Any operator $\Psi(x_1, \dots, x_m)$ is a string of degree m, and if s_j are strings of degree d_j, then $\Psi(s_1, \dots, s_m)$ is a string of degree $\sum_{j=1}^{m} d_j$. A mapping

$$\alpha : A^{(m)} \to A$$

is called *polynomial* if it can be expressed as a sum of strings of operators of the algebra A. The *degree* of the mapping is the maximal length of these strings.

Example 5.1.2. Assume that an algebra A has two extra operators: a binary operator $\alpha(x, y)$ and a tertiary operator $\beta(x, y, z)$. The mapping $F : A \to A$ given by $x \to x + \alpha(x, x) + \beta(\alpha(x, x), x, x)$ is a polynomial mapping of A, having degree 4. Note that if A is finite dimensional as a vector space, not every polynomial mapping of A as an affine space is a polynomial mapping of A as an algebra.

5.1.1.2. Yagzhev's correspondence between polynomial mappings and algebras. Here we associate an algebraic structure to each polynomial map. Let V be an n-dimensional vector space over the field $\mathbf{k}$, and $F : V \to V$ be a polynomial mapping of degree m. Replacing F by the composite TF, where T is a translation such that $TF(0) = 0$, we may assume that $F(0) = 0$. Given a base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^{n}$ of V, and for an element v of V written uniquely as the sum $\sum x_i \boldsymbol{e}_i$, for $x_i \in \mathbf{k}$, the coefficients of $\boldsymbol{e}_i$ in $F(v)$ are (commutative) polynomials in the x_i. Then F can be written in the following form:

$$x_i \mapsto F_{0i}(\boldsymbol{x}) + F_{1i}(\boldsymbol{x}) + \cdots + F_{mi}(\boldsymbol{x})$$

where each $F_{\alpha i}(\boldsymbol{x})$ is a homogeneous form of degree α, i.e.,

$$F_{\alpha i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j_1 + \cdots + j_n = \alpha} \kappa_J x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n},$$

with $F_{0i} = 0$ for all i, and

$$F_{1i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{ki} x_k.$$

We are interested in invertible mappings that have a nonsingular Jacobian matrix (μ_{ij}). In particular, this matrix is nondegenerate at the origin. In this case $\det(\mu_{ij}) \neq 0$, and by composing F with an affine transformation we arrive at the situation for which $\mu_{ki} = \delta_{ki}$. Thus, the mapping F may be taken to have the following form:

$$x_i \to x_i - \sum_{k=2}^{m} F_{ki}. \tag{5.1.1}$$

Suppose we have a mapping as in (5.1.1). Then the Jacobi matrix can be written as $E - G_1 - \cdots - G_{m-1}$ where G_i is an $n \times n$ matrix with entries which are homogeneous polynomials of degree i. If the Jacobian is 1, then it is invertible with inverse a polynomial matrix (of homogeneous degree at most $(n-1)(m-1)$, obtained via the adjoint matrix).

If we write the inverse as a formal power series, we compare the homogeneous components and get:

$$\sum_{j_i m_{j_i} = s} M_J = 0, \tag{5.1.2}$$

where M_J is the sum of products $a_{\alpha_1} a_{\alpha_q}$ in which the factor a_j occurs m_j times, and J denotes the multi-index $(j_1, \dots, j_q)$.

Yagzhev considered the cubic homogeneous mapping $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, whereby the Jacobian matrix becomes $E - G_3$. We return to this case in Remark 5.1.9. The slightly more general approach given here presents the Yagzhev correspondence more clearly and also provides tools for investigating deformations and packing properties (see Sec. 5.2.2.1). Thus, we consider not only the cubic case (i.e. when the mapping has the form

$$x_i \to x_i + P_i(x_1, \dots, x_n);\ i = 1, \dots, n,$$

with P_i cubic homogenous polynomials), but the more general situation of arbitrary degree.

For any ℓ, the set of (vector valued) forms $\{F_{\ell,i}\}_{i=1}^n$ can be interpreted as a homogeneous mapping $\Phi_\ell : V \to V$ of degree ℓ. When $\mathrm{char}(\mathbf{k})$ does not divide ℓ, we take instead the polarization of this mapping, i.e. the multilinear symmetric mapping

$$\Psi_\ell : V^{\otimes \ell} \to V$$

such that

$$(F_{\ell,i}(x_1), \dots, F_{\ell,i}(x_n)) = \Psi_\ell(\boldsymbol{x}, \dots, \boldsymbol{x}) \cdot \ell!$$

Then Eq. (5.1.1) can be rewritten as follows:

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} - \sum_{\ell=2}^{m} \Psi_\ell(\boldsymbol{x}, \dots, \boldsymbol{x}). \tag{5.1.3}$$

We define the algebra $(A, \{\Psi_\ell\})$, where A is the vector space V and the Ψ_ℓ are viewed as operators $A^\ell \to A$.

Definition 5.1.3. The *Yagzhev correspondence* is the correspondence from the polynomial mapping (V, F) to the algebra $(A, \{\Psi_\ell\})$.

5.1.2. Translation of the invertibility condition to the language of identities. The next step is to bring in algebraic varities, defined in terms of identities.

Definition 5.1.4. A *polynomial identity* (PI) of A is a polynomial mapping of A, all of whose values are identically zero.

The *algebraic variety* generated by an algebra A, denoted as $\mathrm{Var}(A)$, is the class of all algebras satisfying the same PIs as A.

Now we come to a crucial idea of Yagzhev: *The invertibility of F and the invertibility of the Jacobian of F can be expressed via* (5.1.2) *in the language of polynomial identities.*

Namely, let

$$y = F(x) = x - \sum_{\ell=2}^{m} \Psi_\ell(x).$$

Then

$$F^{-1}(x) = \sum_t t(x), \tag{5.1.4}$$

where each t is a *term*, a formal expression in the mappings $\{\Psi_\ell\}_{\ell=2}^m$ and the symbol x. Note that the expressions $\Psi_2(x, \Psi_3(x, x, x))$ and $\Psi_2(\Psi_3(x, x, x), x)$ are different although they represent same element of the algebra. Denote by $|t|$ the number of occurrences of variables, including multiplicity, which are included in t.

The invertibility of F means that, for all $q \geqslant q_0$,

$$\sum_{|t|=q} t(a) = 0, \quad \forall a \in A. \tag{5.1.5}$$

Thus we have translated invertibility of the mapping F to the language of identities. (Yagzhev had an analogous formula, where the terms only involved Ψ_3.)

Definition 5.1.5. An element $a \in A$ is called *nilpotent* of index $\leqslant n$ if

$$M(a, a, \ldots, a) = 0$$

for each monomial $M(x_1, x_2, \ldots)$ of degree $\geqslant n$. A is *weakly nilpotent* if each element of A is nilpotent. A is *weakly nilpotent of class k* if each element of A is nilpotent of index k. (Some authors use the terminology *index* instead of *class*.) Equation (5.1.5) means A is weakly nilpotent.

To stress this fundamental notion of Yagzhev, we define a *Yagzhev algebra* of *order* q_0 to be a weakly nilpotent algebra, i.e., satisfying the identities (5.1.5), also called the *system of Yagzhev identities* arising from F.

Summarizing, we get the following fundamental translation from conditions on the endomorphism F to identities of algebras.

Theorem 5.1.6. *The endomorphism F is invertible if and only if the corresponding algebra is a Yagzhev algebra of high enough order.*

5.1.2.1. Algebras of Engel type. The analogous procedure can be carried out for the differential mapping. We recall that Ψ_ℓ is a symmetric multilinear mapping of degree ℓ. We denote the mapping $y \to \Psi_\ell(y, x, \ldots, x)$ as $\mathrm{Ad}_{\ell-1}(x)$.

Definition 5.1.7. An algebra A is of *Engel type s* if it satisfies a system of identities

$$\sum_{\ell m_\ell = s} \quad \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_q=m_\ell} \mathrm{Ad}_{\alpha_1}(x) \cdots \mathrm{Ad}_{\alpha_q}(x) = 0. \tag{5.1.6}$$

A is of *Engel type* if A has Engel type s for some s.

Theorem 5.1.8. *The endomorphism F has Jacobian* 1 *if and only if the corresponding algebra has Engel type s for some s.*

Proof. Let $x' = x + dx$. Then

$$\Psi_\ell(x') = \Psi_\ell(x) + \ell\Psi_\ell(dx, x, \ldots, x) \quad + \text{forms containing more than one occurence of } dx. \tag{5.1.7}$$

Hence the differential of the mapping

$$F : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \sum_{\ell=2}^{m} \Psi_\ell(\boldsymbol{x}, \ldots, \boldsymbol{x})$$

is

$$\left(E - \sum_{\ell=2}^{m} \ell\, \mathrm{Ad}_{\ell-1}(x)\right) \cdot dx$$

The identities (5.1.2) are equivalent to the system of identities (5.1.6) in the signature $\Omega = (\Psi_2, \ldots, \Psi_m)$, taking $a_{\alpha_j} = \mathrm{Ad}_{\alpha_j}$ and $m_j = \deg \Psi_\ell - 1$. $\square$

Thus, we have reformulated the condition of invertibility of the Jacobian in the language of identities.

As explained in [202], it is well known from [21, 220] that the Jacobian Conjecture can be reduced to the cubic homogeneous case; i.e., it is enough to consider mappings of type

$$x \to x + \Psi_3(x, x, x).$$

In this case the Jacobian assumption is equivalent to the *Engel condition* – nilpotence of the mapping $\mathrm{Ad}_3(x)[y]$ (i.e. the mapping $y \to (y, x, x)$). Invertibility, considered in [21], is equivalent to weak nilpotence, i.e., to the identity $\sum_{|t|=k} t = 0$ holding for all sufficiently large k.

Remark 5.1.9. In the cubic homogeneous case, $j = 1$, $\alpha_j = 2$ and $m_j = s$, and we define the linear map

$$\mathrm{Ad}_{xx} : y \to (x, x, y)$$

and the index set $T_j \subset \{1, \dots, q\}$ such that $i \in T_j$ if and only if $\alpha_i = j$.

Then Eq. (5.1.6) has the following form:

$$\mathrm{Ad}_{xx}^{s/2} = 0.$$

Thus, for a ternary symmetric algebra, Engel type means that the operators Ad_{xx} for all x are nilpotent. In other words, the mapping

$$\mathrm{Ad}_3(x) : y \to (x, x, y)$$

is nilpotent. Yagzhev called this the *Engel condition.* (For Lie algebras the nilpotence of the operator $\mathrm{Ad}_x : y \to (x, y)$ is the usual Engel condition. Here we have a generalization for arbitrary signature.)

Here are Yagzhev's original definitions, for edification. A binary algebra A is *Engelian* if for any element $a \in A$ the subalgebra $< R_a, L_a >$ of vector space endomorphisms of A generated by the left multiplication operator L_a and the right multiplication operator R_a is nilpotent, and *weakly Engelian* if for any element $a \in A$ the operator $R_a + L_a$ is nilpotent.

This leads us to the *Generalized Jacobian Conjecture*:

Conjecture. Let A be an algebra with symmetric $\mathbf{k}$-linear operators Ψ_ℓ, for $\ell = 1, \dots, m$. In any variety of Engel type, A is a Yagzhev algebra.

By Theorem 5.1.8, this conjecture would yield the Jacobian Conjecture.

5.1.2.2. The case of binary algebras. When A is a binary algebra, *Engel type* means that the left and right multiplication mappings are both nilpotent.

A well-known result of S. Wang [21] shows that the Jacobian Conjecture holds for quadratic mappings

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \Psi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}).$$

If two different points $(x_1, \dots, x_n)$ and $(y_1, \dots, y_n)$ of an affine space are mapped to the same point by $(f_1, \dots, f_n)$, then the fact that the vertex of a parabola is in the middle of the interval whose endpoints are at the roots shows that all $f_i(\boldsymbol{x})$ have gradients at this midpoint $P = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})/2$ perpendicular to the line segment $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$. Hence the Jacobian is zero at the midpoint P. This fact holds in any characteristic $\neq 2$.

In Sec. 5.1.3 we prove the following theorem of Yagzhev, cf. Definition 5.1.15 below:

Theorem 5.1.10 (Yagzhev)**.** *Every symmetric binary Engel type algebra of order k satisfying the system of Capelli identities of order n is weakly nilpotent, of weak nilpotence index bounded by some function $F(k, n)$.*

Remark 5.1.11. Yagzhev formulated his theorem as follows: *Every binary weakly Engel algebra of order k satisfying the system of Capelli identities of order n is weakly nilpotent, of index bounded by some function $F(k, n)$.* We obtain this reformulation, by replacing the algebra A by the algebra A^+ with multiplication given by $(a, b) = ab + ba$.

The following problems may help us understand the situation.

Problem. Obtain a straightforward proof of this theorem and deduce from it the Jacobian Conjecture for quadratic mappings.

Problem (generalized Jacobian Conjecture for quadratic mappings)**.** Is every symmetric binary algebra of Engel type k, a Yagzhev algebra?

5.1.2.3. The case of ternary algebras. As we have observed, Yagzhev reduced the Jacobian Conjecture over a field of characteristic zero to the question:

Question 5.1.12. Is every finite dimensional ternary Engel algebra a Yagzhev algebra?

Druźkowski [84, 85] reduced this to the case when all cubic forms Ψ_{3i} are cubes of linear forms. Van den Essen and his school reduced the JC to the symmetric case (see [91,92] for details). Bass, Connell, and Wright [21] use other methods including inversions. Yagzhev's approach matches that of [21], but using identities instead.

5.1.2.4. An example in nonzero characteristic of an Engel algebra that is not a Yagzhev algebra. Now we give an example, over an arbitrary field $\mathbf{k}$ of characteristic $p > 3$, of a finite dimensional Engel algebra that is not a Yagzhev algebra, i.e., not weakly nilpotent. This means that the situation for binary algebras differs intrinsically from that for ternary algebras, and it would be worthwhile to understand why.

Theorem 5.1.13. *If* $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = p > 3$, *then there exists a finite dimensional* $\mathbf{k}$*-algebra that is Engel but not weakly nilpotent.*

Proof. Consider the noninvertible mapping $F : \mathbf{k}[x] \to \mathbf{k}[x]$ with Jacobian 1:

$$F : x \to x + x^p.$$

We introduce new commuting indeterminates $\{y_i\}_{i=1}^n$ and extend this mapping to $k[x, y_1, \dots, y_n]$ by sending $y_i \mapsto y_i$. If n is big enough, then it is possible to find tame automorphisms G_1 and G_2 such that $G_1 \circ F \circ G_2$ is a cubic mapping $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \Psi_3(\boldsymbol{x})$, as follows:

Suppose we have a mapping

$$F : x_i \to P(x) + M$$

where $M = t_1t_2t_3t_4$ is a monomial of degree at least 4. Introduce two new commuting indeterminates z, y and take $F(z) = z$, $F(y) = y$.

Define the mapping G_1 via $G_1(z) = z+t_1t_2$, $G_1(y) = y+t_3t_4$ with G_1 fixing all other indeterminates; define G_2 via $G_2(x) = x - yz$ with G_2 fixing all other indeterminates.

The composite mapping $G_1 \circ F \circ G_2$ sends x to $P(x) - yz - yt_1t_2 - zt_3t_4$, y to $y + t_3t_4$, z to $z + t_1t_2$, and agrees with F on all other indeterminates.

Note that we have removed the monomial $M = t_1t_2t_3t_4$ from the image of F, but instead have obtained various monomials of smaller degree (t_1t_2 , t_3t_4, zy, zt_3t_4, yt_1t_2). It is easy to see that this process terminates.

Our new mapping $H(x) = x + \Psi_2(x) + \Psi_3(x)$ is noninvertible and has Jacobian 1. Consider its blowup

$$R : x \mapsto x + T^2y + T\Psi_2(x),\ y \mapsto y - \Psi_3(x),\ T \mapsto T.$$

This mapping R is invertible if and only if the initial mapping is invertible, and has Jacobian 1 if and only if the initial mapping has Jacobian 1, by [220, Lemma 2]. This mapping is also cubic homogeneous. The corresponding ternary algebra is Engel, but not weakly nilpotent. □

This example shows that a direct combinatorial approach to the Jacobian Conjecture encounters difficulties, and in working with related Burnside type problems (in the sense of Zelmanov [225], dealing with nilpotence properties of Engel algebras, as indicated in the introduction), one should take into account specific properties arising in characteristic zero.

Definition 5.1.14. An algebra A is *nilpotent* of *class* $\leqslant n$ if $M(a_1, a_2, \dots) = 0$ for each monomial $M(x_1, x_2, \dots)$ of degree $\geqslant n$. An ideal I of A is *strongly nilpotent* of *class* $\leqslant n$ if $M(a_1, a_2, \dots) = 0$ for each monomial $M(x_1, x_2, \dots)$ in which indeterminates of total degree $\geqslant n$ have been substituted to elements of I.

Although the notions of nilpotent and strongly nilpotent coincide in the associative case, they differ for ideals of nonassociative algebras. For example, consider the following algebra suggested by Shestakov: A is the algebra generated by a, b, z satisfying the relations $a^2 = b$, $bz = a$ and all other products 0. Then $I = Fa+Fb$ is nilpotent as a subalgebra, satisfying $I^3 = 0$ but not strongly nilpotent (as an ideal), since

$$b = ((a(bz))z)a \neq 0,$$

and one can continue indefinitely in this vein. Also, [107] contains an example of a finite dimensional non-associative algebra without any ideal which is maximal witih respect to being nilpotent as a subalgebra.

In connection with the Generalized Jacobian Conjecture in characteristic 0, it follows from results of Yagzhev [222], also cf. [97], that there exists a 20-dimensional Engel algebra over $\mathbb{Q}$, not weakly nilpotent, satisfying the identities

$$x^2y = -yx^2, \quad \big(((yx^2)x^2)x^2\big)x^2 = 0, \quad (xy+yx)y = 2y^2x, \quad x^2y^2 = 0.$$

However, this algebra can be seen to be Yagzhev (see Definition 5.1.5).

For associative algebras, one uses the term “nil” instead of “weakly nilpotent.” Any nil subalgebra of a finite dimensional associative algebra is nilpotent, by Wedderburn’s Theorem [207]). Jacobson generalized this result to other settings, cf. [159, Theorem 15.23], and Shestakov [179] generalized it to a wide class of Jordan algebras (not necessarily commutative).

Yagzhev’s investigation of weak nilpotence has applications to the Koethe Conjecture, for algebras over uncountable fields. He reproved the following fact: *In every associative algebra over an uncountable field, the sum of every two nil right ideals is a nil right ideal.* This fact was proved first by Amitsur [3]. Amitsur’s result is for affine algebras, but one can easily reduce to the affine case.

5.1.2.5. Algebras satisfying systems of Capelli identities.

Definition 5.1.15. The *Capelli polynomial* C_k of order k is

$$C_k := \sum_{\sigma\in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1\cdots x_{\sigma(k)}y_k.$$

It is obvious that an associative algebra satisfies the Capelli identity c_k if and only if, for any monomial $M(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_r)$ multilinear in the x_i, the following equation holds identically in A:

$$\sum_{\sigma\in S_k} (-1)^\sigma M(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)},y_1,\dots,y_r) = 0. \tag{5.1.8}$$

However, this does not apply to nonassociative algebras, so we need to generalize this condition.

Definition 5.1.16. The algebra A satisfies a *system of Capelli identities* of order k, if (5.1.8) holds identically in A for any monomial $M(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_r)$ multilinear in the x_i.

Any algebra of dimension $< k$ over a field satisfies a system of Capelli identities of order k. Algebras satisfying systems of Capelli identities behave much like finite dimensional algebras. They were introduced and systematically studied by Rasmyslov [155, 156].

Using Rasmyslov’s method, Zubrilin proved (see [231] and also [157, 229]) that if A is an arbitrary algebra satisfying the system of Capelli identities of order n, then the chain of ideals defining the *solvable radical* stabilizes at the nth step. More precisely, we utilize a Baer-type radical, along the lines of Amitsur [4].

Given an algebra A, we define

$$\mathrm{Solv}_1 := \mathrm{Solv}_1(A) = \sum\{\text{strongly nilpotent ideals of } A\},$$

and inductively, given Solv_k, define Solv_{k+1} by $\mathrm{Solv}_{k+1}/\mathrm{Solv}_k = \mathrm{Solv}_1(A/\mathrm{Solv}_k)$. For a limit ordinal α, define

$$\mathrm{Solv}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Solv}_\beta\,.$$

This must stabilize at some ordinal α, for which we define $\mathrm{Solv}(A) = \mathrm{Solv}_\alpha$.

Clearly, $\operatorname{Solv}(A/\operatorname{Solv}(A)) = 0$; i.e., $A/\operatorname{Solv}(A)$ has no nonzero strongly nilpotent ideals. Actually, Amitsur [4] defines $\zeta(A)$ as built up from ideals having trivial multiplication, and proves [4, Theorem 1.1] that $\zeta(A)$ is the intersection of the prime ideals of A.

We shall use the notion of *sandwich*, introduced by Kaplansky and Kostrikin, which is a powerful tool for Burnside type problems [225]. An ideal I is called a *sandwich ideal* if, for any k,

$$M(z_1, z_2, x_1, \dots, x_k) = 0$$

for any $z_1, z_2 \in I$, any set of elements $x_1, \dots, x_k$, and any multilinear monomial M of degree $k + 2$. (Similarly, if the operations of an algebra have degree $\leqslant \ell$, then it is natural to use ℓ-sandwiches, which by definition satisfy the property that

$$M(z_1, \dots, z_\ell, x_1, \dots, x_k) = 0$$

for any $z_1, \dots, z_\ell \in I$, any set of elements $x_1, \dots, x_k$, and any multilinear monomial M of degree $k+\ell$.)

The next useful lemma follows from a result from [231]:

Lemma 5.1.17. *If an ideal I is strongly nilpotent of class ℓ, then there exists a decreasing sequence of ideals $I = I_1 \supseteq \dots \supseteq I_{l+1} = 0$ such that I_s/I_{s+1} is a sandwich ideal in A/I_{s+1} for all $s \leqslant l$.*

Definition 5.1.18. An algebra A is *representable* if it can be embedded into an algebra finite dimensional over some extension of the ground field.

Remark 5.1.19. Zubrilin proved (see [231]) a more precise statement, namely, if an algebra A of arbitrary signature satisfies a system of Capelli identities C_{n+1}, then there exists a sequence $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B_n$ of strongly nilpotent ideals such that:

(i) the natural projection of B_i in A/B_{i-1} is a strongly nilpotent ideal;
(ii) A/B_n is representable;
(iii) if $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n$ is any sequence of ideals of A such that I_{j+1}/I_j is a sandwich ideal in A/I_j, then $B_n \supseteq I_n$.

Such a sequence of ideals will be called a *Baer–Amitsur sequence*. In affine space the Zariski closure of the radical is radical, and hence the factor algebra is representable. (Although the radical coincides with the linear closure if the base field is infinite (see [37]), this assertion holds for arbitrary signatures and base fields.) Hence in representable algebras, the Baer–Amitsur sequence stabilizes after finitely many steps. Lemma 5.1.17 follows from these considerations.

Our next main goal is to prove Theorem 5.1.22 below, but first we need another notion.

5.1.2.6. The tree associated to a monomial. Effects of nilpotence have been used by different authors in another language. We associate a *rooted labelled tree* to any monomial: Any branching vertex indicates the symbol of an operator, whose outgoing edges are the terms in the corresponding symbol. Here is the precise definition.

Definition 5.1.20. Let $M(x_1, \dots, x_n)$ be a monomial in an algebra A of arbitrary signature. One can associate the tree T_M by an inductive procedure:

(i) If M is a single variable, then T_M is just the vertex $\bullet$.
(ii) Let $M = g(M_1, \dots, M_k)$, where g is a k-ary operator. We assume inductively that the trees T_i, $i = 1, \dots, k$, are already defined. Then the tree T_M is the disjoint union of the T_i, together with the root $\bullet$ and arrows starting with $\bullet$ and ending with the roots of the trees T_i.

Remark 5.1.21. Sometimes one labels T_M according to the operator g and the positions inside g.

If the outgoing degree of each vertex is 0 or 2, the tree is called *binary*. If the outgoing degree of each vertex is either 0 or 3, the tree is called *ternary*. If each operator is binary, T_M will be binary; if each operator is ternary, T_M will be ternary.

5.1.3. Lifting Yagzhev algebras. Recall Definitions 5.1.5 and 5.1.7.

Theorem 5.1.22. *Suppose A is an algebra of Engel type, and let I be a sandwich ideal of A. If A/I is Yagzhev, then A is Yagzhev.*

The proof follows easily from the following two propositions.

Let k be the class of weak nilpotence of A/I. We call a branch of the tree *fat* if it has more than k entries.

Proposition 5.1.23.

(a) *The sum of all monomials of any degree $s > k$ belongs to I.*
(b) *Let $x_1, \dots, x_n$ be fixed indeterminates and M be an arbitrary monomial with $s_1, \dots, s_\ell > k$. Then*

$$\sum_{\substack{|t_1|=s_1,\dots,\\ |t_\ell|=s_\ell}} M(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_\ell) \equiv 0. \tag{5.1.9}$$

(c) *The sum of all monomials of degree s, containing at least ℓ nonintersecting fat branches, is zero.*

Proof. Assertion (a) is just a reformulation of the weak nilpotence of A/I; (b) follows from (a) and the sandwich property of an ideal I. To get (c) from (b), it suffices to consider the highest nonintersecting fat branches. □

Proposition 5.1.24 (Yagzhev)**.** *The linearization of the sum of all terms with a fixed fat branch of length n is the complete linearization of the function*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \prod (\mathrm{Ad}_{k_{\sigma(i)}})(z)(t).$$

Theorem 1.2, Lemma 5.1.17, and Zubrilin's result give us the following major result.

Theorem 5.1.25. *In characteristic zero, the Jacobian conjecture is equivalent to the following statement*: *Any algebra of Engel type satisfying some system of Capelli identities is a Yagzhev algebra.*

This theorem generalizes the following result of Yagzhev.

Theorem 5.1.26. *The Jacobian conjecture is equivalent to the following statement*: *Any ternary Engel algebra in characteristic* 0 *satisfying a system of Capelli identities is a Yagzhev algebra.*

The Yagzhev correspondence and the results of this section (in particular, Theorem 5.1.25) yield the proof of Theorem 5.1.10.

5.1.3.1. Sparse identities. Generalizing Capelli identities, we say that an algebra satisfies a system of *sparse identities* when there exist k and coefficients α_σ such that for any monomial $M(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_r)$ multilinear in x_i, the following equation holds:

$$\sum_\sigma \alpha_\sigma M\Big(c_1 v_{\sigma(1)} d_1, \dots, c_k v_{\sigma(k)} d_k, y_1, \dots, y_r\Big) = 0. \tag{5.1.10}$$

Note that one need only check (5.1.10) for monomials. The system of Capelli identities is a special case of a system of sparse identities (when $\alpha_\sigma = (-1)^\sigma$). This concept ties in with the following "few long branches" lemma [230], concerning the structure of trees of monomials for algebras with sparse identities:

Lemma 5.1.27 (Few long branches)**.** *Suppose an algebra A satisfies a system of sparse identities of order m. Then any monomial is linearly representable by monomials such that the corresponding tree has not more than $m-1$ disjoint branches of length $\geqslant m$.*

Lemma 5.1.27 may be useful in studying nilpotence of Engel algebras.

5.1.4. Inversion formulas and problems of Burnside type. We have seen that the JC relates to problems of "Specht type" (concerning whether one set of polynomial identities implies another), as well as problems of Burnside type.

Burnside type problems become more complicated in nonzero characteristic; cf. Zelmanov's review paper [225].

Bass, Connell, and Wright [21] attacked the JC by means of inversion formulas. D. Wright [208] wrote an inversion formula for the symmetric case and related it to a combinatorial structure called the *Grossman–Larson Algebra*. Namely, write $F = X - H$, and define $J(H)$ to be the Jacobian matrix of H. Wright proved the JC for the case where H is homogeneous and $J(H)^3 = 0$, and also for the case where H is cubic and $J(H)^4 = 0$; these correspond in Yagzhev's terminology to the cases of Engel type 3 and 4, respectively. Also, the so-called *chain vanishing theorem* in [208] follows from Engel type. Similar results were obtained earlier by Singer [186] using tree formulas for formal inverses. The inversion formula, introduced in [21], was investigated by D. Wright and his school. Many authors use the language of so-called *tree expansion* (see [186, 208] for details). In view of Theorem 5.1.13, the tree expansion technique should be highly nontrivial.

The Jacobian Conjecture can be formulated as a question of quantum field theory (see [1]), in which tree expansions are seen to correspond to Feynmann diagrams.

In [186, 208] (see also [209]), trees with one label correspond to elements of the algebra A built by Yagzhev, and 2-labelled trees correspond to the elements of the operator algebra $D(A)$ (the algebra generated by operators $x \to M(x, \boldsymbol{y})$, where M is some monomial). These authors deduce weak nilpotence from the Engel conditions of degree 3 and 4. The inversion formula for automorphisms of tensor product of Weyl algebras and the ring of polynomials was studied intensively in the papers [27, 30]. Using techniques from [42], this yields a slightly different proof of the equivalence between the JC and DC, by an argument similar to one given in [223]. Yagzhev's approach makes the situation much clearer, and the known approaches to the Jacobian Conjecture using inversion formulas can be explained from this viewpoint.

Remark 5.1.28. The most recent inversion formula (and probably the most algebraically explicit one) was obtained by V. Bavula [26]. The coefficient q_0 can be made explicit in (5.1.5), by means of the Gabber Inequality, which says that if

$$f : K^n \to K_n; \quad x_i \to f_i(\boldsymbol{x})$$

is a polynomial automorphism, with $\deg(f) = \max_i \deg(f_i)$, then $\deg(f^{-1}) \leqslant \deg(f)^{n-1})$

In fact, we are working with *operads*, cf. the classical book [146]. A review of operad theory and its relation with physics and PI-theory in particular Burnside type problems, will appear in D. Piontkovsky [153] (see also [109, 154]). Operad theory provides a supply of natural identities and varieties, but they also correspond to geometric facts. For example, the Jacobi identity corresponds to the fact that the altitudes of a triangle are concurrent. M. Dehn's observations that the Desargue property of a projective plane corresponds to associativity of its coordinate ring, and Pappus' property to its commutativity, can be considered as a first step in operad theory. Operads are important in mathematical physics, and formulas for the famous Kontsevich quantization theorem resemble formulas for the inverse mapping. The operators considered here are operads.

5.2. The Jacobian Conjecture for varieties, and deformations

In this section we consider analogs of the JC for other varieties of algebras, partially with the aim on throwing light on the classical JC (for the commutative associative polynomial algebra).

5.2.1. Generalization of the Jacobian Conjecture to arbitrary varieties. J. Birman [48] already proved the JC for free groups in 1973. The JC for free associative algebras (in two generators) was established in 1982 by W. Dicks and J. Levin [73, 74], utilizing Fox derivatives, which we describe later on. Their result was reproved by Yagzhev [218], whose ideas are sketched in this section. Also see Schofield [175], who proved the full version. Yagzhev then applied these ideas to other varieties of algebras [217, 222] including nonassociative commutative algebras and anti-commutative algebras;

U. U. Umirbaev [195] generalized these to "Schreier varieties," defined by the property that every subalgebra of a free algebra is free. The JC for free Lie algebras was proved by Reutenauer [158], Shpilrain [185], and Umirbaev [194].

The Jacobian Conjecture for varieties generated by finite dimensional algebras, is closely related to the Jacobian Conjecture in the usual commutative associative case, which is the most important.

Let $\mathfrak{M}$ be a variety of algebras of some signature Ω over a given field $\mathbf{k}$ of characteristic zero, and $\mathbf{k}_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x}\rangle$ the relatively free algebra in $\mathfrak{M}$ with generators $\boldsymbol{x} = \{x_i : i \in I\}$. We assume that $|\Omega|, |I| < \infty$, $I = 1, \ldots, n$.

Take a set $\boldsymbol{y} = \{y_i\}_{i=1}^n$ of new indeterminates. For any $f(\boldsymbol{x}) \in k_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x}\rangle$ one can define an element $\hat{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in k_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$ via the equation

$$f(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = f(\boldsymbol{y}) + \hat{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{5.2.1}$$

where $\hat{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ has degree 1 with respect to $\boldsymbol{x}$, and $R(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ is the sum of monomials of degree $\geqslant 2$ with respect to $\boldsymbol{x}$; $\hat{f}$ is a generalization of the differential.

Let $\alpha \in \mathrm{End}(k_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x}\rangle)$, i.e.,

$$\alpha : x_i \mapsto f_i(\boldsymbol{x});\ i = 1, \ldots, n. \tag{5.2.2}$$

Definition 5.2.1. Define the Jacobi endomorphism $\hat{\alpha} \in \mathrm{End}(\mathbf{k}_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle)$ via the equality

$$\hat{\alpha} : \begin{cases} x_i \to \hat{f}_i(\boldsymbol{x}), \\ y_i \to y_i. \end{cases} \tag{5.2.3}$$

The Jacobi mapping $f \mapsto \hat{f}$ satisfies the chain rule, in the sense that it preserves composition.

Remark 5.2.2. It is not difficult to check (and is well known) that if $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbf{k}_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x}\rangle)$ then $\hat{\alpha} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{k}_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle)$.

The inverse implication is called the *Jacobian Conjecture for the variety* $\mathfrak{M}$. Here is an important special case.

Definition 5.2.3. Let $A \in \mathfrak{M}$ be a finite dimensional algebra, with base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^N$. Consider a set of commutative indeterminates $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_{si} | s = 1, \ldots, n; i = 1, \ldots, N\}$. The elements

$$z_j = \sum_{i=1}^N \nu_{ji}\boldsymbol{e}_i; \quad j = 1, \ldots, n,$$

are called *generic elements of* A.

Usually in the matrix algebra $\mathbb{M}_m(\mathbf{k})$, the set of matrix units $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^m$ is taken as the base. In this case $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ and

$$z_l = \sum_{ij} \lambda_{ij}^l e_{ij}, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Definition 5.2.4. A *generic matrix* is a matrix whose entries are distinct commutative indeterminates, and the so-called *algebra of generic matrices of order* m is generated by associative generic $m \times m$ matrices.

The algebra of generic matrices is prime, and every prime, relatively free, finitely generated associative PI-algebra is isomorphic to an algebra of generic matrices. If we include taking traces as an operator in the signature, then we get the *algebra of generic matrices with trace.* That algebra is a Noetherian module over its center.

Define the $\mathbf{k}$-linear mappings

$$\Omega_i : \mathbf{k}_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x}\rangle \to \mathbf{k}[\nu]; \quad i = 1, \ldots, n$$

via the relation

$$f\left(\sum_{i=1}^N \nu_{1i}e_i, \ldots, \sum_{i=1}^N \nu_{ni}e_i\right) = \sum_{i=1}^N (f\Omega_i)e_i.$$

It is easy to see that the polynomials $f\Omega_i$ are uniquely determined by f.

One can define the mapping
$$\varphi_A : \mathrm{End}(k_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x} \rangle) \to \mathrm{End}(k[\boldsymbol{\nu}])$$
as follows. If
$$\alpha \in \mathrm{End}(k_{\mathfrak{M}}\langle \boldsymbol{x} \rangle) : x_s \to f_s(\boldsymbol{x}) \quad s = 1, \dots, n,$$
then $\varphi_A(\alpha) \in \mathrm{End}(k[\boldsymbol{\nu}])$ can be defined via the relation
$$\varphi_A(\alpha) : \nu_{si} \to P_{si}(\boldsymbol{\nu}); \quad s = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, n,$$
where $P_{si}(\boldsymbol{\nu}) = f_s\Omega_i$.

The following proposition is well known.

Proposition 5.2.5 (see [222])**.** *Let $A \in \mathfrak{M}$ be a finite dimensional algebra, and $\boldsymbol{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ be a finite set of commutative indeterminates. Then the mapping φ_A is a semigroup homomorphism, sending 1 to 1, and automorphisms to automorphisms. Also the mapping φ_A commutes with the operation$\widehat{\ }$ of taking the Jacobi endomorphism, in the sense that $\widehat{\varphi_A(\alpha)} = \varphi_A(\hat{\alpha})$. If φ is invertible, then $\widehat{\varphi}$ is also invertible.*

This proposition is important, since as noted after Remark 5.2.2, the opposite direction is the JC.

5.2.2. Deformations and the Jacobian Conjecture for free associative algebras.

Definition 5.2.6. A *T-ideal* is a completely characteristic ideal, i.e., stable under any endomorphism.

Proposition 5.2.7. *Suppose A is a relatively free algebra in the variety $\mathfrak{M}$, I is a T-ideal in A, and $\mathfrak{M}' = \mathrm{Var}(A/I)$. Any polynomial mapping $F : A \to A$ induces a natural mapping $F' : A/I \to A/I$, as well as a mapping $\widehat{F'}$ in $\mathfrak{M}'$. If F is invertible, then F' is invertible; if $\hat{F}$ is invertible, then $\widehat{F'}$ is also invertible.*

For example, let F be a polynomial endomorphism of the free associative algebra $k\langle \boldsymbol{x} \rangle$, and I_n be the T-ideal of the algebra of generic matrices of order n. Then $F(I_n) \subseteq I_n$ for all n. Hence F induces an endomorphism F_{I_n} of $k\langle \boldsymbol{x} \rangle / I_n$. In particular, this is a semigroup homomorphism. Thus, if F is invertible, then F_{I_n} is invertible, but not vice versa.

The Jacobian mapping $\widehat{F_{I_n}}$ of the reduced endomorphism F_{I_n} is the reduction of the Jacobian mapping of F.

5.2.2.1. The Jacobian Conjecture and the packing property. This subsection is based on the *packing property* and deformations. Let us illustrate the main idea. It is well known that the composite of ALL quadratic extensions of $\mathbb{Q}$ is infinite dimensional over $\mathbb{Q}$. Hence all such extensions cannot be embedded ("packed") into a single commutative finite dimensional $\mathbb{Q}$-algebra. However, all of them can be packed into $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$. We formalize the notion of packing in §5.2.5. Moreover, for ANY elements NOT in $\mathbb{Q}$ there is a parametric family of embeddings (because it embeds non-centrally and thus can be deformed via conjugation by a parametric set of matrices). Uniqueness thus means belonging to the center. Similarly, adjoining noncommutative coefficients allows one to decompose polynomials, as to be elaborated below.

This idea allows us to solve equations via a finite dimensional extension, and to find a parametric sets of solutions if some solution does not belong to the original algebra. That situation contradicts local invertibility.

Let F be an endomorphism of the free associative algebra having invertible Jacobian. We suppose that $F(0) = 0$ and
$$F(x_i) = x_i + \sum \text{terms of order} \geqslant 2.$$
We intend to show how the invertibility of the Jacobian implies invertibility of the mapping F.

Let $Y_1, \dots, Y_k$ be generic $m \times m$ matrices. Consider the system of equations
$$\{F_i(X_1, \dots, X_n) = Y_i; \quad i = 1, \dots, k\}.$$

This system has a solution over some finite extension of order m of the field generated by the center of the algebra of generic matrices *with trace.*

Consider the set of block diagonal $mn \times mn$ matrices:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & A_n \end{pmatrix}, \tag{5.2.4}$$

where the A_j are $m \times m$ matrices.

Next, we consider the system of equations

$$\{F_i(X_1, \dots, X_n) = Y_i;\ i = 1, \dots, k\}, \tag{5.2.5}$$

where the $mn \times mn$ matrices Y_i have the form (5.2.4) with the A_j generic matrices.

Any m-dimensional extension of the base field $\mathbf{k}$ is embedded into $\mathbb{M}_m(\mathbf{k})$. But $\mathbb{M}_{mn}(\mathbf{k}) \simeq \mathbb{M}_m(\mathbf{k}) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$. It follows that for appropriate m, the system (5.2.5) has a unique solution in the matrix ring with traces. (Each is given by a matrix power series where the summands are matrices whose entries are homogeneous forms, seen by rewriting $Y_i = X_i + \sum$ terms of order 2 as $X_i = Y_i + \sum$ terms of order 2, and iterating.) The solution is unique since their entries are distinct commuting indeterminates.

If F is invertible, then this solution must have block diagonal form. However, if F is not invertible, this solution need not have block diagonal form. Now we translate invertibility of the Jacobian to the language of *parametric families* or *deformations.*

Consider the matrices

$$E_\lambda^\ell = \begin{pmatrix} E & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda \cdot E & & 0 \\ \vdots & & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & E \end{pmatrix}$$

where E denotes the identity matrix. (The index ℓ designates the position of the block $\lambda \cdot E$.) Taking X_j not to be a block diagonal matrix, then for some ℓ we obtain a non-constant parametric family $E_\lambda^\ell X_j (E_\lambda^\ell)^{-1}$ dependent on λ.

On the other hand, if Y_i has form (5.2.4), then $E_\lambda^\ell Y_i (E_\lambda^\ell)^{-1} = Y_i$ for all $\lambda \neq 0$; $\ell = 1, \dots, k$.

Hence, if F_{I_n} is not an automorphism, then we have a *continuous parametric set of solutions.* But if the Jacobian mapping is invertible, it is locally 1:1, a contradiction. This argument yields the following result:

Theorem 5.2.8. *For $F \in \mathrm{End}(k\langle \boldsymbol{x} \rangle)$, if the Jacobian of F is invertible, then the reduction F_{I_n} of F, modulo the T-ideal of the algebra of generic matrices, is invertible.*

For details of the proof, see [217]. Because any relatively free affine algebra of characteristic 0 satisfies the set of identities of some matrix algebra, it is the quotient of the algebra of generic matrices by some T-ideal J. But J maps into itself after any endomorphism of the algebra. We conclude the following fact.

Corollary 5.2.9. *If $F \in \mathrm{End}(k\langle \boldsymbol{x} \rangle)$ and the Jacobian of F is invertible, then the reduction F_J of F modulo any proper T-ideal J is invertible.*

In order to get invertibility of $\boldsymbol{F}$ itself, Yagzhev used the additional ideas:

1. The block diagonal technique works equally well on skew fields.
2. The above algebraic constructions can be carried out on Ore extensions, in particular for the *Weyl algebras* $W_n = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n; \partial_1, \dots, \partial_n]$.
3. By a result of L. Makar-Limanov, the free associative algebra can be embedded into the ring of fractions of the Weyl algebra. This provides a nice presentation for mapping the free algebra.

Definition 5.2.10. Let A be an algebra, $B \subset A$ a subalgebra, and $\alpha : A \to A$ a polynomial mapping of A (and hence $\alpha(B) \subset B$, see Definition 5.1.1). B is a *test algebra for* α, if $\alpha(A\backslash B) \neq A\backslash B$.

The next theorem shows the universality of the notion of a test algebra. An endomorphism is called *rationally invertible* if it is invertible over Cohn's skew field of fractions [65] of $\mathbf{k}\langle \boldsymbol{x} \rangle$.

Theorem 5.2.11 (Yagzhev)**.** *For any* $\alpha \in \mathrm{End}(k\langle \boldsymbol{x} \rangle)$*, one of the two statements holds*:

(i) *α is rationally invertible, and its reduction to any finite-dimensional factor also is rationally invertible*;
(ii) *there exists a test algebra for some finite dimensional reduction of α.*

This theorem implies the Jacobian conjecture for free associative algebras. We do not go into details, referring the reader to the papers [217, 222].

Remark 5.2.12. The same idea is used in quantum physics. The polynomial $x^2 + y^2 + z^2$ cannot be decomposed for any commutative ring of coefficients. However, it can decomposed using noncommutative ring of coefficients (Pauli matrices). The Laplace operator in 3-dimensional space can be decomposed in such a manner.

5.2.2.2. Reduction to nonzero characteristic. One can work with deformations equally well in nonzero characteristic. However, the naive Jacobian condition does not give us parametric families, because of consequences of inseparability. Hence it is interesting using deformations to get a reasonable version of the JC for characteristic $p > 0$, especially because of recent progress in the JC related to the reduction of holonomic modules to the case of characteristic p and investigation of the p-curvature or Poisson brackets on the center (see [41, 42, 190]).

In his very last paper [223], A. V. Yagzhev approached the JC using positive characteristics. He noted that the existence of a counterexample is equivalent to the existence of an Engel, but not Yagzhev, finite dimensional ternary algebra in each positive characteristic $p \gg 0$. (This fact was also used in [41, 42, 190].)

If a counterexample to the JC exists, then such an algebra A exists even over a finite field, and hence can be finite. It generates a locally finite variety of algebras that are of Engel type, but not Yagzhev. This situation can be reduced to the case of a locally semiprime variety. Any relatively free algebra of this variety is semiprime, and the centroid of its localization is a finite direct sum of fields. The situation can be reduced to one field, and he tried to construct an embedding which is not an automorphism. This would contradict the finiteness property.

Since a reduction of an endomorphism as a mapping on points of finite height may be an automorphism, the issue of injectivity also arises. However, this approach looks promising, and may involve new ideas, such as in [41, 42, 190]. Perhaps different infinitesimal conditions (like the Jacobian condition in characteristic zero) can be found.

5.2.3. The Jacobian Conjecture for other classes of algebras. Although the Jacobian Conjecture remains open for commutative associative algebras, it has been established for other classes of algebras, including free associative algebras, free Lie algebras, and free metabelian algebras (for further details, see Sec. 5.2.1).

An algebra is said to be *metabelian* if it satisfies the identity $[x, y][z, t] = 0$.

The case of free metabelian algebras, established by Umirbaev (see [193]), involves some interesting new ideas that we describe now. His method of proof is by means of co-multiplication, taken from the theory of Hopf algebras and quantization. Let A^{op} denote the opposite algebra of the free associative algebra A, with generators t_i. For $f \in A$ we denote the corresponding element of A^{op} as f^*. Consider the mapping

$$\lambda : A^{op} \otimes A \to A, \quad \lambda\left(\sum f_i^* \otimes g_i\right) = \sum f_i g_i.$$

Then $I_A := \ker(\lambda)$ is a free A bimodule with generators $t_i^* \otimes 1 - 1 \otimes t_i$. The mapping

$$d_A : A \to I_A, \quad d_A(a) = a^* \otimes 1 - 1 \otimes a$$

is called the *universal derivation* of A. The *Fox derivatives* $\partial a/\partial t_i \in A^{op}\otimes A$ (see [94]) are defined as

$$d_A(a) = \sum_i (t_i^* \otimes 1 - 1 \otimes t_i)\frac{\partial a}{\partial t_i}$$

(cf. [74,193]).

Let $C = A/\operatorname{Id}([A,A])$ be a free commutative associative algebra and $B = A/\operatorname{Id}([A,A])^2$ be a free metabelian algebra. Let

$$\partial(a) = \left(\frac{\partial a}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial a}{\partial t_n}\right).$$

One can define the natural derivations

$$\bar{\partial} : A \to (A' \otimes A)^n \to (C' \otimes C)^n, \quad \tilde{\partial} : A \to (C' \otimes C)^n \to C^n, \tag{5.2.6}$$

where the mapping $(C' \otimes C)^n) \to C^n$ is induced by λ. Then

$$\ker(\bar{\partial}) = \operatorname{Id}([A,A])^2 + F$$

and $\bar{\partial}$ induces a derivation $B \to (C' \otimes C)^n$, whereas $\tilde{\partial}$ induces the usual derivation $C \to C^n$. Let $\Delta : C \to C' \otimes C$ be the mapping induced by d_A, i.e.,

$$\Delta(f) = f^* \otimes 1 - 1 \otimes f,$$

and let $z_i = \Delta(x_i)$. The *Jacobi matrix* is defined in the natural way, and provides the formulation of the JC for free metabelian algebras. One of the crucial steps in proving the JC for free metabelian algebras is the following homological lemma from [193].

Lemma 5.2.13. *Let $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (C^{op} \otimes C)^n$. Then $\boldsymbol{u} = \bar{\partial}(\bar{w})$ for some $w \in \operatorname{Id}([A,A])$ if and only if*

$$\sum z_i u_i = 0.$$

The proof also requires the following theorem.

Theorem 5.2.14. *Let $\varphi \in \operatorname{End}(C)$. Then $\varphi \in \operatorname{Aut}(C)$ if and only if* $\operatorname{Id}(\Delta(\varphi(x_i)))_{i=1}^n = \operatorname{Id}(z_i)_{i=1}^n$.

The paper [193] also includes the following result.

Theorem 5.2.15. *Any automorphism of C can be extended to an automorphism of B, using the* JC *for the free metabelian algebra B.*

This is a nontrivial result, unlike the extension of an automorphism of B to an automorphism of $A/\operatorname{Id}([A,A])^n$ for any $n > 1$.

5.2.4. Questions related to the Jacobian Conjecture. Let us turn to other interesting questions which can be linked to the Jacobian Conjecture. The quantization procedure is a bridge between the commutative and noncommutative cases and is deeply connected to the JC and related questions. Some of these questions also are discussed in the paper [81].

Relations between the free associative algebra and the classical commutative situation are very deep. In particular, Bergman's theorem that any commutative subalgebra of the free associative algebra is isomorphic to a polynomial ring in one indeterminate is the noncommutative analog of Zak's theorem [224] that any integrally closed subring of a polynomial ring of Krull dimension 1 is isomorphic to a polynomial ring in one indeterminate. For example, Bergman's theorem is used to describe the automorphism group $\operatorname{Aut}(\operatorname{End}(\mathbf{k}\langle x_1, \dots, x_n\rangle))$ (see [39]); Zak's theorem is used in the same way to describe the group $\operatorname{Aut}(\operatorname{End}(\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]))$ (see [43]).

Question 5.2.16. Can one prove Bergman's theorem via quantization?

Quantization could be a key idea for understanding Jacobian type problems in other varieties of algebras.

Cancellation problems. We recall the following three classical problems.

1. Let K_1 and K_2 be affine domains for which $K_1[t] \simeq K_2[t]$. Is it true that $K_1 \simeq K_2$?

2. Let K_1 and K_2 be an affine fields for which $K_1(t) \simeq K_2(t)$. Is it true that $K_1 \simeq K_2$? In particular, if $K(t)$ is a field of rational functions over the field $\mathbf{k}$, is it true that K is also a field of rational functions over $\mathbf{k}$?

3. If $K[t] \simeq \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, is it true that $K \simeq \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$?

In general, the answer to Problems 1 and 2 is negative (even if $\mathbf{k} = \mathbb{C}$; see [31,36] and the references therein). However, Problem 2 has a positive solution in low dimensions. Problem 3 is currently called the *Cancellation Conjecture*, although Zariski's original cancellation conjecture was for fields (Problem 2). (For Zariski's conjecture and related problems, see [68, 105, 147, 187].) For $n \geqslant 3$, the Cancellation Conjecture (Problem 3) remains open, to the best of our knowledge, and it is reasonable to pose the Cancellation Conjecture for free associative rings and pose the following question.

Question 5.2.17. If $K * \mathbf{k}[t] \simeq \mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, then is $K \simeq \mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$?

This question was solved for $n = 2$ by V. Drensky and J. T. Yu (see [79]).

2. The Tame Automorphism Problem. Yagzhev applied his approach to study the tame automorphism problem. Unfortunately, these papers have not survived.

It is easy to see that every endomorphism ϕ of a commutative algebra can be lifted to some endomorphism of the free associative algebra, and hence to some endomorphism of the algebra of generic matrices. However, it is not clear that any automorphism ϕ can be lifted to an automorphism.

We recall that an automorphism of $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ is *elementary* if it has the form

$$x_1 \mapsto x_1 + f(x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \mapsto x_i, \quad \forall i \geqslant 2.$$

A *tame automorphism* is a product of elementary automorphisms, and a non-tame automorphism is called *wild*. The "tame automorphism problem" asks whether any automorphism is tame. Jung [103] and van der Kulk [203] proved this for $n = 2$, (also see [149, 150] for free groups, [65] for free Lie algebras, and [67, 141] for free associative algebras), so one takes $n > 2$.

Elementary automorphisms can be lifted to automorphisms of the free associative algebra; hence every tame automorphism can be so lifted. If an automorphism φ cannot be lifted to an automorphism of the algebra of generic matrices, it cannot be tame. This give us approach to the tame automorphism problem.

We can lift an automorphism of $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ to an endomorphism of $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ in many ways. Then replacing $x_1, \ldots, x_n$ by generic $(N \times N)$-matrices induces a polynomial mapping

$$F_{(N)} : \mathbf{k}^{nN^2} \to \mathbf{k}^{nN^2}.$$

For each automorphism φ, the invertibility of this mapping can be transformed into compatibility of some system of equations. For example, [152, Theorem 10.5] asserts that the Nagata automorphism is wild, provided that a certain system of five equations in 27 unknowns has no solutions. Whether Peretz' method can effectively attack tameness questions remains to be seen. The wildness of the Nagata automorphism was established by Shestakov and Umirbaev [183]. One important ingredient in the proof is *degree estimates* of an expression $p(f, g)$ of algebraically independent polynomials f and g in terms of the degrees of f and g, provided neither leading term is proportional to a power of the other, initiated by Shestakov and Umirbaev [182]. An exposition based on their method is given in Kuroda [106].

One of the most important tools is the degree estimation technique, which in the multidimensional case becomes the analysis of leading terms, and is more complicated. We refer to the deep papers [49, 106, 108]. Several papers of Kishimoto contain gaps, but also provide deep insights.

One can also ask the weaker question of "coordinate tameness:" Is the image of (x, y, z) under the Nagata automorphism the image under some (other) tame automorphism? This also fails, by [200].

An automorphism φ is called *stably tame* if, when several new indeterminates $\{t_i\}$ are adjoined, the extension of φ given by $\varphi'(t_i) = t_i$ is tame; otherwise it is called *stably wild*. Stable tameness of automorphisms of $\mathbf{k}[x, y, z]$ fixing z is proved in [47]; similar results for $\mathbf{k}\langle x, y, z\rangle$ are given in [44].

Yagzhev tried to construct wild automorphisms via polynomial automorphisms of the Cayley-Dickson algebra with base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^8$, and the set $\{\nu_i, \xi_i, \varsigma_i\}_{i=1}^8$ of commuting indeterminates. Let

$$x = \sum \nu_i \boldsymbol{e}_i, \quad y = \sum \xi_i \boldsymbol{e}_i, \quad z = \sum \varsigma_i \boldsymbol{e}_i.$$

Let (x, y, z) denote the associator $(xy)z - x(yz)$ of the elements x, y, z, and write

$$(x, y, z)^2 = \sum f_i(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varsigma}) \boldsymbol{e}_i.$$

Then the endomorphism G of the polynomial algebra given by

$$G: \ \nu_i \to \nu_i + f_i(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varsigma}), \quad \xi_i \to \xi_i, \quad \varsigma_i \to \varsigma_i,$$

is an automorphism, which likely is stably wild.

In the free associative case, perhaps it is possible to construct an example of an automorphism, the wildness of which could be proved by considering its Jacobi endomorphism (Definition 5.2.1). He tried to find an automorphism α of an Yagzhev tried to construct examples of algebras $R = A \otimes A^{op}$ over which there are invertible matrices that cannot decompose as products of elementary ones. Yagzhev conjectured that the automorphism

$$x_1 \to x_1 + y_1(x_1y_2 - y_1x_2), \ x_2 \to x_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)y_2, \ y_1 \to y_1, \ y_2 \to y_2$$

of the free associative algebra is wild.

Umirbaev [196] proved in characteristic 0 that the *Anick automorphism* $x \to x + y(xy - yz)$, $y \to y$, $z \to z + (zy - yz)y$ is wild, by using metabelian algebras. The proof uses description of the defining relations of 3-variable automorphism groups [197–199]. Drensky and Yu [80,82] proved in characteristic 0 that the image of x under the Anick Automorphism is not the image of any tame automorphism.

Stable Tameness Conjecture. *Every automorphism of the polynomial algebra* $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ *(respectively, of the free associative algebra* $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$*) is stably tame.*

Lifting in the free associative case is related to quantization. It provides some light on the similarities and differences between the commutative and noncommutative cases. Every tame automorphism of the polynomial ring can be lifted to an automorphism of the free associative algebra. There was a conjecture that *any wild z-automorphism of* $\mathbf{k}[x, y, z]$ *(i.e., fixing z) over an arbitrary field* $\mathbf{k}$ *cannot be lifted to a z-automorphism of* $\mathbf{k}\langle x, y, z\rangle$. In particular, the Nagata automorphism cannot be so lifted [81]. This conjecture was solved by Belov and J.-T. Yu [38] over an arbitrary field. However, the general lifting conjecture is still open. In particular, it is not known whether the Nagata automorphism can be lifted to an automorphism of the free algebra. (Such a lifting could not fix z.)

The paper [38] describes all the z-automorphisms of $\mathbf{k}\langle x, y, z\rangle$ over an arbitrary field $\mathbf{k}$. Based on that work, Belov and J.-T. Yu [44] proved that every z-automorphism of $\mathbf{k}\langle x, y, z\rangle$ is stably tame, for all fields $\mathbf{k}$. A similar result in the commutative case is proved by Berson, van den Essen, and Wright [47]. These are important first steps towards solving the stable tameness conjecture in the noncommutative and commutative cases.

The free associative situation is much more rigid than the polynomial case. Degree estimates for the free associative case are the same for prime characteristic (see [137]) as in characteristic 0 (see [143]). The methodology is different from the commutative case, for which degree estimates (as well as examples of wild automorphisms) are not known in prime characteristic.

J.-T. Yu found some evidence of a connection between the lifting conjecture and the Embedding Conjecture of Abhyankar and Sathaye. Lifting seems to be "easier".

5.2.5. Reduction to simple algebras. This subsection is devoted to finding test algebras.

Any prime algebra B satisfying a system of Capelli identities of order $n + 1$ (n minimal such) is said to have *rank* n. In this case, its operator algebra is PI. The localization of B is a simple algebra of dimension n over its centroid, which is a field. This is the famous *rank theorem* (see [156]).

5.2.5.1. Packing properties.

Definition 5.2.18. Let $\mathcal{M} = \{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ be an arbitrary set of varieties of algebras. We say that $\mathcal{M}$ satisfies the *packing property*, if for any $n \in \mathbb{N}$ there exists a prime algebra A of rank n in some $\mathfrak{M}_j$ such that any prime algebra in any $\mathfrak{M}_i$ of rank n can be embedded into some central extension $K \otimes A$ of A.

$\mathcal{M}$ satisfies the *finite packing property* if, for any finite set of prime algebras $A_j \in \mathfrak{M}_i$, there exists a prime algebra A in some $\mathfrak{M}_k$ such that each A_j can be embedded into A.

The set of proper subvarieties of associative algebras satisfying a system of Capelli identities of some order k satisfies the packing property (because any simple associative algebra is a matrix algebra over field).

However, the varieties of alternative algebras satisfying a system of Capelli identities of order > 8, or of Jordan algebras satisfying a system of Capelli identities of order > 27, do not even satisfy the finite packing property. Indeed, the matrix algebra of order 2 and the Cayley-Dickson algebra cannot be embedded into a common prime alternative algebra. Similarly, $\mathbb{H}_3$ and the Jordan algebra of symmetric matrices cannot be embedded into a common Jordan prime algebra. (Both of these assertions follow easily by considering their PIs.)

It is not known whether or not the packing property holds for Engel algebras satisfying a system of Capelli identities; knowing the answer would enable us to resolve the JC, as will be seen below.

Theorem 5.2.19. *If the set of varieties of Engel algebras (of arbitrary fixed order) satisfying a system of Capelli identities of some order satisfies the packing property, then the Jacobian Conjecture has a positive solution.*

Theorem 5.2.20. *The set of varieties from the previous theorem satisfies the finite packing property.*

Most of the remainder of this section is devoted to the proof of these two theorems.

Problem. Using the packing property and deformations, give a reasonable analog of the JC in nonzero characteristic. (The naive approach using only the determinant of the Jacobian does not work.)

5.2.5.2. Construction of simple Yagzhev algebras. Using the Yagzhev correspondence and composition of elementary automorphisms it is possible to construct a new algebra of Engel type.

Theorem 5.2.21. *Let A be an algebra of Engel type. Then A can be embedded into a prime algebra of Engel type.*

Proof. Consider the mapping $F : V \to V$ (cf. (5.1.1)) given by

$$F : x_i \mapsto x_i + \sum_j \Psi_{ij}; \quad i = 1, \dots, n,$$

where the Ψ_{ij} are homogenous forms of degree j. Adjoining new indeterminates $\{t_i\}_{i=0}^n$, we put $F(t_i) = t_i$ for $i = 0, \dots, n$.

Now we take the transformation

$$G : \; t_0 \mapsto t_0, \quad x_i \mapsto x_i, \quad t_i \mapsto t_i + t_0 x_i^2 \quad \text{for} \quad i = 1, \dots, n.$$

The composite $F \circ G$ has invertible Jacobian (and hence the corresponding algebra has Engel type) and can be expressed as follows:

$$F \circ G : \; x_i \mapsto x_i + \sum_j \Psi_{ij}, \quad t_0 \mapsto t_0, \quad t_i \mapsto t_i + t_0 x_i^2 \quad \text{for} \quad i = 1, \dots, n.$$

It is easy to see that the corresponding algebra $\widehat{A}$ also satisfies the following properties:

(a) $\widehat{A}$ contains A as a subalgebra (for $t_0 = 0$);

(b) if A corresponds to a cubic homogenous mapping (and thus is Engel) then $\widehat{A}$ also corresponds to a cubic homogenous mapping (and thus is Engel);
(c) if some of the forms Ψ_{ij} are not zero, then A does not have nonzero ideals with product 0, and hence is prime (but its localization need not be simple!).

Any algebra A with operators can be embedded, using the previous construction, to a prime algebra with nonzero multiplication. The theorem is proved. □

Embedding via the previous theorem preserves the cubic homogeneous case, but does not yet give us an embedding into a simple algebra of Engel type.

Theorem 5.2.22. *Any algebra A of Engel type can be embedded into a simple algebra of Engel type.*

Proof. We start from the following observation:

Lemma 5.2.23. *Suppose A is a finite dimensional algebra, equipped with a base $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n+1}$. If for any $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$ there exist operators ω_{ij} in the signature $\Omega(A)$ such that $\omega_{ij}(\boldsymbol{e}_i, \dots, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{n+1}) = \boldsymbol{e}_j$, with all other values on the base vectors being zero, then A is simple.*

This lemma implies:

Lemma 5.2.24. *Let F be a polynomial endomorphism of $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n; t_1, t_2]$, where*

$$F(x_i) = \sum_j \Psi_{ij}.$$

For notational convenience we put $x_{n+1} = t_1$ and $x_{n+2} = t_2$. Let $\{k_{ij}\}_{i=1,j}^{s}$ be a set of natural numbers such that

- *For any x_i there exists k_{ij} such that among all Ψ_{ij} there is exactly one term of degree k_{ij}, and it has the form $\Psi_{i,k_{ij}} = t_1 x_j^{k_{ij}-1}$.*
- *For t_2 and any x_i there exists k_{iq} such that among all Ψ_{ij} there is exactly one term of degree k_{iq}, and it has the form $\Psi_{n+2,k_{iq}} = t_1 x_j^{k_{iq}-1}$.*
- *For t_1 and any x_i there exists k_{iq} such that among all Ψ_{ij} there is exactly one term of degree k_{iq}, and it has the form $\Psi_{n+1,k_{iq}} = t_2 x_j^{k_{iq}-1}$.*

Then the corresponding algebra is simple.

Proof. Adjoin the term $t_\ell x_i^{k-1}$ to the x_i, for $\ell = 1, 2$. Let e_i be the base vector corresponding to x_i. Take the corresponding k_{ij}-ary operator

$$\omega : \omega(\boldsymbol{e}_i, \dots, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{n+\ell})) = \boldsymbol{e}_j,$$

with all other products zero. Now we apply the previous lemma. □

Remark 5.2.25. In order to be flexible with constructions via the Yagzhev correspondence, we are working in the general, not necessary cubic, case.

Now we can conclude the proof of Theorem 5.2.22. Let F be the mapping corresponding to the algebra A:

$$F:\ x_i \mapsto x_i + \sum_j \Psi_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$

where Ψ_{ij} are forms of homogeneous degree j. Let us adjoin new indeterminates $\{t_1, t_2\}$ and put $F(t_i) = t_i$, for $i = 1, 2$.

We choose all $k_{\alpha,\beta} > \max(\deg(\Psi_{ij}))$ and assume that these numbers are sufficiently large. Then we consider the mappings

$$G_{k_{ij}} : x_i \mapsto x_i + x_j^{k_{ij}-1} t_1,\ i \leqslant n; \quad t_1 \mapsto t_1; \quad t_2 \mapsto t_2; \quad x_s \mapsto x_s \text{ for } s \neq i.$$

$$G_{k_{i(n+2)}}: t_2 \mapsto x_i^{k_{ij}-1}t_1; \quad t_1 \mapsto t_1; \quad x_s \mapsto x_s \text{ for } 1 \leqslant s \leqslant n.$$

$$G_{k_{i(n+1)}}: t_1 \mapsto x_i^{k_{ij}-1}t_2; \quad t_2 \mapsto t_2; \quad x_s \mapsto x_s \text{ for } 1 \leqslant s \leqslant n.$$

These mappings are elementary automorphisms.

Consider the mapping $H = \circ_{k_{ij}} G_{k_{ij}} \circ F$, where the composite is taken in order of ascending $k_{\alpha\beta}$, and then with F. If the $k_{\alpha\beta}$ grow quickly enough, then the terms obtained in the previous step do not affect the lowest term obtained at the next step, and this term will be as described in the lemma. The theorem is proved. □

Proof of Theorem 5.2.20. The direct sum of Engel type algebras is also of Engel type, and by Theorem 5.2.22 can be embedded into a simple algebra of Engel type. □

The Yagzhev correspondence and algebraic extensions.

For notational simplicity, we consider a cubic homogeneous mapping

$$F: \ x_i \mapsto x_i + \Psi_{3i}(\boldsymbol{x}).$$

We shall construct the Yagzhev correspondence of an algebraic extension.

Consider the equation

$$t^s = \sum_{p=1}^{s} \lambda_p t^{s-p},$$

where the λ_p are formal parameters. If $m \geqslant s$, then for some λ_{pm}, which can be expressed as polynomials in $\{\lambda_p\}_{p=1}^{s-1}$, we have

$$t^m = \sum_{p=1}^{s} \lambda_{pm} t^{s-p}.$$

Let A be the algebra corresponding to the mapping F. Consider

$$A \otimes \mathbf{k}[\lambda_1, \dots, \lambda_s]$$

and its finite algebraic extension $\hat{A} = A \otimes \mathbf{k}[\lambda_1, \dots, \lambda_s, t]$. Now we take the mapping corresponding (via the Yagzhev correspondence) to the ground ring $R = \mathbf{k}[\lambda_1, \dots, \lambda_s]$ and algebra $\hat{A}$.

For $m = 1, \dots, s-1$, we define new formal indeterminates, denoted as $T^m x_i$. Namely, we put $T^0 x_i = x_i$ and for $m \geqslant s$, we identify $T^m x_i$ with

$$\sum_{p=1}^{s} \lambda_{pm} T^{s-p} x_i,$$

where $\{\lambda_p\}_{p=1}^{s-1}$ are formal parameters in the centroid of some extension $R \otimes A$. Now we extend the mapping F, by setting

$$F(T^m x_i) = T^m x_i + T^{3m} \Psi_{3i}(\boldsymbol{x}), \quad m = 1, \dots, s-1.$$

We get a natural mapping corresponding to the algebraic extension.

Now we can take more symbols T_j, $j = 1, \dots, s$, and equations

$$T_j^s = \sum_{p=1}^{s} \lambda_{pj} T_j^{s-p}$$

and a new set of indeterminates $x_{ijk} = T_j^k x_i$ for $j = 1, \dots, s$ and $i = 1, \dots, n$. Then we set

$$x_{ijm} = T_j^m x_i = \sum_{p=1}^{s} \lambda_{jpm} T_j^{s-p} x_i$$

and

$$F(x_{ijm}) = x_{ijm} + T_j^{3m} \Psi_{3i}(\boldsymbol{x}), \quad m = 1, \dots, s-1.$$

This yields an “algebraic extension” of A.

Deformations of algebraic extensions. Let $m = 2$. Let us introduce new indeterminates y_1, y_2, put $F(y_i) = y_1,\ i = 1, 2$, and compose F with the automorphism

$$G : T_1^1 x_i \mapsto T_1^1 x_i + y_1 x_i, \quad T_1^1 x_i \mapsto T_2^1 x_i + y_1 x_i, \quad x_i \mapsto x_i, \quad i = 1, 2,$$
$$y_1 \mapsto y_1 + y_2^2 y_1, \quad y_2 \mapsto y_2.$$

(Note that the $T_1^1 x_i$ and $T_2^1 x_i$ are *new* indeterminates and not proportional to x_i!) Then compose G with the automorphism $H : y_2 \mapsto y_2 + y_1^2$, where H fixes the other indeterminates. Let us call the corresponding new algebra $\hat{A}$. It is easy to see that $\mathrm{Var}(A) \neq \mathrm{Var}(\hat{A})$.

Define an *identity of the pair* (A, B), for $A \subseteq B$ to be a polynomial in two sets of indeterminates x_i, z_j that vanishes whenever the x_i are evaluated in A and z_j in B.) The *variety of the pair* (A, B) is the class of pairs of algebras satisfying the identities of (A, B).

Recall that by the rank theorem, any prime algebra A of rank n can be embedded into an n-dimensional simple algebra $\hat{A}$. We consider the variety of the pair $(A, \hat{A})$.

Considerations of deformations yield the following:

Proposition 5.2.26. *Suppose for all simple n-dimensional pairs there exists a universal pair in which all of them can be embedded. Then the Jacobian Conjecture has a positive solution.*

We see the relation with the following assertion.

The Razmyslov–Kushkulei theorem [see [156]]. *Over an algebraically closed field, any two finite dimensional simple algebras satisfying the same identities are isomorphic.*

The difficulty in applying this theorem is that the identities may depend on parameters. Also, the natural generalization of the Rasmyslov–Kushkulei theorem for a variety and subvariety does not hold: Even if $\mathrm{Var}(B) \subset \mathrm{Var}(A)$, where B and A are simple finite-dimensional algebras over some algebraically closed field, B need not be embeddable to A.

CONCLUSION

The quantization program constitutes a substantial and well designed approach to the Jacobian conjecture, as well as to various related topics in algebra and algebraic geometry. The recent developments presented in this review have been instrumental in our investigation of Kontsevich conjecture as well as the establishment of results of independent interest.

Furthermore, as can be seen from the discussion of the work of A.V. Yagzhev, there are substantial areas of the theory which require further development and which might, conceivably, hold the insights necessary for the resolution of the Jacobian conjecture.

While at present the quantization approach does not seem to be adequately developed for a successful attack on the Jacobian problem to happen (as evidenced by our discussion of Kontsevich conjecture), and the rather substantial critique of the general quantization and lifting philosophy (due to Orevkov and others) exists, further research and development of the theory is well advised.

BIBLIOGRAPHY

1. *Abdesselam A.* The Jacobian conjecture as a problem of perturbative quantum field theory// Ann. H. Poincaré. — 2003. — *4*, № 2. — P. 199–215.
2. *Abhyankar S., Moh T.* Embedding of the line in the plane// J. Reine Angew. Math. — 1975. — *276*. — P. 148–166.
3. *Amitsur S. A.* Algebras over infinite fields// Proc. Am. Math. Soc. — 1956. — *7*. — P. 35–48.
4. *Amitsur S. A.* A general theory of radicals, III. Applications// Am. J. Math. — 1954. — *75*. — P. 126–136.
5. *Alev J., Le Bruyn L.* Automorphisms of generic 2 by 2 matrices// in: Perspectives in Ring Theory. — Springer, 1988. — P. 69–83.
6. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Minimal identities for algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1950. — *1*. — P. 449–463.
7. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Remarks on minimal identities for algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1951. — *2*. — P. 320–327.

8. *Anick D. J.* Limits of tame automorphisms of $k[x_1, \ldots, x_n]$// J. Algebra. — 1983. — *82*, № 2. — P. 459–468.
9. *Artamonov V. A.* Projective metabelian groups and Lie algebras// Izv. Math. — 1978. — *12*, № 2. — C. 213–223.
10. *Artamonov V. A.* Projective modules over universal enveloping algebras// Math. USSR Izv. — 1985. — *25*, № 3. — C. 429.
11. *Artamonov V. A.* Nilpotence, projectivity, decomposability// Sib. Math. J. — 1991. — *32*, № 6. — C. 901–909.
12. *Artamonov V. A.* The quantum Serre problem// Russ. Math. Surv. — 1998. — *53*, № 4. — C. 3–77.
13. *Artamonov V. A.* Automorphisms and derivations of quantum polynomials// in: Recent Advances in Lie Theory (*Bajo I., Sanmartin E.*, eds.). — Heldermann Verlag, 2002. — P. 109–120.
14. *Artamonov V. A.* Generalized derivations of quantum plane// J. Math. Sci. — 2005. — *131*, № 5. — C. 5904–5918.
15. *Artamonov V. A.* *Quantum polynomials* in: Advances in Algebra and Combinatorics. — Singapore: World Scientific, 2008. — P. 19–34.
16. *Artin M.* Noncommutative Rings. — Preprint, 1999.
17. *Arzhantsev I., Kuyumzhiyan K., Zaidenberg M.* Infinite transitivity, finite generation, and Demazure roots// Adv. Math. — 2019. — *351*. — P. 1–32.
18. *Asanuma T.* Non-linearizable algebraic k^*-actions on affine spaces. — Preprint, 1996.
19. *Backelin E.* Endomorphisms of quantized Weyl algebras// Lett. Math. Phys. — 2011. — *97*, № 3. — P. 317–338.
20. *Bass H.* A non-triangular action of G_a on A^3// J. Pure Appl. Algebra. — 1984. — *33*, № 1. — P. 1–5.
21. *Bass H., Connell E. H., Wright D.* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — *7*, № 2. — P. 287–330.
22. *Bavula V. V.* A question of Rentschler and the Dixmier problem// Ann. Math. (2). — 2001. — *154*, № 3. — P. 683–702.
23. *Bavula V. V.* Generalized Weyl algebras and diskew polynomial rings/ `arXiv: 1612.08941 [math.RA]`.
24. *Bavula V. V.* The group of automorphisms of the Lie algebra of derivations of a polynomial algebra// J. Alg. Appl. — 2017. — *16*, № 5. — 1750088.
25. *Bavula V. V.* The groups of automorphisms of the Lie algebras of formally analytic vector fields with constant divergence// C. R. Math. — 2014. — *352*, № 2. — P. 85–88.
26. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of Weyl algebras and polynomial algebras// J. Pure Appl. Algebra. — 2007. — *210*. — P. 147–159.
27. *Bavula V. V.* The inversion formulae for automorphisms of polynomial algebras and rings of differential operators in prime characteristic// J. Pure Appl. Algebra. — 2008. — *212*, № 10. — P. 2320–2337.
28. *Bavula V. V.* An analogue of the conjecture of Dixmier is true for the algebra of polynomial integro-differential operators// J. Algebra. — 2012. — *372*. — P. 237–250.
29. *Bavula V. V.* Every monomorphism of the Lie algebra of unitriangular polynomial derivations is an authomorphism// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. — 2012. — *350*, № 11–12. — P. 553–556.
30. *Bavula V. V.* The Jacobian conjecture$_{2n}$ implies the Dixmier problem$_n$/ `arXiv: math/0512250[math.RA]`.
31. *Beauville A., Colliot-Thelene J.-L., Sansuc J.-J., and Swinnerton-Dyer P.* Varietes stablement rationnelles non rationnelles// Ann. Math. — 1985. — *121*. — P. 283–318.
32. *Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D.* Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures// Ann. Phys. — 1978. — *111*, № 1. — P. 61–110.
33. *Belov A.* Linear recurrence equations on a tree// Math. Notes. — 2005. — *78*, № 5. — C. 603–609.
34. *Belov A.* Local finite basis property and local representability of varieties of associative rings.// Izv. Math. — 2010. — *74*. — C. 1–126.
35. *Belov A., Bokut L., Rowen L., Yu J.-T.* The Jacobian conjecture, together with Specht and Burnside-type problems// in: Automorphisms in Birational and Affine Geometry. — Springer, 2014. — P. 249–285.
36. *Belov A., Makar-Limanov L., Yu J. T.* On the generalised cancellation conjecture// J. Algebra. — 2004. — *281*. — P. 161–166.
37. *Belov A., Rowen L. H., Vishne U.* Structure of Zariski-closed algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 2012. — *362*. — P. 4695–4734.
38. *Belov-Kanel A., Yu J.-T.* On the lifting of the Nagata automorphism// Selecta Math. — 2011. — *17*. — P. 935–945.

39. *Kanel-Belov A., Berzins A., Lipyanski R.* Automorphisms of the semigroup of endomorphisms of free associative algebras// Int. J. Algebra Comp. — 2007. — *17*, № 5/6. — P. 923–939.
40. *Belov-Kanel A., Elishev A.* On planar algebraic curves and holonomic D-modules in positive characteristic// J. Algebra Appl. — 2016. — *15*, № 8. — 1650155.
41. *Belov-Kanel A., Kontsevich M.* Automorphisms of the Weyl algebra// Lett. Math. Phys. — 2005. — *74*, № 2. — P. 181–199.
42. *Belov-Kanel A., Kontsevich M.* The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture// Moscow Math. J. — 2007. — *7*, № 2. — C. 209–218.
43. *Belov-Kanel A., Lipyanski R.* Automorphisms of the endomorphism semigroup of a polynomial algebra// J. Algebra. — 2011. — *333*, № 1. — P. 40–54.
44. *Belov-Kanel A., Yu J.-T.* Stable tameness of automorphisms of $F\langle x, y, z\rangle$ fixing z// Selecta Math. — 2012. — *18*. — P. 799–802.
45. *Bergman G. M.* Centralizers in free associative algebras// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *137*. — P. 327–344.
46. *Bergman G. M.* The diamond lemma for ring theory// Adv. Math. — 1978. — *29*, № 2. — P. 178–218.
47. *Berson J., van den Essen A., Wright D.* Stable tameness of two-dimensional polynomial automorphisms over a regular ring// Adv. Math. — 2012. — *230*. — P. 2176–2197.
48. *Birman J.* An inverse function theorem for free groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1973. — *41*. — P. 634–638.
49. *Bonnet P., Vénéreau S.* Relations between the leading terms of a polynomial automorphism// J. Algebra. — 2009. — *322*, № 2. — P. 579—599.
50. *Berzins A.* The group of automorphisms of semigroup of endomorphisms of free commutative and free associative algebras/ `arXiv: abs/math/0504015 [math.AG]`.
51. *Białynicki-Birula A.* Remarks on the action of an algebraic torus on k^n, I// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1966. — *14*. — P. 177–181.
52. *Białynicki-Birula A.* Remarks on the action of an algebraic torus on k^n, II// Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1967. — *15*. — P. 123–125.
53. *Białynicki-Birula A.* Some theorems on actions of algebraic groups// Ann. Math. — 1973. — *98*, № 3. — P. 480–497.
54. *Bitoun T.* The p-support of a holonomic D-module is lagrangian, for p large enough/ `arXiv: 1012.4081 [math.AG]`.
55. *Bodnarchuk Yu.* Every regular automorphism of the affine Cremona group is inner// J. Pure Appl. Algebra. — 2001. — *157*. — P. 115–119.
56. *Bokut L., Zelmanov E.* Selected works of A. I. Shirshov. — Springer, 2009.
57. *Bokut L. A.* Embedding Lie algebras into algebraically closed Lie algebras// Algebra Logika. — 1962. — *1*. — C. 47–53.
58. *Bokut L. A.* Embedding of algebras into algebraically closed algebras// Dokl. Akad. Nauk. — 1962. — *145*, № 5. — C. 963–964.
59. *Bokut L. A.* Theorems of embedding in the theory of algebras// Colloq. Math. — 1966. — *14*. — P. 349–353.
60. *Brešar M., Procesi C., Špenko Š.* Functional identities on matrices and the Cayley–Hamilton polynomial/ `arXiv: 1212.4597 [math.RA]`.
61. *Campbell L. A.* A condition for a polynomial map to be invertible// Math. Ann. — 1973. — *205*, № 3. — P. 243–248.
62. *Cohn P. M.* Subalgebras of free associative algebras// Proc. London Math. Soc. — 1964. — *3*, № 4. — P. 618–632.
63. *Cohn P. M.* Progress in free associative algebras// Isr. J. Math. — 1974. — *19*, № 1-2. — P. 109–151.
64. *Cohn P. M.* A brief history of infinite-dimensional skew fields// Math. Sci. — 1992. — *17*. — P. 1–14.
65. *Cohn P. M.* Free Rings and Their Relations. — Academic Press, 1985.
66. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *160*. — P. 393–401.
67. *Czerniakiewicz A. J.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — *171*. — P. 309–315.

68. *Danielewski W.* On the cancellation problem and automorphism groups of affine algebraic varieties. — Warsaw: Preprint, 1989.
69. *De Bondt M., van den Essen A.* The Jacobian conjecture for symmetric Druzkowski mappings. — University of Nijmegen, 2004.
70. *De Bondt M., van den Essen A.* A reduction of the Jacobian conjecture to the symmetric case// Proc. Am. Math. Soc. — 2005. — *133*, № 8. — P. 2201–2205.
71. *De Concini C., Procesi C.* A characteristic free approach to invariant theory// in: Young Tableaux in Combinatorics, Invariant Theory, and Algebra. — Elsevier, 1982. — P. 169–193.
72. *Déserti J.* Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine// J. Algebra. — 2006. — *297*. — P. 584–599.
73. *Dicks W.* Automorphisms of the free algebra of rank two// Contemp. Math. — 1985. — *43*. — P. 63–68.
74. *Dicks W., Lewin J.* Jacobian conjecture for free associative algebras// Commun. Algebra. — 1982. — *10*, № 12. — P. 1285–1306.
75. *Dixmier J.* Sur les algebres de Weyl// Bull. Soc. Math. France. — 1968. — *96*. — P. 209–242.
76. *Dodd C.* The p-cycle of holonomic D-modules and auto-equivalences of the Weyl algebra/ `arXiv: 1510.05734 [math.OC]`.
77. *Donkin S.* Invariants of several matrices// Inv. Math. — 1992. — *110*, № 1. — P. 389–401.
78. *Donkin S.* Invariant functions on matrices// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1993. — *113*, № 1. — P. 23–43.
79. *Drensky V., Yu J.-T.* A cancellation conjecture for free associative algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 2008. — *136*, № 10. — P. 3391–3394.
80. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 2006. — *103*. — P. 4836–4840.
81. *Drensky V., Yu J.-T.* Coordinates and automorphisms of polynomial and free associative algebras of rank three// Front. Math. China. — 2007. — *2*, № 1. — P. 13–46.
82. *Drensky V., Yu J.-T.* The strong Anick conjecture is true// J. Eur. Math. Soc. — 2007. — *9*. — P. 659–679.
83. *Drużkowski L.* An effective approach to Keller's Jacobian conjecture// Math. Ann. — 1983. — *264*, № 3. — P. 303–313.
84. *Drużkowski L.* The Jacobian conjecture: symmetric reduction and solution in the symmetric cubic linear case// Ann. Polon. Math. — 2005. — *87*, № 1. — P. 83–92.
85. *Drużkowski L. M.* New reduction in the Jacobian conjecture// in: Effective Methods in Algebraic and Analytic Geometry. — Kraków: Univ. Iagel. Acta Math., 2001. — P. 203–206.
86. *Elishev A.* Automorphisms of polynomial algebras, quantization and Kontsevich conjecture/ PhD Thesis — Moscow Institute of Physics and Technology, 2019.
87. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Noncommutative Białynicki-Birula theorem./ `arXiv: 1808.04903 [math.AG]`.
88. *Elishev A., Kanel-Belov A., Razavinia F., Yu J.-T., Zhang W.* Torus actions on free associative algebras, lifting and Białynicki-Birula type theorems/ `arXiv: 1901.01385 [math.AG]`.
89. *van den Bergh M.* On involutivity of p-support// Int. Math. Res. Not. — 2015. — *15*. — P. 6295–6304.
90. *van den Essen A.* The amazing image conjecture/ `arXiv: 1006.5801 [math.AG]`.
91. *van den Essen A., de Bondt M.* Recent progress on the Jacobian conjecture// Ann. Polon. Math. — 2005. — *87*. — P. 1–11.
92. *van den Essen A., de Bondt M.* The Jacobian conjecture for symmetric Druźkowski mappings// Ann. Polon. Math. — 2005. — *86*, № 1. — P. 43–46.
93. *van den Essen A., Wright D., Zhao W.* On the image conjecture// J. Algebra. — 2011. — *340*. — P. 211—224.
94. *Fox R. H.* Free differential calculus, I. Derivation in the free group ring// Ann. Math. (2). — 1953. — *57*. — P. 547–560.
95. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, I// Izv. Math. — 1975. — *9*, № 3. — C. 493–534.
96. *Gizatullin M. Kh., Danilov V. I.* Automorphisms of affine surfaces, II// Izv. Math. — 1977. — *11*, № 1. — C. 51–98.
97. *Gorni G., Zampieri G.* Yagzhev polynomial mappings: on the structure of the Taylor expansion of their local inverse// Polon. Math. — 1996. — *64*. — P. 285–290.

98. *Fedosov B.* A simple geometrical construction of deformation quantization// J. Differ. Geom. — 1994. — *40*, № 2. — P. 213–238.
99. *Frayne T., Morel A. C., Scott D. S.* Reduced direct products// J. Symb. Logic.. — *31*, № 3. — P. 1966.
100. *Fulton W., Harris J.* Representation Theory. A First Course. — Springer-Verlag, 1991.
101. *Furter J.-P., Kraft H.* On the geometry of the automorphism groups of affine varieties/ `arXiv: 1809.04175 [math.AG]`.
102. *Gutwirth A.* The action of an algebraic torus on the affine plane// Trans. Am. Math. Soc. — 1962. — *105*, № 3. — P. 407–414.
103. *Jung H. W. E.* Über ganze birationale Transformationen der Ebene// J. Reine Angew. Math. — 1942. — *184*. — P. 161–174.
104. *Kaliman S., Koras M., Makar-Limanov L., Russell P.* C^*-actions on C^3 are linearizable// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 1997. — *3*. — P. 63–71.
105. *Kaliman S., Zaidenberg M.* Families of affine planes: the existence of a cylinder// Michigan Math. J. — 2001. — *49*. — P. 353–367.
106. *Kuroda S.* Shestakov–Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism// Tôhoku Math. J. — 2010. — *62*. — P. 75–115.
107. *Kuzmin E., Shestakov I. P.* Nonassociative structures// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Probl. Mat. Fundam. Napr. — 1990. — *57*. — C. 179–266.
108. *Karas' M.* Multidegrees of tame automorphisms of C^n// Dissert. Math. — 2011. — *477*.
109. *Khoroshkin A., Piontkovski D.* On generating series of finitely presented operads/ `arXiv: 1202.5170 [math.QA]`.
110. *Kambayashi T.* Pro-affine algebras, Ind-affine groups and the Jacobian problem// J. Algebra. — 1996. — *185*, № 2. — P. 481–501.
111. *Kambayashi T.* Some basic results on pro-affine algebras and Ind-affine schemes// Osaka J. Math. — 2003. — *40*, № 3. — P. 621–638.
112. *Kambayashi T., Russell P.* On linearizing algebraic torus actions// J. Pure Appl. Algebra. — 1982. — *23*, № 3. — P. 243–250.
113. *Kanel-Belov A., Borisenko V., Latysev V.* Monomial algebras// J. Math. Sci. — 1997. — *87*, № 3. — C. 3463–3575.
114. *Kanel-Belov A., Elishev A.* On planar algebraic curves and holonomic $\mathcal{D}$-modules in positive characteristic/ `arXiv:1412.6836 [math.AG]`.
115. *Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T.* Independence of the B-KK isomorphism of infinite prime/ `arXiv: 1512.06533 [math.AG]`.
116. *Kanel-Belov A., Elishev A., Yu J.-T.* Augmented polynomial symplectomorphisms and quantization/// `arXiv:1812.02859 [math.AG]`.
117. *Kanel-Belov A., Grigoriev S., Elishev A., Yu J.-T., Zhang W.* Lifting of polynomial symplectomorphisms and deformation quantization// Commun. Algebra. — 2018. — *46*, № 9. — P. 3926–3938.
118. *Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L.* The images of noncommutative polynomials evaluated on 2×2 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2012. — *140*. — P. 465–478.
119. *Kanel-Belov A., Malev S., Rowen L.* The images of multilinear polynomials evaluated on 3×3 matrices// Proc. Am. Math. Soc. — 2016. — *144*. — P. 7–19.
120. *Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W.* Bergman's centralizer theorem and quantization// Commun. Algebra. — 2018. — *46*, № 5. — P. 2123–2129.
121. *Kanel-Belov A., Razavinia F., Zhang W.* Centralizers in free associative algebras and generic matrices/ `arXiv:1812.03307 [math.RA]`.
122. *Kanel-Belov A., Rowen L. H., Vishne U.* Full exposition of Specht's problem// Serdica Math. J. — 2012. — *38*. — P. 313–370.
123. *Kanel-Belov A., Yu J.-T., Elishev A.* On the augmentation topology of automorphism groups of affine spaces and algebras// Int. J. Algebra Comput. * — 2018. — *28*, № 08. — P. 1449–1485.
124. *Keller B.* Notes for an Introduction to Kontsevich's Quantization Theorem, 2003.
125. *Keller O. H.* Ganze Cremona Transformationen// Monatsh. Math. Phys. — 1939. — *47*, № 1. — P. 299–306.
126. *Kolesnikov P. S.* The Makar-Limanov algebraically closed skew field// Algebra Logic. — 2000. — *39*, № 6. — C. 378–395.

127. *Kolesnikov P. S.* Different definitions of algebraically closed skew fields// Algebra Logic. — 2001. — *40*, № 4. — C. 219–230.
128. *Kontsevich M.* Deformation quantization of Poisson manifolds// Lett. Math. Phys. — 2003. — *66*, № 3. — P. 157–216.
129. *Kontsevich M.* Holonomic D-modules and positive characteristic// Jpn. J. Math. — 2009. — *4*, № 1. — P. 1–25.
130. *Koras M., Russell P.* C^*-actions on C^3: The smooth locus of the quotient is not of hyperbolic type// J. Alg. Geom. — 1999. — *8*, № 4. — P. 603–694.
131. *Kovalenko S., Perepechko A., Zaidenberg M.* On automorphism groups of affine surfaces// in: Algebraic Varieties and Automorphism Groups. — Math. Soc. Jpn., 2017. — P. 207–286.
132. *Kraft H., Regeta A.* Automorphisms of the Lie algebra of vector fields// J. Eur. Math. Soc. — 2017. — *19*, № 5. — P. 1577–1588.
133. *Kraft H., Stampfli I.* On automorphisms of the affine Cremona group// Ann. Inst. Fourier. — 2013. — *63*, № 3. — P. 1137–1148.
134. *Kulikov V. S.* Generalized and local Jacobian problems// Izv. Math. — 1993. — *41*, № 2. — C. 351–365.
135. *Kulikov V. S.* The Jacobian conjecture and nilpotent maps// J. Math. Sci. — 2001. — *106*, № 5. — C. 3312–3319.
136. *Levy R., Loustaunau P., Shapiro J.* The prime spectrum of an infinite product of copies of Z// Fundam. Math. — 1991. — *138*. — P. 155–164.
137. *Li Y.-C., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras// J. Algebra. — 2012. — *362*. — P. 92–98.
138. *Gaiotto D., Witten E.* Probing quantization via branes/ `arXiv: 2107.12251 [hep-th]`.
139. *Lothaire M.* Combinatorics on Words. — Cambridge Univ. Press, 1997.
140. *Makar-Limanov L.* A new proof of the Abhyankar–Moh-=Suzuki theorem/ `arXiv: 1212.0163 [math.AC]`.
141. *Makar-Limanov L.* Automorphisms of a free algebra with two generators// Funct. Anal. Appl. — 1970. — *4*, № 3. — C. 262–264.
142. *Makar-Limanov L.* On automorphisms of Weyl algebra// Bull. Soc. Math. France. — 1984. — *112*. — P. 359–363.
143. *Makar-Limanov L., Yu J.-T.* Degree estimate for subalgebras generated by two elements// J. Eur. Math. Soc. — 2008. — *10*. — P. 533–541.
144. *Makar-Limanov L.* Algebraically closed skew fields// J. Algebra. — 1985. — *93*, № 1. — P. 117–135.
145. *Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U.* Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables// J. Algebra. — 2009. — *322*, № 9. — P. 3318–3330.
146. *Markl M., Shnider S., Stasheff J.* Operads in Algebra, Topology, and Physics. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2002.
147. *Miyanishi M., Sugie T.* Affine surfaces containing cylinderlike open sets// J. Math. Kyoto Univ. — 1980. — *20*. — P. 11–42.
148. *Nagata M.* On the automorphism group of $k[x, y]$. — Tokyo: Kinokuniya, 1972.
149. *Nielsen J.* Die Isomorphismen der allgemeinen, undendlichen Gruppen mit zwei Eerzeugenden// Math. Ann. — 1918. — *78*. — P. 385–397.
150. *Nielsen J.* Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen// Math. Ann. — 1924. — *91*. — P. 169–209.
151. *Ol'shanskij A. Yu.* Groups of bounded period with subgroups of prime order// Algebra and Logic. — 1983. — *21*. — C. 369–418.
152. *Peretz R.* Constructing polynomial mappings using non-commutative algebras// in: Affine Algebraic Geometry. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2005. — P. 197–232.
153. *Piontkovski D.* Operads versus Varieties: a dictionary of universal algebra. — Preprint, 2011.
154. *Piontkovski D.* On Kurosh problem in varieties of algebras// J. Math. Sci. — 2009. — *163*, № 6. — C. 743–750.
155. *Razmyslov Yu. P.* Algebras satisfying identity relations of Capelli type// Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. — 1981. — *45*. — C. 143–166, 240.
156. *Razmyslov Yu. P.* Identities of Algebras and Their Representations. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1994.
157. *Razmyslov Yu. P., Zubrilin K. A.* Nilpotency of obstacles for the representability of algebras that satisfy Capelli identities, and representations of finite type// Russ. Math. Surveys — 1993. — *48*. — C. 183–184.

158. *Reutenauer C.* Applications of a noncommutative Jacobian matrix// J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — *77.* — P. 634–638.
159. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
160. *Moh T.-T.* On the global Jacobian conjecture for polynomials of degree less than 100. — Preprint, 1983.
161. *Moh T.-T.* On the Jacobian conjecture and the configurations of roots// J. Reine Angew. Math. — 1983. — *340.* — P. 140–212.
162. *Moyal J. E.* Quantum mechanics as a statistical theory// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1949. — *45*, № 1. — P. 99–124.
163. *Orevkov S. Yu.* The commutant of the fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Russ. Math. Surv. — 1990. — *45*, № 1. — C. 221–222.
164. *Orevkov S. Yu.* An example in connection with the Jacobian conjecture// Math. Notes. — 1990. — *47*, № 1. — C. 82–88.
165. *Orevkov S. Yu.* The fundamental group of the complement of a plane algebraic curve// Sb. Math. — 1990. — *65*, № 1. — C. 267–267.
166. *Plotkin B.* Varieties of algebras and algebraic varieties// Israel J. Math. — 1996. — *96*, № 2. — P. 511–522.
167. *Plotkin B.* Algebras with the same (algebraic) geometry/ `arXiv:math/0210194 [math.GM]`.
168. *Popov V. L.* Around the Abhyankar-Sathaye conjecture/ `arXiv:1409.6330 [math.AG]`.
169. *Procesi C.* Rings with Polynomial Identities. — Marcel Dekker, 1973.
170. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices// Adv. Math. — 1976. — *19*, № 3. — P. 306–381.
171. *Razar M.* Polynomial maps with constant Jacobian// Israel J. Math. — 1979. — *32*, № 2-3. — P. 97–106.
172. *Robinson A.* Non-Standard Analysis. — Princeton Univ. Press, 2016.
173. *Rosset S.* A new proof of the Amitsur–Levitzki identity// Israel J. Math. — 1976. — *23*, № 2. — P. 187–188.
174. *Rowen L. H.* Graduate Algebra: Noncommutative View. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2008.
175. *Schofield A. H.* Representations of Rings over Skew Fields. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
176. *Schwarz G.* Exotic algebraic group actions// C. R. Acad. Sci. Paris — 1989. — *309.* — P. 89–94.
177. *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups, II// Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat. — 1981. — *45*, № 1. — C. 214–226.
178. *Sharifi Y.* Centralizers in Associative Algebras/ Ph.D. thesis, 2013.
179. *Shestakov I. P.* Finite-dimensional algebras with a nil basis// Algebra Logika. — 1971. — *10.* — C. 87–99.
180. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* Degree estimate and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17.* — P. 181–196.
181. *Shestakov I., Umirbaev U.* The Nagata automorphism is wild// Proc. Natl. Acad. Sci. — 2003. — *100*, № 22. — P. 12561–12563.
182. *Shestakov I., Umirbaev U.* Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17*, № 1. — P. 181–196.
183. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17.* — P. 197–220.
184. *Umirbaev U., Shestakov I.* Subalgebras and automorphisms of polynomial rings// Dokl. Ross. Akad. Nauk — 2002. — *386*, № 6. — C. 745–748.
185. *Shpilrain V.* On generators of L/R^2 Lie algebras// Proc. Am. Math. Soc. — 1993. — *119.* — P. 1039–1043.
186. *Singer D.* On Catalan trees and the Jacobian conjecture// Electron. J. Combin. — 2001. — *8*, № 1. — 2.
187. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Affine varieties with equivalent cylinders// J. Algebra. — 2002. — *251*, № 1. — P. 295–307.
188. *Shpilrain V., Yu J.-T.* Factor algebras of free algebras: on a problem of G. Bergman// Bull. London Math. Soc. — 2003. — *35.* — P. 706–710.
189. *Suzuki M.* Propiétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébraique de l'espace C^2// J. Math. Soc. Jpn. — 1974. — *26.* — P. 241–257.
190. *Tsuchimoto Y. Preliminaries on Dixmier conjecture* Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A. Math. — 2003. — *24.* — P. 43–59.
191. *Tsuchimoto Y.* Endomorphisms of Weyl algebra and p-curvatures// Osaka J. Math. — 2005. — *42*, № 2. — P. 435–452.

192. *Tsuchimoto Y.* Auslander regularity of norm based extensions of Weyl algebra/// `arXiv:1402.7153 [math.AG]`.
193. *Umirbaev U.* On the extension of automorphisms of polynomial rings// Sib. Math. J. — 1995. — *36*, № 4. — C. 787–791.
194. *Umirbaev U. U.* On Jacobian matrices of Lie algebras// в кн.: Proc. 6 All-Union Conf. on Varieties of Algebraic Systems. — Magnitogorsk, 1990. — C. 32–33.
195. *Umirbaev U. U.* Shreer varieties of algebras// Algebra Logic. — 1994. — *33*. — C. 180–193.
196. *Umirbaev U. U.* Tame and wild automorphisms of polynomial algebras and free associative algebras. — Preprint MPIM 2004–108..
197. *Umirbaev U.* The Anick automorphism of free associative algebras// J. Reine Angew. Math. — 2007. — *605*. — P. 165–178.
198. *Umirbaev U. U.* Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables// J. Reine Angew. Math. — 2006. — *600*. — P. 203–235.
199. *Umirbaev U. U.* Defining relations for automorphism groups of free algebras// J. Algebra. — 2007. — *314*. — P. 209–225.
200. *Umirbaev U. U., Yu J.-T.* The strong Nagata conjecture// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 2004. — *101*. — P. 4352–4355.
201. *Urech C., Zimmermann S.* Continuous automorphisms of Cremona groups/ `arXiv:1909.11050 [math.AG]`.
202. *van den Essen A.* Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. — Birkhäuser, 2012.
203. *van der Kulk W.* On polynomial rings in two variables// Nieuw Arch. Wisk. (3) — 1953. — *1*. — P. 33–41.
204. *Vitushkin A. G.* A criterion for the representability of a chain of σ-processes by a composition of triangular chains// Math. Notes — 1999. — *65*, № 5-6. — C. 539–547.
205. *Vitushkin A. G.* On the homology of a ramified covering over C^2// Math. Notes. — 1998. — *64*, № 5. — C. 726–731.
206. *Vitushkin A. G.* Evaluation of the Jacobian of a rational transformation of C^2 and some applications// Math. Notes — 1999. — *66*, № 2. — C. 245–249.
207. *Wedderburn J. H. M.* Note on algebras// Ann. Math. — 1937. — *38*. — P. 854–856.
208. *Wright D.* The Jacobian conjecture as a problem in combinatorics/ `arXiv:math/0511214 [math.CO]`.
209. *Wright D.* The Jacobian conjecture: Ideal membership questions and recent advances// Contemp. Math. — 2005. — *369*. — P. 261–276.
210. *Yagzhev A. V.* Finiteness of the set of conservative polynomials of a given degree// Math. Notes. — 1987. — *41*, № 2. — C. 86—88.
211. *Yagzhev A. V.* Nilpotency of extensions of an abelian group by an abelian group// Math. Notes. — 1988. — *43*, № 3-4. — C. 244–245.
212. *Yagzhev A. V.* Locally nilpotent subgroups of the holomorph of an abelian group// Mat. Zametki — 1989. — *46*, № 6. — C. 118.
213. *Yagzhev A. V.* A sufficient condition for the algebraicity of an automorphism of a group// Algebra Logic. — 1989. — *28*, № 1. — C. 83–85.
214. *Yagzhev A. V.* The generators of the group of tame automorphisms of an algebra of polynomials// Sib. Mat. Zh. — 1977. — *18*, № 1. — P. 222–225.
215. *Wang S.* A Jacobian criterion for separability// J. Algebra. — 1980. — *65*, № 2. — P. 453–494.
216. *Wright D.* On the Jacobian conjecture// Ill. J. Math. — 1981. — *25*, № 3. — P. 423–440.
217. *Yagzhev A. V.* Invertibility of endomorphisms of free associative algebras// Math. Notes. — 1991. — *49*, № 3–4. — C. 426—430.
218. *Yagzhev A. V.* Endomorphisms of free algebras// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 1. — C. 133—141.
219. *Yagzhev A. V.* On the algorithmic problem of recognizing automorphisms among endomorphisms of free associative algebras of finite rank// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 1. — C. 142–146.
220. *Yagzhev A. V.* Keller's problem// Sib. Math. J. — 1980. — *21*, № 5. — C. 747–754.
221. *A. V. Yagzhev* Engel algebras satisfying Capelli identities// в кн.: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — C. 83–88 (in Russian).
222. *A. V. Yagzhev* Endomorphisms of polynomial rings and free algebras of different varieties// в кн.: Proceedings of Shafarevich Seminar. — Moscow: Steklov Math. Inst., 2000. — C. 15–47 (in Russian).
223. *Yagzhev A. V.* Invertibility criteria of a polynomial mapping. — Unpublished (in Russian).

224. *Zaks A.* Dedekind subrings of $K[x_1, \ldots, x_n]$ are rings of polynomials// Israel J. Math. — 1971. — *9.* — P. 285–289.
225. *Zelmanov E.* On the nilpotence of nilalgebras// Lect. Notes Math. — 1988. — *1352.* — P. 227–240.
226. *Zhao W.* New proofs for the Abhyankar–Gurjar inversion formula and the equivalence of the Jacobian conjecture and the vanishing conjecture// Proc. Am. Math. Soc. — 2011. — *139.* — P. 3141–3154.
227. *Zhao W.* Mathieu subspaces of associative algebras// J. Algebra. — 2012. — *350.* — P. 245–272.
228. *Zhevlakov K. A., Slin'ko A. M., Shestakov I. P., Shirshov A. I.* Nearly Associative Rings. — Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
229. *Zubrilin K. A.* Algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1995. — *186*, № 3. — C. 359–370.
230. *Zubrilin K. A.* On the class of nilpotence of obstruction for the representability of algebras satisfying Capelli identities// Fundam. Prikl. Mat. — 1995. — *1*, № 2. — C. 409–430.
231. *Zubrilin K. A.* On the Baer ideal in algebras that satisfy the Capelli identities// Sb. Math. — 1998. — *189.* — C. 1809–1818.
232. *Zaidenberg M. G.* On exotic algebraic structures on affine spaces// in: Geometric Complex Analysis. — World Scientific, 1996. — P. 691–714.
233. *Zhang W.* Alternative proof of Bergman's centralizer theorem by quantization/ Master thesis — Bar-Ilan University, 2017.
234. *Zhang W.* Polynomial automorphisms and deformation quantization/ Ph.D. thesis — Bar-Ilan University, 2019.
235. *Zubkov A. N.* Matrix invariants over an infinite field of finite characteristic// Sib. Math. J. — 1993. — *34*, № 6. — C. 1059–1065.
236. *Zubkov A. N.* A generalization of the Razmyslov–Procesi theorem// Algebra Logic. — 1996. — *35*, № 4. — C. 241–254.

Елишев Андрей Михайлович
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: `ame1511@mail.ru`

Канель-Белов Алексей Яковлевич
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: `kanelster@gmail.com`

Razavinia Farrokh
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: `farrokh.razavinia@gmail.com`

Jie-Tai Yu
Шэньчженьский университет, Шэньчжень, Китайская народная республика
E-mail: `yujt@hkucc.hku.hk`

Wenchao Zhang
Школа математики и статистики, Университет Хуэйчжоу, Китайская народная республика
E-mail: `zhangwc@hzu.edu.cn`

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.