

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 234



Москва 2024

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 234 (2024)

Дата публикации 8 апреля 2024 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска

А. В. Аргучинцев

М. В. Фалалеев

Научный редактор выпуска

Н. А. Архипова

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 234

МАТЕРИАЛЫ 5 МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ
НАУКИ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ»
(DYSC 2023)

ИРКУТСК, 18-23 СЕНТЯБРЯ 2023 г.



Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Об одной дискретной двухпараметрической задаче управления дробного порядка (<i>С. Т. Алиева, К. Б. Мансимов</i>)	3
Задача оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал (<i>В. Р. Барсегян, С. В. Солодуша</i>)	11
Об асимптотике решения нелинейного разностного уравнения типа свертки (<i>В. А. Воблый</i>)	21
Влияние младших производных на разрешимость задачи Дирихле для многомерных эллиптических систем (<i>Е. А. Головкин, Н. С. Кацанова</i>)	27
Задача Коши частного случая движения жидкости в напорном трубопроводе (<i>Е. Ю. Гражданцева</i>)	35
Опорные мажоранты и позиционные принципы минимума для дискретных задач оптимального управления (<i>В. А. Дыхта</i>)	43
О некоторых системах дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром в главной части (<i>И. В. Захарова, М. В. Фалалеев</i>)	50
Об одном классе точных решений многомерного нелинейного уравнения теплопроводности с нулевым фронтом (<i>А. Л. Казаков, Л. Ф. Сневак</i>)	59
Композиции чисел с ограничениями и иерархическая структура плоских сечений пирамиды Паскаля (<i>О. В. Кузьмин, М. В. Стрихарь</i>)	67
Квантовый поиск с разрушающим сцеплением каналом обращения к оракулу (<i>А. Э. Растёгин, А. М. Шемет</i>)	75
Задача идентификации входного сигнала динамических систем, моделируемых полиномами Вольтерра (<i>С. В. Солодуша, Ю. И. Коканова</i>)	83
О некоторых S_I^* -предполных множествах мультифункций ранга 2 (<i>Э. С. Тагласов</i>)	91
О некоторых задачах сферической тригонометрии (<i>Е. П. Кругова</i>)	99
Критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений в мультипликативной и аддитивной форме (<i>С. Г. Буланов</i>)	108
Об одном подходе к вычислению особых экстремальных управлений на основе задач о неподвижной точке (<i>А. С. Булдаев, И. Д. Казьмин</i>)	118
Методы исследования некоторых систем с линейным запаздыванием (<i>Б. Г. Гребенщиков, С. А. Загребина</i>)	133
Гамильтонов формализм для жестких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием (<i>Ю. А. Марков, М. А. Маркова, Н. Ю. Марков</i>)	143
О точном решении уравнений эволюции для двух взаимодействующих узких волновых пакетов, распространяющихся в неабелевой плазме (<i>Ю. А. Марков, М. А. Маркова, Н. Ю. Марков</i>)	159



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 3–10
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-3-10

УДК 519.21: 517.977

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. С. Т. АЛИЕВА, К. Б. МАНСИМОВ

Аннотация. В статье изучается разностный аналог дробного порядка задачи оптимального управления, занимающей промежуточное место между задачами с сосредоточенными и с распределенными параметрами. Получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка.

Ключевые слова: двухпараметрическая дискретная задача, допустимое управление, двухпараметрическая система дробного порядка, оптимальное управление.

ON A DISCRETE TWO-PARAMETER FRACTIONAL CONTROL PROBLEM

© 2024 S. T. ALIYEVA, K. B. MANSIMOV

ABSTRACT. In this paper, we examine a fractional difference analog of an optimal control problem occupying an intermediate position between problems with lumped and distributed parameters and obtain various first-order optimality necessary conditions.

Keywords and phrases: two-parameter discrete problem, admissible control, two-parameter fractional system, optimal control.

AMS Subject Classification: 39A50, 49K05

Пусть управляемый дискретный процесс описывается системой разностных уравнений дробного порядка

$$\Delta^\alpha z(t+1, x) = f(t, x, z(t, x), u(t)), \quad (1)$$
$$t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \quad x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\}.$$

с начальным условием

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\}, \quad (2)$$

где $y(x)$ — n -мерная вектор-функция, являющаяся решением задачи Коши

$$\Delta^\beta y(x+1) = g(x, y(x), v(x)), \quad x \in X \setminus x_1, \quad (3)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (4)$$

Здесь $f(t, x, z, u)$, $g(x, y, v)$ — заданные n -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $z(y)$, y_0 — заданный постоянной вектор, t_0, t_1, x_0, x_1 заданы, $\Delta^\alpha z(t, x)$ ($0 < \alpha < 1$) и $\Delta^\beta y(x)$ ($0 < \beta < 1$) — дробные операторы порядков α и β (см., например, [4, 9–11]), $u(t)$, $v(x)$ — $r(q)$ -мерные вектор-функции управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U(V)$ и

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \quad v(x) \in U \subset R^q, \quad x \in X \setminus x_1. \quad (5)$$

Управляющую функцию $(u(t), v(x))$ назовем допустимым управлением, если она удовлетворяет ограничениям (4) и (5), а соответствующий процесс $(u(t), v(x), y(x), z(t, x))$ назовем допустимым процессом.

На решениях системы (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал терминального типа

$$S(u, v) = \varphi_1(y(x_1)) + \sum_{x_0}^{x_1-1} \varphi_2(x, z(t_1, x)). \quad (6)$$

Здесь $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(z)$ — заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с их производными по y и z соответственно.

Требуется найти минимальное значение функционала (6) при ограничениях (1)–(5).

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении дискретные аналоги задач Коши, т.е. задачи (1)–(2) и (3)–(4), имеют единственные решения.

Допустимое управление $(u(t, x), v(x))$, доставляющее минимум функционалу (6) при ограничениях (1)–(5), называется оптимальным управлением, а пара $(u(t, x), v(x), y(x), z(t, x))$ является оптимальным процессом.

Цель работы состоит в выводе ряда необходимых условий оптимальности.

Пусть $(u^0(t), v^0(x))$ — фиксированное, а $(\bar{u}(t, x) = u^0(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{v}(x) = v^0(x) + \Delta v(x))$ — произвольное допустимое управление. Через $(y^0(x), z^0(t, x))$ и $(\bar{y}(x) = y^0(x) + \Delta y(x), \bar{z}(t, x) = z^0(t, x) + \Delta z(t, x))$ обозначим соответствующие им решения системы (1)–(3). Тогда ясно, что $(\Delta z(t, x), \Delta y(x))$ будет удовлетворять системе

$$\Delta^\alpha(\Delta z(t+1, x)) = f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t)) - f(t, x, z^0(t, x), u^0(t)), \quad t \in T, \quad x \in X, \quad (7)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta y(x), \quad x \in X, \quad (8)$$

$$\Delta^\beta(\Delta y(x+1)) = g(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x)) - g(x, y^0(x), v^0(x)), \quad x \in X \setminus x_1, \quad (9)$$

$$\Delta y(x_0) = 0. \quad (10)$$

Пусть $(\psi^0(t, x), p^0(x))$ — пока неизвестные n -мерные вектор-функции. Умножим обе части соотношений (7), (9) слева скалярно на $\psi^0(t, x)$ (соответственно, на $p^0(x)$) и просуммируем полученные тождества по (t, x) от t_0 до $t_1 - 1$ и от x_0 до $x_1 - 1$ (соответственно, по x от x_0 до $x_1 - 1$). В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t+1, x)) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t, x) (f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t)) - f(t, x, z^0(t, x), u^0(t))), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'} \Delta^\beta(\Delta y(x+1)) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'} (g(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x)) - g(x, y^0(x), v^0(x))). \quad (12)$$

Положим

$$H(t, x, z, u, \psi) = \psi' f(t, x, z, u), \quad M(x, y, v, p) = p' g(x, y, v).$$

Функции $H(t, x, z, u, \psi)$, $M(x, y, v, p)$ являются аналогами функций Гамильтона—Понтрягина для рассматриваемой задачи (1)–(6). С учетом тождеств (11), (12) формула для приращения критерия качества (6) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u^0, v^0) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^0, v^0) = \varphi_1(\bar{y}(x_1)) - \varphi_1(y^0(x_1)) + \\ + \sum_{x_0}^{x_1} (\varphi_2(x, \bar{z}(t_1, x)) - \varphi_2(x, z^0(t_1, x))) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t+1, x)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))) + \\
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x) \Delta^\beta(\Delta y(x+1)) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (M(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), p^0(x)) - M(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в этой формуле. С этой целью рассмотрим выражение

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t+1, x)).$$

Сделаем в нем замену переменных $t+1 = \tau$, получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t+1, x)) &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} \psi^{0'}(t-1, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t, x)) = \\
 &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_1-1, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t_1, x)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_0-1, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t_0, x)) + \\
 &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t-1, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t, x)). \quad (14)
 \end{aligned}$$

Делая замену переменных $x+1 = s$, легко убедиться в справедливости следующих тождеств:

$$\begin{aligned}
 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x) \Delta^\beta(\Delta y(x+1)) &= \\
 &= p^{0'}(x_1-1) \Delta^\beta(\Delta y(x_1)) - p^{0'}(x_0-1) \Delta^\beta(\Delta y(x_0)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x-1) \Delta^\beta(\Delta y(x)) = \\
 &= p^{0'}(x_1-1) \Delta^\beta(\Delta y(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x-1} p^{0'}(x-1) \Delta^\beta(\Delta y(x)). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Далее, с учетом теоремы дробного суммирования по частям (см. [8]) имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_0-1, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t_0, x)) &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_0-1, x) \Delta^\alpha(\Delta y(x)) = \\
 &= \psi^{0'}(t_0-1, x_1)(\Delta y(x_1)) - \psi^{0'}(t_0-1, x_0)(\Delta y(x_0)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t_0-1, x)(\Delta y(x)) + \\
 &+ \frac{\mu}{\Gamma(\mu)} \Delta y(x_0) \left(\sum_{x=x_0}^{x_1-1} (x+\mu-x_0)^{(\mu-1)} \psi^0(t_0, x) - \sum_{x=\sigma(x_0)}^{x_1-1} (x+\mu-\sigma(x_0))^{(\mu-1)} \psi^0(t_0, x) \right) = \\
 &= \psi^{0'}(t_0-1, x_1)(\Delta y(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t-1, x)(\Delta y(x)), \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_1-1, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t_1, x)) &= \\
 &= \psi^{0'}(t_1-1, x_1)(\Delta z(t_1, x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t_1-1, x)(\Delta z(t_1, x)), \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t-1, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t, x)) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_1-1, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t_1, x)) + \\
& + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_0-1, x) \Delta^\alpha(\Delta z(t_0, x)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t-1, x) (\Delta z(t, x)) + \\
& + \frac{\mu}{\Gamma(\mu)} \Delta z(t_0, x) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (t + \mu - t_0)^{(\mu-1)} \psi^0(t-1, x) - \sum_{x=\sigma(t_0)}^{x_1-1} (t + \mu - \sigma(t_0))^{(\mu-1)} \psi^0(t, x) \right], \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x-1) \Delta^\beta(\Delta y(x)) = p^{0'}(x_1-1) \Delta^\beta(\Delta y(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\beta p^{0'}(x-1) \Delta^\beta(\Delta y(x)). \tag{19}$$

Принимая во внимание тождества (14)–(18) и (13), получим

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^0, v^0) &= S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^0, v^0) = \varphi_1(\bar{y}(x_1)) - \varphi_1(y^0(x_1)) + \\
& + \sum_{x_0}^{x_1-1} (\varphi_2(x, \bar{z}(t_1, x)) - \varphi_2(x, z^0(t_1, x))) + 2\psi^{0'}(t_1-1, x_1) (\Delta z(t_1, x_1)) + \\
& + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) + 2\psi^{0'}(t_0-1, x_1) (\Delta y(x_1)) + \\
& + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t_0-1, x) \Delta y(x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t-1, x) \Delta z(t, x) + \\
& + \frac{\mu}{\Gamma(\mu)} \Delta y(x) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (t + \mu - t_0)^{(\mu-1)} \psi^0(t-1, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (t + \mu - \sigma(t_0))^{(\mu-1)} \psi^0(t-1, x) \right] - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t), \psi^0)(t, x) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0)(t, x)) + \\
& + p^{0'}(x_1-1) \Delta y(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\beta \Delta y(x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (M(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), p^0(x)) - M(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))).
\end{aligned}$$

Отсюда, используя формулу Тейлора и учитывая введенные обозначения, можно записать тождество (19) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^0, v^0) &= \frac{\partial \varphi_1'(y^0(x_1))}{\partial y} \Delta y(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial \varphi_2'(x, z^0(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) + \\
& + o_1(\|\Delta y(x_1)\|) + o_2(\|\Delta z(t_1, x)\|) + 2\psi^{0'}(t_1-1, x_1) (\Delta z(t_1, x_1)) + \\
& + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) + 2\psi^{0'}(t_0-1, x_1) (\Delta y(x_1)) + \\
& + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t_0-1, x) \Delta y(x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^{0'}(t-1, x) \Delta z(t, x) + \\
& + \frac{\mu}{\Gamma(\mu)} \Delta y(x) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (t + \mu - t_0)^{(\mu-1)} \psi^0(t-1, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (t + \mu - \sigma(t_0))^{(\mu-1)} \psi^0(t-1, x) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (H(t, x, z^0(t, x), \bar{u}(t), \psi^0)(t, x) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0)(t, x)) + \\
 & \quad - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H'(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))}{\partial z} \Delta z(t, x) + \\
 & \quad + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x))}{\partial z} - \frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))}{\partial z} \right]' \Delta z(t, x) + \\
 & \quad + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_3(\|\Delta z(t, x)\|) + p^{0'}(x_1 - 1) \Delta y(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\rho(t_1)}^\beta \Delta y(x) - \\
 & \quad - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (M(x, y^0(x), \bar{v}(x), p^0(x)) - M(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))) - \\
 & \quad - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))}{\partial y} \Delta y(x) - \\
 & \quad - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial M(x, y^0(x), \bar{v}(x), p^0(x))}{\partial y} - \frac{\partial M(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))}{\partial y} \right]' \Delta y(x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta y(x)\|). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Здесь $\|\alpha\|$ — норма вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, определяемая формулой

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n \|\alpha_i\|,$$

а $o(\alpha)$ — величина более высокого порядка малости, чем α , т.е. $o(\alpha)/\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Можно доказать, что

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu}{\Gamma(\mu)} \Delta y(x) & \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (t + \mu - t_0)^{(\mu-1)} \psi^0(t-1, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (t + \mu - \sigma(t_0))^{(\mu-1)} \psi^0(t-1, x) \right] = \\
 & = \frac{\mu}{\Gamma(\mu)} \Delta y(x) \Gamma(\mu) \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^0(t_0, x) = \Delta y(x) \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^0(t_0 - 1, x).
 \end{aligned}$$

Теперь предположим, что $(p(x), \psi(t, x))$ является решением следующей системы линейных однородных разностных уравнений дробного порядка:

$$\Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi(t-1, x-1) = H_z[t, x], \quad (21)$$

$$\psi(t_1-1, x) = -\frac{\partial \varphi_2(z)}{2\partial z}, \quad (22)$$

$$\Delta_{\rho(t_1)}^\alpha \psi^0(t_0-1, x) + \Delta_{\rho(t_1)}^\beta p(x-1) + \psi^0(t_0-1, x) = M_y[x], \quad (23)$$

$$p(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y}, \quad \psi^0(t_1-1, x_1) = 0. \quad (24)$$

Тогда формула приращения (20) примет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta S(u^0, v^0) & = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (H(t, x, z^0(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))) - \\
 & \quad - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (M(x, y^0(x), \bar{v}(x), p^0(x)) - M(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))) + \eta_1(u^0, v^0, \Delta u, \Delta v). \quad (25)
 \end{aligned}$$

Здесь по определению

$$\begin{aligned}
\eta_1(u^0, v^0, \Delta u, \Delta v) = & \\
= o_1(\|\Delta y(x_1)\|) + o_2(\|\Delta z(t_1, x)\|) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_3(\|\Delta z(t, x)\|) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta y(x)\|) + \\
+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial(H(t, x, z^0(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x)))}{\partial z} - \frac{\partial(H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x)))}{\partial z} \right]' \Delta z(t, x) + \\
- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial(M(x, y^0(x), \bar{v}(x), p^0(x)))}{\partial y} - \frac{\partial(M(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x)))}{\partial y} \right] \Delta y(x). \quad (26)
\end{aligned}$$

Пусть $(u^0(t), v^0(x))$ — фиксированное допустимое управление. Предположим, что множества

$$f(t, x, z^0, U) = \{\tau : \tau := f(t, x, z, u), u \in U\}, \quad g(x, y^0, V) = \{\sigma : \sigma := g(x, y, v), v \in V\}$$

выпуклы. Тогда через $(u_\varepsilon(t, x), v_\varepsilon(x))$ можно определить специальное приращение управления $(u^0(t, x), v^0(x))$ в виде

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon(t, x) = u(t, x, \varepsilon) - u^0(t, x), \\ \Delta v_\gamma(x) = v(x, \gamma) - v^0(x). \end{cases} \quad (27)$$

Здесь $\varepsilon \in [0, 1]$, $\gamma \in [0, 1]$ — произвольные числа, а $u(t; \varepsilon)$, $v(x; \gamma)$ — произвольные допустимые управляющие функции, удовлетворяющие условиям

$$f(t, x, z^0(t, x), u(t; \varepsilon)) - f(t, x, z^0(t, x), u^0(t)) = \varepsilon [f(t, x, z^0(t, x), u(t)) - f(t, x, z^0(t, x), u^0(t))], \quad (28)$$

$$g(x, y^0(x), v(x; \gamma)) - g(x, y^0(x), v^0(x)) = \gamma [g(x, y^0(x), v(x)) - g(x, y^0(x), v^0(x))]. \quad (29)$$

Здесь $u(t, x) \in U$, $(t, x) \in T \times X$, $v(x) \in V$, $x \in X$ — произвольные допустимые управляющие функции, соответствующие $u(t; \varepsilon)$ и $v(x; \gamma)$.

Через $(\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\gamma(x))$ обозначим специальное приращение вектора состояния $(z^0(t, x), y^0(x))$, отвечающее приращению (27) управления $(u(t, x), v(x))$. В [1, 12] доказаны следующие оценки:

$$\|\Delta y(x)\| \leq L_1 \prod_{j=x_0}^{x-1} (1 + A_\alpha(x, j)) \|\Delta_{\bar{v}} g[j]\|, \quad (30)$$

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq L_2 \prod_{s=t_0}^{t-1} (1 + R_\alpha(t, x, s)) \|\Delta_{\bar{u}} f[s, x]\| + L_3 \prod_{j=x_0}^{x-1} (1 + A_\alpha(x, j)) \|\Delta_{\bar{u}} g[j]\|, \quad (31)$$

$L_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2, 3$, — некоторые постоянные. Из этих оценок следует, что

$$\|\Delta z_\varepsilon(t, x)\| \leq L_4 \varepsilon + L_5 \gamma, \quad \|\Delta y_\gamma(x)\| \leq L_6 \gamma, \quad (32)$$

где L_4, L_5, L_6 — некоторые положительные числа.

Принимая во внимание оценки (32), формулы (27), (28), (29), в формуле (26) приходим к разложению

$$\begin{aligned}
\Delta S_{\varepsilon\gamma}(u^0, v^0) = & S(u^0 + \Delta u_\varepsilon, v^0 + \Delta v_\gamma) - S(u^0, v^0) = \\
= & \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (H(t, x, z^0(t, x), u(t), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))) - \\
& - \gamma \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (M(x, y^0(x), v(x), p^0(x)) - M(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))) + o_5(\varepsilon + \gamma) + o_6(\gamma). \quad (33)
\end{aligned}$$

При помощи разложения (33), используя произвольность и независимость управляющих функций $u(t)$, $v(x)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Если множества

$$f(t, x, z^0, U) = \{\tau : \tau := f(t, x, z, u), u \in U\}, \quad g(x, y^0, V) = \{\sigma : \sigma := g(x, y, v), v \in V\}$$

выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u^0(t), v^0(x))$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{u(t)} H[t, x] \leq 0, \quad (34)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M[x] \leq 0 \quad (35)$$

выполнялись для любого $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(x) \in V$, $x \in X \setminus x_1$ соответственно.

Доказанная теорема является аналогом дискретного принципа максимума для рассматриваемой задачи.

Теперь предположим, что вектор-функции $f(t, x, z, u)$, $g(x, y, v)$ непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, u) и (y, v) , а множества U и V являются выпуклыми. Тогда специальное приращение допустимого управления $(u^0(t, x), v^0(x))$ можно определить по формуле

$$\begin{cases} \Delta u(t, x, \gamma_1) = \gamma_1[u(t) - u^0(t)], \\ \Delta v(x, \gamma_2) = \gamma_2[v(x) - v^0(x)]. \end{cases} \quad (36)$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$ — произвольные числа, а $u(t)$ и $v(x)$ — произвольные допустимые управляющие функции. Через $(\Delta z(t, x; \gamma_1, \gamma_2), \Delta y(x; \gamma_2))$ обозначим специальное приращение траектории $(z^0(t, x), y^0(x))$, отвечающее приращению (35) управления $(u(t), v(x))$. Из оценок (30), (31) следует, что

$$\|\Delta z(t, x, \gamma_1, \gamma_2)\| \leq L_6 \gamma_1 + L_7 \gamma_2, \quad \|\Delta y(x, \gamma_2)\| \leq L_8 \gamma_2.$$

С учетом этих оценок получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} \Delta S(u^0(t) + \Delta u(t, \gamma_1), v^0(x) + \Delta v(x, \gamma_2) - S(u^0(t), v^0(x)) = \\ = \gamma_1 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (H'_u(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))(u(t) - u^0(t))) - \\ - \gamma_2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (M'_v(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))(v(x) - v^0(x))) + o_7(\gamma_1 + \gamma_2) + o_8(\gamma_2). \end{aligned} \quad (37)$$

Теорема 2. Пусть множества U и V выпуклы, а функции $f(t, x, z, u)$, $g(x, y, v)$ непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, u) , (y, v) соответственно. Тогда для оптимальности допустимого управления $(u^0(t), v^0(x))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))(u(t) - u^0(t)) \leq 0, \quad (38)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_v(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))(v(x) - v^0(x)) \leq 0 \quad (39)$$

выполнялись для любого $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(x) \in V$, $x \in X \setminus x_1$ соответственно.

Совокупность неравенств (38), (39) есть аналог линеаризованного условия максимума в задаче (1)–(5) (см. [2, 3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алиева С. Т.* Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вестн. Томск. гос. ун-та. Управл. вычисл. техн. — 2021. — 54. — С. 4–11.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. — Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1973.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимизации. — Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1981.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
5. *Мансимов К. Б.* Дискретные системы. — Баку: Изд-во Бакинск. гос. ун-та, 2013.
6. *Москаленко А. И.* Об одном классе задач оптимального регулирования // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1969. — 9, № 1. — С. 68–95.
7. *Москаленко А. И.* Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ. мат. наук, 1971.
8. *Bastos N. R. O., Ferreira R. A. C., Torres D. F. M.* Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations // Discret. Contin. Dynam. Syst. — 2011. — 29, № 2. — P. 417–437.
9. *Christopher G., Peterson A. C.* Discrete Fractional Calculus. — Springer, 2015.
10. *Feckan M., Wang J., Pospisil M.* Fractional-Order Equations and Inclusions. — Berlin: De Gruyter, 2017.
11. *Jagan Mohan J., Deekshitulu G. V. S. R.* Fractional order difference equations // Int. J. Differ. Equations. — 2012. — 780619.
12. *Miller K., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. — New York: Wiley, 1993.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Алиева Саадат Тофик (Aliyeva Saadat Tofig)

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,

Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

(Baku State University, Baku, Azerbaijan;

Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

E-mail: saadata@mail.ru

Мансимов Камил Байрамали оглы (Mansimov Kamil Bairamali ogly)

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,

Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

(Baku State University, Baku, Azerbaijan;

Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)

E-mail: kamilbmansimov@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 11–20
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-11-20

УДК 517.977: 534.112

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЛАЗЕРНОГО ЛУЧА НА ДВУХСЛОЙНЫЙ БИОМАТЕРИАЛ

© 2024 г. В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША

Аннотация. Предложен конструктивный подход построения функции оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал. Под построенным тепловым воздействием распределение температурного состояния биоматериала переходит из заданного начального состояния на определенном временном промежутке в заданное конечное состояние, минимизируя значение критерия качества. В предложенном подходе используются метод разделения переменных и методы теории оптимального управления динамических систем.

Ключевые слова: двухслойный биологический материал, тепловое воздействие, лазерный луч, температурное состояние, оптимальное граничное управление, метод разделения переменных.

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF THE THERMAL EFFECT OF A LASER BEAM ON A TWO-LAYER BIOMATERIAL

© 2024 V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA

ABSTRACT. In this paper, we propose a constructive approach to constructing a function for optimal control of the thermal effect of a laser beam on a two-layer biomaterial. Under the thermal influence constructed, the distribution of the temperature state of a two-layer biomaterial transfers from a given initial state at a certain time interval into a given final state and minimizes the value of the quality criterion. The proposed approach is based on the method of variable separation and methods of the theory of optimal control of dynamic systems.

Keywords and phrases: two-layer biological material, thermal effect, laser beam, temperature state, optimal boundary control, method of variable separation.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение. Исследование задач в многослойных физических объектах, которые находятся под воздействием сосредоточенных или распределенных источников, требует рассмотрения соответствующих адекватных математических моделей. При этом адекватностью должны обладать как математические модели, так и методы исследования.

В статье [14] представлен обзор литературы о медико-биологическом применении лазеров. Сфера применения лазерного излучения в медицине выходит далеко за пределы классических понятий о лазере (см. [6, 13]); невозможно представить современную медицину без применения лазеров.

Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема №AAAA-A21-121012090034-3).

Одно из многочисленных направлений медико-биологического применения лазеров — использование их в качестве инструмента воздействия на биологические объекты. С появлением новых областей применения лазерного излучения для обработки биологических материалов возникает необходимость выработки методик воздействия и критериев параметров лазерных излучателей. Поэтому разрабатываются новые математические модели, призванные решать различные задачи лазерного воздействия и оценки результатов (см. [14]), в частности, задачу выбора режимов теплового воздействия лазерного луча на биологическую среду. Как отмечают авторы работы [14], способы воздействия лазерного луча на биологическую среду пока еще недостаточно исследованы. Поэтому необходимо проведение разносторонних исследований по поиску режимов лазерного излучения для развития возможностей лазерного воздействия и повышения эффективности воздействия на биологическую среду.

Многослойный биологический материал, который подвергается действию на него лазерного излучения, является системой с распределёнными параметрами (см. [5, 9–12, 15, 22]). Математический модель процесса действия лазерного луча на многослойный биологический материал описывается с помощью дифференциальных уравнений теплопроводности в частных производных с краевыми условиями начала и конца лазерного нагрева, граничными условиями взаимодействия внешнего слоя биологического материала и окружающей среды, а также условиями сопряжения между слоями. Математические модели указанных объектов характеризуются как разнородные составные системы с распределёнными параметрами, поэтому целесообразно использовать методы исследования задач управления составных систем (переменной структуры), которым посвящены, в частности, статьи [2–4, 16–21].

В настоящей работе в качестве многослойной системы рассмотрен объект, состоящий из двух неоднородных по своим теплофизическим характеристикам биологических слоев, подвергаемый действию на него лазерного излучения. Предполагается, что управление процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал осуществляется следующим образом: изменяя на верхней (левой) границе двухслойного биоматериала интенсивность температуры лазерного луча, влияем на тепловое состояние в двухслойном биоматериале. Цель статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал, под воздействием которого распределение температурного состояния из заданного начального состояния на определенном промежутке времени переходит в заданное конечное состояние. Работа примыкает к исследованиям, выполненным в [2, 4, 16].

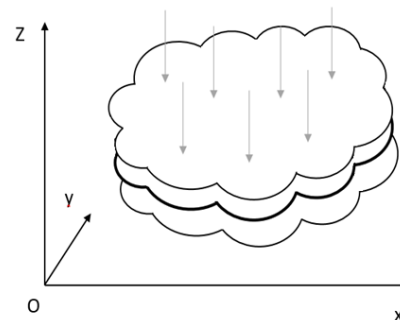


Рис. 1. Структурная схема воздействия лазерного луча на двухслойный биологический материал

2. Математическая модель двухслойного биоматериала и постановка задачи. Рассмотрим бесконечный по координатам x и y двухслойный биологический материал (см. рис. 1) с различными теплофизическими характеристиками (коэффициенты теплопроводности, плотность и теплоемкость) слоев.

В соответствии с многослойной структурой биоматериала (см. [10, 11, 15, 22]), в случае, когда временные и пространственные параметры функции распределения объемной плотности тепловых нагрузок в биологическом материале и коэффициенты теплопроводности постоянны, дифференциальное уравнение теплопроводности преобразуется в следующую систему дифференциальных уравнений теплопроводности:

$$\begin{aligned} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial t} &= K_1 \frac{\partial^2 T_1(z, t)}{\partial z^2}, & z \in [0, l_1], \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2(z, t)}{\partial t} &= K_2 \frac{\partial^2 T_2(z, t)}{\partial z^2}, & z \in [l_1, l_1 + l_2], \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_j — коэффициент плотности j -го слоя биологического материала, $j = 1, 2$; c_j — коэффициент теплоемкости j -го слоя биологического материала; $T_j(z, t)$ — температурное поле j -го слоя в биологическом материале; z — глубина проникновения лазерного луча в биологическом материале; t — длительность теплового воздействия; K_j — коэффициент теплопроводности j -го слоя биологического материала.

Предположим, что граничные условия теплового воздействия на двухслойный биологический материал следующие:

$$T_1(z, t)|_{z=0} = u(t), \quad T_2(z, t)|_{z=l_1+l_2} = P(t), \quad (2)$$

где $u(t)$ — температура действия лазерного луча на левой границе двухслойного биоматериала, которая изменяется по времени и является неизвестной; $P(t)$ — температура действия лазерного луча в конце (на правой границе) двухслойного биологического материала, которая считается известной. Введем условия сопряжения между слоями, которые выражают равенства непрерывности температурных полей по временной координате и условия идеального теплового контакта слоев, следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1(z, t)|_{z=l_1-0} &= T_2(z, t)|_{z=l_1+0}, \\ K_1 \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l_1-0} &= K_2 \frac{\partial T_2(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l_1+0}, \quad t \in [t_0, t_2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагается, что заданы начальное (при $t = t_0$)

$$T_1(z, t)|_{t=t_0} = T_H(z) \quad (4)$$

и конечное (при $t = t_2$) условия

$$T_2(z, t)|_{t=t_2} = T_K(z). \quad (5)$$

Предполагается, что управление процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал осуществляется следующим образом: изменяя на левой границе (в конце) двухслойного биоматериала интенсивность (температуру) лазерного луча, влияем тем самым на тепловое состояние в двухслойном биоматериале. Граничная функция $u(t)$ является управляющим воздействием (т.е. граничным управлением).

Предполагается, что допустимое управление $u(t)$ принадлежит пространству $L_2(t_0, t_2)$. Функция $T_j(z, t) \in L_2(\Omega)$, $j = 1, 2$, где $\Omega = \{(z, t) : z \in [0, l_1 + l_2], t \in [t_0, t_2]\}$ и $T_H(z)$, $T_K(z) \in L_2(0, l_1 + l_2)$. Предполагается также, что все функции удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$u(t_0) = T_H(0), \quad P(t_0) = T_H(l_1 + l_2), \quad u(t_2) = T_K(0), \quad P(t_2) = T_K(l_1 + l_2). \quad (6)$$

Задачу оптимального управления процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал можно сформулировать следующим образом.

Задача оптимального управления. Требуется найти такой закон $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал, под воздействием которого распределение температурного состояния (1) из начального состояния (4) за промежуток времени $[t_0, t_2]$ переходит в заданное конечное состояние (5) и минимизирует функционал

$$\int_{t_0}^{t_2} u^2(t) dt. \quad (7)$$

Таким образом, имеем задачу оптимального управления с неоднородными граничными условиями. Для построения решения целесообразно перейти к задаче с нулевыми граничными условиями.

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Введем обозначение $a_j^2 = K_j/(c_j \rho_j)$, $j = 1, 2$. Для построения решения поставленной задачи целесообразно перейти к новой переменной

$$\xi = \begin{cases} z, & z \in [0, l_1], \\ \frac{a_1}{a_2}z + l_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right), & z \in [l_1, l_1 + l_2] \end{cases} \quad (8)$$

(см. [2, 4]). Замена переменной (8) приводит к растяжению или сжатию отрезка $[l_1, l_1 + l_2]$ относительно точки $z = l_1$. При этом отрезок $[l_1, l_1 + l_2]$ переходит в отрезок $[l_1, L]$, где $L = l_1 + a_1 l_2 / a_2$. Для удобства все вышеприведенные функции после замены переменной (8) оставляем в исходных обозначениях.

Таким образом, (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(\xi, t)}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 T_1(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & \xi \in [0, l_1], \\ \frac{\partial T_2(\xi, t)}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 T_2(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & \xi \in [l_1, L]. \end{aligned} \quad (9)$$

Положим

$$T(\xi, t) = \begin{cases} T_1(\xi, t), & \xi \in [0, l_1], \\ T_2(\xi, t), & \xi \in [l_1, L]. \end{cases} \quad (10)$$

Следовательно, два одинаковых уравнения (9) с введенной по правилу (10) функцией $T(\xi, t)$, $\xi \in [0, L]$, $t \in [t_0, t_2]$, запишутся в виде

$$\frac{\partial T(\xi, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 T(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad \xi \in [0, L], \quad t \in [t_0, t_2], \quad (11)$$

с соответствующими граничными условиями

$$T(0, t) = u(t), \quad T(L, t) = P(t), \quad t_0 \leq t \leq t_2, \quad (12)$$

начальным условием

$$T(\xi, t_0) = T_H(\xi), \quad \xi \in [0, L], \quad (13)$$

конечным условием

$$T(\xi, t_2) = T_K(\xi), \quad \xi \in [0, L], \quad (14)$$

и условиями сопряжения в точке $\xi = l_1$ соединения участков:

$$T(\xi, t)|_{\xi=l_1-0} = T(\xi, t)|_{\xi=l_1+0}, \quad a_2 K_1 \frac{\partial T(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=l_1-0} = a_1 K_2 \frac{\partial T(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=l_1+0}, \quad t \in [t_0, t_2]. \quad (15)$$

Учитывая неоднородность граничных условий (12), решение уравнения (11) построим в виде суммы

$$T(\xi, t) = V(\xi, t) + W(\xi, t), \quad (16)$$

где $V(\xi, t)$ — функция с однородными граничными условиями

$$V(0, t) = V(L, t) = 0, \quad (17)$$

требуемая определения, а функция $W(\xi, t)$ есть решение (11) с условиями

$$W(0, t) = u(t), \quad W(L, t) = P(t), \quad (18)$$

которая представляется в виде

$$W(\xi, t) = u(t) + \frac{\xi}{L} [P(t) - u(t)]. \quad (19)$$

Из формул (11), (16), (19) для нахождения функции $V(\xi, t)$ получим:

$$\frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2} + F(\xi, t), \quad \xi \in [0, L], \quad t \in [t_0, t_2], \quad (20)$$

где

$$F(\xi, t) = \frac{\xi}{L} [\dot{u}(t) - \dot{P}(t)] - \dot{u}(t). \quad (21)$$

Функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет соответствующему условию сопряжения (15) в точке $\xi = l_1$ соединения участков. Отметим, что согласно (8) из условия (6) будем иметь

$$T_H(l_1 + l_2) = T_H(L), \quad T_K(l_1 + l_2) = T_K(L). \quad (22)$$

Используя подходы, приведенные в [2–4, 19–21], и учитывая условия согласования, из условий (13), (14) получим, что функция $V(\xi, t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$V(\xi, t_0) = T_H(\xi) - u(t_0) - \frac{\xi}{L} [P(t_0) - u(t_0)] \quad (23)$$

и конечным условиям

$$V(\xi, t_2) = T_K(\xi) - u(t_2) - \frac{\xi}{L} [P(t_2) - u(t_2)]. \quad (24)$$

С учетом условий (6) и (22) соотношения (23), (24) запишутся следующим образом:

$$V(\xi, t_0) = T_H(\xi) - T_H(0) - \frac{\xi}{L} [P(t_0) - T_H(0)], \quad (25)$$

$$V(\xi, t_2) = T_K(\xi) - T_K(0) - \frac{\xi}{L} [P(t_2) - T_K(0)]. \quad (26)$$

Таким образом, решение исходной задачи сведено к задаче оптимального управления процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал, описываемый неоднородным уравнением (20) с однородными граничными условиями (17). Полученная задача формулируется следующим образом: требуется найти такой закон оптимального управления $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, под воздействием которого распределение температурного состояния, описываемое уравнением (20) с граничными условиями (17), из заданного начального состояния (25) на указанном промежутке времени $[t_0, t_2]$ переходит в конечное состояние (26) и минимизирует функционал (7).

4. Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов. Учитывая граничные условия (17) и условия согласованности, ищем решение уравнения (20) в виде

$$V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k \xi}{L}, \quad V_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L V(\xi, t) \sin \frac{\pi k \xi}{L} d\xi. \quad (27)$$

Представим функции $F(\xi, t)$, $V(\xi, t_0)$, $V(\xi, t_2)$ в виде рядов Фурье по базису $\{\sin \pi k \xi / L, k = 1, 2, \dots\}$; подставив их значения вместе с $V(\xi, t)$ в уравнения (20), (21) и в условия (25), (26), получим, что коэффициенты Фурье $V_k(t)$ удовлетворяют счетному набору систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{V}_k(t) + \lambda_k V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k = \left(a_1 \frac{\pi k}{L}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

$$F_k(t) = \frac{2}{\pi k} [(-1)^k \dot{P}(t) - \dot{u}(t)], \quad (29)$$

$$V_k(t_0) = T_k^{(H)} - \frac{2}{\pi k} [T_H(0) - (-1)^k P(t_0)], \quad (30)$$

$$V_k(t_2) = T_k^{(K)} - \frac{2}{\pi k} [T_K(0) - (-1)^k P(t_2)]. \quad (31)$$

Здесь коэффициенты Фурье функций $F(\xi, t)$, $V(\xi, t_0)$, $V(\xi, t_2)$, $T_H(\xi)$ и $T_K(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $V_k(t_0)$, $V_k(t_2)$, $T_k^{(H)}$ и $T_k^{(K)}$. Общее решение уравнения (28) с начальным условием (30) имеет вид

$$V_k(t) = V_k(t_0) e^{-\lambda_k(t-t_0)} + \int_{t_0}^t F_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau \quad (32)$$

(см. [9]). Теперь, учитывая конечное условие (31), получим, что функции $F_k(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_2]$, для каждого $k = 1, 2, \dots$ должны удовлетворять следующему соотношению:

$$\int_{t_0}^{t_2} F_k(\tau) e^{-\lambda_k(t_2-\tau)} d\tau = V_k(t_2) - V_k(t_0) e^{-\lambda_k(t_2-t_0)}. \quad (33)$$

Используя подходы, приведенные в [19–21], получим, что функция управления $u(t)$ для каждого $k = 1, 2, \dots$ должна удовлетворять интегральному соотношению

$$\int_{t_0}^{t_2} u(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau = C_k, \quad (34)$$

где

$$C_k = \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \frac{\pi k}{2} [V_k(t_2) e^{\lambda_k t_2} - V_k(t_0) e^{\lambda_k t_0}] + T_K(0) e^{\lambda_k t_2} - T_H(0) e^{\lambda_k t_0} - (-1)^k \int_{t_0}^{t_2} \dot{P}(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau \right\}.$$

Отметим, что значения C_k известны для любого $k = 1, 2, \dots$. На практике обычно выбираются несколько первых n ($k = 1, 2, \dots, n$) соотношений (34) и с помощью методов теории оптимального управления конечномерными системами (см. [1, 7, 20, 21]) решается задача синтеза оптимального управления. Следовательно, для первых n соотношений из (34) будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_2} H_n(\tau) u_n(\tau) d\tau = \eta_n, \quad (35)$$

где

$$H_n(\tau) = (e^{\lambda_1 \tau}, e^{\lambda_2 \tau}, \dots, e^{\lambda_n \tau})^T, \quad \eta_n = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T.$$

Здесь и далее символ « n » в нижнем индексе будет означать «для первых n мод».

Из соотношения (35) следует справедливость следующего утверждения о вполне управляемости (см. [1, 7]).

Теорема 1. *Первые n мод динамического процесса, описываемого уравнением (28) с условиями (29)–(31), вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n можно найти управление $u_n(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, удовлетворяющее условию (35).*

Таким образом, требуется найти такой закон оптимального управления $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, который для каждого $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяет интегральным соотношениям (34) (или (35)) и доставляет минимум функционалу (7).

Задачу оптимального управления при функционале (7) с интегральными условиями (35) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления.

Так как функционал (7) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, а интегральные соотношения (34) (или (35)), порожденные функцией $u(t)$, линейны, то задачу определения оптимального управления для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ можно рассматривать как проблему моментов (см. [7, 8, 14]). Следовательно, решение можно построить с помощью алгоритма решения проблемы моментов.

5. Решение задачи. Поскольку на практике обычно решается задача синтеза управлений для нескольких первых n гармоник колебаний, используем методы теории оптимального управления конечномерными системами. Будем строить решение задачи (7), (34) при $k = 1, 2, \dots, n$ с помощью алгоритма решения конечномерной проблемы моментов. Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \dots, n$) проблемы моментов (7), (34), следуя [7], нужно найти величины γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k C_k = 1, \quad (36)$$

Из (37) для оптимальной функции $h_n^0(t)$ будем иметь

$$(\rho_n^0)^2 = \int_{t_0}^{t_2} (h_n^0(t))^2 dt.$$

Согласно [4, 5] искомое оптимальное управление $u_n^0(t)$ определяется выражением

$$u_n^0(t) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_n^0(t). \quad (43)$$

Имея выражение для функции $u_n^0(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, из формул (29) и (32) получим явный вид для функции $V_k^0(t)$. Из (27), получим явное выражение для функции $V_n^0(\xi, t)$, $t \in [t_0, t_2]$. Далее, с помощью (16) и (19) оптимальная функция температурного состояния $T_n^0(\xi, t)$, $0 \leq \xi \leq L$, для первых n мод запишется в виде

$$T_n^0(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k \xi}{L} + u_n^0(t) + \frac{\xi}{L} [P(t) - u_n^0(t)], \quad \xi \in [0, L], \quad t \in [t_0, t_2]. \quad (44)$$

Учитывая обозначение (10) для функций $T(\xi, t)$, $\xi \in [0, L]$, $t \in [t_0, t_2]$, и обозначение (8), представим функции $T_{1n}(z, t)$, $z \in [0, l_1]$ и $T_{2n}(z, t)$, $z \in [l_1, l_1 + l_2]$, представляются в виде

$$T_{1n}^0(z, t) = \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k z}{L} + \left(1 - \frac{z}{L}\right) u_n^0(t) + \frac{z}{L} P(t), \quad z \in [0, l_1], \quad (45)$$

$$T_{2n}^0(z, t) = \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k z}{L} \left[\frac{a_1}{a_2} z + l_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \right] + \left\{ 1 - \frac{1}{L} \left[\frac{a_1}{a_2} z + l_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \right] \right\} u_n^0(t) + \frac{1}{L} \left[\frac{a_1}{a_2} z + l_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \right] P(t), \quad z \in [l_1, l_1 + l_2]. \quad (46)$$

Если предполагать, что в граничных условиях (2) известная функция температурного поля $P(t)$ постоянна, то формулы (45) и (46) принимают более простой вид.

6. Построение решения в случае $n = 2$. Проиллюстрируем вышеизложенный подход в случае $n = 2$, при $P(t) = \text{const} = P$. В этом случае из (34) следует

$$\int_{t_0}^{t_2} u_2(\tau) e^{\lambda_1 \tau} d\tau = C_1, \quad \int_{t_0}^{t_2} u_2(\tau) e^{\lambda_2 \tau} d\tau = C_2,$$

где

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[V_1(t_2) e^{\lambda_1 t_2} - V_1(t_0) e^{\lambda_1 t_0} \right] + T_K(0) e^{\lambda_1 t_2} - T_H(0) e^{\lambda_1 t_0} \right\},$$

$$C_2 = \frac{1}{\lambda_2} \left\{ \pi \left[V_2(t_2) e^{\lambda_2 t_2} - V_2(t_0) e^{\lambda_2 t_0} \right] + T_K(0) e^{\lambda_2 t_2} - T_H(0) e^{\lambda_2 t_0} \right\}.$$

Из (39) будем иметь

$$a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = -\frac{\beta}{2}C_1, \quad a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 = -\frac{\beta}{2}C_2.$$

Решение γ_1^0 , γ_2^0 этой системы запишется по формуле (41), в которой

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta_2^{(1)} = C_1a_{22} - C_2a_{12}, \quad \Delta_2^{(2)} = C_2a_{11} - C_1a_{21}.$$

Подставляя значения для γ_1^0 , γ_2^0 в (42), согласно (43), искомое оптимальное управление $u_2^0(t)$ определяется выражением

$$u_2^0(t) = \frac{\gamma_1^0 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2^0 e^{\lambda_2 t}}{(\rho_2^0)^2}, \quad (\rho_2^0)^2 = \int_{t_0}^{t_2} \left(\gamma_1^0 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2^0 e^{\lambda_2 t} \right)^2 dt.$$

Далее, с помощью (45) и (46) оптимальные функции температурного состояния для первых двух мод можно записать в следующем виде:

$$T_{1n}^0(z, t) = V_1^0(t) \sin \frac{\pi z}{L} + V_2^0(t) \sin \frac{2\pi z}{L} + \left(1 - \frac{z}{L}\right) u_2^0(t) + \frac{z}{L} P, \quad z \in [0, l_1],$$

$$T_{2n}^0(z, t) = \sum_{k=1}^2 V_k^0(t) \sin \frac{\pi k z}{L} \left[\frac{a_1}{a_2} z + l_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \right] + \left\{ 1 - \frac{1}{L} \left[\frac{a_1}{a_2} z + l_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \right] \right\} u_2^0(t) +$$

$$+ \frac{1}{L} \left[\frac{a_1}{a_2} z + l_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \right] P, \quad z \in [l_1, l_1 + l_2],$$

где $V_k^0(t)$, $k = 1, 2$, определяются согласно (32).

Таким образом, используя предложенный подход, при $n = 2$ построены явные выражения функции оптимального управления тепловым процессом, решающие поставленную задачу, и явное выражение соответствующей функций оптимального распределения температуры в двухслойном биоматериале.

7. Заключение. Предложен конструктивный подход построения функции оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал. При построенном оптимальном законе теплового воздействия распределение температурного состояния двухслойного биоматериала из заданного начального состояния на определенном промежутке времени переходит в заданное конечное состояние. В предложенном подходе используются метод разделения переменных и методы теории оптимального управления динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсегян В. Р., Барсегян Т. В. Об одном подходе к решению задач управления динамическими системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Автомат. телемех. — 2015. — № 4. — С. 3–15.
2. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 2. — С. 41–54.
3. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2023. — 63, № 1. — С. 74–84.
4. Барсегян В. Р. Задача граничного управления смещением на двух концах процессом колебания стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2023. — № 2. — С. 125–135.
5. Белозеров Л. Г., Киреев В. А. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. — М.: Физматлит, 2003.
6. Елагин В. В., Шахова М. А., Карабут М. М., Кузнецова Д. С., Бредихин В. И., Проданец Н. Н., Снопина Л. Б., Баскина О. С., Шахов А. В., Каменский В. А. Оценка режущих свойств лазерного скальпеля, оснащенного сильно поглощающим покрытием оптического волокна // Совр. технол. в медицине. — 2015. — 7, № 3. — С. 55–60.
7. Зубов В. И. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
8. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
9. Малая Ю. А., Губин А. И. Математическое моделирование тепловых процессов при лазерной обработке материалов на основе нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности // Техн. теплофиз. пром. теплоэнерг. — 2011. — № 3. — С. 72–85.
10. Мегель Ю. Е., Левкин Д. А. Математическая модель теплового нагрева многослойного микробиологического объекта // Вост.-Евр. ж. передовых технол. — 2012. — 57, № 3/4. — С. 4–7.
11. Пятков С. Г. Некоторые обратные задачи для параболических уравнений // Фундам. прикл. мат. — 2006. — 12, № 4. — С. 187–202.
12. Свет Е. В. Нестационарная задача теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных пластин сложной формы // Вісн. НТУ «ХП». — 2013. — № 63 (1036). — С. 4–7.
13. Скобелкин О. К. Лазеры в хирургии. — М.: Медицина, 1989.

14. Шангина О. Р., Гайнутдинова Р. Д. ДВзаимодействие лазерного излучения с биологическими тканями// Прак. медицина. — 2019. — 17, № 1. — С. 24–27.
15. Шупиков А. Н., Бузько Я. П., Сметанкина Н. В., Угрюмов С. В. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. — Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004.
16. Barseghyan V. R. The problem of control of rod heating process with nonseparated conditions at intermediate moments of time// Arch. Control Sci. — 2021. — 31, № 3. — P. 481–493.
17. Barseghyan V. R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems// Yugoslav. J. Oper. Res. — 2012. — 22, № 1. — P. 31–39.
18. Barseghyan V. R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure// 2016 Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conf.) (Moscow, Russia, June 1-3, 2016), 2016. — P. 1–4.
19. Barseghyan V. R., Solodusha S. V. On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate time// Mathematics. — 2022. — 23, № 10. — 4444.
20. Barseghyan V. R., Solodusha S. V. On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1847. — 012016.
21. Barseghyan V. R., Solodusha S. V. Control of string vibrations by displacement of one end with the other end fixed, given the deflection Form at an intermediate moment of time// Axioms. — 2022. — 11, № 4. — 157.
22. Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates// Int. J. Solids Struct. — 2001. — 38, № 4. — P. 187–202.
23. Yamaoka N., Sugie J. Multilayer structures of second-order linear differential equations of Euler type and their application to nonlinear oscillations// Ukr. Math. J. — 2006. — 58, № 12. — P. 72–85.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема №АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Ваня Рафаелович (Barseghyan Vanya Rafayelovich)

Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;

Ереванский государственный университет

(Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences

of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia;

Yerevan State University, Yerevan, Armenia)

E-mail: barseghyan@sci.am

Солодуша Светлана Витальевна (Solodusha Svetlana Vitalievna)

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск;

Иркутский государственный университет

(L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch

of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;

Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: solodusha@isem.irk.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 21–26
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-21-26

УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

© 2024 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. При решении многих задач теории вероятностей, информатики и комбинаторики появляются нелинейные разностные уравнения. Рассматривается нелинейное разностное уравнение типа свертки с параметрами. Асимптотика решений таких уравнений используется при перечислении помеченных связных графов. Для получения асимптотики применяется теорема Бендера для коэффициентов формальных степенных рядов.

Ключевые слова: разностное уравнение, нелинейность, свертка, асимптотика, помеченный граф, перечисление.

ON ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATION OF CONVOLUTION TYPE

© 2024 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. Nonlinear difference equations appear in many problems of probability theory, computer science, and combinatorics. In this paper, a nonlinear difference equation of the convolution type with parameters is considered. Asymptotics of solutions of such equations are used for the enumeration of labeled connected graphs. To obtain the asymptotics, we apply Bender's theorem for the coefficients of formal power series.

Keywords and phrases: difference equation, nonlinearity, convolution, asymptotics, labeled graph, enumeration.

AMS Subject Classification: 39A22

Нелинейные разностные уравнения типа свертки возникают в теории вероятности при изучении броуновского движения (см. [12, 14]), информатике при анализе алгоритмов поиска (см. [10]) и хеширования (см. [11]) и комбинаторике при перечислении помеченных графов (см. [19]). Асимптотика решений таких уравнений исследовалась в [9, 10, 16, 17].

Рассмотрим нелинейное разностное уравнение типа свертки

$$a_{n+1} = (n + \alpha)a_n + \beta \sum_{s=0}^n a_s a_{n-s}, \quad n \geq 0; \quad (1)$$

$a_0 = a$, где α, β — параметры, $\beta \neq 0$.

Асимптотика решений уравнений такого типа используется при перечислении помеченных связных графов (см. [1, 4, 7, 18, 19]) и в теории случайных графов (см. [13]).

Введем производящую функцию (формальный степенной ряд) для последовательности чисел $\{a_n\}$, определяемой уравнением (1):

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Теорема 1. Пусть $\Phi(a, b; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера. Тогда верна формула

$$A(x) = \frac{x}{\beta} \left(\ln \Phi \left(a\beta, 1 - \alpha; -\frac{1}{x} \right) \right)' . \quad (2)$$

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1) на x^n и просуммируем по n от 0 до ∞ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n a_s a_{n-s} x^n .$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = x A'(x), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n a_s a_{n-s} x^n &= A^2(x), \quad \frac{1}{x} (A(x) - a_0) = x A'(x) + \alpha A(x) + \beta A^2(x). \end{aligned}$$

Получили для $A(x)$ общее уравнение Риккати

$$A'(x) = -\frac{\beta}{x} A^2(x) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \alpha \right) A(x) - \frac{a}{x^2}, \quad A(0) = a.$$

После замены переменной

$$t = -\frac{1}{x}, \quad y(t) = A \left(-\frac{1}{t} \right), \quad A'(x) = y' t_x' = t^2 y'$$

оно принимает вид

$$y' = \frac{\beta}{t} y^2 + \left(\frac{\alpha}{t} + 1 \right) y - a, \quad y(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} a.$$

Известно (см. [5, с. 42]), что общее уравнение Риккати

$$y' = f(t)y^2 + g(t)y + h(t)$$

заменой

$$u(t) = \exp \left(- \int f y dt \right)$$

приводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$u'' - \left(\frac{f'}{f} + g \right) u' + f h u = 0.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\beta}{t}, \quad g(t) = \frac{\alpha}{t} + 1, \quad h(t) = -a, \quad u(t) = \exp \left(- \int \frac{\beta}{t} y dt \right), \quad y = -\frac{t}{\beta} (\ln u)', \\ u'' - \left(-\frac{1}{t} + \frac{\alpha}{t} + 1 \right) u' - \frac{a\beta}{t} u &= 0, \quad t u'' + (1 - \alpha - t) u' - a u = 0. \end{aligned}$$

Так как одно из решений уравнения

$$t u'' + (b - t) u' - a u = 0$$

имеет вид $u(t) = \Phi(a, b, t)$, где $\Phi(a, b, t)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (см. [5, с. 288]), то имеем $u(t) = \Phi(a\beta, 1 - \alpha; t)$.

Известны формулы

$$\Phi'(a, b, t) = \frac{a}{b} \Phi(a + 1, b + 1, t), \quad \Phi(a, b, t) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b - a)} (-t)^{-a}$$

при фиксированных значениях a, b и $t \rightarrow -\infty$ (см. [2, с. 242, 266]). Поэтому получим

$$y(t) = -\frac{t}{\beta} \left(\ln \Phi(a\beta, 1 - \alpha; t) \right)' = -\frac{t}{\beta} \frac{\Phi'(a\beta, 1 - \alpha; t)}{\Phi(a\beta, 1 - \alpha; t)} = -\frac{at}{1 - \alpha} \frac{\Phi(a\beta + 1, 2 - \alpha; t)}{\Phi(a\beta, 1 - \alpha; t)}.$$

С учетом тождества для гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, найдем

$$y(t) \sim -\frac{at}{1-\alpha} \frac{\Gamma(2-\alpha)(-t)^{-a\beta-1}\Gamma(1-\alpha-a\beta)}{\Gamma(1-\alpha-a\beta)\Gamma(1-\alpha)(-t)^{-a\beta}} = \frac{a\Gamma(2-\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = a$$

при $t \rightarrow -\infty$, т.е. начальное условие выполнено. Возвращаясь к переменной x , имеем

$$y(t) = -\frac{t}{\beta}(\ln \Phi(a\beta, 1-\alpha; t))', \quad t = -\frac{1}{x}, \quad x = -\frac{1}{t},$$

$$A(x) = y\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\beta} \left(\ln \Phi\left(a\beta, 1-\alpha; -\frac{1}{x}\right) \right)'_x x'_t = \frac{x}{\beta} \left(\ln \Phi\left(a\beta, 1-\alpha; -\frac{1}{x}\right) \right)'. \quad \square$$

Лемма 1. Пусть

$$T_n = \frac{1}{\Gamma(n+\delta+1)} \sum_{k=0}^n \Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta+1).$$

Тогда для любых $\delta \geq 0$ и любых целых $n \geq 0$ верно неравенство

$$T_n \leq 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1). \quad (3)$$

Доказательство. Введем обозначение

$$S_n = T_n\Gamma(n+\delta+1) = \sum_{k=0}^n \Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta+1).$$

С помощью тождества $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ получим

$$\begin{aligned} (n+2\delta+1)S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta)(k+\delta+1+n-k+\delta) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Gamma(k+\delta+2)\Gamma(n-k+\delta) + \sum_{k=0}^{n-1} \Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta+1) = \\ &= \sum_{k=1}^n \Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta+1) + S_n - \Gamma(n+\delta+1)\Gamma(\delta+1) = 2S_n - 2\Gamma(\delta+1)\Gamma(n+\delta+1), \end{aligned}$$

откуда

$$S_n = \frac{1}{2}(n+2\delta+1)S_{n-1} + \Gamma(\delta+1)\Gamma(n+\delta+1).$$

С помощью тождества $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ найдем

$$T_n = \frac{(n+2\delta+1)\Gamma(n+\delta)}{2\Gamma(n+\delta+1)}T_{n-1} + \Gamma(\delta+1), \quad T_n = \frac{n+2\delta+1}{2(n+\delta)}T_{n-1} + \Gamma(\delta+1).$$

Применим индукцию по n .

Так как $1 < 2(\delta+2)$, $1 < \delta+2$ при $\delta \geq 0$ и $\Gamma(x) > 0$ при $x > 0$ (см. [15, с. 138]), имеем

$$T_0 = \Gamma(\delta+1) < 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1), \quad T_1 = 2\Gamma(\delta+1) < 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1),$$

и неравенство (3) верно при $n=0$ и $n=1$.

Предположим, что неравенство (3) верно для $n=m-1 \geq 1$, и докажем его для $n=m \geq 2$:

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{m+2\delta+1}{2(m+\delta)}T_{m-1} + \Gamma(\delta+1) \leq \frac{m+\delta+\delta+1}{2(m+\delta)}2(\delta+2)\Gamma(\delta+1) + \Gamma(\delta+1) = \\ &= \left(\delta+3 + \frac{\delta+1}{m+\delta}(\delta+2) \right) \Gamma(\delta+1) \leq \left(\delta+3 + \frac{\delta+1}{2+\delta}(\delta+2) \right) \Gamma(\delta+1) = 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность чисел, определяемая уравнением (1). Тогда при $2a\beta + \alpha \geq 1$ и $n \rightarrow \infty$ верна асимптотическая формула

$$a_n \sim \frac{n^{2a\beta + \alpha - 1} n!}{\beta \Gamma(a\beta) \Gamma(a\beta + \alpha)}. \quad (4)$$

Доказательство. Отметим, что гамма-функция $\Gamma(z)$ определена при $z \neq 0, -1, -2, \dots$. Поэтому в формуле (4) начальное значение a и параметры α, β должны быть такими, чтобы $a\beta \neq 0, -1, -2, \dots$ и $a\beta + \alpha \neq 0, -1, -2, \dots$.

Известно асимптотическое разложение вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(a, b; x)$ при фиксированных значениях a, b и $|x| \rightarrow \infty$ (см. [6, с. 59]):

$$\Phi(a, b; x) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-x)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (a-b+1)_n}{n!} (-x)^{-n},$$

где $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ — символ Похгаммера. Поэтому в силу формулы (2) имеем

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x}{\beta} \left(\ln \Phi \left(a\beta, 1-\alpha; -\frac{1}{x} \right) \right)' = \frac{x}{\beta} \left(\ln \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-a\beta)} x^{a\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\beta)_n (a\beta+\alpha)_n}{n!} x^n \right)' = \\ &= \frac{x}{\beta} \left(\ln \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-a\beta)} x^{a\beta} \right)' + \frac{x}{\beta} \left(\ln \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\beta)_n (a\beta+\alpha)_n}{n!} x^n \right)' = \\ &= a + \frac{x}{\beta} \left(\ln \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n x^n \right) \right)' = a + \frac{x}{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n \right)', \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$G_n = \frac{(a\beta)_n (a\beta+\alpha)_n}{n!} = \frac{\Gamma(n+a\beta) \Gamma(n+a\beta+\alpha)}{n! \Gamma(a\beta) \Gamma(a\beta+\alpha)}. \quad (5)$$

Пусть две производящие функции

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

связаны функциональным уравнением $F(x, G(x)) = g(x)$. Из теоремы Бендера (см. [8]) следует, что при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$g_n \sim F_y(0, 0) G_n$$

при условиях, когда $F(x, y)$ аналитична в точке $(0, 0)$, и при $n \rightarrow \infty$ верны соотношения

$$G_{n-1} = o(G_n), \quad \sum_{k=1}^{n-1} |G_k G_{n-k}| = O(G_{n-1}). \quad (6)$$

В нашем случае функция $F(x, y) = \ln(1+y)$ аналитична в точке $(0, 0)$. Из (5) с помощью тождества $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ найдем при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{G_{n-1}}{G_n} = \frac{n\Gamma(n-1+a\beta)\Gamma(n-1+a\beta+\alpha)}{\Gamma(n+a\beta)\Gamma(n+a\beta+\alpha)} = \frac{n}{(n-1+a\beta)(n-1+a\beta+\alpha)} \sim \frac{1}{n} = o(1).$$

Из асимптотики для гамма-функции (см. [2, с. 62]) имеем $\Gamma(z+\varepsilon) \sim z^\varepsilon \Gamma(z)$ при фиксированном ε и $z \rightarrow \infty$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$ получим

$$G_n \sim \frac{n^{a\beta} \Gamma(n) n^{a\beta+\alpha} \Gamma(n)}{n \Gamma(n) \Gamma(a\beta) \Gamma(a\beta+\alpha)} = \frac{n^{2a\beta+\alpha-1} \Gamma(n)}{\Gamma(a\beta) \Gamma(a\beta+\alpha)} \sim \frac{\Gamma(n+2a\beta+\alpha-1)}{\Gamma(a\beta) \Gamma(a\beta+\alpha)} = C \Gamma(n+\delta),$$

где использовано обозначение $\delta = 2a\beta + \alpha - 1 \geq 0$, $C = 1/(\Gamma(a\beta) \Gamma(a\beta+\alpha)) > 0$. Следовательно, существуют такие константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что

$$0 < c_1 \Gamma(n+\delta) \leq G_n \leq c_2 \Gamma(n+\delta).$$

Теперь имеем оценки

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|G_k G_{n-k}|}{G_{n-1}} \leq \frac{c_2^2}{c_1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+\delta)\Gamma(n-k+\delta)}{\Gamma(n+\delta-1)} = \\ &= \frac{c_2^2}{c_1} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(k+1+\delta)\Gamma(n-k-1+\delta)}{\Gamma(n+\delta-1)} = \frac{c_2^2}{c_1} T_{n-2}. \end{aligned}$$

В силу леммы для любых $\delta \geq 0$ и любых целых $n \geq 0$ получим

$$Q_n \leq 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1)\frac{c_2^2}{c_1}, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^{n-1} |G_k G_{n-k}| = O(G_{n-1}).$$

Поэтому условия (6) теоремы Бендера выполнены и при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$g_n \sim G_n, \quad a_n = \frac{ng_n}{\beta} \sim \frac{nG_n}{\beta} \sim \frac{n^{2a\beta+\alpha}\Gamma(n)}{\beta\Gamma(a\beta)\Gamma(a\beta+\alpha)},$$

что равносильно формуле (4). $\square$

Следствие 1. Пусть последовательность чисел $\{e_n\}$ определяется уравнением

$$e_{n+1} = \left(n + \frac{2}{3}\right) e_n + \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}, \quad n \geq 0, \quad e_0 = \frac{1}{6}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика

$$e_n \sim \frac{n!}{2\pi}. \quad (7)$$

Доказательство. Из теоремы 2 при $\alpha = 2/3$, $\beta = 1$, $a = 1/6$ при $n \rightarrow \infty$ следует асимптотика

$$e_n \sim \frac{n!}{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})}.$$

Из функционального уравнения для гамма-функции

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$

(см. [2, с. 18]) при $z = 1/3$ имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{1/2} = 2\pi,$$

откуда следует формула (7). $\square$

Отметим, что $e_n = d_n n!$, где d_n — константы Райта (коэффициенты Степанова—Райта; см. [3, 14]), используемые во многих работах по перечислению помеченных графов (см. [4, 17, 19]) и в теории случайных графов (см. [13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багаев Г. Н., Дмитриев Е. Ф. Перечисление связных отмеченных двудольных графов // Докл. АН БССР. — 1984. — 28, № 12. — С. 1061–1063.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965.
3. Воблый В. А. О коэффициентах Райта и Степанова—Райта // Мат. заметки. — 1987. — 42, № 6. — С. 854–862.
4. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных гомеоморфно несводимых графов // Мат. заметки. — 1991. — 49, № 3. — С. 12–22.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
6. Слейтер Л. Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. — М.: ВЦ АН СССР, 1966.
7. Степанов В. Е. / Несколько теорем относительно случайных графов в кн.: Вероятностные методы в дискретной математике. — Петрозаводск, 1983. — С. 90–92.

8. *Bender E. A.* An asymptotic expansion for the coefficients of some formal power series// J. London Math. Soc. (2). — 1975. — 49. — С. 451–458.
9. *Bender E. A.* Asymptotic of some convolutional recurrences// Electron. J. Combin. — 2010. — 17. — R1.
10. *Chern H. H. et al.* Psi-series method for equality of random trees and quadratic convolution recurrences// Random Struct. Algorithms. — 2014. — 44, № 1. — С. 67–108.
11. *Flajolet P., Poblete P., Viola A.* On the analysis of linear probing hashing// Algorithmica. — 1998. — 22. — С. 490–515.
12. *Flajolet P., Louchard G.* Analytic variations on the Airy distribution// Algorithmica. — 2001. — 31. — С. 337–358.
13. *Janson S., Knuth D. E., Luczak T., Pittel B.* The birth of the giant component// Random Struct. Algorithms. — 1993. — 4, № 2. — С. 233–358.
14. *Janson S.* Brownian excursion area, Wright’s constants in graph enumeration, and other Brownian areas// Probab. Surv. — 2007. — 4. — С. 80–145.
15. *Olver F. W., Lozier D., Boisvert R. F., Clark C. W.* NIST Handbook of Mathematical Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 2010.
16. *Stein P. R., Everett C. J.* On quadratic recurrence rule of Faltung type// J. Comb. Inf. Syst. Sci. — 1978. — 3. — С. 1–10.
17. *Wright E. M.* A quadratic recurrence of Faltung type// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1980. — 88. — С. 193–197.
18. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs, III// J. Graph Theory. — 1980. — 4. — С. 393–407.
19. *Wright E. M.* Enumeration of smooth labelled graphs// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 1981. — A91. — С. 205–212.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич (Voblyi Vitalii Antonievich)
 Всероссийский институт научной и технической информации
 Российской академии наук, Москва
 (Russian Institute for Scientific and Technical Information
 of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
 E-mail: vitvobl@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 27–34
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-27-34

УДК 517.956.2

ВЛИЯНИЕ МЛАДШИХ ПРОИЗВОДНЫХ НА РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2024 г. Е. А. ГОЛОВКО, Н. С. КАЦАПОВА

Аннотация. При помощи преобразования Фурье изучается задача Дирихле для многомерной эллиптической системы, содержащей младшие производные. Показано, что младшие члены существенно влияют на разрешимость первой краевой задачи для эллиптических систем уравнений, в отличие от одного эллиптического уравнения. Задача сведена к исследованию одного уравнения второго порядка; в зависимости от того, к какому типу это уравнение относится, меняется характер разрешимости исходной задачи.

Ключевые слова: эллиптические системы, первая краевая задача, задача Дирихле, младшие производные, преобразование Фурье.

THE INFLUENCE OF LOWER DERIVATIVES ON THE SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC SYSTEMS

© 2024 E. A. GOLOVKO, N. S. KATSAPOVA

ABSTRACT. By means of the Fourier transform, we examine the Dirichlet problem for a multidimensional elliptic system containing lower derivatives. We prove that the lower terms significantly influence the solvability of the first boundary value problem for elliptic systems of equations in contrast to the case of a single elliptic equation. The problem is reduced to a single second-order equation; the nature of the solvability of the original problem depends on the type of this equation.

Keywords and phrases: elliptic systems, first boundary value problem, Dirichlet problem, lower derivatives, Fourier transform.

AMS Subject Classification: 35J57

Одной из основных граничных задач для уравнения Лапласа является задача Дирихле. Например, к ней приводится задача о поле зарядов, распределенных на поверхности проводника. Для одного эллиптического уравнения с частными производными второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами эта задача всегда фредгольмова (см. [1]). Характер же разрешимости классических граничных задач для эллиптических по Петровскому систем уравнений с частными производными второго порядка существенно отличается от случая одного уравнения. Примером эллиптической по Петровскому системы уравнений, для которой нарушается фредгольмовость задачи Дирихле, является система Бицадзе

$$-\Delta u + 2\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = 0, \quad -\Delta v + 2\frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y) = 0.$$

Этот пример сильно стимулировал исследования по теории граничных задач для эллиптических по Петровскому систем. Поскольку не для всякой эллиптической по Петровскому системы уравнений с частными производными второго порядка задача Дирихле фредгольмова, то класс систем, для которых классические граничные задачи корректны, должен характеризоваться дополнительными ограничениями. Такие ограничения нашел М. И. Вишик. Он ввел понятие сильной эллиптичности. В смысле разрешимости классических граничных задач сильно эллиптические системы ведут себя так же, как и одно эллиптическое уравнение. Однако среди систем, не удовлетворяющих условию сильной эллиптичности, встречаются системы, для которых задача Дирихле и другие классические граничные задачи корректны. Поэтому встал вопрос об изучении не сильно эллиптических систем и о гомотопической классификации. В настоящее время достаточно полно исследованы эллиптические системы с двумя независимыми переменными. Для них также решена задача гомотопической классификации. Чего нельзя сказать о многомерных эллиптических системах. В случае одного эллиптического уравнения второго порядка только от главных частей зависит фредгольмовость задачи Дирихле (см. [1]). Для систем все гораздо сложнее. В общем случае для эллиптических систем встречаются новые явления в характере разрешимости первой краевой задачи, не имеющие аналогов в случае одного уравнения второго порядка. Среди таких явлений следует отметить эффект влияния младших производных на разрешимость граничных задач. Эти вопросы рассматривались в работах А. И. Янушаускаса и его учеников (см. [2–4]).

В настоящей работе изучается эффект влияния младших производных для одного класса эллиптических систем. В трехмерном пространстве рассмотрим систему

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) + ku_x + nu_y &= 0, \\ -\Delta v + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) + kv_x + nv_y &= 0, \\ -\Delta w + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) + kw_x + nw_y &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ — неизвестные функции, λ_1 , λ_2 , λ_3 , k и n — некоторые параметры. Введем обозначение $u_x + v_y + w_z = H$. Тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial x} + ku_x + nu_y &= 0, \\ -\Delta v + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial y} + kv_x + nv_y &= 0, \\ -\Delta w + \lambda_3 \frac{\partial H}{\partial z} + kw_x + nw_y &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференцируя уравнения системы (2) по x , y и z , соответственно, и складывая результаты, с учетом введенного обозначения получим

$$(\lambda_1 - 1)H_{xx} + (\lambda_2 - 1)H_{yy} + (\lambda_3 - 1)H_{zz} + kH_x + nH_y = 0. \quad (3)$$

Далее будем использовать преобразование Фурье по переменным x и y . Пусть $\tilde{u}(\xi, \eta, z)$, $\tilde{v}(\xi, \eta, z)$, $\tilde{w}(\xi, \eta, z)$, $\tilde{H}(\xi, \eta, z)$ — преобразования Фурье функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ соответственно. В терминах преобразования Фурье уравнение (3) примет вид

$$\tilde{H}_{zz} - \mu^2 \tilde{H} = 0, \quad (4)$$

где

$$\mu^2 = \frac{\xi^2(\lambda_1 - 1) + \eta^2(\lambda_2 - 1) - i\xi k - i\eta n}{\lambda_3 - 1}. \quad (5)$$

Все ограниченные на бесконечности решения уравнения (4) даются формулой

$$\tilde{H}(\xi, \eta, z) = C(\xi, \eta)e^{-\mu z}, \quad (6)$$

где $C(\xi, \eta)$ — произвольная функция.

Применим преобразование Фурье по переменным x и y к системе (2):

$$\begin{aligned}(\xi^2 + \eta^2)\tilde{u} - \tilde{u}_{zz} + i\xi k\tilde{u} + i\eta n\tilde{u} &= -i\xi\lambda_1\tilde{H}, \\(\xi^2 + \eta^2)\tilde{v} - \tilde{v}_{zz} + i\xi k\tilde{v} + i\eta n\tilde{v} &= -i\eta\lambda_2\tilde{H}, \\(\xi^2 + \eta^2)\tilde{w} - \tilde{w}_{zz} + i\xi k\tilde{w} + i\eta n\tilde{w} &= -\lambda_3\tilde{H}_z.\end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\xi^2 + \eta^2 + i\xi k + i\eta n = \rho^2 \quad (7)$$

и учитывая (6), получим

$$\begin{aligned}-\tilde{u}_{zz} + \rho^2\tilde{u} &= -i\xi\lambda_1e^{-\mu z}C(\xi, \eta), \\-\tilde{v}_{zz} + \rho^2\tilde{v} &= -i\eta\lambda_2e^{-\mu z}C(\xi, \eta), \\-\tilde{w}_{zz} + \rho^2\tilde{w} &= \lambda_3\mu e^{-\mu z}C(\xi, \eta).\end{aligned} \quad (8)$$

Каждое уравнение системы этой содержит только одну неизвестную функцию. Рассмотрим первое уравнение системы; оно является уравнением с частными производными второго порядка. Но поскольку оно содержит производные только по переменной z , его можно решить, применяя теорию интегрирования линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Следуя этой теории, будем искать решение в виде

$$\tilde{u} = \tilde{u}_{oo} + \tilde{u}^*,$$

где $\tilde{u}_{oo}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{u}^*$ — частное решение неоднородного уравнения. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{u}_{oo} = A_1(\xi, \eta)e^{-\rho z} + B_1(\xi, \eta)e^{\rho z}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов:

$$\tilde{u}^* = D(\xi, \eta) (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}), \quad (9)$$

где $D(\xi, \eta)$ — неопределенная функция, которую определим так, чтобы формула (9) давала решение неоднородного уравнения. Подставляя функцию (9) в первое уравнение системы (8), получим

$$D(\xi, \eta) (\mu^2 e^{-\mu z} - \rho^2 e^{-\rho z}) - \rho^2 D(\xi, \eta) (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}) = i\xi e^{-\mu z} \cdot C(\xi, \eta),$$

откуда

$$D(\xi, \eta) = \frac{i\lambda\xi \cdot C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2}.$$

Тогда искомое частное решение имеет вид

$$\tilde{u}^* = \frac{i\lambda\xi \cdot C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}),$$

а общее решение первого уравнения системы (8) —

$$\tilde{u} = A_1(\xi, \eta)e^{-\rho z} + B_1(\xi, \eta)e^{\rho z} + \frac{i\lambda\xi \cdot C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}).$$

Поскольку мы интересуемся только ограниченными на бесконечности решениями, то положим $B_1(\xi, \eta) = 0$. Окончательно получим

$$\tilde{u} = A_1(\xi, \eta)e^{-\rho z} + \frac{i\lambda\xi \cdot C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}).$$

Аналогично найдем ограниченные на бесконечности решения второго уравнения системы (8):

$$\tilde{v} = A_2(\xi, \eta)e^{-\rho z} + \frac{i\eta\lambda_2 C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}).$$

Рассмотрим третье уравнение системы (8). Оно имеет иную правую часть, нежели первые два уравнения. Приведем решение подробно. Общее решение этого уравнения также состоит из

суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $\tilde{w} = \tilde{w}_{oo} + \tilde{w}^*$. Все ограниченные на бесконечности решения соответствующего однородного уравнения имеют вид

$$\tilde{w} = A_3(\xi, \eta)e^{-\rho z}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\tilde{w}^* = D(\xi, \eta) (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}).$$

Подставляя этот вид решения в третье уравнение системы (8), получим

$$\begin{aligned} D(\xi, \eta) (\mu^2 e^{-\mu z} - \rho^2 e^{-\rho z}) - \rho^2 D(\xi, \eta) (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}) &= -\lambda_3 \mu e^{-\mu z} \cdot C(\xi, \eta), \\ D(\xi, \eta) (\mu^2 - \rho^2) e^{-\mu z} &= -\lambda_3 \mu e^{-\mu z} \cdot C(\xi, \eta), \quad D(\xi, \eta) = \frac{-\lambda_3 \mu C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{w} = A_3(\xi, \eta)e^{-\rho z} - \frac{\lambda_3 \mu C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2}.$$

Итак, общее решение системы (8) дается формулами

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= A_1(\xi, \eta)e^{-\rho z} + \frac{i\xi\lambda_1 C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}), \\ \tilde{v} &= A_2(\xi, \eta)e^{-\rho z} + \frac{i\eta\lambda_2 C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}), \\ \tilde{w} &= A_3(\xi, \eta)e^{-\rho z} - \frac{\lambda_3 \mu C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}), \end{aligned} \quad (10)$$

где $A_1(\xi, \eta)$, $A_2(\xi, \eta)$, $A_3(\xi, \eta)$, $C(\xi, \eta)$ — произвольные функции. Как видим, оно содержит четыре произвольных функции.

Для системы (1) рассмотрим задачу Дирихле: в полупространстве $\{z > 0\}$ найти решение системы (1), удовлетворяющее на границе этого полупространства условиям

$$u|_{z=0} = f_1(x, y), \quad v|_{z=0} = f_2(x, y), \quad w|_{z=0} = f_3(x, y), \quad (11)$$

где f_1, f_2, f_3 — заданные, достаточно гладкие функции.

Поскольку решение системы мы получили в терминах преобразования Фурье, применим к граничным условиям (11) преобразование Фурье по переменным x и y :

$$\tilde{u}|_{z=0} = \tilde{f}_1(\xi, \eta), \quad \tilde{v}|_{z=0} = \tilde{f}_2(\xi, \eta), \quad \tilde{w}|_{z=0} = \tilde{f}_3(\xi, \eta). \quad (12)$$

Подставим решение (10) в условия (12):

$$\tilde{u}|_{z=0} = A_1(\xi, \eta) = \tilde{f}_1(\xi, \eta), \quad \tilde{v}|_{z=0} = A_2(\xi, \eta) = \tilde{f}_2(\xi, \eta), \quad \tilde{w}|_{z=0} = A_3(\xi, \eta) = \tilde{f}_3(\xi, \eta).$$

Таким образом, функции $A_1(\xi, \eta)$, $A_2(\xi, \eta)$, $A_3(\xi, \eta)$ определились из граничных условий задачи. Определим $C(\xi, \eta)$ используя условие связи $u_x + v_y + w_z = H$, предварительно применив к нему преобразование Фурье:

$$i\xi\tilde{u} + i\eta\tilde{v} + \tilde{w}_z = \tilde{H}. \quad (13)$$

Подставим решения (6) и (10) в условие (13):

$$\begin{aligned} i\xi \left(f_1(\xi, \eta)e^{-\rho z} + \frac{i\xi\lambda_1 C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}) \right) + i\eta \left(f_2(\xi, \eta)e^{-\rho z} + \frac{i\eta\lambda_2 C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (e^{-\mu z} - e^{-\rho z}) \right) - \\ - \rho f_3(\xi, \eta)e^{-\rho z} - \frac{\lambda_3 \mu C(\xi, \eta)}{\mu^2 - \rho^2} (-\mu e^{-\mu z} + \rho e^{-\rho z}) = C(\xi, \eta)e^{-\mu z}, \\ e^{-\mu z} \cdot C(\xi, \eta) \left(\frac{i^2 \xi^2 \lambda_1}{\mu^2 - \rho^2} + \frac{i^2 \eta^2 \lambda_2}{\mu^2 - \rho^2} + \frac{\lambda_3 \mu^2}{\mu^2 - \rho^2} - 1 \right) + \\ + e^{-\rho z} \cdot C(\xi, \eta) \left(-\frac{i^2 \xi^2 \lambda_1}{\mu^2 - \rho^2} - \frac{i^2 \eta^2 \lambda_2}{\mu^2 - \rho^2} - \frac{\rho \lambda_3 \mu}{\mu^2 - \rho^2} \right) = (\rho f_3 - i\eta f_2 - i\xi f_1)e^{-\rho z}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя обозначения (5) и (7) покажем, что в уравнении (14) коэффициент при $e^{-\mu z}$ равен нулю.

$$\begin{aligned}
& -\frac{\xi^2 \lambda_1}{\mu^2 - \rho^2} - \frac{\eta^2 \lambda_2}{\mu^2 - \rho^2} + \frac{\lambda_3 \mu^2}{\mu^2 - \rho^2} - 1 = \\
& = \frac{1}{\mu^2 - \rho^2} \left(-\lambda_1 \xi^2 - \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \frac{\xi^2(\lambda_1 - 1) + \eta^2(\lambda_2 - 1) - i\xi k - i\eta n}{\lambda_3 - 1} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\xi^2(\lambda_1 - 1) + \eta^2(\lambda_2 - 1) - i\xi k - i\eta n}{\lambda_3 - 1} + \xi^2 + \eta^2 + i\xi k + i\eta n \right) = \\
& = \frac{1}{\mu^2 - \rho^2} \left(-\lambda_1 \xi^2 - \lambda_2 \eta^2 + \frac{(\xi^2(\lambda_1 - 1) + \eta^2(\lambda_2 - 1) - i\xi k - i\eta n)(\lambda_3 - 1)}{\lambda_3 - 1} + \right. \\
& \quad \left. + \xi^2 + \eta^2 + i\xi k + i\eta n \right) = \\
& = \frac{1}{\mu^2 - \rho^2} \left(-\lambda_1 \xi^2 - \lambda_2 \eta^2 + \lambda_1 \xi^2 - \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 - \eta^2 - i\xi k - i\eta n + \xi^2 + \eta^2 + i\xi k + i\eta n \right) = 0.
\end{aligned}$$

Из доказанного следует

$$\frac{\xi^2 \lambda_1}{\mu^2 - \rho^2} + \frac{\eta^2 \lambda_2}{\mu^2 - \rho^2} \equiv \frac{\lambda_3 \mu^2}{\mu^2 - \rho^2} - 1.$$

Учитывая последнее тождество, уравнение (14) преобразуется к виду

$$C(\xi, \eta)((1 - \lambda_3)^2 \mu^2 - \rho^2) = (\mu - \rho)((1 - \lambda_3)\mu + \rho)(\rho \tilde{f}_3 - i\eta \tilde{f}_2 - i\xi \tilde{f}_1). \quad (15)$$

Правая часть этого уравнения — известная функция, выражающаяся через граничные функции f_i . Положим

$$\tilde{g} = (\mu - \rho)((1 - \lambda_3)\mu + \rho)(\rho \tilde{f}_3 - i\eta \tilde{f}_2 - i\xi \tilde{f}_1).$$

Пусть $C(\xi, \eta)$ — преобразование Фурье некоторой функции ω , т.е. $C(\xi, \eta) = \tilde{\omega}$. Учитывая введенные обозначения и соотношения (5) и (7), уравнение (15) преобразуется к виду

$$\tilde{\omega} \left[(\lambda_3 - 1)(\lambda_1 - 1)\xi^2 + (\lambda_3 - 1)(\lambda_2 - 1)\eta^2 - (\lambda_3 - 1)i\xi k - \xi^2 - \eta^2 - i\xi k - i\eta n \right] = \tilde{g}.$$

Применяя к нему обратное преобразование Фурье, получим

$$(\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1))\omega_{xx} + (\lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1))\omega_{yy} - \lambda_3(k\omega_x + n\omega_y) = g(x, y). \quad (16)$$

Это уравнение с частными производными второго порядка будем рассматривать во всем пространстве переменных x, y . Заметим, что если граничные условия исходной задачи однородны, то уравнение (16) также будет однородным. Рассмотрим возможные ситуации.

Если коэффициенты при старших производных будут равны нулю, т.е.

$$\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1) = 0, \quad \lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1) = 0,$$

то уравнение (16) примет вид

$$k\omega_x + n\omega_y = -\frac{g(x, y)}{\lambda_3}.$$

Если функция $g(x, y)$ интегрируема по x и по y в промежутке $(-\infty, +\infty)$, то это уравнение, а, следовательно, и рассматриваемая задача (1), (11) имеет решение, зависящее от одной произвольной функции. При этом необходимо требовать повышенной гладкости от граничных условий (11).

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (16) отличен от нуля, то это уравнение может относиться к разным типам. В зависимости от этого характер разрешимости исходной задачи будет меняться.

1. Уравнение (16) является уравнением эллиптического типа при выполнении условия

$$(\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1))(\lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1)) > 0.$$

Приведя уравнение к каноническому виду, получим в этом случае уравнение Пуассона

$$\omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta\eta} = F(\xi, \eta);$$

оно имеет единственное решение (см. [1]). Следовательно, и рассматриваемая задача Дирихле в этом случае имеет единственное решение.

2. Уравнение (16) является уравнением гиперболического типа при выполнении условия

$$(\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1))(\lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1)) < 0.$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (16):

$$c_1\omega_{xx} + c_2\omega_{yy} - \lambda_3(k\omega_x + n\omega_y) = 0. \quad (17)$$

Здесь введены обозначения

$$c_1 = \lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1), \quad c_2 = \lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1).$$

Решение уравнения (17) будем искать методом разделения переменных в виде

$$\omega = X(x) \cdot Y(y). \quad (18)$$

Подставим (18) в уравнение (17):

$$c_1X''Y + c_2XY'' - \lambda_3kX'Y - \lambda_3nXY' = 0.$$

Разделим уравнение на XY :

$$\frac{c_1X'' - \lambda_3kX'}{X} = -\frac{c_2Y'' - \lambda_3nY'}{Y}.$$

В этом уравнении функция, стоящая слева, зависит от переменной x , а функция, стоящая справа — от переменной y . Две функции разных переменных могут быть равны между собой только в том случае, если они равны одной и той же константе. В теории метода Фурье доказывается, что для получения ненулевых решений эта константа должна быть отрицательной. Приравнявая последнее равенство к некоторой отрицательной константе

$$\frac{c_1X'' - \lambda_3kX'}{X} = -\frac{c_2Y'' - \lambda_3nY'}{Y} = -a^2,$$

получим два уравнения

$$c_1X'' - \lambda_3kX' + a^2X = 0, \quad (19)$$

$$c_2Y'' - \lambda_3nY' + a^2Y = 0. \quad (20)$$

Решим уравнение (19). Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$c_1\nu^2 - \lambda_3k\nu + a^2 = 0, \quad \nu_{1,2} = \frac{\lambda_3k \pm \sqrt{(\lambda_3k)^2 - 4c_1a^2}}{2c_1}.$$

Тогда решение уравнения (19) запишется в виде

$$X(x) = A_1e^{\nu_1x} + A_2e^{\nu_2x}, \quad (21)$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Аналогично решим уравнение (20). Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$c_2\delta^2 - \lambda_3n\delta - a^2 = 0, \quad \delta_{1,2} = \frac{\lambda_3n \pm \sqrt{(\lambda_3n)^2 + 4c_2a^2}}{2c_2}.$$

Все решения уравнения (20) даются формулой

$$Y(y) = B_1e^{\delta_1y} + B_2e^{\delta_2y}, \quad (22)$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные.

Поскольку уравнение (17), а, следовательно, и уравнения (19) и (20) рассматриваются при $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, то функции (21) и (22) являются неограниченными на бесконечности. Можно утверждать, что уравнение (17), а, следовательно, и однородная задача Дирихле для системы (1) ограниченных решений в этом случае не имеют.

3. Уравнение (16) является уравнением параболического типа при выполнении условий

$$(a) \begin{cases} \lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1) = 0, \\ \lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1) \neq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad (b) \begin{cases} \lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1) \neq 0, \\ \lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первый случай. Как и ранее, будем рассматривать однородное уравнение (17). При условиях (a) оно примет вид

$$c_2\omega_{yy} - \lambda_3(k\omega_x + n\omega_y) = 0, \quad (23)$$

где $c_2 = \lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1)$.

Как и во втором случае, решение уравнения (23) будем искать в виде

$$\omega(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Тогда

$$c_2XY'' - \lambda_3kX'Y - \lambda_3nXY' = 0.$$

Разделим последнее уравнение на XY и приравняем результат к некоторой отрицательной константе

$$\frac{c_2Y'' - \lambda_3nY'}{Y} = \frac{\lambda_3kX'}{X} = -a^2.$$

Отсюда получим два уравнения

$$c_2Y'' - \lambda_3nY' + a^2Y = 0, \quad \lambda_3kX' + a^2X = 0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение

$$Y(y) = B_1e^{\delta_1 y} + B_2e^{\delta_2 y},$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные, а

$$\delta_{1,2} = \frac{\lambda_3n \pm \sqrt{(\lambda_3n)^2 + 4c_2a^2}}{2c_2}$$

— корни характеристического уравнения. Второе уравнение имеет решение вида

$$X(x) = A \exp\left(\frac{-a^2}{\lambda_3k}x\right),$$

где A — произвольная постоянная. Учитывая, что $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, функции $X(x)$ и $Y(y)$ являются неограниченными при любых A , B_1 , B_2 . Следовательно, однородное уравнение (17), соответствующее уравнению (16), и в этом случае ограниченных на бесконечности решений не имеет. Такой же вывод можно сделать и о разрешимости однородной задачи Дирихле для системы (1).

Случай (b) рассматривается аналогично. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Младшие производные существенно влияют на разрешимость задачи Дирихле для многомерных эллиптических систем. Характер разрешимости рассматриваемой задачи зависит от вида уравнения (16), которое рассматривается в пространстве переменных x , y .*

При выполнении условия

$$\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1) = 0, \quad \lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1) = 0$$

однородная задача Дирихле для системы (1) имеет решение, зависящее от одной произвольной функции. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо требовать повышенной гладкости от граничных условий (11).

Если выполняется условие

$$(\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1)) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1)) > 0,$$

то задача Дирихле для системы (1) имеет единственное решение, если же

$$(\lambda_3 - \lambda_1(\lambda_3 - 1)) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2(\lambda_3 - 1)) \leq 0,$$

то однородная задача Дирихле для системы (1) ограниченных на бесконечности решений не имеет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1977.
2. *Руткаускас С.* О задаче типа Дирихле для эллиптических систем с вырождением на прямой // Мат. заметки. — 2016. — 100, № 2. — С. 270–278.
3. *Халилов Ш. Б.* Задача Дирихле для эллиптической по Петровскому системы уравнений второго порядка // Диффер. уравн. — 2006. — 42, № 3. — С. 416–422.
4. *Янушаускас А. И.* Граничные задачи для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1997.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Головко Елена Анатольевна (Golovko Elena Anatol'evna)

Иркутский государственный университет

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: elena-golovko@mail.ru

Кацапова Наталия Сергеевна (Katsapova Natalia Sergeevna)

Иркутский государственный университет

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: natalikakacapova@list.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 35–42
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-35-42

УДК 517.957

ЗАДАЧА КОШИ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В НАПОРНОМ ТРУБОПРОВОДЕ

© 2024 г. Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА

Аннотация. Предложено точное решение задачи Коши для гиперболической системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, описывающей движение жидкости в трубопроводе, находящемся под давлением.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, частная производная, задача Коши.

CAUCHY PROBLEM FOR A SPECIAL CASE OF FLUID MOTION IN A PRESSURE PIPELINE

© 2024 Е. Yu. GRAZHDANTSEVA

ABSTRACT. In this paper, we obtain an exact solution of the Cauchy problem for a system of inhomogeneous first-order partial differential equations of hyperbolic type, which describes a motion of a fluid in a pressure pipeline.

Keywords and phrases: differential equation, partial derivative, Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 35L02, 35L60

1. Введение. Многочисленные процессы движения жидкости в трубопроводе (трубопроводных системах) описываются дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений в частных производных. С этим можно ознакомиться, например, в [1, 2, 4–9]. В частности, возникающие в трубопроводах некоторые волновые процессы допускают описание системой двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих две неизвестные (искомые) функции. Дифференциальные уравнения в системе могут быть как однородными, так и неоднородными. При необходимости, уравнения системы связывают такие физические характеристики, как расход жидкости и её давление, которые выступают в роли неизвестных функций, зависящих от пространственной и временной переменных. Такую систему классифицируют как систему дифференциальных уравнений гиперболического типа. Зная начальные расход и давление, появляется возможность сформулировать задачу Коши для такой системы.

2. Постановка задачи. Рассматривается система неоднородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial l} + a \frac{\partial p}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial p}{\partial l} + c \frac{\partial x}{\partial t} = g \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(l, 0) = \varphi(l), \quad p(l, 0) = \psi(l), \quad (2)$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема АААА-А21-121012090034-3).

где $x = x(l, t)$ и $p = p(l, t)$ — неизвестные функции достаточной гладкости со значениями в $\mathbb{R}$ (в частности, характеризуют массовый расход и давление жидкости, соответственно), l и t — пространственная и временная независимые переменные, $l \in [0, L]$, $L \in \mathbb{R}_+$, $t \geq 0$, $(l, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, a и c — такие действительные числа, что $ac > 0$ (это неравенство обеспечивает гиперболичность рассматриваемой системы), $f = f(l, t)$ и $g = g(l, t)$ — непрерывные по каждой переменной и по совокупности переменных со значениями в $\mathbb{R}$ (в частности, описывают внешнее воздействие на процесс); функции $\varphi(l)$, $\psi(l)$ непрерывны со значениями в $\mathbb{R}$.

3. Основные результаты. Пусть функции $\varphi(l)$ и $\psi(l)$ непрерывны, дифференцируемы и существуют непрерывные производные $\varphi'(l)$ и $\psi'(l)$ для любых l , удовлетворяющих условию $(l, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, a и b — действительные числа, $ac > 0$, функции $u = u(l, t)$ и $v = v(l, t)$ непрерывны вместе с своими частными производными для любых $(l, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Для системы однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial l} + a \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial l} + c \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

с неоднородными условиями

$$u|_{t=\tau} = \varphi(l), \quad v|_{t=\tau} = \psi(l), \quad (4)$$

где $\tau \in \mathbb{R}$, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если $\varphi(l)$ и $\psi(l)$ непрерывны и существуют непрерывные производные $\varphi'(l)$ и $\psi'(l)$ для любых l , удовлетворяющих условию $(l, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, a и b — действительные числа, $ac > 0$, то для задачи (3)–(4) существует точное решение вида

$$u = u(l, t) = \frac{1}{2} \left(\varphi \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) + \varphi \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(\psi \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) - \psi \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) \right), \quad (5)$$

$$v = v(l, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left(\varphi \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) - \varphi \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\psi \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) + \psi \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) \right). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $u = u(l, t)$, $v = v(l, t)$ имеют вид (5) и (6) соответственно. Тогда, полагая $t = \tau$, получим

$$\begin{aligned} u|_{t=\tau} &= \left[\frac{1}{2} \left(\varphi \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) + \varphi \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(\psi \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) - \psi \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) \right) \right]_{t=\tau} = \\ &= \frac{1}{2} (\varphi(l) + \varphi(l)) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} (\psi(l) - \psi(l)) = \varphi(l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v|_{t=\tau} &= \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left(\varphi \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) - \varphi \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\psi \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) + \psi \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}} \right) \right) \right]_{t=\tau} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} (\varphi(l) - \varphi(l)) + \frac{1}{2} (\psi(l) + \psi(l)) = \psi(l). \end{aligned}$$

Следовательно, функции (5) и (6) удовлетворяют условиям (4).

Введем следующие обозначения:

$$z = l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \quad y = l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}.$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции частные производные функций $u = u(l, t)$ и $v = v(l, t)$ по переменным l и t преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{1}{2} \left(\varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial l} + \varphi'(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(\psi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial l} - \psi'(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) = \\
&= \frac{1}{2} (\varphi'(z) \cdot 1 + \varphi'(y) \cdot 1) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} (\psi'(z) \cdot 1 - \psi'(y) \cdot 1) = \\
&= \frac{1}{2} (\varphi'(z) + \varphi'(y)) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} (\psi'(z) - \psi'(y));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \varphi'(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(\psi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} - \psi'(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\varphi'(z) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{ac}} \right) + \varphi'(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{ac}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(\psi'(z) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{ac}} \right) - \psi'(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{ac}} \right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{ac}} (-\varphi'(z) + \varphi'(y)) + \frac{1}{2c} (-\psi'(z) - \psi'(y));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial l} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left(\varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial l} - \varphi'(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) + \frac{1}{2} \left(\psi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial l} + \psi'(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} (\varphi'(z) \cdot 1 - \varphi'(y) \cdot 1) + \frac{1}{2} (\psi'(z) \cdot 1 + \psi'(y) \cdot 1) = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} (\varphi'(z) - \varphi'(y)) + \frac{1}{2} (\psi'(z) + \psi'(y));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left(\varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} - \varphi'(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\psi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \psi'(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} \left(\varphi'(z) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{ac}} \right) - \varphi'(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{ac}} \right) + \frac{1}{2} \left(\psi'(z) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{ac}} \right) + \psi'(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{ac}} \right) = \\
&= \frac{1}{2a} (-\varphi'(z) - \varphi'(y)) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} (-\psi'(z) + \psi'(y)).
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливы следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial l} + a \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{2} (\varphi'(z) + \varphi'(y)) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} (\psi'(z) - \psi'(y)) + \\
&+ a \left(\frac{1}{2a} (-\varphi'(z) - \varphi'(y)) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} (-\psi'(z) + \psi'(y)) \right) = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial l} + c \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a}} (\varphi'(z) - \varphi'(y)) + \frac{1}{2} (\psi'(z) + \psi'(y)) + \\
&c \left(\frac{1}{2\sqrt{ac}} (-\varphi'(z) + \varphi'(y)) + \frac{1}{2c} (-\psi'(z) - \psi'(y)) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, функции (5) и (6) при подстановке их в уравнения системы (3) обращают эти уравнения в тождества, т.е. являются решением системы (3). Утверждение 1 доказано. $\square$

Замечание 1 (см. [3]). Если в (5) и (6) положить $\tau = 0$, то получим точное решение системы (3), удовлетворяющее условиям $u|_{t=0} = \varphi(l)$ и $v|_{t=0} = \psi(l)$.

Пусть $\mathbb{R}$ -значные функции $f = f(l, t)$ и $g = g(l, t)$ непрерывны вместе со своими частными производными, $w_1 = w_1(l, t)$ и $w_2 = w_2(l, t)$ — неизвестные функции достаточной гладкости со значениями в $\mathbb{R}$.

Рассмотрим систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} + a \frac{\partial w_2}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial w_2}{\partial l} + c \frac{\partial w_1}{\partial t} = g \quad (7)$$

с однородными условиями типа

$$w_1|_{t=0} = 0, \quad w_2|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Если a и b — действительные числа, $ac > 0$, функции $f = f_1(l, t)$ и $g = g(l, t)$ непрерывны по каждой переменной и по совокупности переменных вместе с своими частными производными для любых $(l, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, то задача Коши (7)–(8) имеет точное решение вида

$$w_1 = w_1(l, t) = \int_0^t \tilde{w}_1(l, t, \tau) d\tau, \quad w_2 = w_2(l, t) = \int_0^t \tilde{w}_2(l, t, \tau) d\tau, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(l, t, \tau) = & \frac{1}{2c} \left(g \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau \right) + g \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau \right) \right) + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(f \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau \right) - f \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau \right) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(l, t, \tau) = & \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(g \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau \right) - g \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau \right) \right) + \\ & + \frac{1}{2a} \left(f \left(l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau \right) + f \left(l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \tau \right) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Пусть функции $w_1 = w_1(l, t)$, $w_2 = w_2(l, t)$ имеют вид (9), а функции $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1(l, t, \tau)$, $\tilde{w}_2 = \tilde{w}_2(l, t, \tau)$ имеют вид (10) и (11) соответственно. Обозначим

$$z = l - \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}, \quad y = l + \frac{t-\tau}{\sqrt{ac}}.$$

Тогда, учитывая введенные обозначения и согласно правила дифференцирования сложной функции, для частных производных функций (10) и (11) справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l} = & \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) \cdot \frac{\partial z}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) \cdot \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) = \\ = & \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} = & \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \\ = & \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{ac}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \cdot \frac{1}{\sqrt{ac}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{ac}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \cdot \frac{1}{\sqrt{ac}} \right) = \\ = & \frac{1}{2c\sqrt{ac}} \left(-\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \right) + \frac{1}{2ac} \left(-\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l} = & \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) \cdot \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) + \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) \cdot \frac{\partial z}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \cdot \frac{\partial y}{\partial l} \right) = \\ = & \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \right) + \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) + \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{ac}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \cdot \frac{1}{\sqrt{ac}} \right) + \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{ac}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \cdot \frac{1}{\sqrt{ac}} \right) = \\
&= \frac{1}{2ac} \left(-\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \right) + \frac{1}{2a\sqrt{ac}} \left(-\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) + \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \right).
\end{aligned}$$

Следовательно, по правилу дифференцирования интеграла с переменным пределом, учитывая вид частных производных, представленных выше, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_1}{\partial l} + a \frac{\partial w_2}{\partial t} &= \\
&= \frac{\partial}{\partial l} \left(\int_0^t \tilde{w}_1(l, t, \tau) d\tau \right) + a \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \tilde{w}_2(l, t, \tau) d\tau \right) = \int_0^t \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l} d\tau + a \left(\int_0^t \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t} d\tau + \tilde{w}_2|_{\tau=t} \right) = \\
&= \int_0^t \left(\frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \right) \right) d\tau + \\
&+ a \int_0^t \left(\frac{1}{2ac} \left(-\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \right) + \frac{1}{2a\sqrt{ac}} \left(-\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) + \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \right) \right) d\tau + \\
&+ a \left(\frac{1}{2\sqrt{ac}} (g(l, t) - g(l, t)) + \frac{1}{2a} (f(l, t) + t(l, t)) \right) = f(l, t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_2}{\partial l} + c \frac{\partial w_1}{\partial t} &= \\
&= \frac{\partial}{\partial l} \left(\int_0^t \tilde{w}_2(l, t, \tau) d\tau \right) + c \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \tilde{w}_1(l, t, \tau) d\tau \right) = \int_0^t \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l} d\tau + c \left(\int_0^t \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} d\tau + \tilde{w}_1|_{\tau=t} \right) = \\
&= \int_0^t \left(\frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \right) + \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) + \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \right) \right) d\tau + \\
&+ c \int_0^t \left(\frac{1}{2c\sqrt{ac}} \left(-\frac{\partial}{\partial z} g(z, \tau) + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \tau) \right) + \frac{1}{2ac} \left(-\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau) - \frac{\partial}{\partial y} f(y, \tau) \right) \right) d\tau + \\
&+ c \left(\frac{1}{2c} (g(l, t) + g(l, t)) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} (f(l, t) - t(l, t)) \right) = g(l, t).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем подтверждение того, что функции вида (9) удовлетворяют уравнениям системы (7) (т.е. при подстановке их в уравнения системы (7) обращают эти уравнения в тождества). Также очевидно, что функции (9) удовлетворяют условиям (8). Следовательно, функции (9) являются решением задачи (7)–(8). Утверждение 2 доказано. $\square$

Теорема 1. Если функции $\varphi(l)$, $\psi(l)$, $f = f(l, t)$ и $g = g(l, t)$ непрерывны вместе со своими частными производными для любых $(l, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, a и b — действительные числа, $ac > 0$. Тогда при $\tau = 0$ задача (1)–(2) имеет решение вида

$$x = x(l, t) = u(l, t) + w_1(l, t), \quad (12)$$

$$p = p(l, t) = v(l, t) + w_2(l, t), \quad (13)$$

где функции $u(l, t)$ и $v(l, t)$ восстанавливаются по формулам (5) и (6), соответственно (полагая в них $\tau = 0$), а функции $w_1(l, t)$ и $w_2(l, t)$ — по формулам (9), (10), (11).

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно подтверждения того, что (12) и (13) обращают уравнения системы (1) и условия (2) в тождества. Пусть $x = x(l, t)$, $p = p(l, t)$, $u = u(l, t)$, $v = v(l, t)$, $w_1 = w_1(l, t)$, $w_2 = w_2(l, t)$, $f = f(l, t)$, $g = g(l, t)$. После подстановки (12) и (13) в (1) и (2) получаем систему

$$\frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial w_1}{\partial l} + a \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial w_2}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial w_2}{\partial l} + c \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial w_1}{\partial t} = g, \quad (14)$$

и условия

$$u|_{t=0} + w_1|_{t=0} = \varphi(l), \quad v|_{t=0} + w_2|_{t=0} = \psi(l), \quad (15)$$

поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial w_1}{\partial l}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial w_2}{\partial l}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial t}.$$

Это позволяет представить систему (14) в виде совокупности двух систем, а именно, системы однородных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial l} + a \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial l} + c \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

и системы неоднородных уравнений

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} + a \frac{\partial w_2}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial w_2}{\partial l} + c \frac{\partial w_1}{\partial t} = g,$$

а условия (15) представить в виде

$$u|_{t=0} = \varphi(l), \quad v|_{t=0} = \psi(l), \quad (16)$$

$$w_1|_{t=0} = 0, \quad w_2|_{t=0} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, задачу (1)–(2) можно рассматривать как совокупность двух задач, одна из которых является задачей поиска решения системы однородных уравнений с однородными условиями типа (16) (оно же является условием (4) при $\tau = 0$), решением которой являются функции (5) и (6) если в них положить $\tau = 0$ (см. замечание 1), а другая — задачей поиска решения системы неоднородных уравнений с однородными условиями типа (17), решение которой восстанавливается по формулам (9), (10), (11). При этом решение задачи (1)–(2) примет вид суммы решений выше описанных задач. $\square$

Теорема 2. Если функции $\varphi(l)$, $\psi(l)$, $f = f(l, t)$ и $g = g(l, t)$ непрерывны вместе со своими частными производными для любых $(l, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$, τ , a и b — действительные числа, $ac > 0$. Тогда решение системы (1), удовлетворяющее неоднородным условиям типа (4), имеет решение вида (12), (13), где функции $u = u(l, t)$ и $v = v(l, t)$ восстанавливаются по формулам (5) и (6) соответственно, а функции $w_1(l, t)$ и $w_2(l, t)$ — по формулам

$$w_1 = w_1(l, t) = \int_0^{t-\tau} \tilde{w}_1(l, t, \eta) d\eta, \quad w_2 = w_2(l, t) = \int_0^{t-\tau} \tilde{w}_2(l, t, \eta) d\eta, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1(l, t, \eta) = & \frac{1}{2c} \left(g \left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau \right) + g \left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau \right) \right) + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(f \left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau \right) - f \left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau \right) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(l, t, \eta) = & \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(g \left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau \right) - g \left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau \right) \right) + \\ & + \frac{1}{2a} \left(f \left(l - \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau \right) + f \left(l + \frac{t-\tau-\eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Доказательство. Пусть $x = x(l, t)$, $p = p(l, t)$, $u = u(l, t)$, $v = v(l, t)$, $w_1 = w_1(l, t)$, $w_2 = w_2(l, t)$, $f = f(l, t)$, $g = g(l, t)$. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно подтверждения того, что (12) и (13) обращают уравнения системы (1) и условия (4) в тождества. После подстановки (12) и (13) в систему (1) и условия (4) получим систему вида (14), и условия вида

$$u|_{t=\tau} + w_1|_{t=\tau} = \varphi(l), \quad v|_{t=\tau} + w_2|_{t=\tau} = \psi(l), \quad (21)$$

поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial w_1}{\partial l}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial w_2}{\partial l}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial t}.$$

Так как функции $u = u(l, t)$ и $v = v(l, t)$ вида (5) и (6), как показано в утверждении 1, удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial l} + a \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial l} + c \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u|_{t=\tau} = \varphi(l), \quad v|_{t=\tau} = \psi(l),$$

достаточно убедиться в справедливости равенств

$$\frac{\partial w_1}{\partial l} + a \frac{\partial w_2}{\partial t} = f, \quad \frac{\partial w_2}{\partial l} + c \frac{\partial w_1}{\partial t} = g, \quad w_1|_{t=\tau} = 0, \quad w_2|_{t=\tau} = 0 \quad (22)$$

(см. (21)). Для удобства дифференцирования введем обозначения

$$z = l - \frac{t - \tau - \eta}{\sqrt{ac}}, \quad s = l + \frac{t - \tau - \eta}{\sqrt{ac}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g\left(l - \frac{t - \tau - \eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau\right) &= g(z, \eta + \tau), \quad g\left(l + \frac{t - \tau - \eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau\right) = g(s, \eta + \tau), \\ f\left(l - \frac{t - \tau - \eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau\right) &= f(z, \eta + \tau), \quad f\left(l + \frac{t - \tau - \eta}{\sqrt{ac}}, \eta + \tau\right) = f(s, \eta + \tau); \end{aligned}$$

согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l} + a \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t} &= \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \eta + \tau) + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \eta + \tau) \right) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \eta + \tau) - \frac{\partial}{\partial y} f(y, \eta + \tau) \right) + \\ &+ a \left(\frac{1}{2ac} \left(-\frac{\partial}{\partial z} g(z, \eta + \tau) - \frac{\partial}{\partial y} g(y, \eta + \tau) \right) + \frac{1}{2a\sqrt{ac}} \left(-\frac{\partial}{\partial z} f(z, \eta + \tau) + \frac{\partial}{\partial y} f(y, \eta + \tau) \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l} + c \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{ac}} \left(\frac{\partial}{\partial z} g(z, \eta + \tau) - \frac{\partial}{\partial y} g(y, \eta + \tau) \right) + \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z, \eta + \tau) + \frac{\partial}{\partial y} f(y, \eta + \tau) \right) + \\ &+ c \left(\frac{1}{2c\sqrt{ac}} \left(-\frac{\partial}{\partial z} g(z, \eta + \tau) + \frac{\partial}{\partial y} g(y, \eta + \tau) \right) + \frac{1}{2ac} \left(-\frac{\partial}{\partial z} f(z, \eta + \tau) - \frac{\partial}{\partial y} f(y, \eta + \tau) \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$ имеют вид (19) и (20) соответственно.

Кроме того, учитывая вышеизложенное и правило дифференцирования интеграла с переменным пределом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial l} + a \frac{\partial w_2}{\partial t} &= \\ &= \int_0^{t-\tau} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l} d\eta + a \left(\int_0^{t-\tau} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t} d\eta + \tilde{w}_2|_{\eta=t-\tau} \right) = \int_0^{t-\tau} \left(\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial l} + a \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t} \right) d\eta + a \cdot \tilde{w}_2|_{\eta=t-\tau} = \\ &= 0 + a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{ac}} (g(l, t) - g(l, t)) + \frac{1}{2a} (f(l, t) + f(l, t)) \right) = f(l, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_2}{\partial l} + c \frac{\partial w_1}{\partial t} &= \\
&= \int_0^{t-\tau} \frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l} d\eta + c \left(\int_0^{t-\tau} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} d\eta + \tilde{w}_1|_{\eta=t-\tau} \right) = \int_0^{t-\tau} \left(\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial l} + c \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} \right) d\eta + c \cdot \tilde{w}_2|_{\eta=t-\tau} = \\
&= 0 + c \cdot \left(\frac{1}{2c} (g(l, t) + g(l, t)) + \frac{1}{2\sqrt{ac}} (f(l, t) - f(l, t)) \right) = g(l, t).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем подтверждение того, что функции (18) удовлетворяют первым двум уравнениям (22). Остальные два равенства (22) также выполнены, так как справедливо равенство

$$w_i|_{t=\tau} = \left(\int_0^{t-\tau} \tilde{w}_i(l, t, \eta) d\eta \right) \Big|_{t=\tau} = \int_0^0 \tilde{w}_i(l, t, \eta) d\eta = 0, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алтышуль А. Д.* Гидравлические сопротивления. — М.: Недра, 1982.
2. *Бондарев Э. А., Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф. и др.* Термодинамика систем добычи и транспорта газа. — Новосибирск: Наука, 1988.
3. *Гражданцева Е. Ю.* О точном решении одной гиперболической системы дифференциальных уравнений // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 224. — С. 35–42.
4. *Картвелишвили Н. А.* Динамика напорных трубопроводов. — М.: Энергия, 1979.
5. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979.
6. *Рождественский Б. Н., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
7. *Тарасевич В. В.* Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах / Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Новосибирск, 2017.
8. *Фокс Д. А.* Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах. — М.: Энергоиздат, 1981.
9. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубопроводах. — М.: Недра, 1975.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Гражданцева Елена Юрьевна (Grazhdantseva Elena Yur'evna)

Иркутский государственный университет;

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia;

L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch

of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)

E-mail: grelyur@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 43–49
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-43-49

УДК 517.977.5

ОПОРНЫЕ МАЖОРАНТЫ И ПОЗИЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МИНИМУМА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2024 г. В. А. ДЫХТА

Аннотация. Найдены условия опорности для двух классов задач: задач, для которых верен дискретный принцип максимума и для обобщенных решений, оптимальных в выпуклой задаче с траекториями, реализуемыми в исходной постановке.

Ключевые слова: необходимые условия, дискретный принцип минимума, позиционный принцип минимума, неравенство Гамильтона—Якоби.

SUPPORT MAJORANTS AND FEEDBACK MINIMUM PRINCIPLES FOR DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2024 V. A. DYKHTA

ABSTRACT. Support conditions for two classes of problems are found: problems for which the discrete maximum principle is valid and for generalized solutions that are optimal in a convex problem with trajectories realized in the original formulation.

Keywords and phrases: necessary conditions, discrete minimum principle, feedback minimum principle, Hamilton–Jacobi inequality.

AMS Subject Classification: 49K15, 49L99

1. Введение. Статья посвящена необходимым условиям глобальной оптимальности для следующей задачи оптимального управления (задачи (P)):

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (2)$$

$$J(\sigma) = l(x(N)) \rightarrow \min.$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество, $T = \{0, \dots, N-1\}$, через σ обозначены пары последовательностей векторов $\{x(t), u(t)\}$, $t \in T \cup \{N\}$, вектор-функция f предполагается непрерывной по (x, u) при каждом $t \in T$ и гладкой по x , целевая функция l непрерывно дифференцируема.

Обозначим через D множество всех допустимых последовательностей σ , через $\bar{\sigma} = \{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\} \in D$ — последовательность, исследуемую на оптимальность, через Φ — множество функций $\varphi(t, x) : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, гладких по x при всех $t \in T$, и введем в рассмотрение неравенство типа Гамильтона—Якоби

$$\min_{u \in U} \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \quad (3)$$

с граничным условием

$$\varphi(N, x) = l(x). \quad (4)$$

Решения неравенства (3) (даже без гладкости по x) обладают следующим свойством слабого убывания: для любой начальной позиции (t_*, x_*) существует такая траектория $\{x^*(t)\}$, $t = t_*, \dots, N$, системы (1) с соответствующим управлением $\{u^*(t)\}$, что

$$\varphi(t+1, x^*(t+1)) \leq \varphi(t, x^*(t)), \quad t = t_*, \dots, N-1. \quad (5)$$

Если φ удовлетворяет граничному условию (4), то φ -убывающая траектория $\{x^*(t)\}$ со свойством (5) при $t_* = 0$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(0, x_0) \geq \varphi(N, x^*(N)) = l(x^*(N)).$$

Отсюда следует оценка сверху функционала

$$J(\sigma) = l(x(N)) \leq \varphi(N, x^*(N)) \quad \forall \sigma \in D, \quad (6)$$

в силу которой все функции $\varphi \in \Phi$, являющиеся решением краевой задачи (3), (4), назовем *мажорантами функционала J* на множестве D . Из (6) следует массовое *достаточное условие неоптимальности*: неоптимальны все процессы $\sigma \in D$, для которых $l(x(N)) > \varphi(N, x^*(N))$ при какой-либо мажоранте φ и соответствующей ей φ -убывающей допустимой траектории. Другими словами, любая мажоранта φ доставляет инструмент отсева неоптимальных процессов посредством φ -убывающих траекторий. Для повышения эффективности процедуры отсева естественно использовать φ -убывающие траектории наискорейшего спуска.

Формализация этого замысла по образцу динамического программирования приводит к *общему позиционному принципу минимума* (кратко GF-ПМ). Его следует отличать от хорошо известного (см. [4]) частного принципа (F-ПМ) с квазилинейной мажорантой.

Отметим, что общий запас мажорант задачи (P) достаточно богат, поскольку любая функция $\varphi \in \Phi$ порождает мажоранту $\tilde{\varphi}$ с помощью так называемой нормировки. Для описания этого приёма введем функцию

$$K^\varphi(t, x, u) = \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x),$$

где $\varphi \in \Phi$ — полное приращение φ на шаге t в силу системы (1), (2), и множество достижимости $\mathbb{R}(t)$ этой системы в период t . Выберем ограниченное отображение $Q(t) \supset \mathbb{R}(t)$ при всех $t \in T^N: T \cup \{N\}$ (что возможно в силу компактности множеств $\mathbb{R}(t)$), и определим функции

$$\begin{aligned} m(t) &= \sup_{x \in Q(t)} \min_{u \in U} K^\varphi(t, x, u), \quad t \in T, \\ r(t) &= r(t+1) - m(t), \quad r(N) = 0, \\ \tilde{\varphi}(t, x) &= \varphi(t, x) - r(t), \quad (t, x) \in T \times Q(t). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что полученная таким образом функция $\tilde{\varphi}$, нормированная относительно исходной функции φ с граничным условием (4), является мажорантой функционала J на множестве $T \times Q(t)$, достаточном для анализа задачи (P).

Для приложений важно отметить, что так называемые экстремальные отображения $U^\varphi(t, x)$, $U^{\tilde{\varphi}}(t, x)$ (см. п. 2) порождающей функции и нормированной совпадают. Отсюда следует, что практическое применение общего позиционного принципа минимума основано только на порождающих функциях $\varphi \in \Phi$, т.е. не требует нормировки.

2. φ -Экстремальные стратегии и присоединенная задача. Для функции $\varphi \in \Phi$ (или, в частности, мажоранты функционала) определим φ -экстремальное отображение

$$U^\varphi(t, x) = \underset{u \in U}{\text{Arg min}} K^\varphi(t, x, u). \quad (7)$$

Очевидно, что оно непусто, компактнозначно и полунепрерывно сверху по x для каждого $t \in T$. Любой селектор $v(t, x)$ отображения (7) назовем φ -экстремальным позиционным управлением, или стратегией. Множество всех таких стратегий обозначим через $\mathcal{V}^\varphi$.

Для любой стратегии $v(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$ можно определить траекторию $x(t; v)$ системы (1) при $u = v(t, x)$. Если φ — мажоранта, то легко убедиться, что $x(t; v)$ — φ -убывающая траектория из множества траекторий наискорейшего спуска. При этом имеет место следующее семейство необходимых условий оптимальности:

$(N(\varphi))$ если процесс $\bar{\sigma} = \{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\}$ оптимален в задаче (P) , то при любой мажоранте φ выполняется неравенство

$$l(\bar{x}(N)) \leq l(x(N; v)) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\varphi. \quad (8)$$

Отсюда естественным образом возникает φ -присоединенная экстремальная задача:

$$l(x(N; v)) \rightarrow \min, \quad v \in \mathcal{V}^\varphi, \quad (9)$$

и напрашивается вопрос об оптимальности траектории $\{\bar{x}(t)\}$ в этой задаче.

Очевидно, что для произвольной мажоранты φ ответ отрицательный (неравенства (8) для этого недостаточно), поскольку априори существование стратегии $\bar{v}(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$, порождающей траекторию $\{\bar{x}(t)\}$, ниоткуда не следует.

Для анализа поставленного вопроса введем ряд определений.

Допустимое управление $\{u^c(t)\}$ назовем *совместимым* с траекторией $\{\bar{x}(t)\}$, если оно генерирует $\{\bar{x}(t)\}$ как решение системы (1) при $u = u^c(t)$. Множество всех совместимых управлений обозначим через $\mathcal{U}(\bar{x})$, а множество пар $\sigma^c = \{\bar{x}(t), u^c(t)\}$ — через $D(\bar{x})$. По определению считаем, что $\{\bar{u}(t)\} \in \mathcal{U}(\bar{x})$, $\bar{\sigma} \in D(\bar{x})$.

Введенные понятия учитывают неоднозначность управлений, генерирующих исследуемую траекторию $\{\bar{x}(t)\}$. Очевидно, что из оптимальности $\bar{\sigma}$ следует оптимальность всех пар $\sigma^c \in D(\bar{x})$ и, как следствие, нарушение какого-либо необходимого условия оптимальности (например, экстремальности) для некоторой пары $\tilde{\sigma} \in D(\bar{x})$ влечет неоптимальность всех процессов $\sigma^c \in D(\bar{x})$.

Определение 1. Мажоранту φ назовем *опорной* для траектории $\{\bar{x}(t)\}$, если $\{\bar{x}(t)\}$ оптимальна в φ -присоединенной задаче при подходящем выборе стратегии $\bar{v} \in \mathcal{V}^\varphi$. Если это условие выполнено, то будем говорить, что пара $\sigma^o = \{\bar{x}(t), u^o(t)\}$, $u^o(t) := \bar{v}(t, \bar{x}(t))$ удовлетворяет позиционному принципу минимума с мажорантой φ .

Отметим, что пара σ^o в данном определении принадлежит $D(\bar{x})$ и лишь в частном случае совпадёт с $\bar{\sigma}$ — это зависит от выбора φ , $\bar{v}$ и реализуется при $\mathcal{U}(\bar{x}) = \{\bar{u}(t)\}$. Очевидно, что при опорной φ GF-ПМ усиливает необходимое условие $(N(\varphi))$.

Отметим также, что условия опорности мажорант в дискретной задаче (P) нельзя получить по образцу задач с непрерывным временем (см. [2]), поскольку для задачи (P) аналог принципа максимума Понтрягина не является универсальным необходимым условием оптимальности (см. [1, 3]).

3. Опорные мажоранты в задачах с выпуклым годографом. Рассмотрим класс задач типа (P) , для которых множество $f(t, x, U)$ (годограф системы (1)) выпукло при всех $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Для задач этого класса справедлив дискретный принцип максимума (ДПМ), для формулировки которого в фиксированной задаче (P) вводятся функция $H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$, сопряженная система

$$\begin{cases} \psi(t) = H_x(t, x(t), \psi(t+1), u(t)), & t = N-1, \dots, 1, \\ \psi(N) = l_x(x(N)), \end{cases} \quad (10)$$

и H -минимизирующее отображение

$$M(t, x, \psi) = \underset{w \in U}{\text{Arg min}} H(t, x, \psi, w). \quad (11)$$

Тогда ДПМ для процесса $\sigma = \{x(t), u(t)\} \in D$ можно записать в виде включения

$$u(t) \in M(t, x(t), \psi(t+1)) \quad \forall t \in T \quad (12)$$

с соответствующей σ котраекторией системы (10). Оптимальный процесс $\bar{\sigma}$ задачи (P) необходимо является экстремальным, т.е. удовлетворяет ДПМ с котраекторией $\{\bar{\psi}(t)\}$.

Гладкую по x мажоранту φ назовем *совместимой* с траекторией $\{\bar{x}(t)\}$, если существует такой φ -экстремальный селектор $v^o(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$, что имеет место равенство

$$\varphi_x(t+1, \bar{x}(t+1)) = \psi^o(t), \quad t \in T,$$

с котраекторией $\{\psi^o(t)\}$ пары $\sigma^o = \{\bar{x}(t), u^o(t)\}$, $u^o(t) = v^o(t, \bar{x}(t))$.

Заметим, что в сравнении с определением 1 здесь для описания пары $\sigma^o \in D(\bar{x})$ использовано нейтральное обозначение селектора v^o вместо $\bar{v}$.

С учетом неравенства (8) свойство совместимости приводит к следующему заключению.

Теорема 1. Пусть процесс $\bar{\sigma} = \{\bar{x}(t), \bar{u}(t)\}$ оптимален в задаче (P) с выпуклым годографом. Тогда любая мажоранта φ , совместимая с $\{\bar{x}(t)\}$, является опорной в точке $\bar{\sigma}$.

Доказательство. Для произвольной $\varphi \in \Phi$ определим многозначное отображение

$$U_0^\varphi(t, x) = \operatorname{Arg} \min_{u \in U} \varphi_x(t+1, f(t, x, u)) \cdot f(t, x, u).$$

В силу гладкости φ и выпуклости годографа $\Gamma(t, x) = f(t, x, U)$ любой селектор $v(t, x)$ отображения (7) содержится в $U_0^\varphi(t, x)$ (это следует из условия минимума гладкой функции на выпуклом множестве). Поэтому при всех $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ выполняется условие

$$\varphi_x(t+1, f(t, x, v(t, x))) \cdot f(t, x, v(t, x)) = \min_{u \in U} \varphi_x(t+1, f(t, x, u)) \cdot f(t, x, u).$$

Возьмем здесь φ и $v = v^o(t, x)$ из условия совместимости, а затем положим $x = \bar{x}(t)$ на T . В результате получим включение $u^o(t) \in M(t, \bar{x}(t), \psi^o(t+1))$ для всех $t \in T$, означающее выполнение ДПМ для процесса σ^o (см. (11), (12)). Вместе с тем получили, что $u^o(t) \in M(t, \bar{x}(t), \psi^o(t+1))$ вдоль орбиты траектории $\{\bar{x}(t)\}$. Так как отображение $(t, x) \rightarrow M(t, x, \psi^o(t))$ полунепрерывно сверху и компактнозначно, то оно имеет борелевский селектор $v^*(t, x)$. Положим теперь

$$\bar{v}(t, x) = \begin{cases} u^o(t), & (t, x) \in \operatorname{orb}\{x(t)\}, \\ v^*(t, x) & (t, x) \notin \operatorname{orb}\{x(t)\}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что это искомым селектор, генерирующий $\{\bar{x}(t)\}$. $\square$

Аналогичный результат имеет место для задач, линейных по фазовой переменной (с управляемой структурой), в которых ДПМ справедлив без всяких предположений выпуклости.

4. Задачи с выпуклым годографом вдоль обобщенных траекторий. Следуя [3, §17], рассмотрим более широкий класс задач, для которых ДПМ остается верен, но имеет нетрадиционную форму.

Введем в рассмотрение овыпукленную (расширенную) дискретную систему

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j(t) f(t, x(t), u_j(t)), & x(0) = x_0, \\ \alpha_j(t) \geq 0, & \alpha_1(t) + \dots + \alpha_{n+1}(t) = 1, \\ u_j(t) \in U, & j = 1, \dots, n+1, \quad t \in T \end{cases} \quad (13)$$

с обобщенным управлением $\mu = \{\alpha_j(t), u_j(t) : j = 1, \dots, n+1\}$, $t \in T$, и множество S пар $s = (\{x(t)\}, \mu)$, связанных системой (13).

Так как годограф системы (13) — выпуклое множество, то в овыпукленной задаче (со P) минимизации функционала $J(s) = l(x(N))$ на множестве S имеет место ДПМ. Пусть $s^0 = (\{x^0(t)\}, \mu^0)$ — некоторый оптимальный процесс расширенной задачи, удовлетворяющей ДПМ. Предположим, что выполняется следующее условие выпуклости годографа вдоль траектории $\{x^0(t)\}$:

$$\text{множество } \Gamma(t, x^0(t)) := f(t, x^0(t), U) \text{ выпукло на } T. \quad (14)$$

В этом предположении $\{x^0(t)\}$ одновременно является и траекторией исходной системы (1) (реализуемой в ней с некоторым обычным управлением $\{u^0(t)\}$). Поэтому для любого процесса, оптимального в задаче (P), должен выполняться ДПМ (см. [3, теорема (7.3)]).

Этот факт является ключевым для сведения вопроса опорности для класса задач со свойством (14) к ситуации п. 3 по следующей схеме.

Шаг 1. Будем исследовать на оптимальность процессы

$$\sigma^o = \{x^o(t), u^o(t)\} \in D, \quad s^o = \{x^o(t), \mu^o\} = \{x^o(t), \alpha_j^o(t), u_j^o(t) : j = 1, \dots, n+1\} \in S,$$

о которых известно, что σ^o удовлетворяет ДПМ в задачах (P) и (со P), а s^o — в задаче (со P). Формально именно задача (со P) принимается за базовую, поскольку в ней аккумулирована входная информация. Ясно, что μ^o — одно из управлений, совместимых с $\{x^o(t)\}$ в (со P), множество которых обозначим через $\mathcal{M}(x^o)$.

Шаг 2. Для задачи (со P) определим все объекты, необходимые для формулировки опорности и GF-ПМ.

Обозначим через $g(t, x, \alpha, \omega)$ правую часть овыпукленной системы (13) с управлениями α из n -мерного симплекса A^n , $\omega = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \Omega := (U)^{n+1}$. Для гладкой по x функции φ положим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\varphi(t, x, \alpha, \omega) &= \varphi(t+1, g(t, x, \alpha, \omega)) - \varphi(t, x), \\ W^\varphi(t, x) &= \operatorname{Arg\,min}_{(\alpha, \omega) \in W} \mathcal{K}^\varphi(t, x, \alpha, \omega), \end{aligned} \quad (15)$$

где $W = A^n \times \Omega$, т.е. введем аналог φ -экстремального отображения для неравенства Гамильтона—Якоби задачи (со P) (см. (3)) с граничным условием (4). Множество селекторов $v(t, x) = (v_\alpha, v_\omega)(t, x)$ отображения (15) обозначим, как и ранее, через $\mathcal{V}^\varphi$.

Теперь формулировка необходимого условия ($N(\varphi)$), определения φ -присоединенной задачи, опорной мажоранты и φ -позиционного принципа минимума становятся очевидными. Отметим лишь, что в рассматриваемом классе задач с условием (14) необходимые условия в задаче (со P) являются таковыми и для процессов $\sigma \in D$ (при их естественном вложении в S), поскольку значения задач (P) и (со P) совпадают.

Шаг 3. Остается модифицировать определение совместимости $\varphi \in \Phi$ с траекторией $\{x^o(t)\}$ в задаче (со P). Это приводит к требованию существования такого селектора $v^*(t, x) = (v_x^*, v_\omega^*)(t, x) \in \mathcal{V}^\varphi$, что имеет место равенство

$$\varphi_x(t+1, x^o(t+1)) = \psi^*(t), \quad t \in T,$$

с котраекторией $\{\psi^*(t)\}$ процесса

$$s^* = \{x^o(t), \alpha_j^*, u_j^* : j = 1, \dots, n+1\}, \quad (\alpha^*(t), \omega^*(t)) = v^*(t, x^o(t)) \text{ на } T.$$

Отсюда выводится следующая теорема.

Теорема 2. Пусть вдоль оптимальной траектории $\{x^o(t)\}$ овыпукленной задачи выполняется условие выпуклости годографа (14). Тогда любая мажоранта φ задачи (со P), совместимая с $\{x^o(t)\}$, является опорной для этой траектории и, следовательно, найдется процесс s^* , для которого выполняется позиционный принцип минимума.

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 1 лишь техническими деталями и потому опускается.

Применение теоремы 2 требует знания хотя бы одной оптимальной траектории задачи (со P). Её можно находить, решая задачу итерациями позиционного спуска (см. [1]) с квазилинейной мажорантой

$$\varphi^*(t, x) = l(x) + \langle \psi^o(t) - l_x(x^o(t)), x \rangle + r(t).$$

5. Заключительные замечания и примеры. 1. В статье получены необходимые условия в форме общего позиционного ПМ с опорными нелинейными мажорантами (речь идет о серии необходимых условий оптимальности). Эти условия существенно усиливают дискретный ПМ для классов задач, в которых он имеет место: из GF-ПМ $\implies$ ДПМ. Следовательно, и позиционные ПМ применимы к задачам с условием типа выпуклости годографа системы. Надо иметь в виду, что гораздо более широкую область применимости имеют мажоранты без свойства опорности в силу алгоритмичности и эффективности соответствующих итераций спуска на основе условия ($N(\varphi)$).

2. Обращение к нелинейным мажорантам естественно рекомендовать, если итерации спуска с квазилинейной мажорантой φ^* , или простой F-ПМ, не дают ожидаемых результатов. Апробировать разумно следующие по сложности за φ^* линейно-квадратичные мажоранты вида

$$\varphi^{**}(t, x) = \varphi^*(t, x) + \frac{1}{2} \left\langle (\Psi^o(t) - l_{xx}(x^o(t)))x, x \right\rangle + r(t),$$

где $\Psi^o(t)$ — матричная функция Габасова (см. [3, с. 252]) при двукратной гладкости по x функций f и l .

3. В связи со сказанным в замечании 1 отметим, что в отличие от непрерывных задач оптимального управления, условия экстремальности в дискретных задачах (как в смысле ДПМ, так и F-ПМ) не обладают весьма важным свойством инвариантности относительно эквивалентных преобразований задач; например, невырожденных преобразований фазовых координат. Это неприятное свойство довольно очевидно, ибо нелинейные преобразования разрушают выпуклость

отображений. Вот простейший пример: φ^* -экстремальное отображение в задаче (P) не совпадает с экстремальным отображением дискретного ПМ (см. (12) с x, ψ^o вместо $x(t), \psi(t+1)$). Причина в одном: терминальный функционал задачи (P) преобразован в суммарный (что, естественно, не меняет задачи по существу) и φ^* -отображение соответствует преобразованной задаче. Но условия экстремальности в исходной и преобразованной задачах оказываются различными; на общей области применимости φ^* -экстремальность оказывается сильнее (см. примеры в [1]).

Обратимся к показательным примерам.

Пример 1 (см. [4, пример 2]). Для задачи

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + (t-1)u(t), & x(0) &= 0, \\ y(t+1) &= y(t) + (u(t)-1)x(t), & y(0) &= 0, \\ |u(t)| &\leq 1, & t &= 0, 1; \quad a > 0, \\ J &= y(2) - ax^2(2) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

нетрудно проверить, что

$$\min J = \min_{\substack{|u(t)| \leq 1, \\ t=0,1}} \{ - (u(1)-1)u(0) - au^2(0) \} = -2 - a.$$

Заметим, что в силу билинейности системы и вогнутости $l(x, y)$ для этого примера имеет место ДПМ без предположения выпуклости годографа.

Процесс $\bar{\sigma}$: $\bar{u} \equiv 1, \bar{x}(1) = \bar{x}(2) = -1, \bar{y} \equiv 0, \bar{\psi} \equiv 2a, J(\bar{\sigma}) = -a$, удовлетворяет ДПМ, т.е. ДПМ не бракует $\bar{\sigma}$.

φ^* -Экстремальное отображение приводит к следующим возможным стратегиям спуска:

$$\begin{aligned} t=0: \quad -au_0^2 \rightarrow \min &\Rightarrow U_*(0, x_0) = \{\pm 1\}; \\ t=1: \quad x_1 u_1 \rightarrow \min &\Rightarrow U_*(1, x_1) = \begin{cases} \{-1\}, & x_1 > 0, \\ \{1\}, & x_1 < 0, \\ [-1, 1], & x_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Выбирая селектор $v(t, x)$ вида

$$v(0) = -1, \quad v(1, x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$$

получим процесс $\tilde{\sigma}$: $\tilde{u} \equiv -1, \tilde{x}(1) = \tilde{x}(2) = 1, \tilde{y}(1) = 0, \tilde{y}(2) = -2$, для которого

$$J(\tilde{\sigma}) = -2 - a < -a = J(\bar{\sigma}).$$

Таким образом, одна итерация спуска с мажорантой φ^* приводит к глобальному решению. Заметим, что экстремаль $\bar{\sigma}$ ДПМ бракуется, хотя $\bar{x}(t)$ допустима в φ^* -присоединенной задаче.

Пример 2 (задача с множеством реализуемых обобщенных траекторий; см. [3, с. 158]). Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} y(t+1) &= y(t) + f(t, u(t)), & y(0) &= y_0, \\ z(t+1) &= z(t) + cy^3(t) + g(t, u(t)), & z(0) &= z_0, \\ u(t) &\in U, & t \in T = \{0, 1\}, \\ J &= z(2) - y^2(2) \rightarrow \inf, \end{aligned}$$

где $x = (y, z)$, $U \subset \mathbb{R}$ — компакт, функции f, g произвольны, причем $|f(0, u)| \leq d, c \in \mathbb{R}$.

При помощи одного из критериев реализуемости в [3] установлено, что если параметры удовлетворяют условию

$$1 - 3cy_0 > 3d|c|,$$

то все оптимальные процессы данного примера удовлетворяют ДПМ.

Для любой экстремали $\bar{\sigma}$ условие опорности на градиент φ_x искомой мажоранты из теорем 1, 2 выполняется при выборе

$$\varphi(t, x) = \alpha(t)z + \beta(t)y^2 + \gamma z^3.$$

Это следует из формул для явного решения $\{\psi_y(t), \psi_z(t)\}$ сопряженной системы.

Но исследовать оптимальность некоторой траектории $\{\bar{x}(t)\}$ в φ -присоединенной задаче (т.е. собственно GF-ПМ) установить не удастся из-за параметрической сложности примера.

Если взять квадратичную функцию $\varphi(y, z) = l(x) = z - y^2$, то

$$K^\varphi(x_t, u_t) = z_t + cy_t^3 + g_t(u_t) - (y_t + f_t(u_t))^2$$

(зависимость от t указываем индексом), и экстремальное отображение определится из условия

$$g_t(u_t) - 2y_t f_t(u_t) - f_t^2(u_t) \rightarrow \min, \quad u_t \in U.$$

Данный выбор φ можно использовать для итерационного решения примера, но условиям опорности теорем 1, 2 он не удовлетворяет.

Если воспользоваться теоретически более обоснованным выбором $\varphi = \varphi^*$, то с учетом равенств

$$y_1 = y_0 + f_0(u_0), \quad \psi_z \equiv 1, \quad \psi_y(1) = -2y_1 + f_1(u_1) + 3cy_1^2$$

нетрудно получить, что $U_0^{\varphi^*} = U$, а $U_1^{\varphi^*}$ находится из задачи

$$p_y(1)f_t(u_1) \rightarrow \min, \quad u_1 \in U,$$

где $p = (p_y, p_z)$ — возмущенная котраектория.

В частном варианте параметров $y_0 = -1$, $c = -1$, $d = 1$, $f = u^2 - 1$, $g = -|u|$ получаем систему

$$y(t+1) = y(t) - 1 + u^2(t), \quad y(0) = -1,$$

$$z(t+1) = z(t) - y^3(t) - |u(t)|, \quad z(0) = z_0$$

с прежним функционалом.

Отображение $U_1^{\varphi^*}$ тривиально: $-u^2 \rightarrow \min$, $|u| \leq 1$ и генерирует как обычные экстремали с $\bar{u} \equiv \pm 1$, так и обобщенное с управлением $u_1^o = +1$, $u_2^o = -1$, $\alpha_1^o = \alpha_2^o = 1/2$. Легко проверить, что все они оптимальны.

Использованный в работе метод доказательства общего позиционного принципа минимума допускает распространение на класс задач с аппроксимативным принципом максимума (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. — Москва: Наука, 1971.
2. Дыхта В. А. О множестве необходимых условий оптимальности с позиционными управлениями, порожденном слабо убывающими решениями неравенства Гамильтона—Якоби спуска в задачах оптимального управления // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — 28, № 3. — С. 83–93.
3. Мордухович Б. III. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.
4. Dykhta V. A., Sorokin S. Feedback minimum principle for optimal control problems in discrete-time systems and its applications // Lect. Notes Comp. Sci. — 2019. — 11548. — P. 449–460.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Дыхта Владимир Александрович (Dykhta Vladimir Aleksandrovich)
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;
Иркутский государственный университет
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: dykhta@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 50–58
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-50-58

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2024 г. И. В. ЗАХАРОВА, М. В. ФАЛАЛЕЕВ

Аннотация. В работе исследуются системы дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих малый положительный параметр в главной части. Установлена связь между решениями системы с малым параметром и решениями предельной системы, получаемой, если параметр положить равным нулю. Представлены классы систем, при сингулярном возмущении которых сохраняются свойства регулярно возмущенных задач и соответственно для них допускается построение асимптотических решений методами регулярной теории возмущений.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенное уравнение, предельная задача, задача Дирихле, задача Коши.

ON SOME SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER IN THE PRINCIPAL PART

© 2024 I. V. ZAKHAROVA, M. V. FALALEEV

ABSTRACT. In this paper, we examine systems of partial differential equations containing a small positive parameter in the principal part. We establish a relationship between solutions of the system with a small parameter and solutions of the limit system obtained if the parameter is equal to zero. We present classes of systems that preserve the properties of regularly perturbed problems under singular perturbations and admit constructing asymptotic solutions by methods of regular perturbation theory.

Keywords and phrases: small parameter, singularly perturbed equation, limit problem, Dirichlet problem, Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 35A20

1. Введение. При исследовании дифференциальных уравнений содержащих малый параметр (возмущение) возникает вопрос о соотношении между решениями исходной (возмущенной) задачи и предельной (когда малый параметр обращается в ноль). Иначе говоря, можно ли исходя из решения предельной задачи получить хотя бы приближенно решение возмущенной задачи. Если возмущение носит регулярный характер, то это возможно. В сингулярном случае, например для обыкновенных дифференциальных уравнений предельный переход по параметру в уравнении может привести к изменению порядка возмущенного уравнения и соответственно к существенному различию свойств решений обеих задач, как следствие невозможность предельного перехода между ними. В случае дифференциальных уравнений в частных производных обращение в ноль малого параметра в главной части может и не изменить порядок уравнения, но поменять его

тип и соответственно для таких задач можно ожидать весьма разнообразную картину (см. [3, 7]). В данной работе выделены два класса сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных, для которых возможен предельный переход по параметру. При исследовании таких систем необходимо учитывать эффекты двух типов. Во-первых, жорданову структуру матрицы коэффициентов (т.е. свойства линейных операторов в конечномерных пространствах), а, во-вторых, дифференциальных операторов системы (т.е. свойства линейных операторов в банаховых пространствах). Итоговые теоремы отражают эту двойственную природу исследованных задач.

2. Задача Коши для систем, сводящихся к уравнениям гиперболического типа. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) = 0, \quad (1)$$

$$u_i(x, 0, \epsilon) = f_i(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = g_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $u_i(x, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, $f_i(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $g_i(x) \in C(\mathbb{R})$, $f_i(x)$ и $g_i(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ — малый параметр.

Относительно матрицы коэффициентов $A = \|a_{ij}\|$ будем предполагать выполненным следующее условие:

(A) $\det A \neq 0$ и все элементарные делители матрицы A имеют степень 1; тогда её жорданова форма имеет диагональный вид (см. [1])

$$A = T^{-1} \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} T,$$

причем среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ могут быть равные, но все $\lambda_i \neq 0$. Дополнительно будем предполагать, что все характеристические числа матрица A положительны: $\lambda_i > 0$.

При выполнении условия (A) после невырожденной замены переменных $\bar{v} = T\bar{u}$, где $\bar{u}(x, t, \epsilon)$ — вектор-столбец искомых функций

$$\bar{u}(x, t, \epsilon) = \begin{pmatrix} u_1(x, t, \epsilon) \\ u_2(x, t, \epsilon) \\ \vdots \\ u_n(x, t, \epsilon) \end{pmatrix}$$

задача (1)–(3) распадается на n независимых задач для уравнений гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} - \lambda_j \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial v_j}{\partial t} \right) = 0, \quad (4)$$

$$v_j(x, 0, \epsilon) = F_j(x), \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = G_j(x); \quad (6)$$

здесь

$$\bar{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{G}(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \\ \vdots \\ G_n(x) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}.$$

Вводя новую переменную τ и новую функцию $V_j(x, \tau, \epsilon)$ по правилам

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}, \quad v_j(x, t, \epsilon) = V_j(x, \tau, \epsilon) \exp \left(-\frac{\alpha \tau}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} \right),$$

перепишем задачу (4)–(6) в виде

$$\frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial \tau^2} + \frac{\alpha^2 \lambda_j}{4\epsilon} V_j = 0, \quad (7)$$

$$V_j(x, 0, \epsilon) = F_j(x), \quad (8)$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau}(x, 0, \epsilon) = \sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j(x) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j(x). \quad (9)$$

Стандартная замена переменных

$$\xi = \tau - x, \quad \eta = \tau + x$$

приводит уравнение (7) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\alpha^2 \lambda_j}{16\epsilon} W_j = 0, \quad (10)$$

с условиями (на характеристике)

$$V_j(x, 0, \epsilon) = W_j(\xi, \eta, \epsilon) \Big|_{\eta=-\xi} = F_j\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) \Big|_{\eta=-\xi} = F_j(-\xi), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_j}{\partial \tau}(x, 0, \epsilon) &= \left(\frac{\partial W_j}{\partial \xi} + \frac{\partial W_j}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=-\xi} = \sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right) \Big|_{\eta=-\xi} = \\ &= \sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j(-\xi) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j(-\xi). \end{aligned} \quad (12)$$

По формуле Римана (см. [4]) восстанавливается решение уравнения (10) Ж

$$W_j(\xi_0, \eta_0, \epsilon) = \frac{(W_j \mathcal{R})_P + (W_j \mathcal{R})_Q}{2} - \frac{1}{2} \int_{PQ} \left[\left(W_j \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} - \mathcal{R} \frac{\partial W_j}{\partial \xi} \right) d\xi + \left(\mathcal{R} \frac{\partial W_j}{\partial \eta} - W_j \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} \right) d\eta \right],$$

где интегрирование осуществляется по границе области, представляющей собой прямоугольный треугольник с гипотенузой, лежащей на прямой $\eta = -\xi$, прямым углом в точке (ξ_0, η_0) и катетами, параллельными осям координат, $Q(-\eta_0, \eta_0)$, $P(\xi_0, -\xi_0)$; функция Римана имеет вид

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \mathcal{J}_0 \left(\frac{\alpha i}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j (\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{\epsilon}} \right);$$

здесь $\mathcal{J}_0$ — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента, т.е. функция Римана представима рядом

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k} \lambda_j^k (\xi_0 - \xi)^k (\eta_0 - \eta)^k}{(k!)^2 2^{4k} \epsilon^k}.$$

Поскольку

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_P = \mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_Q = 1,$$

то в силу условия (11) решение уравнения (10) можно переписать в виде

$$W_j(\xi_0, \eta_0, \epsilon) = \frac{F_j(-\xi_0) + F_j(\eta_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\eta_0}^{\xi_0} \left[\mathcal{R} \left(\frac{\partial W_j}{\partial \xi} + \frac{\partial W_j}{\partial \eta} \right) - W_j \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} \right) \right] d\xi.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-\xi} = i \mathcal{J}_1 \left(\frac{\alpha i}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j (\xi_0 - \xi)(\eta_0 + \xi)}{\epsilon}} \right) \cdot \frac{\alpha \sqrt{\lambda_j} (\eta_0 + \xi_0)}{4 \sqrt{\epsilon (\xi_0 - \xi)(\eta_0 + \xi)}},$$

то с учетом условия (12) окончательно получаем для решения уравнения (10) следующее представление:

$$\begin{aligned} W_j(\xi_0, \eta_0, \epsilon) = & \frac{1}{2} \left(F_j(-\xi_0) + F_j(\eta_0) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\eta_0}^{\xi_0} \left[\mathcal{J}_0 \left(\frac{\alpha i}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j(\xi_0 - \xi)(\eta_0 + \xi)}{\epsilon}} \right) \left(\sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j(-\xi) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j(-\xi) \right) - \right. \\ & \left. - i \mathcal{J}_1 \left(\frac{\alpha i}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j(\xi_0 - \xi)(\eta_0 + \xi)}{\epsilon}} \right) \cdot \frac{\alpha \sqrt{\lambda_j}(\eta_0 + \xi_0)}{4 \sqrt{\epsilon(\xi_0 - \xi)(\eta_0 + \xi)}} F_j(-\xi) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Обратной заменой переменных $\xi_0 = \tau - x$, $\eta_0 = \tau + x$ восстанавливаем решение задачи (7)–(9):

$$\begin{aligned} V_j(x, \tau, \epsilon) = & \frac{1}{2} \left(F_j(x - \tau) + F_j(x + \tau) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-x-\tau}^{-x+\tau} \left[\mathcal{J}_0 \left(\frac{\alpha i}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j(\tau^2 - (x + \xi)^2)}{\epsilon}} \right) \left(\sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j(-\xi) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j(-\xi) \right) - \right. \\ & \left. - i \mathcal{J}_1 \left(\frac{\alpha i}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j(\tau^2 - (x + \xi)^2)}{\epsilon}} \right) \cdot \frac{\alpha \sqrt{\lambda_j} \tau}{2 \sqrt{\epsilon(\tau^2 - (x + \xi)^2)}} F_j(-\xi) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем явный вид решения задачи (4)–(6):

$$v_j(x, t, \epsilon) = \exp \left(-\frac{\alpha \tau}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} \right) V_j(x, \tau, \epsilon) \Big|_{\tau=t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}},$$

который после выполнения тождественных преобразований переписывается так

$$\begin{aligned} v_j(x, t, \epsilon) = & \exp \left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon} \right) \left\{ \frac{1}{2} \left[F_j \left(x - \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \right) + F_j \left(x + \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_{-t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \left[\mathcal{J}_0 \left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} \right) \left(\sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j(x - \xi) + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j(x - \xi) \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{i} \mathcal{J}_1 \left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} \right) \cdot \frac{\alpha \sqrt{\lambda_j} t}{2 \sqrt{\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} F_j(x - \xi) \right] d\xi \right\}. \end{aligned}$$

Справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v_j(x, t, \epsilon) = \frac{\sqrt{\lambda_j} \alpha}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\lambda_j \alpha (x - \xi)^2}{4t} \right) F_j(\xi) d\xi = v_j^0(x, t).$$

Действительно, представление для функции $v_j(x, t, \epsilon)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 v_j(x, t, \epsilon) = & \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \frac{1}{2} \left[F_j\left(x - \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}\right) + F_j\left(x + \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}\right) \right] + \\
 & + \frac{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}{2} \int_{-t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}\right) G_j(x - \xi) d\xi + \\
 & + \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} \int_{-t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{i} \mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}\right) \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \right] F_j(x - \xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Но функции $G_j(x) \in C(\mathbb{R})$ и $F_j(x) \in C^1(\mathbb{R})$ будучи абсолютно интегрируемыми на $\mathbb{R}$ ограничены, т.е. существуют такие положительные константы $K > 0$ и $L > 0$, что $|G_j(x)| \leq K$ и $|F_j(x)| \leq L$ для всех $x \in \mathbb{R}$; поэтому

$$\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \left| F_j\left(x - \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}\right) + F_j\left(x + \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}\right) \right| \leq L \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0+.$$

В силу асимптотических равенств для функций Бесселя (см., например, [2]) при $\epsilon \rightarrow 0+$ имеем:

$$\begin{aligned}
 \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}\right) & \approx \\
 \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi \alpha}} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{2\epsilon} \left(\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} - t\right)\right)}{\sqrt[4]{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \left[1 + \frac{\epsilon}{4\alpha \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} + \frac{9(2\epsilon)^2}{2(8\alpha \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2})^2} + \dots \right] = \\
 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi \alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_j \xi^2}{2(\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} + t)}\right) \cdot [1 + O(\epsilon)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \frac{1}{i} \mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}\right) \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} & \approx \\
 \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi \alpha}} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{2\epsilon} \left(\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} - t\right)\right)}{\sqrt[4]{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \cdot \\
 \cdot \left[1 - \frac{3\epsilon}{4\alpha \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} - \frac{15(2\epsilon)^2}{2(8\alpha \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2})^2} + \dots \right] = \\
 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi \alpha}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\alpha \lambda_j \xi^2}{2(\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} + t)}\right)}{\sqrt[4]{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \cdot [1 - O(\epsilon)].
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}{2} \int_{-t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}\right) G_j(x - \xi) d\xi + \\
& + \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} \int_{-t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}\right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{i} \mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon} \sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}\right) \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \right] F_j(x - \xi) d\xi \approx \\
& \approx \sqrt{\frac{\lambda_j}{4\pi\alpha}} \cdot \epsilon \cdot \int_{-t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha \lambda_j \xi^2}{2(\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} + t)}\right)}{\sqrt[4]{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \cdot [1 + O(\epsilon)] G_j(x - \xi) d\xi + \\
& + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha \lambda_j}{\pi}} \int_{-t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j \epsilon}} \frac{\exp\left(-\frac{\alpha \lambda_j \xi^2}{2(\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2} + t)}\right)}{\sqrt[4]{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} \cdot \\
& \cdot \left\{ [1 + O(\epsilon)] + \frac{t}{\sqrt{t^2 - \lambda_j \epsilon \xi^2}} [1 - O(\epsilon)] \right\} F_j(x - \xi) d\xi \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} \\
& \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} 0 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\alpha \lambda_j}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_j \xi^2}{4t}\right) \cdot 2 \cdot F_j(x - \xi) d\xi = \\
& = \frac{\sqrt{\alpha \lambda_j}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha \lambda_j \xi^2}{4t}\right) \cdot F_j(x - \xi) d\xi = v_j^0(x, t).
\end{aligned}$$

Полученная в пределе функция $v_j^0(x, t)$ является решением предельной задачи (т.е. $\epsilon = 0$) для (4)–(6), но для его существования условие (6) является излишним, т.е. в окрестности $t = 0$ возникает область пограничного слоя. Иными словами, область определения предельной задачи шире области определения допредельной задачи, что является характерной особенностью сингулярно возмущенной задачи. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Если для матрицы $A = \|a_{ij}\|$ задачи (1)–(3) выполнено условие **(A)**, то для решения этой задачи справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \bar{u}(x, t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} T^{-1} \bar{v}(x, t, \epsilon) = T^{-1} \bar{v}^0(x, t) = \bar{u}^0(x, t),$$

где $\bar{u}^0(x, t)$ — решение предельной системы для (1)–(3).

Замечание 1. Теорема остается справедливой и в более общих предположениях относительно матрицы $A = \|a_{ij}\|$. Именно, известно (см. [1]), что для любой квадратной матрицы A размерности

n существует такая невырожденная матрица T , что

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{q_1} + N_{q_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{q_2} + N_{q_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\mu E_{q_\mu} + N_{q_\mu} \end{pmatrix} = \\ = \text{diag} \left\{ \lambda_1 E_{q_1} + N_{q_1}, \lambda_2 E_{q_2} + N_{q_2}, \dots, \lambda_\mu E_{q_\mu} + N_{q_\mu} \right\}; \quad (13)$$

здесь $q_1 + q_2 + \dots + q_\mu = n$; индекс q_i при квадратных матрицах E_{q_i} (единичной) или N_{q_i} (жорданов нильпотентный блок) означает их размерность q_i ,

$$N_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, \mu, \quad N_{q_i}^{q_i} = O_{q_i}.$$

Правую часть равенства (13) называют канонической жордановой формой матрицы A , блоки $(\lambda_i E_{q_i} + N_{q_i})$ называют жордановыми ящиками, числа λ_i называют собственными числами матрицы A кратности q_i , причем все $\lambda_i \neq 0$, если $\det A \neq 0$.

3. Задача Дирихле для систем, сводящихся к уравнениям эллиптического типа. Рассмотрим задачу Дирихле в полупространстве $t > 0$ для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) = 0, \quad (14)$$

$$u_i(x_1, x_2, 0, \epsilon) = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

где $u_i(x_1, x_2, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, функции $f_i(x_1, x_2) \in C(\mathbb{R}^2)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}^2$, $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ — малый параметр, $\lim_{(x_1, x_2, t) \rightarrow \infty} |u_i(x_1, x_2, t)| < +\infty$.

Относительно матрицы коэффициентов $A = \|a_{ij}\|$ будем предполагать (как выше) выполненным условие **(A)**. В этом случае той же заменой переменных $\bar{v} = T\bar{u}$ задача (14)–(15) распадается на n независимых задач для уравнений эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2^2} + \lambda_j \left(\epsilon \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial v_j}{\partial t} \right) = 0, \quad (16)$$

$$v_j(x_1, x_2, 0, \epsilon) = F_j(x_1, x_2). \quad (17)$$

Введя новые переменные по формулам

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}, \quad v_j(x_1, x_2, t, \epsilon) = V_j(x_1, x_2, \tau, \epsilon) \exp \left(\frac{\alpha \tau}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} \right),$$

перепишем задачу (16)–(17) в виде

$$\frac{\partial^2 V_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha^2 \lambda_j}{4\epsilon} V_j = 0, \quad (18)$$

$$V_j(x_1, x_2, 0, \epsilon) = F_j(x_1, x_2). \quad (19)$$

Решение задачи (18)–(19) имеет следующий вид (см. [6]):

$$V_j(x_1, x_2, \tau, \epsilon) = \frac{\tau}{4\pi\sqrt{\epsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(y_1, y_2) \left(\frac{\alpha\sqrt{\lambda_j}}{R^2} + \frac{2\sqrt{\epsilon}}{R^3} \right) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} R \right) dy_1 dy_2, \\ R = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \tau^2}.$$

При помощи обратной замены переменных находим решение задачи (16)–(17):

$$\begin{aligned} v_j(x_1, x_2, t, \epsilon) &= \exp\left(\frac{\alpha\tau}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}\right) V_j(x_1, x_2, \tau, \epsilon) \Big|_{\tau=t\sqrt{\lambda_j\epsilon}} = \\ &= \frac{\lambda_j t}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(y_1, y_2) \frac{2\epsilon + \alpha\sqrt{\lambda_j\epsilon((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + t^2}}{\left(\sqrt{\lambda_j\epsilon((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + t^2}\right)^3} \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}{2\left(t + \sqrt{\lambda_j\epsilon((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + t^2}\right)}\right) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} v_j(x_1, x_2, t, \epsilon) &= \\ &= \frac{\alpha\lambda_j}{4\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(y_1, y_2) \exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j}{4t}((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)\right) dy_1 dy_2 = v_j^0(x_1, x_2, t). \end{aligned}$$

Полученная таким образом функция $v_j^0(x_1, x_2, t)$ является решением предельной задачи для (16)–(17). Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Если для матрицы $A = \|a_{ij}\|$ задачи (14)–(15) выполнено условие **(A)**, то для решения этой задачи справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \bar{u}(x_1, x_2, t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} T^{-1}\bar{v}(x_1, x_2, t, \epsilon) = T^{-1}\bar{v}^0(x_1, x_2, t) = \bar{u}^0(x_1, x_2, t),$$

где $\bar{u}^0(x_1, x_2, t)$ — решение предельной системы для (14)–(15).

Замечание 2. При $\epsilon = 0$ изменился тип уравнения (16), но не поменялся его порядок. При этом решение соответствующей предельной задачи удовлетворяет условиям исходной задачи (16)–(17). Такое поведение решения предельной задачи, отсутствие «невязки» в граничных условиях, является нетипичным для сингулярно возмущенных задач. В данном случае решение задачи Дирихле при $\epsilon \rightarrow 0+$ регулярным образом стремится к решению задачи Коши.

Замечание 3. Задача (14)–(15) допускает обобщение на случай уравнения с переменными коэффициентами. В [3] рассмотрен пример задачи Дирихле в полупространстве для одного сингулярно возмущенного уравнения в частных производных с переменными коэффициентами. Методом параметрикса (см. [5]) построено фундаментальное решение предельной задачи. Показано, что фундаментальное решение уравнения эллиптического типа, содержащего малый параметр в главной части, переходит в фундаментальное решение предельного уравнения параболического типа, а решение задачи Дирихле при $\epsilon \rightarrow 0+$ стремится регулярным образом к решению предельной задачи Коши для уравнения параболического типа.

Замечание 4. Задача (14)–(15) допускает более общую постановку для системы уравнений вида

$$\Delta u_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\epsilon \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где Δ — оператор Лапласа.

4. Заключение. Проведенные исследования дают основание утверждать, что среди задач для систем уравнений с частными производными, которые содержат малый параметр в главной части, существует класс систем, имеющих регулярную асимптотику, и, как следствие, допускающие применение методов регулярной теории возмущений для построения их асимптотического решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
2. Двайт Г. Б. Таблица интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1973.
3. Захарова И. В. О некоторых задачах для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр в главной части // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 183. — С. 61–72.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
5. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: МГУ, 2004.
7. Янушаускас А. И. О зависящих от малого параметра уравнениях с частными производными // в кн.: Сб. науч. тр. Иркут. ун-та, 1990. — С. 94–103.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Захарова Ирина Валентиновна (Zakharova Irina Valentinovna)

Иркутский государственный университет

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: zair@math.isu.ru

Фалалеев Михаил Валентинович (Falaleev Mikhail Valentinovich)

Иркутский государственный университет

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: mvfalaleev@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 59–66
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-59-66

УДК 517.957

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НУЛЕВЫМ ФРОНТОМ

© 2024 г. А. Л. КАЗАКОВ, Л. Ф. СПЕВАК

Аннотация. Рассматривается один класс точных решений многомерного нелинейного уравнения теплопроводности с источником, построение которых сводится к интегрированию семейства обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, причем при соответствующем задании условий Коши их можно интерпретировать как нетривиальные решения с нулевым фронтом. Доказана теорема существования с построением решения в виде сходящегося степенного ряда. Предложен приближенный алгоритм, основанный на методе коллокаций и разложении по радиальным базисным функциям, выполнены численные расчеты, проведен численный анализ полученных решений.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, точное решение, теорема существования, метод коллокаций, радиальные базисные функции, численный анализ.

ON ONE CLASS OF EXACT SOLUTIONS OF THE MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR HEAT EQUATION WITH A ZERO FRONT

© 2024 A. L. KAZAKOV, L. F. SPEVAK

ABSTRACT. We consider a class of exact solutions of a multidimensional nonlinear heat equation with a source. The construction of these solutions leads to the solution of a family of second-order ordinary differential equations. If appropriate Cauchy conditions are specified, exact solutions can be interpreted as nontrivial solutions with zero front. An existence theorem is proved and a solution is constructed in the form of a converging power series. An approximate algorithm based on the collocation method of radial basis functions is proposed. Test calculations and numerical analysis of the solutions obtained are performed.

Keywords and phrases: nonlinear parabolic system, exact solution, existence theorem, collocation method, radial basic functions, numerical analysis.

AMS Subject Classification: 35K40, 35K57

1. Введение. Рассмотрим нелинейное эволюционное параболическое уравнение

$$U_t = \Delta \Phi_1(U) + \Phi_2(U), \quad (1)$$

где t — время, Δ — лапласиан по пространственным переменным $x_1, x_2, \dots, x_N$; $u(t, x_1, \dots, x_N)$ — искомая функция (см. [8]). Иногда (1) называют «generalized porous medium equation» (см. [17]). Наиболее часто в литературе встречается случай степенных функций $\Phi_1(U)$ и $\Phi_2(U)$ (см. [9]). Тогда уравнение (1) можно после замены $u = \Phi_1'(U)$ путем несложных преобразований привести

к виду

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2 + \alpha u^\beta, \quad (2)$$

где α, β, σ — действительные константы. Будем далее предполагать, что $\beta > 0, \sigma > 0$.

В свою очередь, уравнение (2) при наличии пространственных симметрий может быть записано в виде

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \frac{\nu uu_\rho}{\rho} + \alpha u^\beta, \quad (3)$$

где

$$\rho = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{1/2}$$

— новая пространственная переменная, $\nu = N - 1$. Самыми естественными случаями здесь являются $\nu = 0$ (плоская симметрия), $\nu = 1$ (цилиндрическая или круговая симметрия) и $\nu = 2$ (сферическая симметрия).

Значительный интерес как с точки зрения теоретической математики, так и для математической физики (см. [13]) представляют решения нелинейного уравнения теплопроводности с нулевым фронтом: нетривиальные конструкции, удовлетворяющие как (3), так и условию

$$u|_{\rho=a(t)} = 0. \quad (4)$$

Впервые такого рода решения были рассмотрены вскоре после Второй мировой войны в связи с высокотемпературными процессами в физике плазмы (см. [2]) и фильтрацией жидкостей и газов в пористых пластах (см. [1]; ссылки даны не на оригинальные статьи, которые являются библиографической редкостью, а на более поздние известные монографии тех же авторов). В дальнейшем решения с нулевым фронтом, который (в зависимости от физической интерпретации задачи) является фронтом *тепловой* или *фильтрационной волны*, изучались в научных школах академиков А. А. Самарского (см. [9]) и А. Ф. Сидорова (см. [10]).

В работах авторов решения с нулевым фронтом рассматривались неоднократно в контексте построения точных решений (см. [3, 4]), доказательства теорем существования и единственности (см. [3]) и разработки численных алгоритмов (см. [6, 16]) нахождения решений начально-краевых задач.

В настоящей статье рассматривается один класс точных решений уравнения (3), построение которых сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка. Их можно при соответствующем задании начальных данных интерпретировать как решения с нулевым фронтом. Доказывается теорема существования и единственности, предлагается приближенный алгоритм, основанный на методе коллокаций (см. [12]) и разложении по радиальным базисным функциям (см. [11, 14]), выполняются тестовые расчеты, проводится численный анализ построенных решений.

2. Редукция к обыкновенному дифференциальному уравнению. Следуя [5], будем искать решение уравнения (3) в виде

$$u = \rho^2 \psi(t) v(\xi), \quad \xi = \lambda \ln \frac{\rho}{a(t)}, \quad (5)$$

где $\lambda \neq 0$ — константа. Подставив выражение (5) в (3), приведя подобные и приравняв к константам коэффициенты перед v , ее степенями и производными, получим

$$\beta = 1, \quad \psi(t) = \frac{a'(t)}{\lambda a(t)},$$

где $a(t)$ может иметь вид $a_1(t) = C_2 \exp(C_1 t)$ или $a_2(t) = (C_3 t + C_4)^\gamma$, а для нахождения $v(\xi)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \frac{(\nu + 3)\sigma + 4}{\lambda\sigma} vv' + v' + \frac{2[(\nu + 1)\sigma + 2]}{\lambda^2\sigma} v^2 + \gamma v = 0. \quad (6)$$

Здесь $\gamma = \alpha$, если $a = a_1(t)$; $\gamma = 1/\omega$, если $\alpha = 0$, $a = a_2(t)$. Уравнение (6) для частного случая $\alpha = 0$, $\nu = 0, 1, 2$ было получено в [5], однако ранее не исследовалось.

3. Теорема существования. Любые решения уравнения (6) порождают решения уравнения (3) вида

$$u = \rho^2 \frac{a'(t)}{\lambda a(t)} v \left(\lambda \ln \frac{\rho}{a(t)} \right), \quad (7)$$

однако с точки зрения настоящего исследования наиболее интересны решения с нулевым фронтом. Можно видеть, что условие на нулевом фронте (4) для (7) имеет вид $v(0) = 0$, при этом функция $a(t)$ может иметь вид $a_1(t)$ либо $a_2(t)$, иначе говоря, ее нельзя задавать произвольным образом.

Рассмотрим для уравнения (6) условия Коши

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = v_1. \quad (8)$$

Для задачи (6), (8) справедлива приведенная ниже теорема. Отметим, что применить классические теоремы существования (Коши, Пеано и т. п.) в данном случае не представляется возможным из-за того, что обращается в нуль множитель перед старшей (второй) производной в точке $\xi = 0$, так что уравнение имеет в этой точке особенность.

Теорема 1. *Задача (6), (8) имеет следующие классические (дважды непрерывно дифференцируемые) решения:*

- (i) *если $v_1 = 0$ — тривиальное решение $v \equiv 0$;*
- (ii) *если $v_1 = -\sigma$ — нетривиальное решение, представимое в виде ряда Маклорена.*

Иных классических решений задача не имеет.

Будем строить решение в виде ряда

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k \xi^k}{k!}, \quad v_k = \left. \frac{d^k v}{d\xi^k} \right|_{\xi=0}. \quad (9)$$

Из начального условия получаем $v_0 = 0$. Подставив $\xi = 0, v(0) = 0$ в уравнение (6), находим $v_1^2/\sigma + v_1 = 0$. Отсюда следует, что либо $v_1 = 0$ и тогда получается случай (i), поскольку $v_1 = 0 = v_2 = \dots$, либо $v_1 = -\sigma$. При всех прочих значениях v_1 задача Коши оказывается несовместной, что влечет отсутствие классического решения.

Пусть далее $w_1 = -\sigma < 0$. Для нахождения w_2 продифференцируем уравнение (6) по ξ и положим $\xi = 0$. С учетом ранее найденных значений $v_0 = 0$ и $v_1 = -\sigma$, получим, что

$$-\sigma v_2 + \frac{2(-\sigma)v_2}{\sigma} + \frac{(\nu+3)\sigma+4}{\lambda\sigma}(-\sigma)^2 + v_2 - \gamma\sigma = 0.$$

Приведем подобные и выразив v_2 , имеем

$$v_2 = \frac{\sigma}{\sigma+1} \left[\frac{(\nu+3)\sigma+4}{\lambda} - \gamma \right].$$

Далее, пусть известны коэффициенты v_i при $i = 0, \dots, k$. Продифференцировав уравнение (6) k раз по ξ и положив $\xi = 0$, получаем

$$v_{k+1} = \frac{1}{1+k\sigma} \left[\sum_{i=2}^k C_k^i v_i v_{k+2-i} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i v_i v_{k+1-i} + \right. \\ \left. + \frac{(\nu+3)\sigma+4}{\lambda\sigma} \sum_{i=1}^k C_k^i v_i v_{k+1-i} + \frac{2[(\nu+1)\sigma+2]}{\lambda^2\sigma} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i v_i v_{k+1-i} + \gamma v_k \right]. \quad (10)$$

Можно видеть, что правая часть формулы (10) содержит полином, зависящий от переменных $v_1, v_2, \dots, v_k$. Если они известны, то коэффициент v_{k+1} однозначно определяется (напомним, что $\sigma > 0$). Итак, в соответствии с принципом математической индукции, формальное решение задачи (6), (8) в виде ряда (9) построено.

Сходимость ряда (9), носящая локальный характер, доказывается посредством построения мажорантной задачи, имеющей тип Ковалевской. Процедура построения не приводится из-за громоздкости.

4. Алгоритм численного решения. Выбор метода для приближенного решения задачи Коши (6), (8) обусловлен особенностью при старшей производной в точке $\xi = 0$. Используемый авторами итерационный подход (см. [6, 7, 16]) показал свою эффективность для раскрытия таких особенностей, поскольку позволяет построить непрерывно дифференцируемое решение, что в свою очередь дает возможность без дополнительных сложностей оценивать его точность. В данной работе мы используем метод коллокаций с использованием разложения по радиальным базисным функциям, подробно изложенный в [16].

Представим задачу (6), (8) в виде

$$v'' = P(v, v'), \quad \xi \in [\xi_T, 0], \quad (11)$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = -\sigma. \quad (12)$$

Здесь $\xi_T < 0$,

$$P(v, v') = -\frac{1}{v} \left(\frac{(v')^2}{\sigma} + v' \right) - \frac{2[(\nu + 1)\sigma + 2]}{\lambda^2 \sigma} v - \frac{(\nu + 3)\sigma + 4}{\lambda \sigma} - \gamma.$$

Для построения решения исходной задачи (3), (4) на интервале времени $t \in [0, T]$, нужно решить задачу (11), (12) при $\xi_T = \lambda \ln(a(0)/a(T))$.

Решение будем искать в виде

$$v(\xi) = p(\xi) + h(\xi),$$

где $p(\xi)$ — частное решение уравнения (11), $h(\xi)$ — единственное при известном $p(\xi)$ решение соответствующей задачи для однородного уравнения,

$$h'' = 0, \quad h(0) = -p(0), \quad h'(0) = -\sigma - p'(0).$$

Итерационный алгоритм имеет вид:

$$p_0 \equiv 0, \quad (13)$$

$$h_n = -(\sigma + p'_n(0))\xi - p_n(0), \quad (14)$$

$$v_n = p_n + h_n, \quad (15)$$

$$p''_{n+1} = P(v_n, v'_n). \quad (16)$$

Здесь v_n, p_n, h_n — n -е итерации решений. Для решения уравнения (16) используется разложение его правой части по системе радиальных базисных функций:

$$P(v_n, v'_n) = \sum_{i=1}^M c_i^{(n+1)} \phi_i(\xi), \quad (17)$$

где $\phi_i(\xi) = \phi_i(|\xi - \xi_i|)$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ — точки коллокации; для каждой функции ϕ_i существует такая функция $\hat{u}_i$, что $f_i = \hat{u}_i''$. Коэффициенты $c_i^{(n+1)}$, $i = 1, \dots, M$, определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$P(v_n, v'_n)|_{\xi=\xi_k} = \sum_{i=1}^M c_i^{(n+1)} \phi_i(\xi_k), \quad k = 1, \dots, M. \quad (18)$$

Тогда

$$p_{n+1} = \sum_{i=1}^M c_i^{(n+1)} \hat{u}_i(\xi). \quad (19)$$

Итерационная процедура (13)–(19) останавливается при условии

$$\left| \frac{v_{n+1}(\xi_T) - v_n(\xi_T)}{v_n(\xi_T)} \right| < \varepsilon, \quad (20)$$

где ε — заданная точность.

5. Численный анализ. Вычислительный эксперимент начнем с оценки корректности предложенного алгоритма. Ввиду отсутствия тестовых решений, точность будем оценивать с помощью невязки уравнения (6) при подстановке построенного решения:

$$\delta(v) = \max_{\xi \in [\xi_T, 0]} \left| vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \frac{(\nu + 3)\sigma + 4}{\lambda\sigma} vv' + v' + \frac{2[(\nu + 1)\sigma + 2]}{\lambda^2\sigma} v^2 + \gamma v \right|. \quad (21)$$

В таблице 1 приведены значения невязки (21) при $\varepsilon = 10^{-10}$, $\sigma = 2$, $\lambda = 1$ и различных значениях параметров ν , γ , ξ_T , M . В качестве радиальных базисных функций использовались мультиквадратичные функции $\phi_i(\xi) = \sqrt{1 + \varepsilon^2(\xi - \xi_i)^2}$, точки коллокации располагались равномерно внутри отрезка $[\xi_T, 0]$, параметр формы ε был принят в соответствии с [15]. Приведенные результаты расчетов демонстрируют хорошую точность решения даже при небольшом количестве точек коллокации, а также уменьшение невязки с увеличением этого количества. Отметим наблюдавшуюся стабильную сходимость итерационных процедур.

Таблица 1. Невязки уравнения (6)

ν	γ	ξ_T	M	$\delta(v)$	ν	γ	ξ_T	M	$\delta(v)$
1	0	-0.5	20	7.3×10^{-7}	1	1	-0.5	20	8.0×10^{-7}
1	0	-0.5	50	2.7×10^{-7}	1	1	-0.5	50	3.2×10^{-7}
1	0	-1	20	7.0×10^{-5}	1	1	-1	20	5.6×10^{-5}
1	0	-1	50	1.4×10^{-5}	1	1	-1	50	2.3×10^{-5}
2	0	-0.5	20	1.7×10^{-6}	2	1	-0.5	20	9.8×10^{-7}
2	0	-0.5	50	8.5×10^{-7}	2	1	-0.5	50	7.5×10^{-7}
2	0	-1	20	8.0×10^{-5}	2	1	-1	20	7.0×10^{-5}
2	0	-1	50	2.5×10^{-5}	2	1	-1	50	4.2×10^{-5}

Большой интерес представляет качественное поведение решений задачи (11), (12), влияющее на поведение тепловых волн, удовлетворяющих уравнению (3) и условию (4). Проведенный численный анализ позволил сделать некоторые выводы, проиллюстрированные на рис. 1–3. В случае, когда $\gamma = 0$, что соответствует показательному фронту тепловой волны при $\alpha = 0$, решение монотонно и неограниченно возрастает при $\xi \rightarrow -\infty$ (графики 1, 2 на рис. 1), что позволяет построить глобальное решение задачи (3), (4). При $\gamma > 0$ решение может иметь такой же характер (графики 3, 4 на рис. 1), а может быть немонотонным и обращаться в нуль в некоторой точке $\xi = \xi_0 < 0$ (рис. 2). Такое решение соответствует тепловой волне типа солитона; при этом задача (3), (4) имеет решение в исходной постановке лишь на ограниченном промежутке времени $t \in [0, T]$, где

$$T = a^{-1}(a(0)e^{-\xi_0/\lambda}).$$

Отметим, что немонотонное решение в некоторых случаях имеет выраженный перегиб внутри отрезка $[\xi_0, 0]$ (графики 2, 4 на рис. 2). Ранее при исследовании подобных задач такое поведение решений не наблюдалось.

В завершение численного анализа был рассмотрен вопрос возможности построения непрерывного (но, разумеется, не классического) решения уравнения (11) при нулевых начальных условиях

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0. \quad (22)$$

Вычислительный эксперимент показал, что предложенный алгоритм (13)–(19) сходится в этом случае к нетривиальному решению, если принять ненулевое начальное приближение в (13): $p_0 = \phi_M(\xi)$, где функция $\phi_M(\xi)$ соответствует ближайшей к нулю точке коллокации ξ_M . Построенные решения приведены на рис. 3. На рис. ?? и 5 показаны первые и вторые производные полученных решений, соответственно. По построению они являются гладкими, однако графики показывают, что производные решения аппроксимируют излом первой производной, а также разрыв второй производной, которые имеют место вблизи нуля.

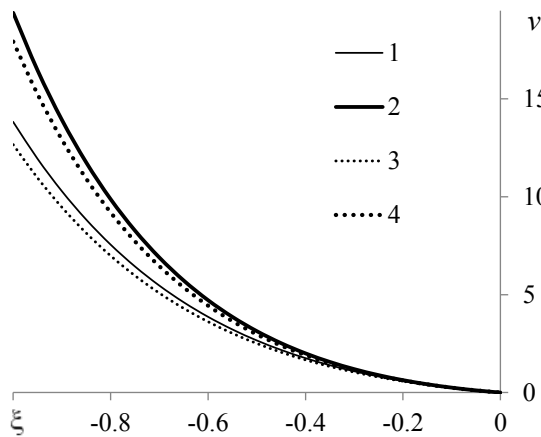


Рис. 1. Монотонные решения задачи (11), (12) при $\lambda = 1$, $\sigma = 2$: **1** — $\nu = 1$, $\gamma = 0$; **2** — $\nu = 2$, $\gamma = 0$; **3** — $\nu = 1$, $\gamma = 1$; **4** — $\nu = 2$, $\gamma = 1$.

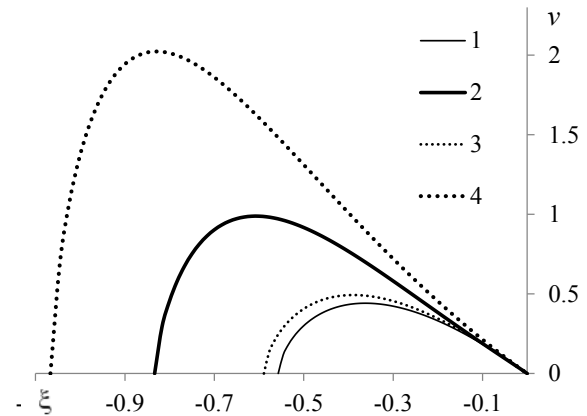


Рис. 2. Немонотонные решения задачи (11), (12) при $\sigma = 2$, $\gamma = 10$: **1** — $\nu = 1$, $\lambda = 2$; **2** — $\nu = 1$, $\lambda = 1$; **3** — $\nu = 2$, $\lambda = 2$; **4** — $\nu = 2$, $\lambda = 1$.

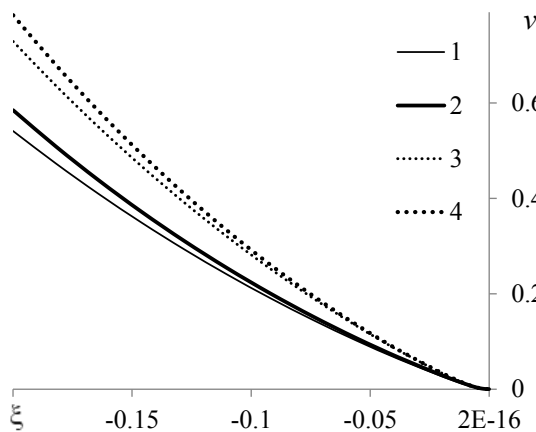


Рис. 3. Нетривиальные решения задачи (11), (22): **1** — $\sigma = 2$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **2** — $\sigma = 2$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **3** — $\sigma = 3$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$; **4** — $\sigma = 3$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$.

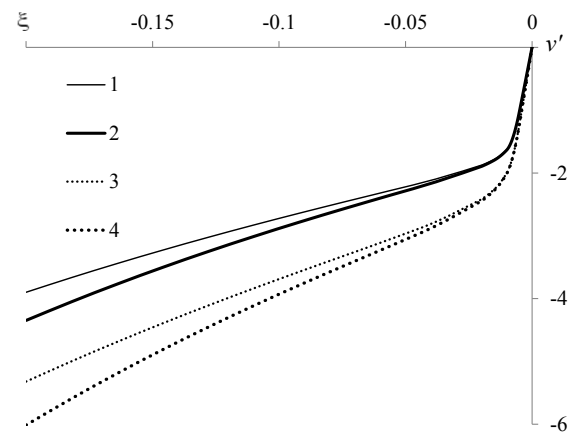


Рис. 4. Первые производные решений задачи (11), (22): **1** — $\sigma = 2$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **2** — $\sigma = 2$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **3** — $\sigma = 3$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$; **4** — $\sigma = 3$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$.

Таким образом, используемый авторами подход к построению численных решений задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, к которому сводится нахождение точных решений вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности, показал свою эффективность. Несмотря на особенность при старшей производной у ОДУ, наблюдается стабильная сходимость итерационного процесса, а также повышение точности решения с увеличением числа точек коллокации. Особо стоит отметить возможность построения нетривиального решения задачи (11), (22) с нулевыми условиями Коши.

6. Заключение. В работе исследована задача Коши для ОДУ, к которой сводится построение решений с нулевым фронтом для многомерного нелинейного параболического уравнения теплопроводности. Доказана новая теорема существования аналитических решений указанной задачи

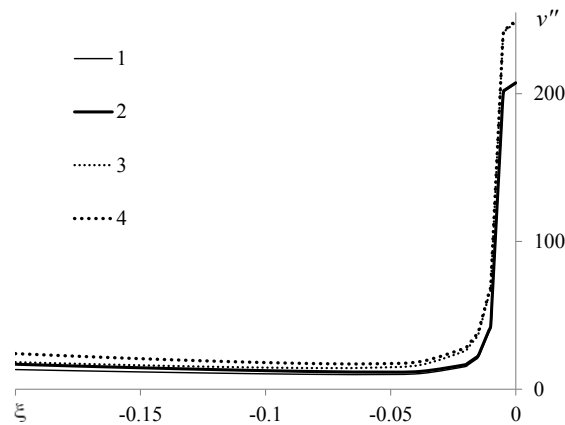


Рис. 5. Вторые производные решений задачи (11), (22): **1** — $\sigma = 2$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **2** — $\sigma = 2$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0$; **3** — $\sigma = 3$, $\nu = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$; **4** — $\sigma = 3$, $\nu = 2$, $\lambda = 1$, $\gamma = 0,5$.

и решения построены в виде рядов Маклорена. Показано, что имеется два аналитических решения: тривиальное и нетривиальное, и других классических (гладкости два и более) решений у данной задачи не существует.

С помощью алгоритма численного решения, основанного на применении метода коллокаций и радиальных базисных функций, проведен численный анализ решений. Установлена стабильная сходимость итерационного процесса, а также удовлетворительная точность, повышающаяся с увеличением числа точек коллокации. Сделаны некоторые выводы о характере поведения решений. В частности, описаны случаи, когда решение ОДУ является монотонным и существует глобальное решение исходной задачи, и примеры, когда решение ОДУ имеет максимум и решение исходной задачи существует на конечном промежутке времени. Также показана возможность построения нетривиального решения при нулевом начальном значении производной, когда классического решения, в соответствии с доказанной теоремой, заведомо не существует.

Полученные результаты могут быть использованы для верификации алгоритмов численного решения нелинейного уравнения теплопроводности. Логика дальнейших исследований предполагает проведение анализа рассмотренного уравнения методами качественной теории дифференциальных уравнений и сопоставление полученных результатов с численными расчетами, а также поиск и изучение других новых классов точных решений многомерного нелинейного уравнения теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. Н., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 1966.
3. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — 16. — С. 1057–1068.
4. Казаков А. Л., Орлов С. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2016. — 22, № 1. — С. 112–123.
5. Казаков А. Л., Орлов С. С., Орлов С. С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 3. — С. 544–560.
6. Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спесак Л. Ф. Решение задач об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 16. — С. 1057–1068.

7. Казаков А. Л., Нефедова О. А., Спевак Л. Ф., Спевак Л. Ф. О численных методах построения эталонных решений для нелинейного уравнения теплопроводности с особенностью// *Diagn. Res. Mech. Mater. Struct.* — 2020. — № 5. — С. 26–44.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
9. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
10. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
11. Buhmann M. D. Radial basis functions. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
12. Chen C. S., Chen W., Fu Z. J. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Method. — Berlin/Heidelberg: Springer, 2013.
13. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations. — New York: Interscience, 2008.
14. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions// *Acta Num.* — 2015. — 24. — P. 215–258.
15. Kansa E. J. Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations// *Comput. Math. Appl.* — 1990. — 19, № 8-9. — P. 147–161.
16. Kazakov A. L., Spevak L. F. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities// *Mathematics.* — 2022. — 10. — 1559.
17. Vazquez H. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. — Oxford: Clarendon Press, 2007.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Казаков Александр Леонидович (Kazakov Aleksandr Leonidovich)
 Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
 Сибирского отделения РАН, Иркутск;
 Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова
 Уральского отделения РАН, Екатеринбург
 (V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
 of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
 E. S. Gorkunov Institute of Engineering Science
 of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
 E-mail: kazakov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович (Spevak Lev Fridrihovich)
 Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова
 Уральского отделения РАН, Екатеринбург
 (E. S. Gorkunov Institute of Engineering Science
 of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
 E-mail: lfs@imach.uran.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 67–74
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-67-74

УДК 519.1, 511.334

КОМПОЗИЦИИ ЧИСЕЛ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ПИРАМИДЫ ПАСКАЛЯ

© 2024 г. О. В. КУЗЬМИН, М. В. СТРИХАРЬ

Аннотация. Изучаются композиции натуральных чисел с ограничениями на значения натуральных частей и их взаимосвязь с комбинаторными объектами иерархической структуры. Выведена формула для подсчета числа таких композиций с тремя ограничениями на основе сумм элементов плоских сечений пирамиды Паскаля. Получены рекуррентные соотношения и производящие функции числа композиций и рассмотрены некоторые наиболее важные частные случаи на примере известных комбинаторных чисел.

Ключевые слова: композиция числа, иерархическая структура, пирамида Паскаля, треугольник Паскаля, рекуррентное соотношение, производящая функция, числа Трибоначчи, числа Фибоначчи.

COMPOSITION OF NUMBERS WITH CONSTRAINTS AND THE HIERARCHICAL STRUCTURE OF PLANAR SECTIONS OF PASCAL'S PYRAMID

© 2024 O. V. KUZMIN, M. V. STRIKHAR

ABSTRACT. In this paper, we examine compositions of natural numbers with constraints on natural parts and their relationship with hierarchical combinatorial objects. We derive a formula for calculating the number of such compositions with three constraints based on the sums of elements of planar sections of Pascal's pyramid. Also, we obtain recurrence relations and generating functions for the numbers of compositions and examine some important special cases for well-known combinatorial numbers.

Keywords and phrases: composition of number, hierarchical structure, Pascal's pyramid, Pascal's triangle, recurrence relation, generating function, Tribonacci numbers, Fibonacci numbers.

AMS Subject Classification: 05A05, 11B75, 11P81

1. Введение. В комбинаторике и теории чисел композицией натурального числа называется его представление в виде упорядоченной суммы других натуральных чисел (см. [5]). Например, существует 16 композиций числа 5:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 = 4 + 1 = 1 + 4 = 3 + 2 = 2 + 3 = \\ &= 3 + 1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 1 + 1 + 3 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2 = 1 + 2 + 2 = \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Слагаемые, входящие в композицию, называются частями, а их количество — длиной композиции. Если ограничений на величину частей нет, то для числа n существует 2^{n-1} композиций,

из которых $\binom{n-1}{k-1}$ композиций имеют длину k , где числа $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты, т.е. коэффициенты разложения бинома

$$(x_0 + x_1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^k x_1^{n-k}.$$

В данной работе будем рассматривать композиции натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1, m_2 и m_3 , где $m_1 < m_2 < m_3$, т.е. любое слагаемое исследуемой композиции является либо числом m_1 , либо числом m_2 , либо числом m_3 , которые, для определенности в дальнейшем, образуют упорядоченное множество натуральных чисел.

Например, существует 13 композиций числа $m = 5$ с ограничениями на значения натуральных частей $m_1 = 1, m_2 = 2$ и $m_3 = 3$:

$$\begin{aligned} 5 &= 3 + 2 = 2 + 3 = \\ &= 3 + 1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 1 + 1 + 3 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2 = 1 + 2 + 2 = \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Не умаляя общности рассматриваемых случаев, далее положим, что наибольший общий делитель чисел m_1, m_2 и m_3 равен 1: $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$. В противном случае, если $\gcd(m_1, m_2, m_3) = \mu \neq 1$, то рассматриваемые композиции числа m будут существовать только в случае $m = \mu k$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, и число таких композиций будет совпадать с числом композиций числа k с ограничениями на значения натуральных частей $m_1/\mu, m_2/\mu$ и m_3/μ , где $\gcd(m_1/\mu, m_2/\mu, m_3/\mu) = 1$.

2. Пирамида и треугольник Паскаля. Пирамидой Паскаля (см. [3]) называется бесконечная иерархическая трехгранная пирамидальная структура, элементы которой для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k, l} = \binom{n}{k-1, l} + \binom{n}{k, l-1} + \binom{n}{k, l},$$

с граничными условиями

$$\binom{0}{0, 0} = 1; \quad \binom{n}{k, l} = 0, \text{ если } \min(n, k, l, n-k-l) < 0.$$

В n -м сечении (треугольнике) пирамиды ($n = 0, 1, 2, \dots$), параллельном основанию, располагаются триномиальные коэффициенты

$$\binom{n}{k, l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$$

— коэффициенты разложения тринома в форме

$$(x_0 + x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k, l} x_0^k x_1^l x_2^{n-k-l}.$$

Рекуррентные соотношения позволяют сделать вывод о том, что любой внутренний элемент пирамиды Паскаля, стоящий в n -м сечении, равен сумме трех элементов, расположенных в углах элементарного треугольника $(n-1)$ -го сечения пирамиды.

Триномиальные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\binom{n}{0, 0} = \binom{n}{n, 0} = \binom{n}{0, n} = 1$$

и равенствам

$$\binom{n}{k, l} = \binom{n}{l, k} = \binom{n}{n-k-l, l} = \binom{n}{k, n-k-l},$$

подтверждающим наличие трех осей симметрии в пирамиде Паскаля.

Важным частным случаем пирамиды Паскаля является треугольник Паскаля, определяемый, как бесконечная иерархическая треугольная структура, элементы которой для целых неотрицательных n, k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

с начальными условиями

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{k} = 0, \text{ если } \min(n, k, n-k) < 0.$$

Биномиальные коэффициенты удовлетворяют граничным условиям

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

и равенству (правилу симметрии)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

подтверждающему наличие оси симметрии в треугольнике Паскаля.

3. Плоские сечения пирамиды Паскаля. Пирамиду Паскаля можно строить в форме тетраэдра, а также пирамиды с различными значениями двухгранных углов, один из которых прямой. Для удобства дальнейшего изложения, совместим вершину пирамиды Паскаля с началом прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, а ее элементы — с точками решетки первого октанта, имеющими неотрицательные координаты. При этом числа n расположим по оси абсцисс (Ox), k — по оси ординат (Oy), l — по оси аппликат (Oz). Тем самым устанавливается соответствие между точками решетки и элементами пирамиды Паскаля, которая ограничена плоскостями $k = 0$, $n = 0$ и $n - k - l = 0$.

Рассмотрим произвольное плоское сечение (см. [4]) пирамиды Паскаля, представляющее собой некоторый треугольник. Обозначим углы, образованные этим сечением с осями ординат и аппликат, через ϕ_1 и ϕ_2 соответственно. Тогда уравнение сечения будет иметь вид:

$$n + \operatorname{tg} \phi_1 \cdot k + \operatorname{tg} \phi_2 \cdot l = \operatorname{const}.$$

Пронумеруем все параллельные между собою сечения пирамиды Паскаля, заданные таким уравнением, начиная от вершины пирамиды, и рассмотрим последовательность $\{S_m(\operatorname{tg} \phi_1, \operatorname{tg} \phi_2)\}$, $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ сумм элементов этих сечений.

Пусть

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{m_1}{m_3} - 1, \quad \operatorname{tg} \phi_2 = \frac{m_2}{m_3} - 1,$$

где $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$, $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$. В этом случае $\operatorname{tg} \phi_1 > -1$, $\operatorname{tg} \phi_2 > -1$, поэтому треугольник сечения конечен, и уравнение m -го плоского сечения пирамиды Паскаля принимает вид:

$$n + \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right)k + \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right)l = \frac{m}{m_3}. \quad (1)$$

Рассмотрим сумму

$$S_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right), \quad m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}, \quad m_1 < m_2 < m_3, \quad \gcd(m_1, m_2, m_3) = 1,$$

элементов m -го плоского сечения пирамиды Паскаля.

Теорема 1. Сумма элементов m -го плоского сечения пирамиды Паскаля с параметрами $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}$, $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$, определяется по формуле

$$S_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right) = \sum_{i=0}^{\lfloor m/m_1 \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor m/m_2 - i \rfloor} \binom{\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right)i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right)j}{i, j}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Доказательство. Действительно, все слагаемые указанного вида удовлетворяют уравнению плоскости (1), так как

$$\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right)i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right)j + \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right)k + \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right)l = \frac{m}{m_3}.$$

Никаких других элементов пирамиды Паскаля в этой плоскости нет, рассмотрены все возможные целые неотрицательные значения величин i и j , которые являются соответственно ординатами и аппликатами элементов пирамиды Паскаля, расположенных в узлах целочисленной решетки первого октанта.

Поскольку пирамида Паскаля ограничена плоскостями $k = 0$, $n = 0$ и $n - k - l = 0$, то точки пересечения этих плоскостей с плоскостью сечения (1) определяют вершины треугольника, а именно элементы

$$\begin{pmatrix} m/m_3 \\ 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m/m_2 \\ 0, m/m_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m/m_1 \\ m/m_1, 0 \end{pmatrix},$$

которые, в свою очередь, задают верхние и нижние пределы суммирования. Следовательно, сумма элементов m -го плоского сечения пирамиды Паскаля определяется по формуле (2). $\square$

4. Число композиций с тремя ограничениями.

Теорема 2. Число различных композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1 , m_2 и m_3 , где $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$, равно сумме элементов m -го плоского сечения пирамиды Паскаля вида (2).

Доказательство. Обозначим через $x_{i,j}$ количество различных композиций числа m , состоящих из i частей вида m_1 , j частей вида m_2 и $(m - m_1i - m_2j)/m_3$ частей вида m_3 :

$$m = \underbrace{m_1 + m_1 + \dots + m_1}_i + \underbrace{m_2 + m_2 + \dots + m_2}_j + \underbrace{m_3 + m_3 + \dots + m_3}_{(m - m_1i - m_2j)/m_3}.$$

Поскольку длины таких композиций будут равны

$$i + j + \frac{m - m_1i - m_2j}{m_3} = \frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right)i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right)j,$$

имеем

$$x_{i,j} = \frac{\left(\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right)i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right)j\right)!}{i!j!\left(\frac{m}{m_3} - \frac{m_1}{m_3}i - \frac{m_2}{m_3}j\right)!} = \binom{\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right)i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right)j}{i, j}.$$

Таким образом, общее число различных композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1 , m_2 и m_3 равно

$$\sum_{i=0}^{[m/m_1]} \sum_{j=0}^{[m/m_2 - i]} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{[m/m_1]} \sum_{j=0}^{[m/m_2 - i]} \binom{\frac{m}{m_3} - \left(\frac{m_1}{m_3} - 1\right)i - \left(\frac{m_2}{m_3} - 1\right)j}{i, j} = S_m \left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1 \right),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Определим случай композиции числа $m = 0$. Для любых натуральных значений m_1 , m_2 и m_3 , при условии, что $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$, имеем

$$S_0 = \binom{0}{0, 0} = 1.$$

Это число соответствует вершине пирамиды Паскаля и будет играть большую роль в нахождении рекуррентных соотношений и формальной производящей функции для числа композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1 , m_2 и m_3 . Поэтому далее берем значения m из множества неотрицательных целых чисел, т.е. считаем, что

$$m \in \mathbb{N}_0.$$

5. Рекуррентное соотношение. Введем обозначение $S_m = S_m\left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1\right)$ и рассмотрим последовательность $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей m_1 , m_2 и m_3 , где $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$.

Теорема 3. Последовательность чисел $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + S_{m-m_3} \quad (3)$$

с начальными условиями

$$S_0 = 1, \quad S_1 = S_2 = \dots = S_{m_1-1} = 0; \quad (4)$$

числа S_m при $m = m_1, \dots, m_{m_2-1}$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1}; \quad (5)$$

числа S_m при $m = m_2, \dots, m_{m_3-1}$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2}. \quad (6)$$

Доказательство. Действительно, имеются только три возможности для того, чтобы составить композицию числа m из частей m_1 , m_2 и m_3 . В первом случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_1)$ при помощи чисел m_1 , m_2 и m_3 , а затем добавить в сумму справа число m_1 . Во втором случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_2)$ при помощи чисел m_1 , m_2 и m_3 , а затем добавить в сумму справа число m_2 . В третьем случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_3)$ при помощи чисел m_1 , m_2 и m_3 , а затем добавить в сумму справа число m_3 . Указанные возможности и образуют рекуррентное соотношение (3).

Если $0 < m < m_1 - 1$, то не существует ни одной композиции числа m , составленной из частей m_1 , m_2 и m_3 . Таким образом, получаем начальные условия (4). При $m = 0$ имеем $S_0 = 1$.

Если $m_1 \leq m < m_2 - 1$, то существует ровно столько композиций числа m , сколько существует композиций числа $m - m_1$. Получили соотношение (5).

Если $m_2 \leq m < m_3 - 1$, то можно составить композицию числа m только из частей m_1 и m_2 . В данном случае имеется только две возможности сделать это. В первом случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_1)$ при помощи чисел m_1 и m_2 , а затем добавить в сумму справа число m_1 . Во втором случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_2)$ при помощи чисел m_1 и m_2 , а затем добавить в сумму справа число m_2 . Указанные возможности и образуют рекуррентную формулу (6). $\square$

В силу симметрии пирамиды Паскаля из теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Следствие. Для натуральных чисел m_1 , m_2 и m_3 , $m_1 < m_2 < m_3$, $\gcd(m_1, m_2, m_3) = 1$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} S_m\left(\frac{m_1}{m_3} - 1, \frac{m_2}{m_3} - 1\right) &= S_m\left(\frac{m_2}{m_3} - 1, \frac{m_1}{m_3} - 1\right) = S_m\left(\frac{m_1}{m_2} - 1, \frac{m_3}{m_2} - 1\right) = \\ &= S_m\left(\frac{m_3}{m_2} - 1, \frac{m_1}{m_2} - 1\right) = S_m\left(\frac{m_2}{m_1} - 1, \frac{m_3}{m_1} - 1\right) = S_m\left(\frac{m_3}{m_1} - 1, \frac{m_2}{m_1} - 1\right). \end{aligned} \quad (7)$$

6. Производящая функция. Поставим в соответствие последовательности сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, формальный степенной ряд и запишем производящую функцию для этих сумм.

Теорема 4. Производящая функция сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, имеет вид

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}}. \quad (8)$$

Доказательство. В силу теоремы 3 последовательность сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет рекуррентным соотношениям (3)–(6). Перепишем рекуррентное соотношение (3) в виде

$$S_{m+m_3} = S_{m+m_3-m_1} + S_{m+m_3-m_2} + S_m.$$

Умножив его почленно на x^{m+m_3} и просуммировав по m в пределах от нуля до бесконечности, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_3} x^{m+m_3} &= x^{m_1} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_3-m_1} x^{m+m_3-m_1} + \\ &+ x^{m_2} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_3-m_2} x^{m+m_3-m_2} + x^{m_3} \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m. \end{aligned}$$

Пусть

$$F_S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m;$$

тогда из предыдущего равенства имеем

$$\begin{aligned} F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m &= x^{m_1} \left(F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m \right) + \\ &+ x^{m_2} \left(F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m \right) + x^{m_3} F_S(x). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\begin{aligned} F_S(x) - \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m &= x^{m_1} F_S(x) - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m + \\ &+ x^{m_2} F_S(x) - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m + x^{m_3} F_S(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_S(x) - x^{m_1} F_S(x) - x^{m_2} F_S(x) - x^{m_3} F_S(x) &= \\ &= \sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m. \end{aligned}$$

Преобразуем отдельно правую часть равенства, учитывая начальные условия (4) и рекуррентные соотношения (5) и (6):

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{m_3-1} S_m x^m - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_3-m_1-1} S_m x^m - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m = \\ &= \left(S_0 + \sum_{m=1}^{m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m \right) - x^{m_1} \left(\sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^m \right) - \\ &- x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m = 1 + 0 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m - \sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^{m+m_1} - \\ &- \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^{m+m_1} - \sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^{m+m_2} = 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m - \\ &- \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_{m-m_1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_1} x^m - \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_2} x^m = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} (S_m - S_{m-m_1}) x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} (S_m - S_{m-m_1} - S_{m-m_2}) x^m = \\
&= 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} 0 \cdot x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} 0 \cdot x^m = 1.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$F_S(x) (1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}) = 1, \quad F_S(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - x^{m_3}},$$

что и требовалось доказать. $\square$

7. Числа Трибоначчи. Рассмотрим последовательность композиций числа m с ограничениями на значения натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_3 = 3$.

При $m = 1$ получаем одну композицию: $m = 1$.

При $m = 2$ получаем две композиции: $m = 1 + 1 = 2$.

При $m = 3$ получаем четыре композиции: $m = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.

При $m = 4$ получаем семь композиций: $m = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 3 + 1$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, образуется последовательность 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, ..., сумм вида $S_m(-2/3, -1/3)$, $m \in \mathbb{N}_0$, плоских сечений пирамиды Паскаля при

$$\operatorname{tg} \phi_1 = -\frac{2}{3}, \operatorname{tg} \phi_2 = -\frac{1}{3}.$$

В силу (7) справедливы равенства

$$S_m \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) = S_m \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) = S_m \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) = S_m \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = S_m(1, 2) = S_m(2, 1).$$

Число композиций в данном случае согласно (2) может быть вычислено, например, по формуле

$$S_m = S_m(1, 2) = \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[m/3-i]} \binom{m-i-2j}{i, j},$$

и удовлетворяет, исходя из (3)–(6), рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + S_{m-3}, \quad S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = 2.$$

Заметим, что полученная последовательность композиций числа m совпадает с последовательностью чисел Трибоначчи (см. [3]), определяемой при помощи рекуррентного соотношения

$$t_{m+3} = t_{m+2} + t_{m+1} + t_m, \quad t_0 = t_1 = 0, \quad t_2 = 1;$$

при этом $S_m = t_{m+2}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности, исходя из (8), имеет вид

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}.$$

8. Числа Фибоначчи. Если уменьшить количество ограничений до двух, то переходим в область треугольника Паскаля. Рассмотрим, например, последовательность композиций числа m с ограничениями на значения натуральных частей $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$.

При $m = 1$ получаем одну композицию: $m = 1$.

При $m = 2$ получаем две композиции: $m = 1 + 1 = 2$.

При $m = 3$ получаем три композиции: $m = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$.

При $m = 4$ получаем пять композиций: $m = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, образуется последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., сумм вида $S_m(-1/2)$, $m \in \mathbb{N}_0$, расположенных в сечениях треугольника Паскаля при

$\operatorname{tg} \phi = -1/2$. Поскольку, в силу симметрии треугольника Паскаля, $S_m(-1/2) = S_m(1)$, то число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1) = \sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m-i}{i}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2}, \quad S_0 = S_1 = 1.$$

Заметим, что эта последовательность совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи (см. [3]):

$$f_m = f_{m-1} + f_{m-2}, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1;$$

при этом $S_m = f_{m+1}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$F_S(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Полученные в данной работе соотношения достаточно легко обобщаются на случай n ограничений, что позволяет совершенствовать известные алгоритмы перечисления композиций (см. [1, 2]) или строить новые, вычислять длины и количество композиций чисел фиксированной длины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородин А. В., Бирюков Е. С. О практической реализации некоторых алгоритмов, связанных с проблемой композиции чисел // Киберн. програм. — 2015. — № 1. — С. 27–45.
2. Кручинин В. В. Алгоритмы генерации и нумерации композиций и разбиений натурального числа n // Докл. Томск. гос. ун-та сист. управл. радиоэлектр. — 2008. — 17, № 3. — С. 113–119.
3. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
4. Кузьмин О. В., Серегина М. В. Плоские сечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации // Дискр. мат. — 2010. — 22, № 3. — С. 83–93.
5. Эндриус Г. Теория разбиений. — Москва: Наука, 1982.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кузьмин Олег Викторович (Kuz'min Oleg Viktorovich)

Иркутский государственный университет

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: quzminov@mail.ru

Стрихарь Марина Валерьевна (Strihar Marina Valerievna)

Забайкальский институт железнодорожного транспорта, Чита;

Иркутский государственный университет путей сообщения

(Transbaikal Institute of Railway Transport, Chita, Russia;

Irkutsk State University of Railway Engineering, Irkutsk, Russia)

E-mail: mseryogina@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 75–82
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-75-82

УДК 530.145.86, 004.942

КВАНТОВЫЙ ПОИСК С РАЗРУШАЮЩИМ СЦЕПЛЕННОСТЬ КАНАЛОМ ОБРАЩЕНИЯ К ОРАКУЛУ

© 2024 г. А. Э. РАСТЁГИН, А. М. ШЕМЕТ

Аннотация. Работа посвящена исследованию квантового поиска в случае, когда обмен данных с оракулом подвержен разрушающим сцепленность искажениям. Исследовано влияние разрушающих сцепленность искажений на эволюцию вероятности успеха и когерентности квантового регистра относительно вычислительного базиса.

Ключевые слова: квантовый поиск, итерация Гровера, разрушающий сцепленность канал, вероятность успеха, относительная энтропия когерентности.

QUANTUM SEARCH WITH ENTANGLEMENT-BREAKING CHANNEL OF QUERIES TO THE ORACLE

© 2024 А. Е. RASTEGIN, А. М. SHEMET

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of quantum search in the case of entanglement-breaking distortions in queries to the oracle. We examine an influence of entanglement-breaking distortions on evolution of the success probability and the register coherence with respect to the computational basis.

Keywords and phrases: quantum search, Grover iteration, entanglement-breaking channel, success probability, relative entropy of coherence.

AMS Subject Classification: 81P45, 81P68

1. Введение. В настоящее время значительное внимание уделяется использованию квантовых носителей как средств передачи и обработки информации (см. [1, 2]). Они позволяют в ряде случаев достичь значительного повышения секретности коммуникации и ускорения работы алгоритмов, как, например, в известном достижении Шора (см. [11]). Хотя квантовые информационные технологии имеют статус развивающихся, наблюдается явный прогресс как в теории, так и в плане реализации устойчивых к шумам квантовых вычислений с десятками или даже сотнями кубитов. Системы квантового распределения секретного ключа уже представлены на рынке технологических решений в области кибербезопасности. Построение квантовых компьютеров с достаточным для практических целей числом кубитов оценивается как вполне реалистичная, хотя и очень сложная технологическая задача.

Алгоритм поиска Гровера (см. [4]) стал основой для целого семейства родственных методов квантового усиления амплитуды. Однако до последнего времени оставался незатронутым вопрос о функционировании квантового поиска с зашумленными компонентами. Превосходство квантовых алгоритмов над классическими основано на использовании неклассических корреляций в суперпозиционном состоянии квантового регистра. Хорошо известно, что эти корреляции очень

Работа выполнена при поддержке гранта Иркутского государственного университета для молодых ученых № 091-23-309 «Динамика корреляций и когерентности в алгоритмах квантового поиска при наличии шума».

чувствительны к помехам, возникающим при взаимодействии с окружением. Проблема реализации устойчивых к ошибкам квантовых вычислений с достаточно большим количеством кубитов является одним из основных препятствий на пути создания квантовых компьютеров.

Воздействие дефазировки на квантовый поиск было рассмотрено с различных точек зрения в [7, 10]. Статьи [8, 9] посвящены квантовому поиску с затуханием и деполяризацией в линиях связи с оракулом и развивают направление, инициированное статьей [7]. Хотя эти исследования и не охватывают всех возможных сценариев, нам удалось проанализировать основные характеристики в зависимости от числа итераций. Предварительный анализ модельных случаев вполне уместен в рамках формулировки сценариев квантового поиска с комбинацией помех различных типов. В данной работе представлены результаты моделирования алгоритма Гровера с разрушающим сцеплением воздействием в линиях связи с оракулом.

2. Основные определения. Пространство поиска содержит $N = 2^n$ строк $x = (x_1 \cdots x_n)$ с $x_j \in \{0, 1\}$, дающих числа множества $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ в бинарном представлении. Требуется найти одну из целевых строк из набора $\mathcal{M}$, тогда как остальные строки лежат в дополнении $\mathcal{M}^c$. Без потери общности принимаем $1 \leq |\mathcal{M}| \leq N/2$. После инициализации n -кубитового регистра в состояние $|0\rangle$ применяется преобразование Адамара с результатом

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle. \quad (1)$$

Итерация Гровера начинается с запроса к оракулу, что приводит к умножению каждого целевого состояния на $\exp(i\pi)$ и описывается оператором J . Второй шаг итерации, известный как «инверсия относительно среднего», имеет вид

$$K = 2|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| - \mathbb{1}_N, \quad (2)$$

где $\mathbb{1}_N$ обозначает тождественный оператор в пространстве состояний n кубитов. Тем самым итерация Гровера представляется оператором $G = KJ$. Эволюцию состояния квантового регистра удобно показать в терминах нормированных суперпозиций нецелевых и целевых состояний (см. [7]):

$$|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{x \in \mathcal{M}^c} |x\rangle, \quad |m\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x \in \mathcal{M}} |x\rangle. \quad (3)$$

Угол $\theta \in (0, \pi/2)$ удовлетворяет условиям $\cos \theta = 1 - 2M/N$, $\sin^2(\theta/2) = M/N$ и $\cos^2(\theta/2) = 1 - M/N$. В базисе $\{|m\rangle, |w\rangle\}$ итерация Гровера принимает наглядную форму, поворачивая состояние регистра в сторону целевой суперпозиции $|m\rangle$ на угол θ . В результате t итераций получается чистое состояние

$$|\psi(t)\rangle = G^t |\psi(0)\rangle = \cos(t\theta + \theta/2) |w\rangle + \sin(t\theta + \theta/2) |m\rangle. \quad (4)$$

При отсутствии шума вероятность успеха выражается в виде

$$P_{\text{suc}}^{(0)}(t) = \langle\psi(t)|\Pi_{\mathcal{M}}|\psi(t)\rangle = \sin^2(t\theta + \theta/2), \quad (5)$$

где проектор на подпространство целевых состояний равен

$$\Pi_{\mathcal{M}} = \sum_{x \in \mathcal{M}} |x\rangle\langle x|. \quad (6)$$

В последние годы известное внимание уделяется изучению квантовой когерентности как вычислительного ресурса, в том числе применительно к алгоритмам поиска (см. [5]). Пусть множество $\mathcal{I}$ содержит все матрицы плотности вида

$$\delta = \sum_{x=0}^{N-1} b(x) |x\rangle\langle x|, \quad \sum_{x=0}^{N-1} b(x) = 1. \quad (7)$$

Для двух нормированных матриц плотности ρ и ω квантовая относительная энтропия равна (см. [1])

$$D_1(\rho||\omega) = \begin{cases} \text{tr}(\rho \ln \rho - \rho \ln \omega), & \text{если } \text{ran}(\rho) \subseteq \text{ran}(\omega), \\ +\infty, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (8)$$

где $\text{ran}(\rho)$ обозначает образ ρ . Определим квантификатор когерентности $C_1(\rho)$ как минимум относительной энтропии $D_1(\rho||\delta)$ по отношению ко всем некогерентным состояниям $\delta \in \mathcal{I}$ (см. [3]). В результате получаем величину

$$C_1(\rho) = \min_{\delta \in \mathcal{I}} D_1(\rho||\delta) \equiv S_1(\rho_{\text{diag}}) - S_1(\rho), \quad (9)$$

где энтропия фон Неймана $S_1(\rho) = -\text{tr}(\rho \ln \rho)$ и «ближайшее» к ρ некогерентное состояние

$$\rho_{\text{diag}} = \sum_{x=0}^{N-1} p(x; \rho) |x\rangle\langle x|, \quad p(x; \rho) = \langle x|\rho|x\rangle. \quad (10)$$

Сохраняющее след вполне положительное преобразование (10) описывает измерение в вычислительном базисе. Кроме того, оно является примером разрушающего сцепленность квантового канала (см. [2]).

3. Модель квантового поиска с разрушением сцепленности. Многообразие различных сценариев воздействия шума на квантовые алгоритмы чрезвычайно велико. Поэтому целесообразно ограничиться одним типом вносимых ошибок, по крайней мере на начальном этапе анализа. Для параметра $0 \leq \lambda \leq 1$ рассмотрим семейство вполне положительных преобразований вида

$$\rho \mapsto \Phi_\lambda(\rho) = (1 - \lambda)\rho + \lambda\Gamma(\rho), \quad (11)$$

где преобразование $\rho \mapsto \Gamma(\rho)$ вводится по отношению к ортонормированному базису $\{|g\rangle\}$ как

$$\Gamma(\rho) = \sum_{g=0}^{N-1} |g\rangle\langle g|\rho|g\rangle\langle g|. \quad (12)$$

При наличии разрушающих сцепленность искажений в линиях связи с оракулом изменения матрицы плотности на итерации t описываются уравнением

$$\varrho(t) \mapsto \varrho(t+1) = \Upsilon_K \circ \Phi_\lambda \circ \Upsilon_J \circ \Phi_\lambda(\varrho(t)), \quad (13)$$

а унитарные каналы $\Upsilon_J(\rho) = J\rho J^\dagger$ и $\Upsilon_K(\rho) = K\rho K^\dagger$ отвечают неискаженному шумом квантовому поиску. Для того чтобы решить рекуррентное соотношение (13) в замкнутой форме, нужно задать конкретный вид отображения (12). Достаточно содержательная динамика возникает уже в простейшем эффективно двумерном случае, когда базис $\{|g\rangle\}$ включает кет-векторы $|w\rangle$ и $|m\rangle$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть n -кубитовый регистр инициализирован в состоянии (1), а его матрица плотности эволюционирует согласно (13) с базисом $\{|g\rangle\}$, содержащим $|w\rangle$ и $|m\rangle$. Для всех целых $t \geq 0$ матрица плотности регистра выражается в виде

$$\varrho(t) = \frac{1 + r_z(t)}{2} |w\rangle\langle w| + r_x(t) (|w\rangle\langle m| + |m\rangle\langle w|) + \frac{1 - r_z(t)}{2} |m\rangle\langle m| \quad (14)$$

со следующими коэффициентами:

$$r_x(t) = a_{xx}(t) \sin \theta + a_{xz}(t) \cos \theta, \quad (15)$$

$$r_z(t) = a_{zx}(t) \sin \theta + a_{zz}(t) \cos \theta, \quad (16)$$

$$a_{xx}(t) = \frac{\mu_+^{t+1} - \mu_-^{t+1} - (\mu_+^t - \mu_-^t) \cos 2\theta}{\mu_+ - \mu_-}, \quad (17)$$

$$a_{xz}(t) = \frac{(\mu_+^t - \mu_-^t)(\cos 2\theta - \mu_+)(\cos 2\theta - \mu_-)}{(\mu_+ - \mu_-) \nu \sin 2\theta}, \quad (18)$$

$$a_{zx}(t) = \frac{-(\mu_+^t - \mu_-^t)\nu \sin 2\theta}{\mu_+ - \mu_-}, \quad (19)$$

$$a_{zz}(t) = \frac{\mu_+^t(\cos 2\theta - \mu_-) + \mu_-^t(\mu_+ - \cos 2\theta)}{\mu_+ - \mu_-}, \quad (20)$$

$$2de \nu = (1 - \lambda)^2 u$$

$$2\mu_{\pm} = (1 + \nu) \cos 2\theta \pm \sqrt{(1 + \nu)^2 \cos^2 2\theta - 4\nu}. \quad (21)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что в рамках принятых условий входящие в (13) преобразования оставляют подпространство $\text{span}\{|w\rangle, |m\rangle\}$ инвариантным. Следуя [7, 8], представим матрицу плотности регистра в терминах эффективного вектора Блоха (r_x, r_y, r_z) , так что

$$\begin{aligned} 2\varrho(t) &= (1 + r_z(t))|w\rangle\langle w| + (r_x(t) - ir_y(t))|w\rangle\langle m| + \\ &\quad + (r_x(t) + ir_y(t))|m\rangle\langle w| + (1 - r_z(t))|m\rangle\langle m| = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + r_z(t) & r_x(t) - ir_y(t) \\ r_x(t) + ir_y(t) & 1 - r_z(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Начальному состоянию (1) соответствует вектор Блоха с компонентами $r_x(0) = \sin \theta$, $r_y(0) = 0$ и $r_z(0) = \cos \theta$. В [7, 8] было показано, что

$$K = \cos \theta |w\rangle\langle w| + \sin \theta (|w\rangle\langle m| + |m\rangle\langle w|) - \cos \theta |m\rangle\langle m| \quad (23)$$

и в подпространстве $\text{span}\{|w\rangle, |m\rangle\}$ имеют место соотношения

$$\sigma_x \xrightarrow{\Upsilon_K} -\cos 2\theta \sigma_x + \sin 2\theta \sigma_z, \quad \sigma_z \xrightarrow{\Upsilon_K} \sin 2\theta \sigma_x + \cos 2\theta \sigma_z.$$

Если $r_y = 0$, то преобразование Υ_K описывается формулой

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_z \end{pmatrix}. \quad (24)$$

В результате преобразования Υ_J изменяется знак у компоненты r_x , тогда как преобразование Φ_λ умножает эту компоненту на фактор $1 - \lambda = \sqrt{\nu}$. Итак, после каждой итерации t вектор Блоха имеет только две ненулевые компоненты $r_x(t)$ и $r_z(t)$. Поэтому рекуррентное соотношение (13) принимает вид

$$\mathbf{r}(t) \mapsto \mathbf{r}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{r}(t), \quad (25)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \nu \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\nu \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (26)$$

С учетом формул (39)–(40) вектор Блоха после итераций записывается в виде $\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}^t \mathbf{r}(0)$ с матрицей

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^t &= \frac{\nu^{-1}}{\sin 2\theta(\mu_- - \mu_+)} \begin{pmatrix} \cos 2\theta - \mu_+ & \cos 2\theta - \mu_- \\ \nu \sin 2\theta & \nu \sin 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_+^t & 0 \\ 0 & \mu_-^t \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \nu \sin 2\theta & \mu_- - \cos 2\theta \\ -\nu \sin 2\theta & \cos 2\theta - \mu_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx}(t) & a_{xz}(t) \\ a_{zx}(t) & a_{zz}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Непосредственные вычисления матричных элементов приводят к формулам (17)–(20). Подстановкой начальных компонент $r_x(0) = \sin \theta$ и $r_z(0) = \cos \theta$ находим выражения (15) и (16). $\square$

Используя матрицу плотности (14), получаем вероятность успеха после t итераций в виде

$$P_{\text{suc}}^{(\lambda)}(t) = \text{tr}(\Pi_{\mathcal{M}} \varrho(t)) = \frac{1 - r_z(t)}{2}, \quad (28)$$

где z -компонента эффективного вектора Блоха дается формулой (16). Ненулевые собственные значения матрицы плотности (14) равны

$$\frac{1 \pm \sqrt{r_x(t)^2 + r_z(t)^2}}{2}. \quad (29)$$

Через них выражается энтропия фон Неймана $S_1(\boldsymbol{\varrho}(t))$ как функция числа итераций t .

4. Поведение вероятности успеха и когерентности регистра. Рассмотрим случай, когда собственные значения $\mu = \sqrt{\nu} \exp(i\varphi)$ являются комплексно сопряженными друг другу числами, причем

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{4\nu}{(1+\nu)^2 \cos^2 2\theta} - 1}. \quad (30)$$

Тогда формулы (17)–(20) переписываются в следующем виде:

$$a_{xx}(t) = \nu^{t/2} \frac{\sin(t+1)\varphi - \nu^{-1/2} \cos 2\theta \sin t\varphi}{\sin \varphi}, \quad (31)$$

$$a_{xz}(t) = \nu^{(t-1)/2} \frac{(1 - 2\nu^{-1/2} \cos 2\theta \cos \varphi + \nu^{-1} \cos^2 2\theta) \sin t\varphi}{\sin 2\theta \sin \varphi}, \quad (32)$$

$$a_{zx}(t) = -\nu^{(t+1)/2} \frac{\sin 2\theta \sin t\varphi}{\sin \varphi}, \quad (33)$$

$$a_{zz}(t) = \nu^{t/2} \frac{\nu^{-1/2} \cos 2\theta \sin t\varphi - \sin(t-1)\varphi}{\sin \varphi}. \quad (34)$$

Таким образом, элементы матрицы $\mathbf{A}^t$ и, тем самым, компоненты эффективного вектора Блоха являются осциллирующими функциями числа итераций.

Полученные выражения позволяют исследовать влияние разрушающего сцепленность воздействия в линиях связи с оракулом. При $\nu > 0$ коэффициенты (31)–(34) демонстрируют осцилляции с затухающей амплитудой. Целесообразно проиллюстрировать влияние разрушающего сцепленность канала графически на конкретных примерах. Вероятность успеха показана на рис. 1 для четырех значений λ . Видно, что увеличение N в четыре раза приводит к уменьшению количества пиков на правых графиках в два раза. При фиксированном M вероятность успеха зависит как от параметра шума λ , так и от объема пространства поиска N . Видно, что даже незначительный уровень разрушения сцепленности способен привести к довольно быстрому вырождению квантового поиска. В случае $\lambda = 0,015$ последующие пики оказываются заметно подавленными для обоих значений N . Если $\lambda > 0$, то существует предел $P_{\text{suc}}^{(\lambda)}(t)$ при $t \rightarrow \infty$, равный $1/2$. При наличии искажений рассматриваемого типа эффективный вектор Блоха стремится к нулевому вектору.

В последние годы значительное внимание уделяется изучению квантовой когерентности как потенциального вычислительного ресурса. Разумеется, воздействие шумов принципиальным образом влияет на изменение когерентности в процессе квантового поиска (см. [5, 7, 8]). В [6] была доказана двусторонняя оценка

$$h_1(P_{\text{suc}}) \leq C_1(\boldsymbol{\rho}) + S_1(\boldsymbol{\rho}) \leq P_{\text{suc}} \ln \left(\frac{M}{P_{\text{suc}}} \right) + (1 - P_{\text{suc}}) \ln \left(\frac{N - M}{1 - P_{\text{suc}}} \right), \quad (35)$$

где $h_1(P_{\text{suc}})$ обозначает бинарную энтропию Шеннона. Ненулевой уровень когерентности определяется первым и третьим слагаемыми в правой части (14). При $\lambda > 0$ входящие в эти слагаемые коэффициенты по мере роста числа итераций стремятся к $1/2$.

Используя собственные значения (29) матрицы плотности регистра, записываем энтропию фон Неймана квантового регистра в виде

$$S_1(\boldsymbol{\varrho}(t)) = \ln 2 - \frac{1 + \sqrt{r_x(t)^2 + r_z(t)^2}}{2} \ln \left(1 + \sqrt{r_x(t)^2 + r_z(t)^2} \right) - \frac{1 - \sqrt{r_x(t)^2 + r_z(t)^2}}{2} \ln \left(1 - \sqrt{r_x(t)^2 + r_z(t)^2} \right). \quad (36)$$

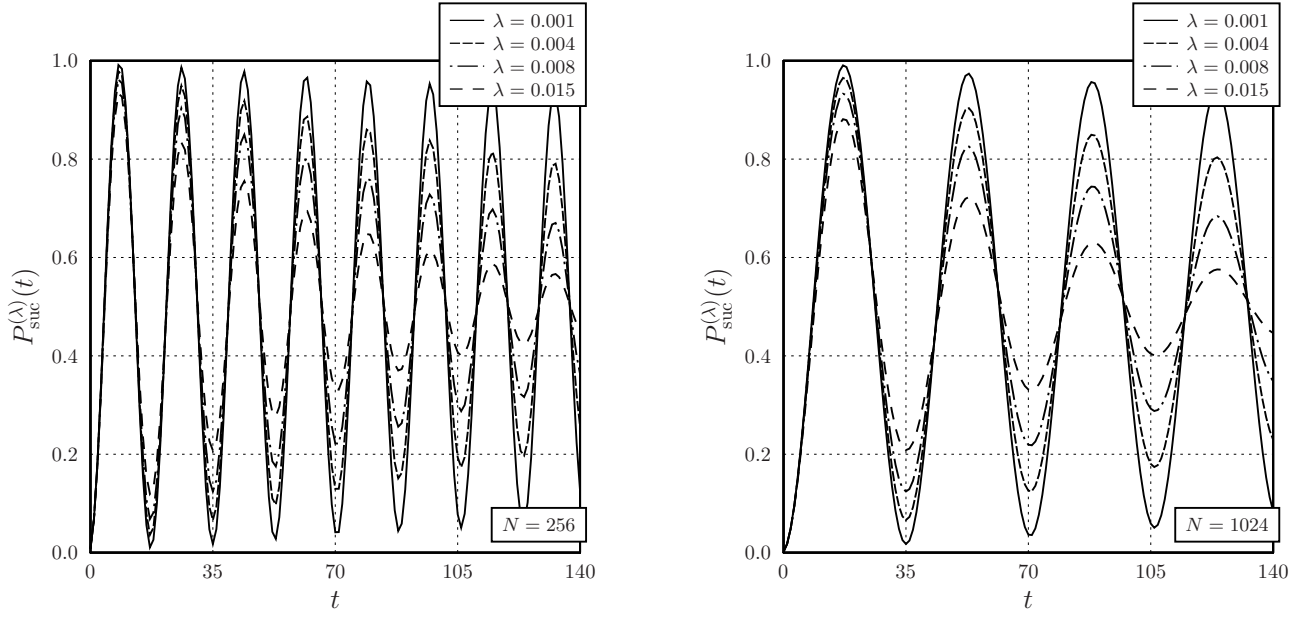


Рис. 1. Величина (28) для нескольких λ , $M = 2$, $N = 256$ (слева) и $N = 1024$ (справа).

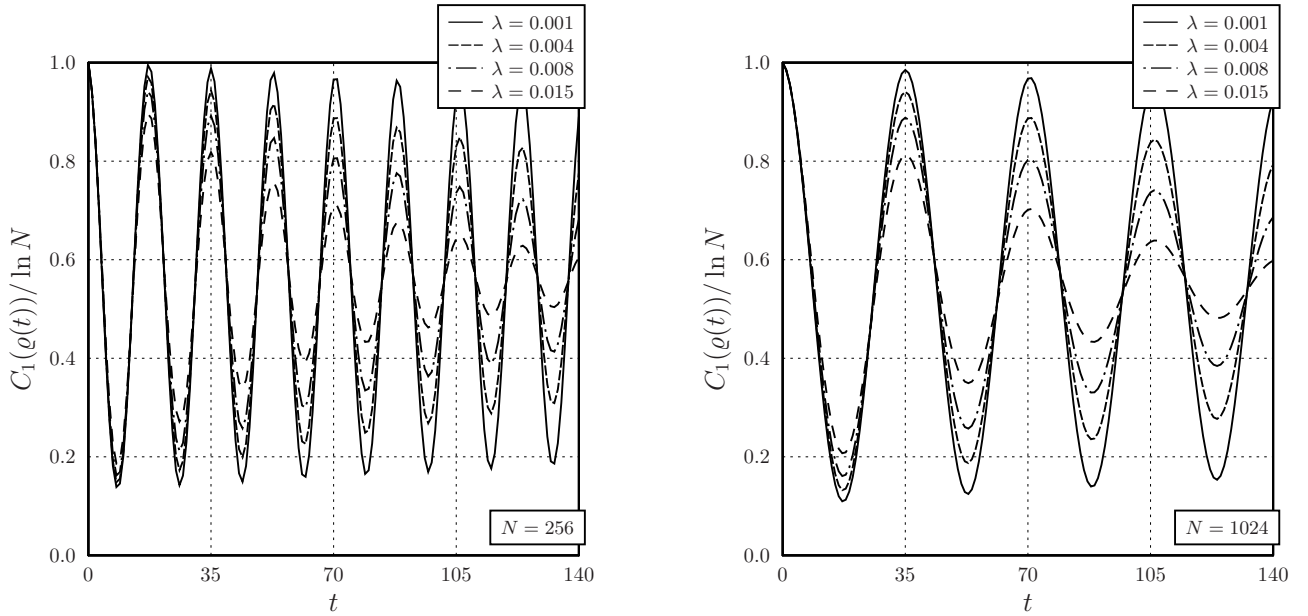


Рис. 2. Отмасштабированная относительная энтропия когерентности (37) для нескольких λ , $M = 2$, $N = 256$ (слева) и $N = 1024$ (справа).

В рассматриваемой модели правая часть неравенства (35) становится равенством, так что относительная энтропия когерентности представляется выражением

$$C_1(\mathbf{q}(t)) = P_{\text{suc}}^{(\lambda)}(t) \ln \left(\frac{M}{P_{\text{suc}}^{(\lambda)}(t)} \right) + (1 - P_{\text{suc}}^{(\lambda)}(t)) \ln \left(\frac{N - M}{1 - P_{\text{suc}}^{(\lambda)}(t)} \right) - S_1(\mathbf{q}(t)). \quad (37)$$

Формулу (37) можно трактовать как соотношение дополнителности между когерентностью $C_1(\mathbf{q}(t))$ и вероятностью успеха $P_{\text{suc}}^{(\lambda)}(t)$. Видно, что повышение уровня когерентности приводит к снижению вероятности успеха и наоборот. Это легко проиллюстрировать графически. На рис. 2

относительная энтропия когерентности квантового регистра показана как функция числа итераций при тех же значениях других параметров, что использовались для кривых на рис. 1. Для наглядности графики относительной энтропии отмасштабированы делением на $\ln N$, что приводит их к одному и тому же интервалу значений. В определенных аспектах кривые рис. 2 напоминают показанные на рис. 1. Например, увеличение N в четыре раза приводит к удвоению периода по t . С ростом λ высота последующих пиков уменьшается значительно быстрее. Сопоставление рис. 1 и рис. 2 демонстрирует также, что затухающие колебания вероятности успеха и относительной энтропии когерентности находятся в противофазе, так что последовательные максимумы одной величины соответствуют минимумам другой и наоборот. При $\lambda > 0$ и неограниченном возрастании t относительная энтропия когерентности стремится к предельному значению, зависящему от M и N , а именно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_1(\varrho(t)) = \frac{1}{2} \ln(NM - M^2).$$

Действительно, в указанном пределе остаются лишь первое и третье слагаемые в правой части (14), т.е. матрица плотности квантового регистра становится диагональной в подпространстве $\text{span}\{|w\rangle, |m\rangle\}$. Если $M \ll N$, то предельное значение относительной энтропии когерентности в первом приближении составляет $0,5 \ln N$.

5. Заключение. Представлены результаты анализа квантового поиска с разрушением сцепленности в линиях связи с оракулом. Совместно с работами [7–10] они формируют базу для исследования алгоритма Гровера при комбинированном воздействии искажений различных типов. На основе проведенных исследований можно сделать следующие выводы. Поскольку алгоритм вынужден использовать многократные обращения к оракулу, квантовый поиск быстро вырождается при сравнительно умеренных уровнях разрушения сцепленности. Если имеются опасения по поводу искажений или активного противодействия в линиях связи с оракулом, то целесообразно ограничить выполняемые итерации количеством, достаточным для попадания в окрестность первого пика. Все эти наблюдения согласуются с результатами изучения других типов ошибок в канале обращения к оракулу (см. [7–9]). Как было отмечено в [10], локализация коллективных ошибок с точки зрения разделения вычислительного базиса на блоки влияет на квантовый поиск с зашумленными компонентами. Результаты данного исследования совместно с выводами статьи [9] свидетельствуют о том, что уязвимость на этапе обращения к оракулу является значительной при различных локализациях.

6. Приложение о диагонализации матрицы (26). Собственные значения матрицы являются корнями уравнения

$$\mu^2 - (1 + \nu) \cos 2\theta \mu + \nu = (\mu - \mu_+)(\mu - \mu_-) = 0 \quad (38)$$

и определяются формулой (21). Они различны при выполнении условия $(1 + \nu)^2 \cos^2 2\theta \neq 4\nu$, что дает возможность привести матрицу к диагональному виду. Стандартные вычисления приводят к следующим выражениям:

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \mu_+ & 0 \\ 0 & \mu_- \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$X = \begin{pmatrix} \cos 2\theta - \mu_+ & \cos 2\theta - \mu_- \\ \nu \sin 2\theta & \nu \sin 2\theta \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \frac{\nu^{-1}}{\sin 2\theta(\mu_- - \mu_+)} \begin{pmatrix} \nu \sin 2\theta & \mu_- - \cos 2\theta \\ -\nu \sin 2\theta & \cos 2\theta - \mu_+ \end{pmatrix}. \quad (40)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. — М.: Мир, 2006.
2. Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация. — М.: МЦНМО, 2014.
3. Baumgratz T., Cramer M., Plenio M. B. Quantifying coherence// Phys. Rev. Lett. — 2014. — 113, № 14. — 140401.
4. Grover L. K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack// Phys. Rev. Lett. — 1997. — 79, № 2. — P. 325–328.

5. *Pan M., Situ H., Zheng S.* Complementarity between success probability and coherence in Grover search algorithm// *Europhys. Lett.* — 2022. — 138, № 4. — 48002.
6. *Rastegin A. E.* On the role of dealing with quantum coherence in amplitude amplification// *Quantum Inf. Process.* — 2018. — 17, № 7. — 179.
7. *Rastegin A. E.* Degradation of Grover's search under collective phase flips in queries to the oracle// *Front. Phys.* — 2018. — 13, № 5. — 130318.
8. *Rastegin A. E., Shemet A. M.* Quantum search degeneration under amplitude noise in queries to the oracle// *Quantum Inf. Process.* — 2022. — 21, № 5. — 158.
9. *Rastegin A. E., Shemet A. M.* Degeneration of the Grover search algorithm with depolarization in the oracle-box wires// *Mod. Phys. Lett. A.* — 2023. — 38, № 5. — 2350030.
10. *Reitzner D., Hillery M.* Grover search under localized dephasing// *Phys. Rev. A.* — 2019. — 99, № 1. — 012339.
11. *Shor P. W.* Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer// *SIAM J. Comput.* — 1997. — 26, № 5. — P. 1484–1509.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Иркутского государственного университета для молодых ученых № 091-23-309 «Динамика корреляций и когерентности в алгоритмах квантового поиска при наличии шума».

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Растёгин Алексей Эдуардович (Rastegin Aleksei Eduardovich)

Иркутский государственный университет

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: alexrastegin@mail.ru

Шемет Анжелика Максимовна (Shemet Anzhelika Maksimovna)

Иркутский государственный университет

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: lika.shemet@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 83–90
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-83-90

УДК 519.642.5

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНОГО СИГНАЛА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ПОЛИНОМАМИ ВОЛЬТЕРРА

© 2024 г. С. В. СОЛОДУША, Ю. И. КОКОНОВА

Аннотация. Рассматривается один класс уравнений Вольтерра I рода, возникающих в задаче идентификации входного сигнала динамической системы. Изложен подход к приближенному решению полиномиальных уравнений Вольтерра, возникающих при моделировании нелинейной динамики аппаратом интегро-степенных рядов Вольтерра. Предложен способ построения численного решения с помощью итерационного процесса Ньютона–Канторовича. На основе стандартных квадратурных методов и метода интегрирования произведения получены расчетные формулы.

Ключевые слова: идентификация, нестационарная динамическая система, полиномиальное уравнение Вольтерра I рода, метод Ньютона–Канторовича.

THE PROBLEM OF IDENTIFYING THE INPUT SIGNAL OF DYNAMIC SYSTEMS MODELED BY VOLTERRA POLYNOMIALS

© 2024 S. V. SOLODUSHA, Yu. I. KOKONOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider one class of Volterra equations of the first kind that appear in the problem of identifying the input signal of a dynamic system. We discuss an approach to the approximate solution of Volterra polynomial equations that model nonlinear dynamics by integro-power Volterra series. A method for constructing a numerical solution using the Newton–Kantorovich iterative process is proposed. Based on standard quadrature methods and the product integration method, we obtain calculation formulas.

Keywords and phrases: identification, nonstationary dynamical system, polynomial Volterra equation of the first kind, Newton–Kantorovich method.

AMS Subject Classification: 45D05

1. Введение. Задача восстановления входного сигнала $x(t)$ по зарегистрированным значениям отклика $y(t)$ динамической системы относится к обратным задачам, в которых по следствию требуется найти причину наблюдаемого явления. Актуальность решения этой задачи продиктована широким спектром ее практического применения (см. [9]), в том числе при описании моделью типа «вход-выход» динамической системы, включающей исследуемый объект и измерительное устройство. В статье рассмотрен один из подходов к численному решению данной проблемы,

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00173).

возникающей при моделировании нелинейной динамики в виде полинома (отрезка интегро-степенного ряда) Вольтерра

$$y(t) = \sum_{\mu=1}^N \int_0^t \cdots \int_0^t K_{\mu}(t, s_1, \dots, s_{\mu}) \prod_{i=1}^{\mu} x(s_i) ds_i \quad (1)$$

(см. [8]), где $t \in [0, T]$, $x(t)$ и $y(t)$ — скалярные функции времени, $y'(t) \in C_{[0, T]}$, $y(0) = 0$ ($y \in \overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)}$), а ядра Вольтерра K_{μ} , $\mu = 1, 2, \dots, N$, симметричны по переменным $s_1, \dots, s_{\mu}$. В предположении, что ядра Вольтерра K_{μ} и $y(t)$ известны, при фиксированных значениях N исходная задача поиска $x(t)$ может быть сведена к решению N -степенных (полиномиальных) уравнений Вольтерра I рода.

Рассмотренные в работе интегральные уравнения в случае, когда погрешность входной информации выводит решение за пределы множества корректности, допускают применение методов саморегуляризации (см. [4]), где в качестве естественного параметра регуляризации выступает шаг сетки (см. [4, 7]). Очевидно, что разработка новых методов моделирования на основе устойчивых алгоритмов, с учетом идей саморегуляризации, является важной и актуальной прикладной задачей.

Как показано в [3], в предположениях

$$K_1(t, t) \neq 0, \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (K_1(t, s))'_t \in C_{\Delta}, \quad \Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq \bar{t}\}, \quad y \in \overset{\circ}{C}_{[0, \bar{t}]}^{(1)}, \quad (2)$$

функции K_{μ} ($\mu > 1$) непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по t , уравнение (1) корректно на паре пространств $(C_{[0, \bar{t}]}, \overset{\circ}{C}_{[0, \bar{t}]}^{(1)})$ при малом значении $\bar{t} < T$, что гарантирует существование, единственность и устойчивость решения в пространстве непрерывных функций $C_{[0, \bar{t}]}$. Специфика уравнения (1), которое можно представить в виде линейного уравнения

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = \tilde{y}(t) \quad (3)$$

с возмущенной правой частью

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \sum_{\mu=2}^N \int_0^t \cdots \int_0^t K_{\mu}(t, s_1, \dots, s_{\mu}) \prod_{i=1}^{\mu} x(s_i) ds_i, \quad (4)$$

рассмотрена в серии работ А. С. Апарцина (см. обзор в [6]). Отличие (1) при $N > 1$ от линейного случая (3) заключается в локальности области T существования (единственного) непрерывного решения (см. [1]).

Таким образом, при известных ядрах Вольтерра уравнение (1) однозначно разрешимо в $C_{[0, \bar{t}]}$, при этом решение $x^*(0)$ определяется по формуле

$$x^*(0) = \frac{y'(0)}{K_1(0, 0)}. \quad (5)$$

Равенство (5) есть решение эквивалентного уравнения Вольтерра II рода для $t = 0$, полученного дифференцированием (1) по t .

Соотношение (5) используем далее при решении (1) итерационным методом Ньютона—Канторовича: учитывая представление в виде (3), (4), в качестве пробного решения естественно выбрать решение линейного по $x(t)$ уравнения. Ограничимся значениями $N = 2, 3$ в (1), наиболее распространенными на практике. Исследуем специфику численного решения (1) с помощью метода Ньютона—Канторовича (см. [5]). Случай с постоянными ядрами Вольтерра был изучен в [11]. В [12] рассмотрена ситуация, когда

$$K_{\mu}(t, s_1, \dots, s_{\mu}) = \prod_{i=1}^{\mu} \varphi(t, s_i),$$

где $\varphi(t, s) \in C_\Delta$, $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq \bar{t}\}$, $\bar{t} < T$. В данной работе обобщаются рассмотренные ранее случаи.

2. Численное решение уравнения для $N = 2$. Выберем для простоты $N = 2$ и проведем линеаризацию (1) по схеме Ньютона—Канторовича. Введем нелинейный интегральный оператор

$$Px(t) \equiv \int_0^t K_1(t, s_1)x(s_1)ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 - y(t). \quad (6)$$

Найдем производную (по Фреше) (6) в $x_0(t)$, где $x_0(t)$ — начальное приближение, так что

$$\begin{aligned} P'[x_0](x(t)) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{P(x_0(t) + \omega x(t)) - P(x_0(t))}{\omega} = \int_0^t K_1(t, s_1)x(s_1)ds_1 + \\ &+ \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_0(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x_0(s_2)ds_1ds_2. \end{aligned}$$

В операторной форме уравнение (1), $N = 2$, имеет вид $Px = 0$. Применяя метод Ньютона—Канторовича

$$\begin{aligned} P'(x_{m-1})(x_m - x_{m-1}) &= -P(x_{m-1}), \quad m = 1, 2, \dots, \\ x_m &= x_{m-1} - [P'(x_{m-1})]^{-1} \cdot P(x_{m-1}), \end{aligned}$$

определим очередное приближение $x_m(t)$ в итерационном процессе

$$\begin{aligned} \int_0^t K_1(t, s_1)x_m(s_1)ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_{m-1}(s_1)x_m(s_2)ds_1ds_2 + \\ + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_m(s_1)x_{m-1}(s_2)ds_1ds_2 = \Phi_{m-1}(t), \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{m-1}(t) = \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_{m-1}(s_1)x_{m-1}(s_2)ds_1ds_2 + y(t).$$

Применим для приближенного решения (7) численные методы, в которых процедура дискретизации обладает свойством саморегуляризации (см. [4]).

В частности, аппроксимация $x^*(t_i)$ в i -м узле сетки

$$t_i = ih, \quad t_j = jh, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad nh = \bar{t}, \quad \bar{t} < T,$$

полученная с помощью метода правых прямоугольников, имеет следующий вид:

$$x_m^h(t_i) = \frac{G_{m-1}(t_i) - \sum_{l=1}^{i-1} x_m^h(t_l)Q_{m-1}(t_i, t_l)}{Q_{m-1}(t_i, t_i)}, \quad (8)$$

$$G_{m-1}(t_i) = h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_2^h(t_i, t_j, t_l) x_{m-1}^h(t_j) x_{m-1}^h(t_l) + y(t_i),$$

$$Q_{m-1}(t_i, t_l) = hK_1^h(t_i, t_l) + 2h^2 \sum_{j=1}^i K_2^h(t_i, t_j, t_l) x_{m-1}^h(t_j) \quad (9)$$

с начальным приближением

$$x_0^h(t_i) = \frac{1}{hK_1^h(t_i, t_i)} \left[y(t_i) - h \sum_{j=1}^{i-1} K_1^h(t_i, t_j) x_0^h(t_j) \right], \quad (10)$$

где $y(t_i)$ — значение отклика в i -м узле сетки. Отметим, что в (9) и (10) на каждой итерации должны выполняться следующие условия:

$$Q_{m-1}(t_i, t_i) \neq 0, \quad K_1^h(t_i, t_i) \neq 0.$$

При выводе (8) учитывалось свойство симметрии $K_2(t, s_1, s_2)$ по переменным s_1, s_2 , так что $K_2^h(t_i, t_j, t_l) = K_2^h(t_i, t_l, t_j)$.

Для поиска аппроксимации $x^*(t)$ в $(i - 1/2)$ узле из сеточного аналога (7), полученного с помощью метода интегрирования произведения (product integration; см. [10]), вместо (8)–(10) имеем

$$x_m^h(t_{i-1/2}) = \frac{1}{Q_{m-1}(t_i, t_{i-1/2})} \left[G_{m-1}(t_{i-1/2}) - \sum_{l=1}^{i-1} x_m^h(t_{l-1/2}) Q_{m-1}(t_i, t_{l-1/2}) \right], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} G_{m-1}(t_{i-1/2}) &= \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i x_{m-1}^h(t_{j-1/2}) x_{m-1}^h(t_{l-1/2}) \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{(l-1)h}^{lh} K_2(t_i, s_1, s_2) ds_1 ds_2 + y(t_i), \\ Q_{m-1}(t_i, t_{l-1/2}) &= \int_{(l-1)h}^{lh} K_1(t_i, s_1) ds_1 + 2 \sum_{j=1}^i x_{m-1}^h(t_{j-1/2}) \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{(l-1)h}^{lh} K_2(t_i, s_1, s_2) ds_1 ds_2 \end{aligned} \quad (12)$$

с начальным приближением

$$x_0^h(t_{i-1/2}) = \left[y(t_i) - \sum_{j=1}^{i-1} x_0^h(t_{j-1/2}) \int_{(j-1)h}^{jh} K_1(t_i, s_1) ds_1 \right] / \left[\int_{(i-1)h}^{ih} K_1(t_i, s_1) ds_1 \right]; \quad (13)$$

при этом в (12) и (13) на каждой итерации должны выполняться соответствующие условия

$$Q_{m-1}(t_i, t_{i-1/2}) \neq 0, \quad \int_{(i-1)h}^{ih} K_1(t_i, s_1) ds_1 \neq 0.$$

3. Численное решение уравнения для $N = 3$. Пусть далее $N = 3$. Тогда, учитывая (1), вместо (6) имеем

$$\begin{aligned} Px(t) \equiv & \int_0^t K_1(t, s_1) x(s_1) ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2 + \\ & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x(s_1) x(s_2) x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 - y(t). \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом (14)

$$\begin{aligned} P'[x_0](x(t)) &= \int_0^t K_1(t, s_1) x(s_1) ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_0(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2 + \\ &+ \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x(s_1) x_0(s_2) ds_1 ds_2 + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) \prod_{i=1}^2 x_0(s_i) x(s_3) ds_i ds_3 + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x_0(s_1) x_0(s_2) x_0(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x(s_1) \prod_{i=2}^3 x_0(s_i) ds_1 ds_i.$$

Обозначив левую часть (7) через $Z_m(t)$ и применяя метод Ньютона—Канторовича, получим

$$\begin{aligned} Z_m(t) + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x_m(s_1) \prod_{i=2}^3 x_{m-1}(s_i) ds_1 ds_i + \\ + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x_{m-1}(s_1) x_m(s_2) x_{m-1}(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \\ + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) \prod_{i=1}^2 x_{m-1}(s_i) x_m(s_3) ds_i ds_3 = \Phi_{m-1}(t), \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{m-1}(t) = \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_{m-1}(s_1) x_{m-1}(s_2) ds_1 ds_2 + \\ + 2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x_{m-1}(s_1) x_{m-1}(s_2) x_{m-1}(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + y(t). \end{aligned}$$

Используя метод правых прямоугольников, $x_0^h(t_i)$ вычисляем по формуле (10). Аппроксимируя определенные интегралы в (15) квадратурными формулами, получим расчетную формулу для $x_m^h(t_i)$ вида (8), в которой

$$\begin{aligned} G_{m-1}(t_i) = h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_2^h(t_i, t_j, t_k) x_{m-1}^h(t_j) x_{m-1}^h(t_k) + \\ + 2h^3 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i K_3^h(t_i, t_j, t_l, t_k) x_{m-1}^h(t_j) x_{m-1}^h(t_l) x_{m-1}^h(t_k) + y(t_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{m-1}(t_i, t_l) = hK_1^h(t_i, t_l) + 2h^2 \sum_{j=1}^i K_2^h(t_i, t_j, t_l) x_{m-1}^h(t_j) + \\ + 3h^3 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i K_3^h(t_i, t_j, t_k, t_l) x_{m-1}^h(t_j) x_{m-1}^h(t_k), \end{aligned}$$

где $Q_{m-1}(t_i, t_i) \neq 0$ и, кроме того, в силу симметричности K_3 относительно s_1, s_2, s_3 , выполняется соотношение

$$K_3^h(t_i, t_j, t_k, t_l) = K_3^h(t_i, t_j, t_l, t_k) = \dots = K_3^h(t_i, t_k, t_j, t_l) = K_3^h(t_i, t_k, t_l, t_j).$$

По аналогии с предыдущим пунктом нетрудно получить, что расчетная формула $x^h(t_{i-1/2})$ на основе метода product integration имеет вид (11), (13), где

$$\mathbf{G}_{m-1}(t_{i-1/2}) = \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i x_{m-1}^h(t_{j-1/2}) x_{m-1}^h(t_{l-1/2}) \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{(l-1)h}^{lh} K_2(t_i, s_1, s_2) ds_1 ds_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^i x_{m-1}^h(t_{j-1/2}) x_{m-1}^h(t_{l-1/2}) x_{m-1}^h(t_{k-1/2}) \times \\
& \quad \times \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{(l-1)h}^{lh} \int_{(k-1)h}^{kh} K_3(t_i, s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + y(t_i), \\
\mathbf{Q}_{m-1}(t_i, t_{l-1/2}) &= \int_{(l-1)h}^{lh} K_1(t_i, s_1) ds_1 + 2 \sum_{j=1}^i x_{m-1}^h(t_{j-1/2}) \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{(l-1)h}^{lh} K_2(t_i, s_1, s_2) ds_1 ds_2 + \\
& + 3 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i x_{m-1}^h(t_{j-1/2}) x_{m-1}^h(t_{k-1/2}) \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{(k-1)h}^{kh} \int_{(l-1)h}^{lh} K_3(t_i, s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3;
\end{aligned}$$

при этом $\mathbf{Q}_{m-1}(t_i, t_{i-1/2}) \neq 0$.

Замечание 1. Аппроксимируя определенные интегралы в (7), (15) с помощью квадратурной формулы средних прямоугольников, легко получить по аналогии с представленными формулами алгоритм для расчета x_m^h , $m = 0, 1, 2, \dots$.

4. О сходимости численных методов. Обозначим через $x_{m_i}^* \equiv x_m^*(t_i)$ каркас точного решения, а через $\varepsilon_m^h = \{\varepsilon_{m_i}^h\} = \{x_{m_i}^* - x_{m_i}^h\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — вектор ошибки сеточного решения $\{x_{m_i}^h\}$, $K_1^h(t_i, t_j) = K_{1,i,j}$, $K_2^h(t_i, t_j, t_l) = K_{2,i,j,l}$. Вектор $\{x_{m_i}^*\}$ удовлетворяет системе

$$h \sum_{j=1}^i K_{1,i,j} x_{m_j}^* + 2h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_{2,i,j,l} x_{m_j}^* x_{m-1_l}^* = y_i + h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_{2,i,j,l} x_{m-1_j}^* x_{m-1_l}^* - R_i(x_m^*), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
R_i(x_m^*) &= \int_0^{t_i} K_1(t_i, s_1) x_m^*(s_1) ds_1 + \int_0^{t_i} \int_0^{t_i} K_2(t_i, s_1, s_2) x_{m-1}^*(s_1) x_m^*(s_2) ds_1 ds_2 + \\
& + \int_0^{t_i} \int_0^{t_i} K_2(t_i, s_1, s_2) x_m^*(s_1) x_{m-1}^*(s_2) ds_1 ds_2 - \int_0^{t_i} \int_0^{t_i} K_2(t_i, s_1, s_2) x_{m-1}^*(s_1) x_{m-1}^*(s_2) ds_1 ds_2 - \\
& - \left(h \sum_{j=1}^i K_{1,i,j} x_{m_j}^* + 2h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_{2,i,j,l} x_{m_j}^* x_{m-1_l}^* - h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_{2,i,j,l} x_{m-1_j}^* x_{m-1_l}^* \right).
\end{aligned}$$

Вычитая сеточный аналог (7) из (16), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно ε_m^h :

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=1}^i K_{1,i,j} \varepsilon_{m_j}^h + h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_{2,i,j,l} \varepsilon_{m_j}^h (x_{m-1_l}^h + x_{m-1_l}^*) &= C_i(\varepsilon_{m-1}^h) - R_i(x_m^*), \\
C_i(\varepsilon_{m-1}^h) &= h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^i K_{2,i,j,l} \varepsilon_{m-1_j}^h \left[(x_{m-1_l}^h + x_{m-1_l}^*) - (x_{m_l}^h + x_{m_l}^*) \right].
\end{aligned} \quad (17)$$

Заменяя i в (17) на $i-1$, найдем разность между соседними строками системы (с учетом симметрии K_2 по второму и третьему аргументу):

$$\varepsilon_{m_i}^h \left(h K_{1,i,i} + h^2 K_{2,i,i,i} (x_{m-1_i}^h + x_{m-1_i}^*) + h^2 \sum_{l=1}^{i-1} K_{2,i,i,l} (x_{m-1_l}^h + x_{m-1_l}^*) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + h \sum_{j=1}^{i-1} (K_{1i,j} - K_{1i-1,j}) \varepsilon_{m_j}^h + h^2 \left(x_{m-1_i}^h + x_{m-1_i}^* \right) \sum_{j=1}^{i-1} K_{2i,j,t} \varepsilon_{m_j}^h + \\
& + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^{i-1} (K_{2i,j,l} - K_{2i-1,j,l}) \varepsilon_{m_j}^h \left(x_{m-1_l}^h + x_{m-1_l}^* \right) = \\
& = C_i(\varepsilon_{m-1}^h) - C_{i-1}(\varepsilon_{m-1}^h) + R_{i-1}(x_m^*) - R_i(x_m^*). \quad (18)
\end{aligned}$$

Непосредственно из (18) при $m = 0$ имеем

$$\varepsilon_{0_i}^h h K_{1i,i} + h \sum_{j=1}^{i-1} (K_{1i,j} - K_{1i-1,j}) \varepsilon_{0_j}^h = R_{i-1}(x_0^*) - R_i(x_0^*), \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (19)$$

Разделим далее обе части (19) на h и перейдем к оценке $|\varepsilon_{0_i}^h|$:

$$|\varepsilon_{0_i}^h| \leq \frac{ch}{k} + \frac{h}{k} \sum_{j=1}^{i-1} |\varepsilon_{0_j}^h| L_1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad c = \text{const}, \quad (20)$$

где

$$k = \min_{0 \leq t \leq \bar{t}} |K_1(t, t)| > 0, \quad L_1 = \max_{0 \leq s \leq t \leq \bar{t}} |K'_{1t}(t, s)| \geq 0. \quad (21)$$

При этом для $i = 1$ справедливо неравенство

$$|\varepsilon_{0_1}^h| \leq \frac{|R_1(x_0^*)|/h}{k}.$$

Замечание 2. Техника получения оценки (20) основана на вспомогательном предположении

$$|R_{i-1}(x_m^*) - R_i(x_m^*)| \leq ch^2,$$

которое вытекает из оценки погрешности используемой квадратуры (см. [2, лемма 2]).

Дополнительно к (21) введем величину

$$M_2 = \max_{0 \leq s \leq t \leq \bar{t}} |K_2(t, t, s)| \geq 0. \quad (22)$$

Следуя [2], предположим, что сеточный аналог решения уравнения (7) в условиях (2) удовлетворяет неравенству

$$|x_m^h(t_i)| \leq \Upsilon_m(\bar{t}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если функции $y(t)$, $K_1(t, s_1)$ и $K_2(t, s_1, s_2)$ являются достаточно гладкими и удовлетворяют условиям (2), то при выполнении неравенства

$$h_0 M_2 \Upsilon_{m-1}(\bar{t}) + \bar{t} M_2 \Upsilon_{m-1}(\bar{t}) < k$$

в принятых обозначениях (21)–(23) и $h \leq h_0$ справедлива оценка

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_{m_i}^h| = O(h).$$

Замечание 3. Доказательство основано на переходе от (18) к оценке по модулю и привлечении разностного аналога леммы Гронуолла—Беллмана.

5. Заключение. Работа посвящена обобщению результатов исследований, начатых в [11, 12]. Рассмотрено численное решение задачи идентификации входного сигнала квадратичных и кубичных полиномов Вольтерра, которые описывают динамику нелинейных систем типа «вход-выход». Разработаны численные алгоритмы приближенного решения N -степенных ($N = 2, 3$) интегральных уравнений Вольтерра I рода. Формулы аппроксимации искомого входного сигнала $x(t)$ получены с помощью метода Ньютона—Канторовича, метода правых (средних) прямоугольников и метода интегрирования произведения. В качестве пробного решения используется численное решение линейного уравнения Вольтерра I рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апарцин А. С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. мат. — 2007. — 1, № 1. — С. 13–14.
2. Апарцин А. С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — 47, № 8. — С. 1378–1386.
3. Апарцин А. С. Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2012. — 18, № 1. — С. 69–81.
4. Апарцин А. С., Бакушинский А. Б. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм// в кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. — Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 1972. — С. 248–258.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматлит, 1959.
6. Солодуша С. В., Гражданцева Е. Ю. Тестовое полиномиальное уравнение Вольтерра I рода в задаче идентификации входных сигналов// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2021. — 27, № 4. — С. 161–174.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
8. Volterra V. A Theory of Functionals, Integral and Integro-Differential Equations. — New York: Dover, 1959.
9. Kleiman E. G. Identification of input signals in dynamical systems// Automat. Remote Contr. — 1999. — 60, № 12. — P. 1675–1685.
10. Linz P. Product integration method for Volterra integral equations of the first kind// BIT Numer. Math. — 1971. — 11, № 3. — P. 413–421.
11. Solodusha S. V. To the numerical solution of one class of systems of the Volterra polynomial equations of the first kind// Num. Anal. Appl. — 2018. — 11, № 1. — P. 89–97.
12. Solodusha S. V. Identification of input signals in integral models of one class of nonlinear dynamic systems// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. мат. — 2019. — 30. — С. 73–82.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00173).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Солодуша Светлана Витальевна (Solodusha Svetlana Vitalievna)
 Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
 Сибирского отделения РАН, Иркутск;
 Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
 Сибирского отделения РАН, Иркутск
 (V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
 of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
 L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch
 of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
 E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Коконова Юлия Игоревна (Kokonova Yulia Igorevna)
 Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
 Сибирского отделения РАН, Иркутск;
 Иркутский национальный исследовательский технический университет
 (V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
 of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
 Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia)
 E-mail: dudareva.yuliya@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 91–98
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-91-98

УДК 519.716.2

О НЕКОТОРЫХ S_I^* -ПРЕДПОЛНЫХ МНОЖЕСТВАХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2

© 2024 г. Э. С. ТАГЛАСОВ

Аннотация. Рассматриваются мультифункции, заданные на двухэлементном множестве и возвращающие в качестве значений любые подмножества заданного множества. Рассматривается вопрос об описании всех предполных относительно операции суперпозиции множеств. Приведены примеры двух предполных множеств, описанных на языке сохранения предиката функций. Доказаны их замкнутость и предполнота относительно рассматриваемого замыкания, приведен пример полного множества.

Ключевые слова: мультифункция, суперпозиция, S_I^* -замыкание, предполное множество, гипероперация, мультиоперация, мультиклон, сохранение предиката.

ON SOME S_I^* -PRECOMPLETE SETS OF MULTIFUNCTIONS OF RANK 2

© 2024 E. S. TAGLASOV

ABSTRACT. In this paper, we consider multifunctions defined on a two-element set and returning subsets of a given set as values. We discuss the question of describing all sets that are precomplete with respect to the superposition operation. We give examples of two precomplete sets described in the language of predicate preservation by function; their closedness and precompleteness with respect to the closure under consideration are proved, and an example of a complete set is given.

Keywords and phrases: multifunction, superposition, S_I^* -closure, precomplete set, hyperoperation, multioperation, multiclon, predicate preservation.

AMS Subject Classification: 03B50, 08A99

1. Введение. Гипероперации (гиперфункции) — операции, отображающие наборы элементов из некоторого множества A в непустые подмножества A , изучаются с прошлого века (см. [3]). Они встречаются в различных областях дискретной математики, например, многозначной логике, синтезе схем, обработке неполной и неточной информации.

Наряду гипероперациями рассматриваются частичные операции, отображающие наборы элементов из множества A в элементы множества A , но, возможно, и в пустое множество, а также частичные гипероперации, впоследствии называемые мультиоперациями (см. [4, 5]). Отметим, что наряду с термином «операция» в литературе используется термин «функция». Мультифункции возвращают в качестве своих значений подмножества (в том числе и пустое) множества, на котором они заданы.

Как правило, мультифункции рассматриваются вместе с операцией суперпозиции. Однако при обычном вычислении суперпозиции возникает проблема, так как внутренние функции могут возвращать подмножества, а на таких наборах внешняя функция не определена. Поэтому необходимо

Работа выполнена при поддержке гранта Иркутского государственного университета для молодых ученых, проект № 091-23-304 «Критерий S_I^* -полноты мультиопераций ранга 2».

ввести определение, по которому мультифункции можно вычислять на таких наборах. В зависимости от интерпретации подмножеств, суперпозицию вычисляют разными способами (см. [1]).

При изучении функциональной системы «функция, суперпозиция» ставят основную задачу описания решетки замкнутых классов. Однако суперпозиция, как правило, порождает счетное или континуальное множество замкнутых классов. Поэтому рассматривают часть (конечное множество) решетки, например, максимальные и минимальные классы. Из задачи нахождения максимальных классов вытекает задача критерия полноты.

В представленной работе рассматриваются мультифункции, заданные на двухэлементном множестве, с так называемой S_I^* -суперпозицией и описываются два предполных множества.

2. Основные определения. Множества мультифункций (M), всюду определенных функций (O) на конечном множестве A , определяются следующим образом. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $|X|$ — обозначение для мощности множества X . Тогда

$$M_n = \left\{ f \mid f : A^n \rightarrow 2^A \right\}, \quad M = \bigcup_n M_n,$$

$$O_n = \left\{ f \in M_n \text{ и } |f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| = 1, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A^n \right\}, \quad O = \bigcup_n O_n.$$

Мощность множества A называется рангом функции. В работе рассматривается множество ранга 2: $E_2 = \{0, 1\}$.

Если f — n -местная мультифункция, $f_1, \dots, f_n$ — m -местные мультифункции или переменные, то суперпозиция $f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ задает мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ следующим образом: если набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если существует такой } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ что} \\ & f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \emptyset \text{ или } f(\beta_1, \dots, \beta_n) = \emptyset \\ & \text{для некоторого набора } (\beta_1, \dots, \beta_n), \\ & \text{такого, что } \beta_j \in f_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m), j \in \{1, \dots, n\}; \\ \bigcap_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ называется *двоичным*, если для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $|\beta_i| = 1$.

Набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in E_2^n$ называется *уточнением* набора $(B_1, \dots, B_n) \in (2^{E_2} \setminus \{\emptyset\})^n$, если для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $\beta_i \in B_i$.

Набор $\tilde{\beta}^{(0)} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in E_2^n$ называется *нулевым уточнением* набора $(B_1, \dots, B_n) \in (2^{E_2} \setminus \{\emptyset\})^n$, если для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $\beta_i = 0$, если $B_i = E_2$ и $\beta_i \in B_i$ — иначе.

Далее для множества E_2 будем использовать обозначение «—», а для пустого множества — обозначение «*». Множество из одного элемента будем обозначать элементом этого множества. Наряду с термином «мультифункция» будем использовать и термин «функции».

Определим S_I^* -замыкание множества $Q \subseteq M_2$ как множество всех мультифункций из M_2 , которые можно получить из Q операциями введения фиктивных переменных и S_I^* -суперпозиции. S_I^* -Замыкание множества Q обозначаем символом $[Q]$.

Множество мультифункций, которое совпадает со своим замыканием, называется S_I^* -замкнутым классом. Будем говорить, что множество $R \subseteq Q$ порождает S_I^* -замкнутый класс Q (S_I^* -полно в классе Q), если $[R] = Q$. При $Q = M_2$ говорим о полных множествах.

Множество $R \subseteq Q$ называется предполным в M_2 , если S_I^* -замыкание R отлично от M_2 , но S_I^* -замыкание множества $R \cup \{f\}$ совпадает с M_2 для любой мультифункции $f \notin R$.

Пусть Q — замкнутое множество мультифункций. Символом f_Q будем обозначать мультифункцию, не содержащуюся в множестве Q .

Обозначим n -местную функцию, значения которой совпадают со значениями переменной x_i , через $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Функции e_i^n называются селекторными функциями или проекциями.

Клоном называется множество функций, замкнутое относительно операции суперпозиции и содержащее все селекторные функции.

Далее в работе рассматриваются замкнутые множества, являющиеся клонами, поэтому будем считать, что такие множества содержат все селекторные функции.

Пусть R^m — некоторый m -местный предикат. Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет предикат R^m , если для любых n наборов $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}), \dots, (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{mn})$, принадлежащих предикату, набор $f(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, f(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$ принадлежит R^m . Определение суперпозиции позволяет рассматривать предикаты, заданные не только на множестве E_2 , но и на множестве всех подмножеств этого множества. Подробнее см. в [2].

Множество функций, сохраняющих некоторый предикат R , обозначим $\text{Pol } R$. Удобно задавать m -местный предикат, содержащий n наборов, матрицей размерности $m \times n$, в которой столбцами являются наборы из предиката.

Пусть задана n -местная мультифункция g и наборы $(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{mi}), i \in \{1, \dots, n\}$, принадлежащие некоторому m -местному предикату. Значением функции на данных наборах будем называть столбец

$$\begin{pmatrix} g(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) \\ \vdots \\ g(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) \end{pmatrix} \equiv g \begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \dots \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

В общем случае множество мультифункций, сохраняющих предикат, необязательно замкнуто относительно суперпозиции, однако справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 (см. [2]). *Если мультифункция f получена суперпозицией функций $g, g_1, \dots, g_m$, сохраняющих некоторый предикат R , то на двоичных наборах из предиката мультифункция f обязательно возвращает набор (не обязательно двоичный) из предиката.*

3. Предполное множество. Рассмотрим следующие множества мультифункций:

$$K_1 = \text{Pol } R_1, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \text{Pol } R_2, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & \delta \end{pmatrix},$$

где $(\alpha\beta\gamma\delta)^T$ — недвоичные столбцы, которые удовлетворяют одному из условий:

- (i) $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq \{*, 0, 1\}$;
- (ii) $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq \{*, -\}$.

Теорема 1. *Множество K_1 является S_I^* -замкнутым.*

Доказательство. Пусть $f, f_1, \dots, f_m \in K$, а функция

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

не принадлежит множеству K_1 . Тогда существуют такие наборы

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n),$$

что $(\alpha_i\beta_i)^T, i \in \{1, \dots, n\}$, принадлежат R_1 , а $g((\tilde{\alpha}\tilde{\beta})^T)$ не принадлежит R_1 , т.е.

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & - \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Отметим, что в наборах $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ не содержится значение $*$, иначе набор $g((\tilde{\alpha}\tilde{\beta})^T)$ будет содержать $*$.

(а) Пусть

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По определению суперпозиции найдется уточнение $\tilde{\alpha}'$ набора $\tilde{\alpha}$, на котором $g(\tilde{\alpha}') = 1$. Тогда

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}' \\ \tilde{\beta}' \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & - \end{pmatrix} \right\},$$

где $\tilde{\beta}'$ — такое уточнение набора $\tilde{\beta}$, что двоичный набор $(\alpha'_i \beta'_i)^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. В обоих случаях получили противоречие с леммой 1.

(b) Пусть

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим набор $\tilde{\beta}$. Либо найдется такое уточнение $\tilde{\beta}'$, что $g(\tilde{\beta}') = 0$, либо на всех уточнениях функция g принимает значение $-$.

В первом случае получаем следующее противоречие с леммой 1:

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}' \\ \tilde{\beta}' \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & - \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где $\tilde{\alpha}'$ — такое уточнение набора $\tilde{\alpha}$, что двоичный набор $(\alpha'_i \beta'_i)^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Во втором случае найдется такое уточнение $\tilde{\alpha}''$ набора $\tilde{\alpha}$, что $g(\tilde{\alpha}'') = 1$. Тогда

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}'' \\ \tilde{\beta}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\beta}''$ — такое уточнение набора $\tilde{\beta}$, что набор $(\alpha''_i \beta''_i)^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$; противоречие с леммой 1.

(c) Пусть

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим набор $\tilde{\alpha}$. Либо найдется такое уточнение $\tilde{\alpha}'$, что $g(\tilde{\alpha}') = 1$, либо на всех уточнениях функция g принимает значение $-$.

В первом случае получаем противоречие с леммой 1:

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}' \\ \tilde{\beta}' \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & - \end{pmatrix} \right\},$$

где $\tilde{\beta}'$ — такое уточнение набора $\tilde{\beta}$, что двоичный набор $(\alpha'_i \beta'_i)^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Во втором случае найдется такое уточнение $\tilde{\beta}''$ набора $\tilde{\beta}$, что $g(\tilde{\beta}'') = 0$. Тогда

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}'' \\ \tilde{\beta}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\alpha}''$ — такое уточнение набора $\tilde{\alpha}$, что набор $(\alpha''_i \beta''_i)^T$ содержится в R_1 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$; противоречие с леммой 1. $\square$

Лемма 2. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_m)$ принимает все четыре значения $\{*, 0, 1, -\}$, а множество B полно в O_2 . Тогда множество $\{f\} \cup B$ является полным в M_2 .

Доказательство. Пусть $h(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная функция из M_2 . Покажем, что ее можно получить с помощью суперпозиции функции f , которая принимает все четыре значения, и функций $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$, принадлежащие O_2 .

Пусть набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E_2^n$ таков, что $h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sigma$, где $\sigma \in \{*, 0, 1, -\}$. Так как функция f принимает все четыре значения, то существует такой набор $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in E_2^m$, что $f(\beta_1, \dots, \beta_m) = \sigma$.

Определим функции $g_i(x_1, \dots, x_n)$ так, чтобы $g_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \beta_i$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$. Тогда $f(g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, g_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = f(\beta_1, \dots, \beta_m) = \sigma = h(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. $\square$

Замечание 1. Множества $\{(0001), (10)\}$ и $\{(0111), (10)\}$ полны в O_2 .

Лемма 3. *Функции (0111) и (0001) принадлежат классу K_1 .*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_1(x_1, x_2) = (0111)$. Если она не принадлежит множеству K_1 , то

$$f_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & - \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

для некоторых $(\alpha_1\beta_1)^T, (\alpha_2\beta_2)^T$ из R_1 , причем $*$ $\notin \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$.

Пусть

$$f_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & - \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Так как $f_1(\beta_1\beta_2) = 0$, то $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 0$. Рассматривая наборы из предиката R_1 вида $(\alpha 0)^T$, получим $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Получили противоречие, так как $f_1(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0) = 0$.

Рассмотрим оставшийся случай:

$$f_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}.$$

Из равенства $f_1(\beta_1\beta_2) = -$ получим $\beta_1 = -, \beta_2 \in \{0, -\}$ или $\beta_1 = 0, \beta_2 = -$. Набору из предиката $(\alpha 0)^T$ соответствует значения $\alpha = 0$, а набору $(\alpha -)^T$ — значения $\alpha \in \{0, -\}$. Таким образом, получаем $\alpha_1 \in \{0, -\}$ и $\alpha_2 \in \{0, -\}$ при соответствующих значениях β_1, β_2 . При любых случаях α_1 и α_2 возникает противоречие, так как получаем $f_1(\alpha_1\alpha_2) \in \{0, -\}$.

Доказательство для функции $f_2(x_1, x_2) = (0001)$ проводится двойственным образом. $\square$

Теорема 2. *Множество K_1 является S_I^* -предполным.*

Доказательство. Покажем, что множество $\{f_{K_1}\} \cup K_1$ является полным в M_2 , где функция $f_{K_1}(x_1, \dots, x_n)$ не принадлежит множеству K_1 .

Отметим, что все одноместные функции, значения которых совпадают со значениями столбцов из R_1 , принадлежат K_1 . В этом несложно убедиться, вычислив $f(g(x))$, подставляя вместо функций $f(x)$ и $g(x)$ столбцы из предиката R_1 .

Подставляя одноместные функции на соответствующие места в функцию f_{K_1} , получим одну из трех функций: (10), (1-), (-0).

1. Рассмотрим функцию (10). Согласно замечанию 1 и лемме 3 можем получить все множество O_2 . Осталось получить функцию, возвращающую все четыре значения. Ее получим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ - & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ * \end{pmatrix}.$$

Отметим, что функция (010*) содержится в множестве K_1 , так как в предикате содержатся все двухместные наборы с *; подставляя наборы из предиката в функцию (010*), получим либо набор с *, либо набор соответствующий для функции (0101) на тех же наборах.

2. Получена функция (1-). Следующие суперпозиции сводят этот случай к первому:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ - \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ - \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Случай функции (-0) суперпозициями

$$\begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

также сводится к первому. $\square$

Лемма 4. Пусть функция $g(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит множеству K_2 и на некотором наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1, -\}^n$ возвращает значение $\sigma \in \{0, 1\}$. Тогда на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}$ функция g возвращает значение σ .

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\sigma = 1$. Случай, когда $\sigma = 0$, доказывается аналогичным образом.

По определению суперпозиции (1) функция g на любом уточнении набора $\tilde{\alpha}$ может возвращать только значения 1 или $-$, причем найдется уточнение $\tilde{\alpha}'$ этого же набора, на котором g возвращает 1. Если найдется уточнение $\tilde{\alpha}''$ набора $\tilde{\alpha}$, при котором $g(\tilde{\alpha}'') = -$, то получим противоречие с леммой 1, так как

$$g((\tilde{\alpha}'\tilde{\alpha}'\tilde{\alpha}''\tilde{\alpha}'')^T) = (11--)^T \notin R_2, \quad (\tilde{\alpha}'_i\tilde{\alpha}'_i\tilde{\alpha}''_i\tilde{\alpha}''_i)^T \in R_2$$

для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. □

Теорема 3. Множество K_2 является S_I^* -замкнутым.

Доказательство. Покажем, что множество K_2 замкнуто относительно суперпозиции. Пусть $f, f_1, \dots, f_m \in K_2$, а функция

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

не принадлежит множеству K_2 . Тогда существуют такие наборы

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \tilde{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n),$$

что

$$(\alpha_i\beta_i\gamma_i\delta_i)^T \in R_2, \quad g((\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta})^T) \notin R_2.$$

Все возможные значения $g((\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta})^T)$ разобьем на два типа:

(i) все двоичные наборы, не принадлежащие множеству R_2 :

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \\ \tilde{\delta} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

(ii) наборы, содержащие одновременно $-$ и $\nu \in \{0, 1\}$:

$$g \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \\ \tilde{\delta} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} - & - & - & \nu & \nu_1 & \nu_1 & \nu & \nu_1 & \nu_1 & \nu & \nu_1 & \nu_1 \\ \nu & \nu_1 & \nu_1 & - & - & - & \nu_1 & \nu & \nu_2 & \nu_1 & \nu & \nu_2 \\ \nu_1 & \nu & \nu_2 & \nu_1 & \nu & \nu_2 & - & - & - & \nu_2 & \nu_2 & \nu \\ \nu_2 & \nu_2 & \nu & \nu_2 & \nu_2 & \nu & \nu_2 & \nu_2 & \nu & - & - & - \end{pmatrix} \right\},$$

где $\nu_1, \nu_2 \in \{*, 0, 1, -\}$.

Случай (i). Так как перестановка строк не меняет предикат R_2 , то достаточно рассмотреть один вариант. Пусть

$$g(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta})^T = (0001)^T.$$

По лемме 4 имеем

$$g(\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\delta}^{(0)})^T = (0001)^T;$$

противоречие с леммой 1, так как

$$(\tilde{\alpha}_i^{(0)}\tilde{\beta}_i^{(0)}\tilde{\gamma}_i^{(0)}\tilde{\delta}_i^{(0)})^T \in R_2 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad g((\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\gamma}^{(0)}\tilde{\delta}^{(0)})^T) \notin R_2.$$

Случай (ii). Как и в первом случае, достаточно рассмотреть только один вариант. Пусть $g((\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta})^T) = (-\nu\nu_1\nu_2)^T$. Рассмотрим $g((\tilde{\alpha}\tilde{\beta})^T) = (-0)^T$. Доказательство для $\nu = 1$ аналогично.

Если найдется уточнение $\tilde{\alpha}'$ набора $\tilde{\alpha}$, на котором функция g возвращает значение 0, то найдется уточнение $\tilde{\alpha}''$ этого же набора, на котором g возвращает значение 1. Тогда по лемме 4 можем получить: $g((\tilde{\alpha}'\tilde{\alpha}''\tilde{\beta}'\tilde{\beta}'')^T) = (0100)^T$, где уточнения $\tilde{\beta}'$, $\tilde{\beta}''$ набора $\tilde{\beta}$ таковы, что $(\tilde{\alpha}'_i\tilde{\alpha}''_i\tilde{\beta}'_i\tilde{\beta}''_i)^T \in R_2$. Получили противоречие с леммой 1.

Если нет уточнения набора α , при котором функция g возвращает значение 0, тогда на любых уточнениях этого же набора функция g возвращает $-$. По лемме 4 можем получить: $g((\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)})^T) = (- - 0 0)^T$. Получили противоречие с леммой 1, так как $(\tilde{\alpha}_i^{(0)}\tilde{\alpha}_i^{(0)}\tilde{\beta}_i^{(0)}\tilde{\beta}_i^{(0)})^T \in R_2$, а $g((\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(0)})^T) \notin R_2$. $\square$

Теорема 4. Множество K_2 является S_I^* -предполным.

Доказательство. Покажем, что множество $\{f_{K_2}\} \cup K_2$ является полным в M_2 , где функция $f_{K_2}(x_1, \dots, x_n)$ не принадлежит множеству K_2 .

Отметим, что все двухместные функции, значения которых совпадают со значениями столбцов из R_2 , принадлежат K_2 . Чтобы проверить, сохраняет ли функция $h(x_1, x_2)$ предикат R_2 , необходимо показать, что

$$\text{для } \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \\ \delta_j \end{pmatrix} \in R_7 \text{ имеем } h \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \\ \gamma_i & \gamma_j \\ \delta_i & \delta_j \end{pmatrix} \in R_7$$

для всех $i, j = \{1, \dots, t\}$, где t — количество наборов в множестве R_2 . Так как количество наборов в R_2 невелико, то проверить каждую двухместную функцию можно с помощью компьютерного счета. Реализованная компьютерная программа показала, что все двухместные функции, значения которых совпадают с наборами из предиката R_2 , содержатся в множестве K_2 .

Таким образом, подставляя эти функции на соответствующие места в f_{K_2} , получим двухместную функцию $g(x_1, x_2)$. Все возможные значения функции g разобьем на два варианта:

(i) восемь двоичных функций

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$							
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0

(ii) функции, возвращающие значения $-$ и $\nu \in \{0, 1\}$:

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$											
0	0	$-$	$-$	$-$	ν	ν_1	ν_1	ν	ν_1	ν_1	ν	ν_1	ν_1
0	1	ν	ν_1	ν_1	$-$	$-$	$-$	ν_1	ν	ν_2	ν_1	ν	ν_2
1	0	ν_1	ν	ν_2	ν_1	ν	ν_2	$-$	$-$	$-$	ν_2	ν_2	ν
1	1	ν_2	ν_2	ν	ν_2	ν_2	ν	ν_2	ν_2	ν	$-$	$-$	$-$

где $\nu_1, \nu_2 \in \{*, 0, 1, -\}$;

Случай (i). Так как перестановка строк не меняет предикат R_2 , то достаточно рассмотреть один вариант. Пусть $g(x_1, x_2) = (0001)$. По замечанию 1 имеем все булевы функции. Осталось получить функцию, содержащую все четыре значения. Ее получим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & 0 \\ - & 0 \\ - & 1 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ - \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ - & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ * \end{pmatrix}.$$

Случай (ii). Как и в первом случае, достаточно рассмотреть только один вариант. Пусть $g(x_1, x_2) = (-\nu\nu_1\nu_2)$. Подставляя в функцию g аргумент 0 вместо переменной x_1 , получим $g(x) = (-\nu)$. Пусть $\nu = 0$; случай, когда $\nu = 1$, доказывается двойственным образом. Функцией

(-0) и суперпозициями

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} - \\ 0 \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ - & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ - \end{pmatrix}; \\ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ - \\ - \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ - & 0 \\ - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} 1 \\ - \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & - \\ 0 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

получим все множество булевых функций и сведем к случаю (i). $\square$

4. Заключение. В данной работе рассмотрена задача нахождения предполных множеств мультифункций ранга 2 относительно S_I^* -замыкания. Введены два множества мультифункций, описанных на языке сохранения предиката функцией. Первое множество мультифункций сохраняет двухместный предикат, второе — четырехместный. Доказаны их S_I^* -замкнутость и предполнота. Для доказательства предполноты множеств приведен пример полного множества. Следующим этапом исследования является нахождение всех предполных множеств и получение критерия полноты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пантелеев В. И., Тагласов Э. С.* О принадлежности мультифункций ранга два ES_I^* -предполным множествам // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2021. — № 2. — С. 3–16.
2. *Пантелеев В. И., Тагласов Э. С.* ES_I -Замыкание мультифункций ранга 2: критерий полноты, классификация и типы базисов // Интел. сист. Теор. прилож. — 2021. — 25, № 2. — С. 55–80.
3. *Marty F.* Sur une generalization de la notion de groupe // in: *Congres des Mathematiciens Scandinaves*. — Stockholm, 1934. — P. 45–49.
4. *Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G.* One interval in the lattice of partial hyperclones // *Czechoslovak Math. J.* — 2005. — 130, № 55. — P. 719–724.
5. *Pouzet M., Rosenberg I.* Small clones and the projection property // *Algebra Univ.* — 2010. — № 63. — С. 37–44.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Иркутского государственного университета для молодых ученых, проект № 091-23-304 «Критерий S_I^* -полноты мультиопераций ранга 2».

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Тагласов Эдуард Станиславович (Taglasov Eduard Stanislavovich)
Иркутский государственный университет
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: taglasov1@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 99–107
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-99-107

УДК 517.18

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

© 2024 г. Е. П. КРУГОВА

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые приложения аддитивных и мультипликативных диофантовых уравнений для синусов в задачах сферической тригонометрии.

Ключевые слова: сферическая тригонометрия, диофантовы уравнения, золотое сечение.

ON SOME PROBLEMS OF SPHERICAL TRIGONOMETRY

© 2024 Е. P. KRUGOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider some applications of additive and multiplicative diophantine equations for sine functions to problems of spherical trigonometry.

Keywords and phrases: spherical trigonometry, diophantine equations, golden ratio.

AMS Subject Classification: 26A09

1. Формула двойного угла и «двойные радиусы». Первая задача, рассматриваемая в этой статье, формулируется следующим образом: найти радиус окружности на сфере, в которую можно вписать два разных правильных многоугольника с рациональными сторонами, т.е. сторонами, равными $(p/q) \cdot 360^\circ$, $p, q \in \mathbb{N}$. Предполагается, что эти многоугольники могут быть звездчатыми. Как известно,

$$\sin r = \frac{\sin a}{\sin A},$$

где r — радиус окружности, a — половина стороны многоугольника, A — половина угла в центре многоугольника, на который опирается эта сторона. Таким образом, чтобы получить два многоугольника с рациональными сторонами, требуется выполнение соотношения

$$\sin r = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

где все углы a, b, A, B рациональны. Бесконечная серия таких соотношений получается из формулы двойного угла (здесь сильно помогает то обстоятельство, что $\sin 30^\circ = 1/2$):

$$\sin 30^\circ \sin 2\alpha = \sin \alpha \sin(90^\circ - \alpha), \quad (1)$$

и из этого соотношения можно составить две пропорции и получить два «двойных радиуса» для любого рационального угла α (поскольку все остальные углы в этой формуле тоже будут рациональными).

Из двух соотношений двойного угла, если их удачно совместить, можно получить даже «тройной радиус», т.е. радиус круга, в который можно вписать целых три разных правильных многоугольника с рациональными сторонами:

$$\begin{aligned} \sin 72^\circ &= 2 \sin 36^\circ \sin 54^\circ, \quad \sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \sin 72^\circ; \\ \frac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ} &= \frac{\sin 30^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 30^\circ} = \sin r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Этот пример замечателен еще тем, что здесь получились не просто рациональные стороны, а стороны, равные целым долям окружности: соответственно, $1/5$, $1/6$ и $1/10$ окружности у пятиконечной звезды, 10-конечной звезды и шестиугольника.

Поэтому возникают следующие вопросы:

- (i) есть ли еще «двойные радиусы», не происходящие из формулы двойного угла;
- (ii) есть ли другие «тройные радиусы»?

В следующем разделе будут найдены некоторые из них.

2. «Двойные» и «тройные» радиусы и аддитивные уравнения. Чтобы получить другие формулы «двойных» и «тройных» радиусов, можно воспользоваться формулами суммы конечных тригонометрических рядов с небольшим количеством слагаемых и знаменателями 5 и 7 (которые можно «зациклить»). Аддитивные и мультипликативные формулы для синусов легко преобразуются друг в друга, так что можно будет потом получить пропорцию из решения уравнения для суммы синусов. Оказывается, что решений аддитивных уравнений меньше (а пропорций из них получается гораздо больше), так что легче найти их.

Поэтому будем рассматривать уравнения следующего вида:

$$\sin A + \sin B = \sin C; \quad (3)$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin D; \quad (4)$$

$$\sin A + \sin B = \sin C + \sin D, \quad (5)$$

где углы $0 < A, B, C, D < 90^\circ$ рациональны. Бесконечную серию решений первого уравнения можно тоже получить из формулы двойного угла (она нам пригодится для задач из следующих разделов этой статьи):

$$\sin 30^\circ \sin 2\alpha = \sin \alpha \sin(90^\circ - \alpha);$$

$$\frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 30^\circ) - \cos(2\alpha + 30^\circ)) = \frac{1}{2}(\cos(90^\circ - 2\alpha) - \cos 90^\circ)$$

или

$$\cos(90^\circ - 2\alpha) + \cos(2\alpha + 30^\circ) = \cos(2\alpha - 30^\circ),$$

и превратив косинусы в синусы и заменив 2α на β , получим:

$$\sin \beta + \sin(60^\circ - \beta) = \sin(120^\circ - \beta) = \sin(60^\circ + \beta), \quad (6)$$

где без ограничения общности можем положить $0 < \beta \leq 30^\circ$; в частности, для $\beta = 30^\circ$ получим решение $\sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$ уравнения (3).

Найдем теперь решения, получающиеся из сумм рядов. Воспользуемся формулами

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \quad (7)$$

$$\sin \alpha \cos(2n + 1)\alpha = \frac{1}{2}(\sin(-2n)\alpha + \sin(2n + 2)\alpha) = \frac{1}{2}(\sin(2n + 2)\alpha - \sin(2n)\alpha), \quad (8)$$

чтобы найти сумму ряда в духе (см. [7]):

$$\sin \alpha (\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2}(\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{1}{2}(\sin 6\alpha - \sin 4\alpha) = \frac{1}{2} \sin 6\alpha.$$

Если $6\alpha = 360^\circ + \alpha$, т.е. $\alpha = 72^\circ$, то получаем соотношение

$$\begin{aligned} \cos 72^\circ + \cos(3 \cdot 72^\circ) + \cos(5 \cdot 72^\circ) &= \frac{1}{2}; \\ \sin 18^\circ - \sin 54^\circ + 1 &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда мы получаем два решения рассматриваемых уравнений:

$$\sin 18^\circ + \sin 30^\circ = \sin 54^\circ; \quad (10)$$

$$\sin 18^\circ + \sin 90^\circ = \sin 30^\circ + \sin 54^\circ. \quad (11)$$

Если подставить (10) в (6), то можно получить еще по одному решению уравнений (4) и (5):

$$\sin 6^\circ + \sin 18^\circ + \sin 30^\circ = \sin 66^\circ, \quad (12)$$

$$\sin 30^\circ + \sin 78^\circ = \sin 42^\circ + \sin 54^\circ. \quad (13)$$

Аналогично, рассмотрим сумму

$$\sin \alpha (\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha) = \frac{1}{2} \sin 8\alpha,$$

$8\alpha = 360^\circ + \alpha$, $\alpha = 360^\circ/7$, и если снова преобразовать косинусы в синусы углов, которые меньше 90° , то получим еще одно соотношение:

$$\sin 30^\circ + \sin \frac{270^\circ}{7} = \sin \frac{90^\circ}{7} + \sin \frac{450^\circ}{7}. \quad (14)$$

Из соотношения (14), перенося слагаемые на другую сторону и преобразуя суммы и разности синусов в произведения, можно получить шесть пропорций и, соответственно, шесть «двойных радиусов». Это будут радиусы правильных звездчатых 42-угольников разных конфигураций.

Гораздо больше разнообразных соотношений мы получим для углов со знаменателем 5 из уравнений (10), (11). Первое из них (для двух «двойных радиусов» не из формулы двойного угла) можно получить даже из соотношения (2), если взять те две части пропорции, которые содержат 30° , и воспользоваться формулой двойного угла для самого угла 30° :

$$\sin 18^\circ \sin 54^\circ = \sin^2 30^\circ = \frac{1}{4} = \sin 15^\circ \sin 75^\circ. \quad (15)$$

Из (10) получаем

$$\sin 54^\circ = \sin 18^\circ + \sin 30^\circ = 2 \sin \frac{18^\circ + 30^\circ}{2} \cos \frac{30^\circ - 18^\circ}{2} = 2 \sin 24^\circ \sin 84^\circ,$$

и снова можем перенести 2 на другую сторону и воспользоваться тем, что $\sin 30^\circ = 1/2$. Аналогичные операции сделаем с соотношением

$$\sin 18^\circ = \sin 54^\circ - \sin 30^\circ = 2 \cos \frac{54^\circ + 30^\circ}{2} \sin \frac{54^\circ - 30^\circ}{2}$$

и окончательно получим:

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ \sin 30^\circ &= \sin 12^\circ \sin 48^\circ, \\ \sin 54^\circ \sin 30^\circ &= \sin 24^\circ \sin 84^\circ. \end{aligned} \quad (16)$$

Из этих двух соотношений, делая пропорции и добавляя к ним соответствующие формулы двойного угла, можно получить еще четыре «тройных радиуса». Выпишем их все:

$$\begin{aligned} \sin R_1 &= \frac{\sin 12^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 24^\circ}{\sin 78^\circ}; & \sin R_2 &= \frac{\sin 6^\circ}{\sin 12^\circ} = \frac{\sin 24^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 84^\circ}; \\ \sin R_3 &= \frac{\sin 12^\circ}{\sin 18^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 42^\circ}{\sin 84^\circ}; & \sin R_4 &= \frac{\sin 24^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 48^\circ}{\sin 66^\circ} = \frac{\sin 54^\circ}{\sin 84^\circ}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если в каждом из этих соотношений взять те члены, которые не содержат 30° , и изменить пропорцию, например,

$$\sin r = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 24^\circ} = \frac{\sin 48^\circ}{\sin 78^\circ},$$

то можно получить еще четыре «двойных радиуса» не из формулы двойного угла.

Из самих соотношений (16) можно получить еще четыре «двойных радиуса», если приделать формулу двойного угла к ним самим, например:

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ \sin 30^\circ &= \sin 12^\circ \sin 48^\circ = \sin 9^\circ \sin 81^\circ, \\ \sin r_1 &= \frac{\sin 9^\circ}{\sin 12^\circ} = \frac{\sin 48^\circ}{\sin 81^\circ}, & \sin r_2 &= \frac{\sin 9^\circ}{\sin 48^\circ} = \frac{\sin 12^\circ}{\sin 81^\circ} \end{aligned}$$

и для второго соотношения аналогично.

Еще два «двойных радиуса» не из формулы двойного угла можно получить из соотношения (11):

$$1 - \sin 54^\circ = \frac{1}{2} - \sin 18^\circ, \quad \frac{1}{2}(1 - \cos 36^\circ) = \frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 72^\circ),$$

$$\sin^2 18^\circ = \sin 66^\circ \sin 6^\circ, \quad \sin r = \frac{\sin 6^\circ}{\sin 18^\circ} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 66^\circ}$$

и для второго «двойного радиуса»

$$1 + \sin 18^\circ = \frac{1}{2} + \sin 54^\circ, \quad \frac{1}{2}(1 + \cos 72^\circ) = \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 36^\circ),$$

$$\cos^2 36^\circ = \cos \frac{60^\circ + 36^\circ}{2} \cos \frac{60^\circ - 36^\circ}{2},$$

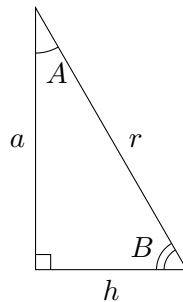
$$\sin^2 54^\circ = \sin 42^\circ \sin 78^\circ, \quad \sin r = \frac{\sin 42^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{\sin 54^\circ}{\sin 78^\circ}.$$

Таким образом, из соотношений с пятиугольной симметрией получилось 12 «двойных радиусов» не из формулы двойного угла и 5 «тройных радиусов».

Есть еще одно очевидное соотношение, в котором не только «двойной радиус», но и радиус, и сторона многоугольника рациональные: это квадрат со стороной 60° с радиусом описанной окружности 45° . Его с некоторой натяжкой тоже можно получить из аналогичного уравнения:

$$2 \sin 30^\circ = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \sin 90^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 2 \sin^2 45^\circ.$$

3. «Двойственные» звезды. Аддитивные уравнения для синусов позволяют строить звездчатые многоугольники, которые в некотором смысле «двойственны» друг другу (а именно, у каждого из них сумма стороны и угла представляет собой рациональный угол, и сторона одного многоугольника равна углу другого, и наоборот).



r — радиус описанной окружности
 a — половина стороны многоугольника
 A — половина угла многоугольника
 B — половина угла в центре многоугольника
 h — «высота»

Сначала выразим сумму половины стороны и половины угла через сумму радиуса и высоты многоугольника, т.е. сумму радиусов вписанной и описанной окружности для этого правильного многоугольника (это выражение удобно тем, что если известно $r + h$, их потом легко «разделить» и найти радиус):

$$\begin{aligned} \sin(a + A) &= \sin a \cos A + \cos a \sin A = \\ &= (\sin B \sin r) \cdot (\cos h \sin B) + \frac{\cos B}{\sin A} \sin A = \sin^2 B \sin r \cos h + \cos B. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известными формулами для прямоугольных сферических треугольников (см. [4, с. 192]). Далее,

$$\operatorname{tg} h = \operatorname{tg} r \cos B; \quad (18)$$

$$\sin h \cos r = \cos h \sin r \cos B; \quad (19)$$

$$\sin(h + r) = \sin h \cos r + \cos h \sin r = \cos h \sin r(1 + \cos B). \quad (20)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}\sin(a + A) &= (1 - \cos B) \sin(r + h) + \cos B, \\ \sin(r + h) &= \frac{1}{1 - \cos B} (\sin(a + A) - \cos B).\end{aligned}\quad (21)$$

Используем аддитивное уравнение (3). Для первого многоугольника имеем $\cos B_1 = \cos a \cos A$; если поменяем угол и сторону местами, то для второго многоугольника $\cos B_2 = \cos A \sin a$, и если теперь их сложить, то получим

$$\cos B_1 + \cos B_2 = \cos a \sin A + \cos A \sin a = \sin(A + a),$$

где все углы рациональны, т.е. все такие конструкции можно получить из решений уравнения (3). Самым интересным примером здесь является, конечно, пара многоугольников, полученных из соотношения (10). Это треугольник (у этого треугольника $r + h = \arcsin \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, первому «тройному радиусу») и пятиконечная звезда, и у них сумма стороны и угла $2a + 2A = 108^\circ$ наименьшая среди фигур, которые можно получить из приведенных выше решений уравнения (3), потому что для соотношений из (6)

$$2a + 2A = 120^\circ + 2\beta > 120^\circ.$$

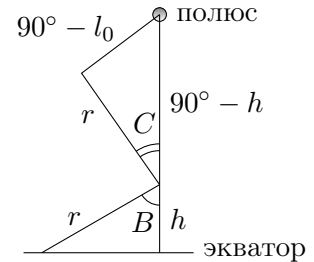
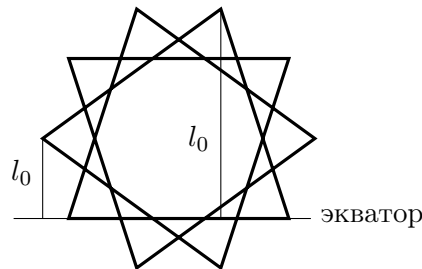
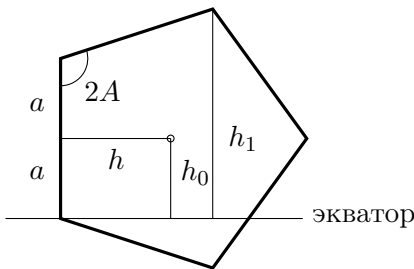
Из этого последнего соотношения можно получить, например, пару фигур, одна из которых — простой пятиугольник. Для него будет $a + A = 66^\circ$, а половина центрального угла второго многоугольника $B_2 = 84^\circ$. Если же одна из фигур — правильный треугольник ($B_1 = 60^\circ$), то и $B_2 = 60^\circ$ и это треугольник со стороной 90° , «двойственный» сам себе.

Приведем также формулу, позволяющую «разделить» радиус и высоту, если известна их сумма или разность:

$$\cos B \operatorname{tg}^2 r \pm \left(\frac{1 \pm \cos B}{\operatorname{tg}(r \pm h)} \right) \operatorname{tg} r \mp 1 = 0; \quad (22)$$

она доказывается несложно.

С помощью формул из этого раздела также легко выражать широту центра правильного многоугольника, «поставленного» ребром перпендикулярно на экватор (h_0) и широту всех верхних углов правильного многоугольника, «положенного» одной стороной на экватор (разнообразные l_0):



Формулы для «ближнего верхнего угла» h_1 рассмотрим в п. 5.

Для h_0 из прямоугольного треугольника с углом в полюсе имеем:

$$\sin h_0 = \sin a \cos h = \sin r \sin B \cos h = (\sin r \cos h) \cdot \sin B. \quad (23)$$

Поэтому

$$\frac{\sin h_0}{\sin(r + h)} = \frac{\sin B}{1 + \cos B} = \operatorname{tg} \frac{B}{2}. \quad (24)$$

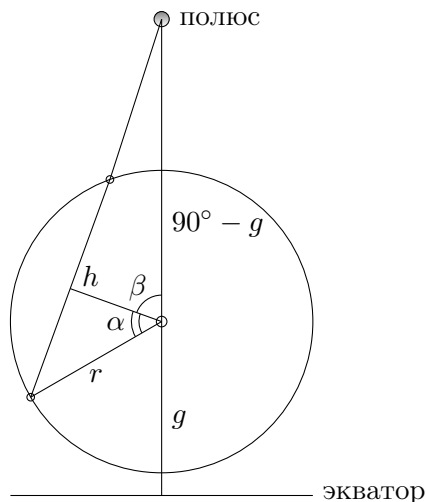
Для верхних углов лежащих многоугольников

$$\cos(90^\circ - l_0) = \sin l_0 = \cos r \cos(90^\circ - h) + \sin r \sin(90^\circ - h) \cos C = (\sin r \cos h)(\cos B + \cos C)$$

(здесь мы воспользовались формулой (19)). Таким образом,

$$\sin l_0 = \left(\frac{\cos B + \cos C}{\sin B} \right) \sin h_0 = \left(\frac{\cos B + \cos C}{1 + \cos B} \right) \sin(r + h). \quad (25)$$

4. Многоугольники с диагоналями, идущими вдоль меридиана. Полученные соотношения можно применять для того, чтобы строить правильные многоугольники, несколько диагоналей которых идут вдоль меридианов.



Рассмотрим, что происходит для одной диагонали (см. рис.); здесь g — широта центра окружности, $90^\circ - g$ — расстояние от центра до полюса, r — радиус (описанной) окружности, h — «высота» (радиус вписанной окружности). Для них имеем:

$$\operatorname{tg} h = \operatorname{tg} r \cos \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - g) \cos \beta;$$

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} g = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},$$

и если у нас есть две разные диагонали в одном и том же многоугольнике, идущие вдоль меридиана, то получится соотношение

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} g = \frac{\cos \beta_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\cos \beta_2}{\cos \alpha_2},$$

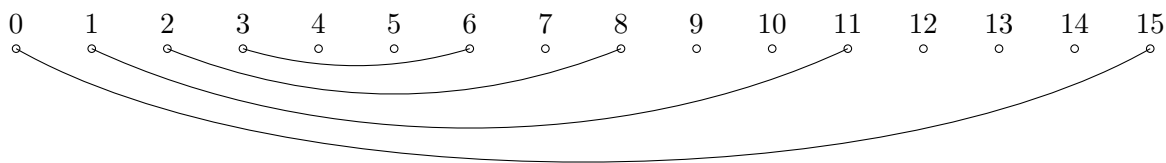
где все α_i, β_i кратны некоторому наименьшему углу. Получилась такая же пропорция, как та, которая нужна для «двойного радиуса», только с косинусами вместо синусов. Очевидно, од-

но легко преобразуется в другое. В таком же качестве можно использовать и формулы «тройных радиусов». Здесь радиус окружности r и широта центра g оказываются связаны: если задать что-либо одно, то однозначно находится другое, чтобы можно было построить такой многоугольник, у которого эти несколько диагоналей идут вдоль меридианов. В следующих примерах $\alpha_i < \beta_i$, но если сделать наоборот, то полюс будет внутри многоугольника, а диагонали будут по-прежнему идти вдоль меридианов (и пересекаться в полюсе).

Например, соотношения для «первого тройного радиуса» с синусами (2) можно превратить в косинусы и использовать для построения 30-угольника, у которого большая диагональ и еще три других диагонали (с каждой стороны) идут вдоль меридиана:

$$\frac{\cos 54^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\cos 72^\circ}{\cos 60^\circ}.$$

На следующем рисунке изображена схема соединения вершин в 30-угольнике с диагоналями, идущими вдоль меридианов, которая получается из этого соотношения:



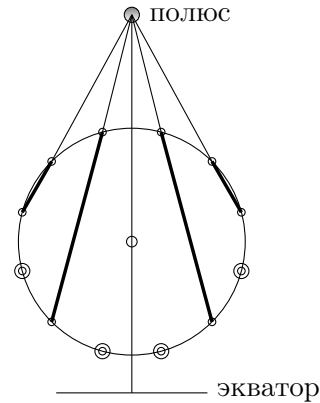
(здесь линия, соединяющая вершины 0 и 15, обозначает диаметр, проходящий по меридиану: «0» — верхняя вершина, «15» — нижняя). Шаг составляет 12° , дуга (т.е. диагональ вдоль меридиана) соединяет вершины под углами к направлению на полюс $\beta_i - \alpha_i$ и $\beta_i + \alpha_i$.

В этой конструкции получилось много вершин, соединенных ребрами, идущими вдоль меридианов. То же самое можно проделать и с четырьмя остальными «тройными радиусами», но там получатся 30-угольники, повернутые на 6° , у которых большая диагональ не проходит вдоль меридиана, или 60-угольники (и, следовательно, меньше вершин будет задействовано).

Если мы хотим построить такой многоугольник, в котором как можно больше вершин было бы задействовано в диагоналях, проходящих вдоль меридианов, можно воспользоваться формулой двойного угла (1) и выбирать угол α так, чтобы у него был большой общий делитель с 30° . Самый большой общий делитель получится из формулы двойного угла для 30° :

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ,$$

$$\frac{\cos 60^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 75^\circ}{\cos 60^\circ}.$$



Из этого соотношения получится 12-угольник (у которого, правда, большая диагональ не проходит по меридиану).

Следующий общий делитель — 10° . Для него можно получить 18-угольники, тоже из формулы двойного угла:

$$\sin 20^\circ = 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \rightarrow \cos 60^\circ \cos 70^\circ = \cos 10^\circ \cos 80^\circ,$$

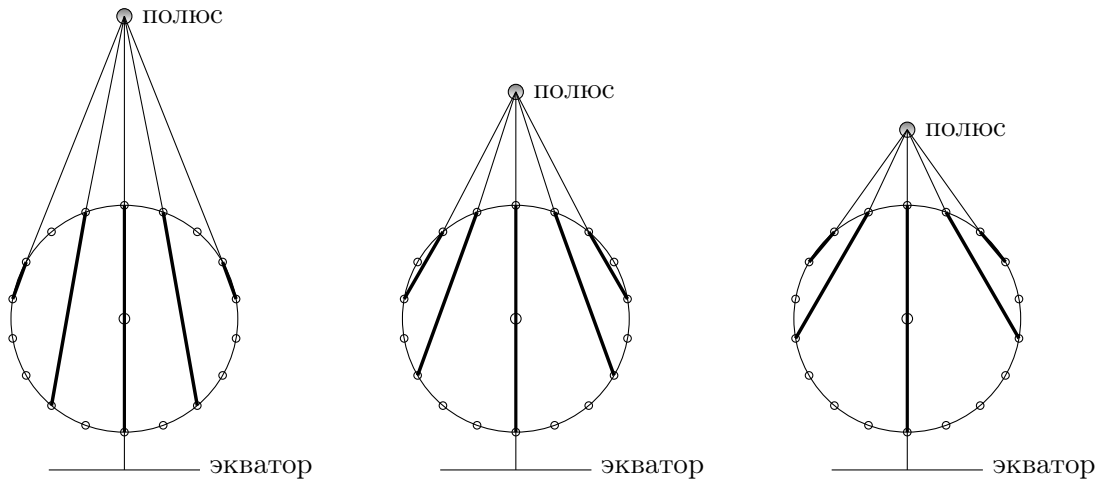
$$\sin 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \rightarrow \cos 60^\circ \cos 50^\circ = \cos 20^\circ \cos 70^\circ,$$

$$\sin 80^\circ = 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \rightarrow \cos 60^\circ \cos 10^\circ = \cos 40^\circ \cos 00^\circ.$$

Для $2\alpha = 60^\circ$ формула двойного угла не содержательна: по сути, $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ \sin 60^\circ$. Для каждого из этих трех соотношений можно сделать по 2 пропорции, но чтобы было задействовано как можно больше углов, надо выбирать те пропорции, в углах которых с каждой стороны “четность” совпадает, а именно:

$$\frac{\cos 70^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 80^\circ}{\cos 60^\circ}, \quad \frac{\cos 60^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 70^\circ}{\cos 50^\circ}, \quad \frac{\cos 50^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 40^\circ},$$

иначе 18-угольники снова будут повернуты на 10° и большая диагональ не будет проходить по меридиану, или надо брать 36-угольники. Итак, получится три 18-угольника с двумя разными ребрами и диаметром, идущими вдоль меридиана, которые изображены на следующем рисунке:



5. Формула «ближнего верхнего угла». Найдем выражения широты ближнего верхнего угла через сторону многоугольника и наоборот:

$$\begin{aligned}\sin h_1 &= \sin 2a \cos 2a(1 - \cos 2A) = 2 \sin 2a \cos 2a \sin^2 A = \\ &= 2 \sin 2a \cos 2a \frac{\cos^2 B}{\cos^a} = 4 \cos^2 B \operatorname{tg} a \cos 2a.\end{aligned}$$

Возводя это выражение в квадрат, окончательно получаем

$$\sin^2 h_1 = 16 \cos^4 B \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \cos^2 2a. \quad (26)$$

С увеличением стороны $2a$ широта ближнего верхнего угла сначала возрастает, потом достигает максимума и начинает убывать, так что одному значению h_1 (когда h_1 меньше некоторого максимального значения) соответствуют два значения длины стороны. Найдем сторону, которой соответствует этот максимум. Пусть $\cos 2a = x$; тогда нужно максимизировать выражение $(x^2 - x^3)/(1 + x)$. Приравнявая нулю производную, получим уравнение

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Таким образом, максимум h_1 достигается при $\cos 2a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Интересно, что это происходит для всех правильных многоугольников (у которых $2B > \arccos \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, т.е., например, простой не звездчатый семиугольник уже не подойдет) независимо от их конфигурации. Сами значения максимального h_1 , соответствующих радиусов r и высот h и других параметров для разных многоугольников различны, а длина «экстремальной» стороны одна и та же. Так что золотое сечение и в этих задачах часто обладает некоторыми экстремальными свойствами.

Например, если рассматриваемый правильный многоугольник — это квадрат, то это весьма примечательный квадрат! Его сторона $2a = \arccos \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, радиус $r = \arcsin \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, первый «тройной радиус» (2), и, соответственно, $2a + r = 90^\circ$. Если же рассматривается правильный пятиугольник, то оказывается, что у него $2a = h_1 = \arccos \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$:

$$\begin{aligned}\sin^2 h_1 &= 16 \cos^2 36^\circ \cdot \frac{1 - (\sqrt{5} - 1)/2}{1 + (\sqrt{5} - 1)/2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^4 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2 \frac{3 - \sqrt{5}}{2} / \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \cos h_1.\end{aligned}$$

Найдем теперь связь между длинами сторон двух многоугольников одинаковой конфигурации для одного h_1 :

$$\frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \cos^2 2a = \frac{1 - \cos 2b}{1 + \cos 2b} \cos^2 2b.$$

После преобразований получим соотношение

$$(\cos 2a + \cos 2b)(1 - \cos 2a \cos 2b) = \cos^2 2a + \cos^2 2b, \quad (27)$$

разрешая которое относительно $\cos 2b$, находим

$$\cos 2b = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 \cos 2a}{\sin^2 2a}} \right). \quad (28)$$

Из (26) можно получить обратную формулу для нахождения $2a$ по h_1 :

$$t^3 - 3 \left(1 - \frac{3 \sin^2 h_1}{16 \cos^4 B} \right) t + 2 \left(\frac{9 \sin^2 h_1}{8 \cos^4 B} - 1 \right) = 0, \quad t = 3 \cos 2a - 1.$$

Два положительных корня этого уравнения будут соответствовать двум интересующим нас сторонам. Здесь тоже интересно, что если дана длина стороны многоугольника $2a$, то вторая длина стороны $2b$, соответствующая тому же h_1 , не зависит от вида многоугольника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.* Геометрия. — М.: Наука, 1990.
2. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки техн. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1988. — 29. — С. 1–146.
3. *Берже М.* Геометрия. Т. II, ч. V: Внутренняя геометрия сферы, гиперболическая геометрия, пространство сфер. — М.: Мир, 1984.
4. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1964.
5. *Волынский Б. А.* Сферическая тригонометрия. — М.: Наука, 1977.
6. *Краниц П.* Сферическая тригонометрия. — М.: ЛКИ, 2019.
7. *Панчишкин А. А., Шавгулидзе Е. Т.* Тригонометрические функции в задачах. — М.: Наука, 1986.
8. *Степанов Н. Н.* Сферическая тригонометрия. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
9. *Шафаревич И. Р., Ремизов А. О.* Линейная алгебра и геометрия. — М.: Физматлит, 2009.
10. *Янишевский С.* Сферическая тригонометрия: лекции. — Казань: Университетская типография, 1859.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кругова Елена Павловна (Krugova Elena Pavlovna)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: ekrugo@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 108–117
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-108-117

УДК 517.91: 519.6

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ И АДДИТИВНОЙ ФОРМЕ

© 2024 г. С. Г. БУЛАНОВ

Аннотация. Представлены разновидности критериев устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений в виде необходимых и достаточных условий. Критерии получены в условиях существования и непрерывности решения на полуоси, непрерывности правой части системы и ее непрерывной дифференцируемости на полуоси. Критерии конструируются на основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования с остаточным членом на каждом шаге. Мультипликативная и аддитивная форма критериев влечет возможность компьютеризировать анализ устойчивости и выполнять его в режиме реального времени.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

LYAPUNOV STABILITY CRITERIA FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MULTIPLICATIVE AND ADDITIVE FORMS

© 2024 S. G. BULANOV

ABSTRACT. Various Lyapunov stability criteria for systems of ordinary differential equations are presented in the form of necessary and sufficient conditions. The criteria are obtained under the conditions of existence and continuity of the solution on the semi-axis, continuity of the right part of the system and its continuous differentiability on the semi-axis. The criteria are constructed on the basis of recurrent transformations of difference schemes of numerical integration with a residual term at each step. The multiplicative and additive form of the criteria entails the possibility to computerize the stability analysis and perform it in real time.

Keywords and phrases: Lyapunov stability, computer stability analysis, numerical modeling of stability.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Анализ устойчивости по Ляпунову систем дифференциальных уравнений требуется выполнять в многочисленных отраслях современной науки и техники (см. [11, 13]). При этом актуальным направлением исследований остается разработка методов анализа устойчивости систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [3]). Традиционно исследование устойчивости выполняется на основе функций Ляпунова (см. [12, 14]). Отсутствие строгого алгоритма построения функций Ляпунова влечет необходимость разрабатывать

аналитические методы, требующие преобразования правой части системы (см. [5]). Предлагаются подходы для исследования прикладных аспектов теории устойчивости с применением средств вычислительной техники (см. [7]). Ниже разрабатывается метод анализа устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования с остаточным членом на каждом шаге. Последнее необходимо для получения достоверных аналитических оценок устойчивости решений систем ОДУ. Результатом преобразований должны стать критерии устойчивости систем ОДУ в виде необходимых и достаточных условий.

Критерии строятся в предположении существования и непрерывности решения на полуоси, непрерывности правой части системы и ее непрерывной дифференцируемости на полуоси. Первоначально критерии строятся в мультипликативной форме. В этом случае для обоснования достоверности критериев дополнительно требуется выполнение аналога условия Липшица и предположение, что значение возмущенного и невозмущенного решения не совпадают ни в одной точке полуоси. Построение критериев в аддитивной форме позволяет снять последние ограничения и расширить класс систем ОДУ для возможного анализа устойчивости на основе разрабатываемых критериев. Для анализа устойчивости систем линейных ОДУ разрабатываются критерии, которые не требуют преобразования правой части системы и нахождения ее приближенного решения. Помимо этого приводятся критерии по характеру поведения правой части линейной системы ОДУ. Предполагается, что математическая форма конструируемых критериев будет допускать программную реализацию, что влечет возможность анализа устойчивости систем ОДУ в режиме реального времени.

2. Анализ устойчивости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим нелинейную систему ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), Y(t_0) = Y_0. \quad (1)$$

Предполагается, что в области $R = \{t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta, \delta > 0\}$ для системы (1) выполнены все условия существования и единственности решения и функция $F(t, Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t .

В рассматриваемых условиях для всех $T = \text{const}$, $T \in [t_0, \infty)$ выполняются неравенства

$$|f'_k(t, Y(t))| \leq c_1, \quad |f'_k(t, \tilde{Y}(t))| \leq c_1,$$

$c_1 = c_1(T)$, $c_1 = \text{const}$ для всех $t \in [t_0, T]$.

Точное решение системы (1) в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге имеет вид:

$$y_{k(i+1)} = y_{ki} + h f_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где q_{ki} — остаточные члены формулы Тейлора для k -й компоненты решения.

Для произвольно выбранной независимой переменной t шаг h предполагается равномерным на отрезке $[t_0, t]$, величины t , i , h связаны соотношениями

$$t = \text{const}, \quad t = t_{i+1}, \quad h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i + 1}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad t_{j+1} = t_j + h, \quad 0 \leq j \leq i. \quad (3)$$

По аналогии для возмущенного решения:

$$\tilde{y}_{k(i+1)} = \tilde{y}_{ki} + h f_k(t_i, \tilde{Y}_i) + \tilde{q}_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Точное значение величины возмущения определяется из соотношения

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \left(1 + h \frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\tilde{y}_{ki} - y_{ki}} \right) (\tilde{y}_{ki} - y_{ki}) + w_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где

$$w_{ki} = \tilde{q}_{ki} - q_{ki}, \quad q_{ki} = \frac{1}{2} f'_k(t_i + \xi_{ki} h, Y(t_i + \xi_{ki} h)) h^2, \quad 0 < \xi_{ki} < 1.$$

Рекуррентное преобразования (4) влечет соотношение

$$\tilde{y}_{k(i+1)} - y_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^i \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right) (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}) + L_i^{(k)},$$

где

$$L_i^{(k)} = \sum_{r=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-r} \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right) w_{k(r-1)} + w_{ki}, \quad D_i^{(k)} = \frac{f_k(t_i, \tilde{Y}_i) - f_k(t_i, Y_i)}{\tilde{y}_{ki} - y_{ki}}.$$

Далее предполагается, что

$$\tilde{y}_{ki}(t) - y_{ki}(t) \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Для оценки величины $L_i^{(k)}$ дополнительно требуется выполнение неравенства

$$\left|f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)\right| \leq L |\tilde{y}_k - y_k|, \quad L = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, T], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

При выполнении неравенства (6) с учетом ограничения (5) справедливо соотношение

$$\left|D_{i-\ell}^{(k)}\right| \leq L, \quad i = 0, 1, \dots, \quad \forall \ell = 0, 1, \dots, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

В рассматриваемых условиях

$$\left\|L_i^{(k)}\right\| \leq \frac{c_1}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1)h \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(см. [8]). Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L_i^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Поэтому для всех $t \in [t_0, \infty)$ выполняется соотношение

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right) (\tilde{y}_{k0} - y_{k0}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

В результате критерии устойчивости и асимптотической устойчивости примут следующий вид (см. [8]):

$$\left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right) \right| \leq \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right) \right| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Так как для всех $t \in [t_0, \infty)$ согласно (9) имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i \left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right) B = \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}},$$

то критерии (10), (11) можно представить в эквивалентной форме:

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| \leq \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Компьютерная реализация критериев (10)–(13) влечет возможность анализа устойчивости решения нелинейной системы ОДУ в режиме реального времени по ходу приближенного решения системы. Необходимо отметить, что выполнение условий (5), (6) влечет ограничение класса систем ОДУ для исследования которых можно применять представленные критерии.

С целью снятия этих ограничений выполним следующее преобразование выражения (2) в аддитивной форме:

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i-1)} + h f_k(t_{i-1}, Y_{i-1}) + q_{k(i-1)} + h f_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i-2)} + h f_k(t_{i-2}, Y_{i-2}) + q_{k(i-2)} + h f_k(t_{i-1}, Y_{i-1}) + q_{k(i-1)} + h f_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Рекуррентное преобразование влечет соотношение

$$y_{k(i+1)} = y_{k0} + \sum_{\ell=0}^i h f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}) + \sum_{\ell=0}^i q_{k(i-\ell)}, \quad y_{k0} = y_k(t_0), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Для возмущенного решения (1) справедливо равенство

$$\tilde{y}_{k(i+1)} = \tilde{y}_{k0} + \sum_{\ell=0}^i h f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) + \sum_{\ell=0}^i \tilde{q}_{k(i-\ell)}, \quad \tilde{y}_{k0} = \tilde{y}_k(t_0), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$ на любом отрезке $[t_0, t]$, получим точное представление решения системы (1):

$$y_k(t) = y_{k0} + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i q_{k(i-\ell)} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Предел суммы остаточных членов оценивается из соотношений

$$\left| \sum_{\ell=0}^i q_{k(i-\ell)} \right| \leq \sum_{\ell=0}^i |q_{k(i-\ell)}| \leq \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^i c_1 h^2 = \frac{1}{2} (i+1) c_1 h^2 = \frac{1}{2} (t - t_0) c_1 h.$$

Поэтому

$$\left| \sum_{\ell=0}^i q_{k(i-\ell)} \right| \leq \frac{1}{2} (T - t_0) c_1 h \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i q_{k(i-\ell)} = 0 \quad \forall T \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i \tilde{q}_{k(i-\ell)} = 0.$$

В результате точное значение величины возмущения на промежутке $[t_0, t]$ определяется из соотношения

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h \left(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}) \right) \quad (16)$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Для выполнения равенство (16) не требуется выполнения ограничений (5), (6), ранее оговоренных для системы (1).

По аналогии с (9), выделим в (16) возмущение начальных данных в виде множителя:

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h \left(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}) \right)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \times (\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)) \quad (17)$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Из (17) следует, что устойчивость решения задачи (1) полностью определяется множителем перед начальным возмущением $\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)$. Поскольку (17) эквивалентно (16), то имеет место критерий устойчивости системы (1) не требующий выполнения ограничений (5)–(7).

Лемма 1. Для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно существование такого Δ , $0 < \Delta \leq \delta$, что при всех $\tilde{Y}(t)$, для которых $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$, выполняется соотношение

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq \tilde{c}_1, \quad (18)$$

где $\tilde{c}_1 = \text{const}$, для всех $\forall t \in [t_0, \infty)$, и $k = 1, 2, \dots, n$.

Для асимптотической устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало такое $\Delta_1 \leq \Delta$, что неравенство $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$ влечет выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Критерии (18), (19) выполняются в условиях существования и единственности решения задачи (1), дифференцируемости правой части (1) на полуоси.

Из (17) следует, что в области R выполняется соотношение

$$\frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} = \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$ и $k = 1, 2, \dots, n$, где рассматриваются только возмущенные решения, для которых $\tilde{y}_k(t_0) \neq y_k(t_0)$.

Таким образом, из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно существование такого Δ , $0 < \Delta \leq \delta$, что при всех $\tilde{Y}(t)$, для которых $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$, выполняется соотношение

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| \leq \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Для асимптотической устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало такое $\Delta_1 \leq \Delta$, что неравенство $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$ влечет выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_{k0} - y_{k0}} \right| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, для обоснования критериев теоремы 1 требуется существование и единственность решения, непрерывная дифференцируемость правой части (1) в R . Условия (5), (6) были необходимы для обеспечения (8), (9) и, как следствие для обоснования критериев (10)–(13). Для выполнения (16), и как следствие критериев (18), (19) этого не требуется — достаточно исходных предположений. Критерии теоремы 1 (они же критерии (12), (13)) являются следствием критериев (18), (19). В результате с критериев (12), (13) снимается необходимость выполнения условий (5)–(7).

В числителе выражений (17)–(19) одно из слагаемых есть интеграл, приближенно вычисляемый по формуле прямоугольников. Поэтому критерии (18), (19) можно записать в эквивалентной

форме:

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \int_{t_0}^t (f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)) dt}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leq \tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \int_{t_0}^t (f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)) dt}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Лемма 2. Для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно существование такого Δ , $0 < \Delta \leq \delta$, что при всех $\tilde{Y}(t)$, для которых $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta$, выполняется соотношение

$$\left| \int_{t_0}^t \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} dt \right| \leq \tilde{c}_2, \quad \text{const} = \tilde{c}_2, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Для асимптотической устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало такое $\Delta_1 \leq \Delta$, что неравенство $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_1$ влечет выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| 1 + \int_{t_0}^t \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} dt \right| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

или, эквивалентно,

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{f_k(t, \tilde{Y}) - f_k(t, Y)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} dt = -1, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

Получены разновидности критериев устойчивости систем нелинейных ОДУ в виде необходимых и достаточных условий. Форма критериев влечет возможность программной реализации. Далее будут представлены примеры анализа нелинейных систем ОДУ, решение которых принимает различный характер устойчивости.

3. Анализ устойчивости систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривается задача Коши для системы линейных ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (21)$$

Предполагается, что для (21) выполнены все условия существования и единственности решения в области $R_1 = \{t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_1, \delta_1 > 0\}$. Элементы матрицы $A(t)$ определены, непрерывны, непрерывно дифференцируемы в R_1 . Ниже используются каноническая норма матрицы и согласованная с ней норма вектора:

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|, \quad \|Y\| = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k|.$$

На основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования величина возмущения для $\forall t \in [t_0, \infty)$ определяется из соотношения [9]

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0).$$

Отсюда автоматически следуют критерии устойчивости и асимптотической устойчивости систем линейных ОДУ в мультипликативной форме:

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \leq \tilde{c}_3, \quad \tilde{c}_3 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad (22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| = 0. \quad (23)$$

После равносильных преобразований критерии (22), (23) приводятся к аддитивной форме (см. [2]):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i hA(t_{i-\ell}) \leq \tilde{C}_1 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad (24)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i hA(t_{i-\ell}) = (-\infty), \quad (25)$$

где $\tilde{C}_1$ — постоянная матрица, под символом $(-\infty)$ понимается предел матрицы, элементы которой стремятся к $-\infty$.

Критерии (22)–(25) ориентированы на программную реализацию и позволяют установить характер устойчивости систем линейных ОДУ в режиме реального времени. При этом в частности не требуется построение функций Ляпунова, информации о характеристических числах и характеристических показателях.

Далее, в рассматриваемых условиях, приводятся критерии устойчивости задачи (21) по характеру поведения правой части системы без дополнительных ограничений. Критерии конструируются по аналогии с ранее представленными условиями устойчивости для анализа нулевого решения нелинейной системы [1].

Теорема 2. *Для устойчивости решения задачи (21) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое Δ_2 , $0 < \Delta_2 \leq \delta_1$, что при всех $\tilde{Y}(t)$, для которых $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_2$, выполняется соотношение*

$$\left| \frac{a_{k1}(t)(\tilde{y}_1(t) - y_1(t)) + \dots + a_{kn}(t)(\tilde{y}_n(t) - y_n(t))}{a_{k1}(t)(\tilde{y}_1(t_0) - y_1(t_0)) + \dots + a_{kn}(t)(\tilde{y}_n(t_0) - y_n(t_0))} \right| \leq \tilde{c}_4,$$

где $\tilde{c}_4 = \text{const}$, для всех $t \in [t_0, \infty)$ и $k = 1, 2, \dots, n$.

Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_3 \leq \Delta_2$, что неравенство $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \Delta_3$ влечет выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k1}(t)(\tilde{y}_1(t) - y_1(t)) + \dots + a_{kn}(t)(\tilde{y}_n(t) - y_n(t))}{a_{k1}(t)(\tilde{y}_1(t_0) - y_1(t_0)) + \dots + a_{kn}(t)(\tilde{y}_n(t_0) - y_n(t_0))} \right| = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Получена еще одна разновидность критериев устойчивости систем линейных ОДУ, которая не требует преобразования правой части системы и обращения к методам качественной теории.

Предложенный подход допускает конструировать критерии устойчивости для производных правой части системы (21) произвольного порядка $\ell \geq 2$ без дополнительных ограничений, если эти производные существуют (см. [1]).

4. Программный и численный эксперимент. Программный и численный эксперимент проводился с помощью ПК на базе процессора Intel(R) Core(TM) i5-4460 в среде программирования Delphi. Анализ устойчивости решений систем ОДУ выполняется на основе программы, реализующей конструкцию критериев (10), (12), (18). Для каждого уравнения исследуемой системы

Таблица 1. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (26)

t	10^3	2×10^3	3×10^3	4×10^3	5×10^3
норма	1,014	1,027	1,041	1,054	1,068
t	6×10^3	7×10^3	8×10^3	9×10^3	10^4
норма	1,081	1,093	1,106	1,118	1,1309

Таблица 2. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (27)

t	10^3	2×10^3	3×10^3	4×10^3	5×10^3
норма	1001,998	2001,995	3001,990	4001,983	5001,975
t	6×10^3	7×10^3	8×10^3	9×10^3	10^4
норма	6001,964	7001,951	8001,936	9001,919	10001,091

Таблица 3. Результаты анализа устойчивости решения системы (28)

t	10^3	2×10^3	3×10^3	4×10^3	5×10^3
норма	$2,337 \times 10^{-16}$	$2,337 \times 10^{-16}$	$2,337 \times 10^{-16}$	$2,337 \times 10^{-16}$	$2,337 \times 10^{-16}$
t	6×10^3	7×10^3	8×10^3	9×10^3	10^4
норма	$2,337 \times 10^{-16}$	$2,337 \times 10^{-16}$	$2,337 \times 10^{-16}$	$2,337 \times 10^{-16}$	$2,337 \times 10^{-16}$

вычисляется значение выражения из левой части критериев (10), (12), (18) и находится векторная норма. По поведению численных значений нормы делается вывод о характере устойчивости исследуемой системы. Ограниченное изменение соответствует устойчивости, монотонное стремление к нулю характеризует асимптотическую устойчивость, неограниченный рост является признаком неустойчивости. При исследовании на основе аддитивного критерия признаком асимптотической устойчивости является в частности стремление подынтегральной функции к значению -1 . Приближенные значения возмущенного и невозмущенного решения, входящие в конструкцию критериев (10), (12), (18), находятся с помощью метода Эйлера.

Пример 1. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y_1' = -y_2 \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad y_2' = y_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \quad (26)$$

Общее решение системы имеет вид

$$y_1 = c_1 \cos(c_1 t + c_2), \quad y_2 = c_1 \sin(c_1 t + c_2).$$

Известно, что нулевое решение системы (26) устойчиво (см. [10]).

Компьютерный анализ устойчивости выполняется на основе критерия (10) на промежутке $[0, 10^4]$ при значении шага разностной схемы 10^{-4} . Начальные значения компонент возмущенного решения $\tilde{y}_{10} = 10^{-5}$, $\tilde{y}_{20} = 10^{-5}$. Результаты анализа устойчивости представлены в табл. 1. Значения нормы ограничены константой, что в соответствии с критерием (10) свидетельствует об устойчивости решения системы. Время работы программы ≈ 18 с.

Пример 2. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y_1' = \frac{y_1}{t} - t^2 y_1 y_2^2, \quad y_2' = -\frac{y_2}{t}, \quad t \geq 1. \quad (27)$$

Общее решение системы (27) имеет вид

$$y_1 = c_1 t e^{-c_2^2 t}, \quad y_2 = \frac{c_2}{t}.$$

Нулевое решение системы (27) неустойчиво (см. [4]). Компьютерный анализ устойчивости выполняется на основе критерия (12) при значениях длины промежутка, шага численного интегрирования и возмущениях начальных данных из примера 1. Результаты анализа устойчивости представлены в табл. 2. Монотонный рост значений нормы свидетельствует о неустойчивости.

Пример 3. Исследуется на устойчивость решение линейной системы

$$y_1' = -y_1 + \frac{y_2}{t^2 + 1}, \quad y_2' = -\frac{y_1}{t^2 + 1} - y_2. \quad (28)$$

Общее решение системы имеет вид

$$y_1 = (c_1 \cos(\arctg t) + c_2 \sin(\arctg t))e^{-t}, \quad y_2 = (-c_1 \sin(\arctg t) + c_2 \cos(\arctg t))e^{-t}$$

(см. [6]). Решение системы (28) асимптотически устойчиво на полуоси $[0, \infty)$. Компьютерный анализ устойчивости выполняется на основе критерия (18) при неизменных значениях длины промежутка, шага численного интегрирования и возмущениях начальных данных из предыдущих примеров. Результаты анализа устойчивости представлены в табл. 3. Значения нормы стремятся к нулю, что свидетельствует об асимптотической устойчивости решения системы (28).

5. Заключение. Получены критерии устойчивости по Ляпунову систем ОДУ в форме необходимых и достаточных условий. Критерии отличаются от известных построением на основе рекуррентных преобразования разностных схем численного интегрирования в мультипликативной и аддитивной форме. Аддитивная форма критериев позволила снять ряд ограничений накладываемых ранее на правую часть системы ОДУ. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, длины промежутка и шага решения. Для систем линейных ОДУ представлены критерии устойчивости, не требующие преобразования правой части системы и нахождения ее приближенного решения. Выполнена программная реализация критериев. Результаты численного эксперимента подтверждают достоверность анализа устойчивости по предложенным критериям и свидетельствуют о целесообразности их практического применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буланов С. Г. Необходимые и достаточные критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 224. — С. 10–18.
2. Буланов С. Г. Критерии устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 225. — С. 28–37.
3. Григорян Г. А. Критерий устойчивости систем двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Мат. заметки. — 2022. — 103, № 6. — С. 831–840.
4. Демидович Д. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. Дружинина О. В., Седова Н. О. Анализ устойчивости и стабилизации нелинейных каскадных систем с запаздыванием в терминах линейных матричных неравенств // Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2017. — 1. — С. 21–35.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
7. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б. Математическая теория автоматического управления. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
8. Ромм Я. Е. Об условиях устойчивости с обратной пропорцией начальным значениям решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. наукоемкие технол. — 2023. — 9. — С. 31–60.
9. Ромм Я. Е., Буланов С. Г. Численное моделирование устойчивости по Ляпунову // Совр. наукоемкие технол. — 2021. — 7. — С. 42–60.
10. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.

11. *Elaiw A. M., Shflot A. S., Hobiny A. D.* Stability analysis of SARS-CoV-2/HTLV-I coinfection dynamics model// AIMS Math. — 2022. — 8, № 3. — P. 6136—6166.
12. *Xiao-Lin L., Yao-Lin J.* Numerical algorithm for constructing Lyapunov functions of polynomial differential systems// Appl. Math. Comput. — 2009. — 29, № 1. — С. 247—262.
13. *Xinna M., Hongwei F., Maryam A., Hassan S.* Dynamical analysis and boundedness for a generalized chaotic Lorenz model// AIMS Math. — 2023. — 8, № 8. — P. 19719—19742.
14. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations// Appl. Math. Comput. — 2008. — 202, № 1. — P. 44—53.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Буланов Сергей Георгиевич (Bulanov Sergey Georgievich)
Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал)
Ростовского государственного экономического университета
(Anton Chekhov Taganrog State Institute (branch)
of the Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russia)
E-mail: bulanovtgpi@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 118–132
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-118-132

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОСОБЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

© 2024 г. А. С. БУЛДАЕВ, И. Д. КАЗЬМИН

Аннотация. В классе линейных по управлению задач оптимального управления предложен подход к расчету особых управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Предлагаемый подход основан на новых условиях оптимальности в виде задач о неподвижной точке, которые эквивалентны известным условиям принципа максимума. Новые формы условий принципа максимума дают возможность конструировать эффективные методы поиска особых управлений. Эффективность расчета особых экстремальных управлений иллюстрируется на модельных примерах.

Ключевые слова: линейно управляемая система, принцип максимума, задача о неподвижной точке, особые управления, итерационные методы.

AN APPROACH TO CALCULATING DEGENERATE EXTREMAL CONTROLS BASED ON FIXED POINT PROBLEMS

© 2024 A. S. BULDAEV, I. D. KAZMIN

ABSTRACT. In the class of optimal control problems linear with respect to the control, an approach to calculating degenerate controls that satisfy the maximum principle, is proposed. This approach is based on new optimality conditions in the form of fixed point problems that are equivalent to the well-known conditions of the maximum principle. New forms of conditions for the maximum principle make it possible to construct effective methods for searching for degenerate controls. The efficiency of the approach proposed is illustrated using model examples.

Keywords and phrases: linearly controlled system, maximum principle, fixed point problem, degenerate controls, iterative methods.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. Линейные по управлению задачи оптимального управления широко распространены в теории и практике моделирования управляемых систем в различных приложениях. Эти задачи часто характеризуются особыми экстремальными управлениями, для которых условия классического принципа максимума становятся неэффективными для определения их значений. В связи с этим по-прежнему является актуальной разработка специализированных методов для эффективного решения задач оптимального управления рассматриваемого класса. В частности, в [6] для квадратичных по состоянию и линейных по управлению задач разработаны методы на основе построения специальных условий нелокального улучшения управления. В [3] разработаны методы поиска экстремальных управлений в классе линейно-квадратичных задач оптимального управления на основе задач о неподвижной точке.

В настоящей работе в классе линейных по управлению задач оптимального управления на основе построения специальных форм условий принципа максимума в виде задач о неподвижной точке предлагаются итерационные методы, позволяющие эффективно строить численные приближения особых экстремальных управлений.

2. Задачи о неподвижной точке. Рассматривается класс линейных по управлению задач оптимального управления

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T \left(\langle a(x(t), t), u(t) \rangle + d(x(t), t) \right) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x} = A(x(t), t)u(t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в котором переменная $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ описывает состояние системы, переменная $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ характеризует управляющее воздействие в системе. Функции $a(x, t)$, $d(x, t)$, $A(x, t)$, $b(x, t)$ дифференцируемы по переменной x и непрерывны по переменной t на множестве $\mathbb{R}^n \times T$, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на множестве $\mathbb{R}^n$. В качестве множества допустимых управлений $u(t)$, $t \in T$, рассматривается множество V кусочно непрерывных функций со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$. Начальное состояние x^0 и временной интервал T заданы.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной ψ в задаче (1), (2) имеет следующий вид:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle, \\ H_0(\psi, x, t) = \langle \psi, b(x, t) \rangle - d(x, t), \quad H_1(\psi, x, t) = A^T(x, t)\psi - a(x, t).$$

Стандартная сопряженная система рассматривается в следующей форме:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (3)$$

Для $v \in V$ обозначим через $x(t, v)$, $t \in T$, решение системы (2) при $u(t) = v(t)$, а через $\psi(t, v)$, $t \in T$, — решение стандартной сопряженной системы (3) при $x(t) = x(t, v)$, $u(t) = v(t)$.

Рассмотрим отображение на основе операции максимизации

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{u \in U} \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T.$$

С помощью отображения u^* условие известного принципа максимума для управления $u \in V$ в задаче (1), (2) можно записать в виде

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

Определим отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ на основе операции проектирования

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha H_1(\psi, x, t)), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w \in U, \quad t \in T.$$

С помощью отображения u^α условие принципа максимума (4) в задаче (1), (2) можно записать в эквивалентном виде

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T, \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

Управление $u \in V$ называется экстремальным, если оно удовлетворяет условию принципа максимума. Для экстремальности управления достаточно установить выполнение условия (5) хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Поиск экстремальных управлений существенно усложняется в особых задачах оптимального управления, в которых необходимые условия оптимальности в форме классического принципа максимума не позволяют определять значения экстремального управления.

Рассмотрим функцию переключения $g(\psi, x, t) = H_1(\psi, x, t)$. В соответствии с известным определением особого управления (см. [4]), управление $u \in V$ в задаче (1), (2) назовем особым, если для этого управления существует интервал времени $[\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$.

Для особого экстремального управления условия (4) и (5) на особом интервале выполняются тождественно и не могут служить для определения значений экстремального управления на

особом интервале. Задача (1), (2) называется особой, если существует хотя бы одно особое экстремальное управление.

Определим отображения X, Ψ, V^α следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X(v) &= x, \quad v \in V, \quad x(t) = x(t, v), \quad t \in T; \\ \Psi(v) &= \psi, \quad v \in V, \quad \psi(t) = \psi(t, v), \quad t \in T; \end{aligned}$$

$$V^\alpha(\psi, x, v) = v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v \in V, \quad v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), \quad t \in T,$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций.

С помощью введенных отображений условие принципа максимума (5) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления G_1^α :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = G_1^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (6)$$

Введем отображение X^α следующим образом:

$$X^\alpha(\psi, v) = x^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad v \in V,$$

где $x^\alpha(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_2^α :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = G_2^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (7)$$

Построим отображение Ψ^α по правилу

$$\Psi^\alpha(x, v) = \psi^\alpha, \quad x \in C(T), \quad v \in V,$$

где $\psi^\alpha(t)$, $t \in T$, — решение следующей сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_3^α :

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) = G_3^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (8)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Задачи о неподвижной точке (7) и (8) являются эквивалентными условию принципа максимума (5).

Доказательство. Условие принципа максимума в проекционной форме (5) является эквивалентным следующей дифференциально-алгебраической краевой задаче:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \\ \dot{\psi}(t) &= -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)), \\ u(t) &= u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что задача о неподвижной точке (7) эквивалентна условию принципа максимума (5).

Действительно, пусть $u \in V$ удовлетворяет условию (5), т.е. тройка $(x(t, u), \psi(t, u), u(t))$, $t \in T$, является решением краевой задачи (9). Это значит, что функция $x(t, u)$, $t \in T$, является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0,$$

т.е. $X(u) = X^\alpha(\Psi(u), u)$. Следовательно,

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u).$$

Обратно, пусть $u \in V$ является решением уравнения (7), т.е.

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Следовательно, $x(t) = x(t, u)$, $t \in T$, т.е. $X^\alpha(\Psi(u), u) = X(u)$. Получаем следующее:

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u).$$

Аналогично покажем эквивалентность задачи о неподвижной точке (8) и условия принципа максимума (5). Действительно, пусть $u \in V$ удовлетворяет условию (5), т.е. тройка $(x(t, u), \psi(t, u), u(t))$, $t \in T$, является решением краевой задачи (9). Это значит, что функция $\psi(t, u)$, $t \in T$, является решением задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)),$$

т.е. $\Psi(u) = \Psi^\alpha(X(u), u)$. Следовательно,

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u).$$

Обратно, пусть $u \in V$ является решением уравнения (8), т.е.

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)).$$

Следовательно, $\psi(t) = \psi(t, u)$, $t \in T$, т.е. $\Psi^\alpha(X(u), u) = \Psi(u)$. Получаем

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u).$$

Теорема доказана. $\square$

3. Особые управления. Определим понятия особых экстремальных управлений, удовлетворяющих условиям (7) и (8). Для этого рассмотрим соответствующие поточечные формы этих условий.

Задача о неподвижной точке (7) в поточечной форме имеет вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (10)$$

Задача о неподвижной точке (8) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной сопряженной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)). \quad (11)$$

Для управления $u \in V$ введем функцию переключения $g_1(x, t) = g(\psi(t, u), x, t)$. Решение $x(t)$, $t \in T$, задачи Коши (10) назовем особым, если существует интервал времени $[\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $g_1(x(t), t) = 0$.

Управление $u \in V$ назовем особым для задачи Коши (10), если решение $x(t)$, $t \in T$, этой задачи Коши является особым.

Экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (7), называется особым, если это управление является особым для соответствующей задачи Коши (10).

Покажем, что понятие особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (5), и понятие особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (7) с соответствующей задачей Коши (10), являются эквивалентными.

Теорема 2. *Особое экстремальное управление, удовлетворяющее условию (5), является особым экстремальным управлением, удовлетворяющим условию (7) с соответствующей задачей Коши (10), и наоборот. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.*

Доказательство. Действительно, пусть экстремальное управление $u \in V$ является особым на основе функции переключения $g(\psi, x, t)$, т.е. $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$. В силу экстремальности управления $u \in V$ выполняется соотношение $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. Следовательно, функция $x(t) = x(t, u)$, $t \in T$, удовлетворяет задаче Коши (10) для соотношения $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. При этом получаем $g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$.

Обратно, пусть экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (7) с соответствующей задачей Коши (10), является особым, т.е. $g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$, где $x(t)$, $t \in T$, является решением задачи Коши (10). В силу системы (10) и условия экстремальности $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$ имеем $x(t) = x(t, u)$, $t \in T$. Следовательно, получаем $0 = g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t)$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$, и условие экстремальности $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. $\square$

Введем функцию переключения $g_2(\psi, t) = g(\psi, x(t, u), t)$. Решение $\psi(t)$, $t \in T$, задачи Коши (11) назовем особым, если существует интервал времени $[\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $g_2(\psi(t), t) = 0$.

Управление $u \in V$ назовем особым для задачи Коши (11), если решение $\psi(t)$, $t \in T$, этой задачи Коши является особым.

Экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (8), называется особым, если это управление является особым для соответствующей задачи Коши (11).

Теорема 3. *Особое экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (5), является особым экстремальным управлением, удовлетворяющим условию (8) с соответствующей задачей Коши (11), и наоборот. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.*

Доказательство. Действительно, пусть экстремальное управление $u \in V$ является особым на основе функции переключения $g(\psi, x, t)$, т.е. $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$. В силу экстремальности управления $u \in V$ имеем соотношение $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. Следовательно, функция $\psi(t) = \psi(t, u)$, $t \in T$, удовлетворяет задаче Коши (11) для соотношения $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. При этом получаем $g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$.

Обратно, пусть экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (8) с соответствующей задачей Коши (11), является особым, т.е. $g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$, где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением задачи Коши (11). В силу системы (11) и условия экстремальности $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$ имеем $\psi(t) = \psi(t, u)$, $t \in T$. Следовательно, получаем $0 = g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t)$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ и условие экстремальности $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. $\square$

4. Итерационные методы. Рассматриваемые задачи о неподвижной точке принципа максимума (6)–(8) с различными операторами являются основой для конструирования различных итерационных методов простой итерации для поиска экстремальных управлений. Сходимость соответствующих итерационных процессов этих методов можно исследовать на основе известного принципа сжатых отображений.

Для решения задач о неподвижной точке принципа максимума (6)–(8) рассмотрим соответствующие итерационные процессы метода простой итерации при $k \geq 0$:

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X(v^k), v^k) = G_1^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V; \quad (12)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X^\alpha(\Psi(v^k), v^k), v^k) = G_2^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V; \quad (13)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v^k), v^k), X(v^k), v^k) = G_3^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V. \quad (14)$$

Процесс (12) в поточечной форме имеет вид

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (15)$$

Процесс (13) в поточечной форме принимает вид

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), \quad t \in T, \quad (16)$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (17)$$

Очевидно, что $x(t) = x(t, v^{k+1})$, $t \in T$. Следовательно, итерационный процесс (16), (17) в поточечной форме может быть записан в следующем неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (18)$$

Процесс (14) в поточечной форме имеет вид

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T, \quad (19)$$

где $\psi(t)$, $t \in T$,

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, v^k), u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v^k)). \quad (20)$$

В классе билинейных задач получаем $\psi(t) = \psi(t, v^{k+1})$, $t \in T$, и итерационный процесс (19), (20) можно представить в следующей неявной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (21)$$

Проекционный параметр $\alpha > 0$ в методах (12)–(14) фиксируется, в отличие от стандартного метода проекции градиента. Методы (12)–(14) не содержат операцию параметрического варьирования управления для обеспечения улучшения управления на каждой итерации методов. Трудоемкость реализации каждой итерации методов (12)–(14) оценивается решением двух задач Коши. Сходимость итерационных процессов (12)–(14) можно обосновать при достаточно малых $\alpha > 0$ на основе известного принципа сжимающих отображений аналогично [2].

В условиях сходимости предлагаемые проекционные методы позволяют вычислять итерационные приближения особых экстремальных управлений с любой заданной точностью при любых значениях функции переключения.

Итерационные приближения экстремальных управлений в методах (12)–(14) имеют свойство нелокальности, которое обеспечивается фиксированностью проекционного параметра $\alpha > 0$. Это свойство является важным для повышения вычислительной эффективности расчета особых экстремальных управлений, оцениваемой суммарным количеством расчетных фазовых и сопряженных задач Коши.

Итерационные приближения экстремальных управлений в методах (13) и (14) вычисляются одновременно вместе с решением соответствующих задач Коши (17) и (19). Это свойство повышает вычислительную точность расчета приближений и вычислительную эффективность этих методов по сравнению с методом (12). Указанное свойство является существенным фактором повышения эффективности расчета особых экстремальных управлений.

На каждой итерации предлагаемых методов релаксация по целевому функционалу не гарантируется, но это свойство компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления, отсутствием операции варьирования управления в окрестности текущего приближения для обеспечения улучшения по функционалу задачи, принципиальной сходимостью итерационных процессов к экстремальным управлениям при достаточно малых параметрах проектирования.

Метод в поточечной форме (15) отличается от широко известного метода проекции градиента отсутствием операции варьирования управления на каждой итерации процесса.

В классе билинейных задач на каждой итерации методы в поточечной форме (18) и (21) становятся эквивалентными известным проекционным методам улучшения управления, являющимися проекционными аналогами x - и ψ -методов (см. [6]). Таким образом, в классе билинейных задач методы (13) и (14) становятся релаксационными по значению функционала с оценкой улучшения

$$\Phi(v^{k+1}) - \Phi(v^k) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^{k+1}(t) - v^k(t)\|^2 dt.$$

Свойство релаксации методов (13) и (14) в классе билинейных задач также является существенным фактором повышения эффективности расчета особых экстремальных управлений в указанном классе.

5. Примеры. Проиллюстрируем на простых примерах сравнительную эффективность предлагаемых методов для расчета особых управлений.

Пример 1. Рассматривается билинейная задача

$$\int_0^2 u(t)x(t)dt \rightarrow \inf_{u \in V},$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 2].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система соответственно имеют вид

$$H(\psi, x, u, t) = (\psi - x)u; \quad g(\psi, x, t) = \psi - x;$$

$$\dot{\psi}(t) = u(t), \quad \psi(2) = 0.$$

Отображение u^* представляется в форме

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in [-1, 1]} \langle (\psi - x), w \rangle = \text{sign}(\psi - x).$$

Условие принципа максимума имеет вид

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - x(t, u)), \quad t \in T. \quad (22)$$

Краевая задача принципа максимума, эквивалентная условию (22), принимает вид

$$\dot{x}(t) = \text{sign}(\psi(t) - x(t)), \quad x(0) = 1,$$

$$\dot{\psi}(t) = \text{sign}(\psi(t) - x(t)), \quad \psi(2) = 0,$$

Анализ краевой задачи показывает, что ее решения удовлетворяют условию

$$\psi(t) - x(t) = 0, \quad t \in T.$$

Следовательно, экстремальными управлениями являются допустимые управления $u \in V$, удовлетворяющие условию

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi(t, u) - x(t, u) = 0, \quad t \in T. \quad (23)$$

Таким образом, все экстремальные управления являются особыми с особыми интервалами, равными интервалу T .

Стандартный прием дифференцирования тождества (23) не позволяет определять особые значения экстремального управления. Рассмотрим следующий подход к поиску особых экстремальных управлений. Предположим, что особое экстремальное управление $u \in V$ существует. Из дифференциальных уравнений и тождества (23) получаем

$$x(t, u) = \psi(t, u) = \int_0^t u(\Theta)d\Theta + 1, \quad \psi(2, u) = \int_0^2 u(\Theta)d\Theta + 1 = 0.$$

Таким образом, управление удовлетворяет равенству

$$\int_0^2 u(\Theta)d\Theta = -1. \quad (24)$$

Будем искать управления $u \in V$, удовлетворяющие условию (24), в различных классах функций.

В классе постоянных функций вида $u(t) = k$, $t \in T$, получаем

$$u(t) = -\frac{1}{2}, \quad x(t, u) = -\frac{1}{2}t + 1, \quad \Phi(u) = -\frac{1}{2}.$$

В классе линейных функций вида $u(t) = k_1 t + k_2$, $t \in T$, из условия (24) получаем равенство

$$2k_1 + 2k_2 = -1.$$

Задавая значения k_2 , можно получать различные особые экстремальные управления. При этом для любых k_1 и k_2 получаем значение $\Phi(u) = -1/2$. Например, при $k_2 = 0$ получаем

$$u(t) = -\frac{1}{2}t, \quad x(t, u) = -\frac{1}{4}t^2 + 1, \quad \Phi(u) = -\frac{1}{2}.$$

При $k_2 = -0,27$ получаем управление $u(t) = -0,23t - 0,27$, $\Phi(u) = -1/2$. При $k_2 = -0,73$ получаем управление $u(t) = 0,23t - 0,73$, $\Phi(u) = -1/2$.

Рассмотрим класс кусочно постоянных функций с одной точкой переключения $0 < \tau < 2$ с максимального допустимого значения на минимальное допустимое значение, имеющих вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ -1, & t \in [\tau, 2]. \end{cases}$$

В этом классе получаем

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 2]; \end{cases} \quad x(t, u) = \begin{cases} t + 1, & t \in [0, 1/2), \\ -t + 2, & t \in [1/2, 2]; \end{cases} \quad \Phi(u) = -\frac{1}{2}.$$

Для численного расчета особых экстремальных управлений рассмотрим эквивалентные условия принципа максимума в форме задач о неподвижной точке.

Задача о неподвижной точке (6) с параметром $\alpha > 0$ в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t, u))), \quad t \in T.$$

Задача о неподвижной точке (7) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad x(0) = 1.$$

Задача о неподвижной точке (8) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \quad \psi(2) = 0.$$

Соответствующие итерационные методы поиска особых экстремальных управлений (12)–(14) в поточечной форме принимают вид

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t, u^k) - x(t, u^k))), \quad t \in T; \quad (25)$$

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t, u^k) - x(t))), \quad t \in T, \quad (26)$$

$$\dot{x}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t, u^k) - x(t))), \quad x(0) = 1; \quad (27)$$

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u^k))), \quad t \in T, \quad (28)$$

$$\dot{\psi}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u^k))), \quad \psi(2) = 0. \quad (29)$$

Расчеты проводились при $\alpha = 0,8$. Для численного решения фазовых и сопряженных задач Коши применялся метод Рунге–Кутты–Вернера переменного (5-6) порядка точности, который реализовывался с помощью программы DIVPRK библиотеки IMSL Fortran PowerStation 4.0 (см. [1]). Значения вычисленных управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминались в узлах заданной на интервале T равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 10^{-3}$. При численном решении задач Коши значения управления в промежутках между соседними узлами сетки

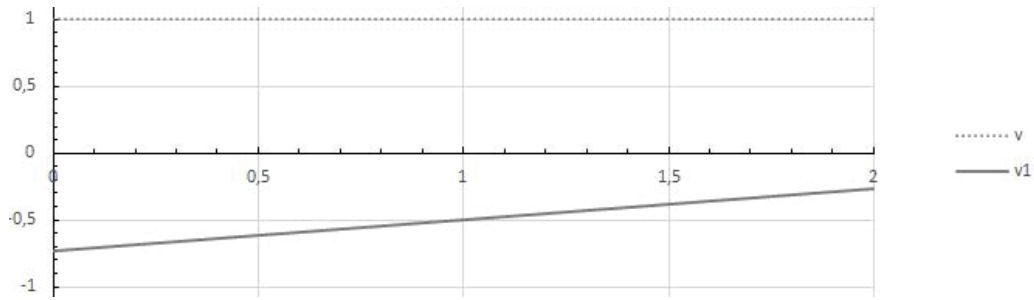


Рис. 1. v — стартовое управление, $v1$ — расчетное управление метода (26),(27).

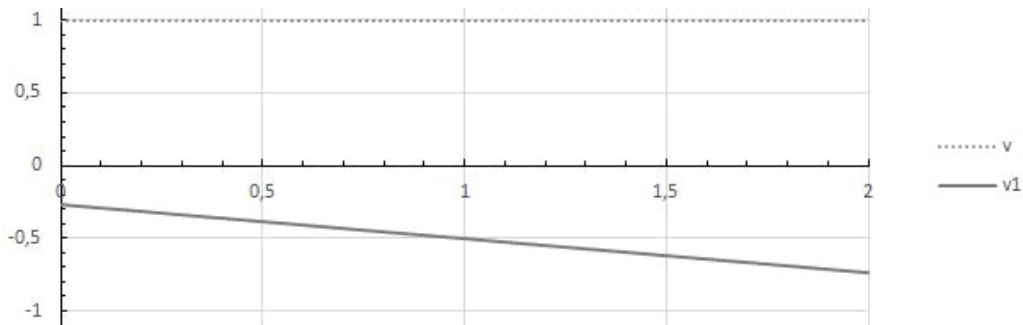


Рис. 2. v — стартовое управление, $v1$ — расчетное управление метода (28),(29).

T_h принимались равным значению в левом узле. Численный расчет задач о неподвижной точке проводился до выполнения следующего критерия остановки:

$$\max \left\{ |u^{k+1}(t) - u^k(t)|, t \in T_h \right\} \leq 10^{-6}.$$

Для стартовых управлений $u^0 = 1$, $u^0 = 0$, $u^0 = -1$ расчетные управления метода (26), (27) практически совпадают с особым экстремальным управлением $u(t) = 0,23t - 0,73$, $t \in T$. Для тех же стартовых управлений расчетные управления метода (28), (29) практически совпадают с другим особым экстремальным управлением $u(t) = -0,23t - 0,27$, $t \in T$.

На рис. 1 и 2 представлены расчетные управления, полученные методами (26), (27) и (28), (29) при стартовом управлении $u^0 = 1$. При этом для каждого метода количество расчетных задач Коши равно 15, количество итераций улучшения равно 7.

Метод условного градиента не работает в данном примере ввиду неопределенности особых значений управления при достаточно малых значениях функции переключения.

Итерационный процесс метода неподвижных точек (25) не сходится к экстремальным управлениям.

Пример 2. Рассматривается задача минимизации нормы конечного состояния системы, линейной по управлению:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= -1, \\ |u(t)| &\leq 1, & t \in T &= [0, 3], \\ \Phi(u) &= 0,5(x_1^2(3) + x_2^2(3)) \rightarrow \inf_{u \in V}. \end{aligned}$$

Задача для $T = [0, 2]$ рассматривалась в [7].

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, t) &= \psi_1 x_2 + \psi_2 u; \quad g(\psi, x, t) = \psi_2; \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, \quad \psi_1(3) = -x_1(3), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), \quad \psi_2(3) = -x_2(3). \end{aligned}$$

Условия принципа максимума на основе операции максимизации и на основе операции проектирования соответственно принимают вид

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sign}(\psi_2(t, u)), \quad t \in T; \\ u(t) &= P_U(u(t) + \alpha \psi_2(t, u)), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (30)$$

Анализ краевой задачи принципа максимума

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2(t) &= \text{sign}(\psi_2(t)), \quad x_2(0) = -1, \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, \quad \psi_1(3) = -x_1(3), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), \quad \psi_2(3) = -x_2(3), \end{aligned}$$

показывает, что экстремальные управления могут быть только особыми с особыми интервалами, равными T . При этом последовательное дифференцирование тождества

$$g(\psi(t), x(t), t) = \psi_2(t) = 0$$

в силу фазовой и сопряженной систем приводит к соотношениям, выполненным тождественно, которые не позволяют определять особые значения экстремального управления.

Существование особых экстремальных управлений определяется возможностью выполнения тождества на интервале ненулевой меры

$$x_1(3)t - x_1(3)3 - x_2(3) = 0.$$

Это тождество является эквивалентным условиям

$$x_1(3) = 0, \quad x_2(3) = 0.$$

Особые управления могут быть найдены на основе вспомогательной краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = 2, \quad x_1(3) = 0, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \quad x_2(0) = -1, \quad x_2(3) = 0, \end{aligned}$$

которая сводится к системе уравнений

$$\int_0^3 \left(\int_0^\xi u(\tau) d\tau - 1 \right) d\xi + 2 = 0, \quad -1 + \int_0^3 u(\tau) d\tau = 0.$$

В классе линейных функций $u(t) = k_1 t + k_2$ этим условиям удовлетворяет особое управление

$$u = \frac{2}{9}t, \quad t \in [0, 3], \quad \Phi(u) = 0,$$

которое является оптимальным.

Для численного поиска особых экстремальных управлений рассматривались итерационные методы (12)–(14).

Соответствующие задачи о неподвижной точке (6)–(8) в поточечной форме совпадают между собой и имеют вид (30). Следовательно, итерационные процессы (12)–(14) в поточечной форме также совпадают между собой и принимают следующий вид:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha \psi_2(t, u^k)), \quad t \in T. \quad (31)$$

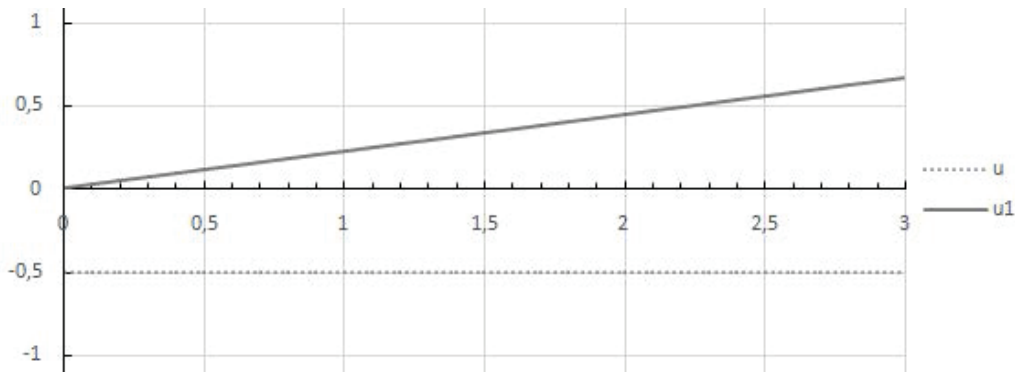
Эффективность итерационного метода (31) сравнивалась с эффективностью стандартного метода проекции градиента. В обоих методах значения фазовых, сопряженных и управляемых переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 0,01$.

Таблица 1. Результаты расчета методом (31).

u^0	$\Phi(u^0)$	$\hat{\Phi}$	NI	NC
0	1,0	4,121454489153501 $E-031$	135	273
0,5	0,90625	3,701439152776731 $E-031$	119	241
-0,5	8,40625	4,183785596600276 $E-031$	143	289
1,0	8,125	4,798278816953728 $E-031$	114	231
-1,0	23,125	4,726449136370594 $E-031$	149	301

Таблица 2. Результаты расчета методом проекции градиента.

u^0	$\Phi(u^0)$	$\hat{\Phi}$	NI	NC
0	1,0	2,536857622943042 $E-029$	272	1246
0,5	0,90625	1,362366037348309 $E-030$	270	1239
-0,5	8,40625	4,457897360122761 $E-031$	266	1211
1,0	8,125	4,457897360122761 $E-031$	265	1209
-1,0	23,125	4,457897360122761 $E-031$	266	1211

Рис. 3. u — стартовое управление, $u1$ — расчетное управление.

В промежутках между соседними узлами сетки T_h значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле. Итерационные процессы последовательных приближений управления осуществлялись до выполнения следующего критерия остановки:

$$\max \left\{ |u^{k+1}(t) - u^k(t)|, t \in T_h \right\} \leq 10^{-5}.$$

При этом для повышения точности расчетные приближения управления вычислялись одновременно с расчетом специальной задачи Коши по правилу (19), (20).

В таблицах 1 и 2 приведены результаты расчета методом (31) при $\alpha = 0,1$ и методом проекции градиента при различных стартовых управлениях u^0 . Здесь $\hat{\Phi}$ — расчетное значение функционала, NI — суммарное количество итераций улучшения управления, NC — суммарное количество расчетных задач Коши.

Расчетное управление в обоих методах практически совпадает с особым оптимальным управлением $u(t) = 2t/9$, $t \in [0, 3]$. На рис. 3 представлено расчетное управление, полученное обоими методами при стартовом управлении $u^0 = -0,5$.

Итерационный метод неподвижных точек (31) показывает существенно лучшую вычислительную эффективность по количеству расчетных задач Коши в сравнении с градиентным методом.

Также можно отметить по расчетным значениям функционала, что с разных стартовых управлений метод неподвижных точек (31) позволяет получить практически одно и тоже расчетное управление. Расчетные управления градиентного метода с разных стартовых управлений отличаются по расчетному значению функционала на величину до двух порядков.

Пример 3. Рассматривается упрощенная задача из [5] без терминального ограничения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \cos x_2(t), & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= 0, \end{aligned} \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, 3\pi], \quad U = \{|u| \leq 1\},$$

$$\Phi(u) = x_1(3\pi) \rightarrow \inf_{u \in V}.$$

Функция Понтрягина записывается в виде

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 \cos x_2 + \psi_2 u, \quad g(\psi, x, t) = \psi_2.$$

Стандартная сопряженная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(3\pi) &= -1, \\ \dot{\psi}_2(t) &= \psi_1(t) \sin x_2(t), & \psi_2(3\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\psi_1(t) = -1, \quad t \in T; \quad \dot{\psi}_2(t) = -\sin x_2(t), \quad \psi_2(3\pi) = 0.$$

Условие принципа максимума представляется в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sign}(\psi_2(t, u)), & t &\in T; \\ u(t) &= P_U(u(t) + \alpha \psi_2(t, u)), & t &\in T. \end{aligned} \quad (32)$$

Особые управления характеризуются тождеством

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi_2(t, u) = 0, \quad t \in T.$$

Дифференцирование этого тождества позволяет получить особое значение управления $u(t) = 0$. Других особых значений нет.

Краевая задача принципа максимума сводится к вспомогательной краевой задаче

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \text{sign}(\psi_2(t)), & x_2(0) &= 0, \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\sin x_2(t), & \psi_2(3\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично методике работы [5] можно получить следующее решение этой краевой задачи:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t, & t &\in [0, \pi], & x_2(t) &= \pi, & t &\in [\pi, 3\pi], \\ \psi_2(t) &= \cos t + 1, & t &\in [0, \pi], & \psi_2(t) &= 0, & t &\in [\pi, 3\pi]. \end{aligned}$$

Этому решению соответствует особое экстремальное управление с особым интервалом $[\pi, 3\pi]$:

$$u(t) = 1, \quad t \in [0, \pi), \quad u(t) = 0, \quad t \in [\pi, 3\pi], \quad \Phi(u) = -2\pi.$$

Аналогично можно получить второе решение краевой задачи и второе особое экстремальное управление с особым интервалом $[\pi, 3\pi]$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -t, & t &\in [0, \pi], & x_2(t) &= -\pi, & t &\in [\pi, 3\pi], \\ \psi_2(t) &= -\cos t - 1, & t &\in [0, \pi], & \psi_2(t) &= 0, & t &\in [\pi, 3\pi], \\ u(t) &= -1, & t &\in [0, \pi), & u(t) &= 0, & t &\in [\pi, 3\pi], \quad \Phi(u) = -2\pi. \end{aligned}$$

Краевая задача допускает очевидное нулевое решение

$$x_2(t) = 0, \quad \psi_2(t) = 0, \quad t \in T.$$

Этому решению соответствует особое экстремальное управление $u(t) = 0, t \in T, \Phi(u) = 3\pi$.

Таблица 3. Сравнительные результаты расчетов: 1 — ПМНТ, 2 — МПГР, 3 — МУГ.

u^0	$NC, NI, \hat{\Phi}(1)$	$NC, NI, \hat{\Phi}(2)$	$NC, NI, \hat{\Phi}(3)$
-1	3, 1, 0	3, 1, 0	3, 1, 0
-0,5	743, 371, -6,28	3602, 796, -6,28	24209, 2699, -6,28
0,0	3, 1, 9,42	3, 1, 9,42	3, 1, 9,42
0,5	743, 371, -6,28	3602, 796, -6,28	24209, 2699, -6,28
1,0	3, 1, 0	3, 1, 0	3, 1, 0

Вспомогательная краевая задача допускает также два симметричных решения, которым соответствуют неособые экстремальные управления

$$\begin{aligned} u(t) = 1, \quad x_2(t) = t, \quad \psi_2(t) = \cos t + 1, \quad t \in T, \quad \Phi(u) = 0; \\ u(t) = -1, \quad x_2(t) = -t, \quad \psi_2(t) = -\cos t - 1, \quad t \in T, \quad \Phi(u) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим результаты численного расчета рассматриваемой задачи оптимального управления.

Задачи о неподвижной точке (6)–(8) в поточечной форме совпадают между собой и имеют вид (32). Следовательно, итерационные процессы (12)–(14) в поточечной форме также совпадают между собой и принимают вид:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha\psi_2(t, u^k)), \quad t \in T. \quad (33)$$

При этом для повышения точности расчетные приближения управления вычислялись одновременно с расчетом специальной задачи Коши по правилу (19), (20).

Эффективность итерационного метода неподвижных точек (33) (ПМНТ) сравнивалась с эффективностью метода условного градиента (МУГ) и метода проекции градиента (МПГР). Расчеты проводились при $\alpha = 10^{-2}$. Сетка T_h рассматривалась с шагом дискретизации $h = 10^{-2}$. В методе условного градиента при значениях функции переключения, удовлетворяющих условию

$$|g(\psi(t, u), x(t, u), t) - \psi_2(t, u)| < 10^{-4},$$

значение управления выбиралось равным особому значению $u(t) = 0$. Критерий остановки определялся следующим образом:

$$\max \left\{ |u^{k+1}(t) - u^k(t)|, t \in T_h \right\} \leq 10^{-3}.$$

В таблице 3 приведены результаты расчетов сравниваемыми методами при различных стартовых управлениях u^0 : $\hat{\Phi}$ — расчетное значение функционала, NI — суммарное количество итераций улучшения управления, NC — суммарное количество расчетных задач Коши.

Для стартовых управлений $-1 < u^0 < 0$ расчетные управления практически совпадают с первым особым экстремальным управлением, указанным выше. На рис. 4 представлены расчетные управления, полученные сравниваемыми методами при стартовом управлении $u = -0,5$.

Для стартовых управлений $1 > u^0 > 0$ расчетные управления практически совпадают со вторым особым экстремальным управлением, указанным выше. На рис. 5 представлены расчетные управления, полученные сравниваемыми методами при стартовом управлении $u = 0,5$. Результаты расчета особых управлений демонстрируют существенно лучшую вычислительную эффективность итерационного метода неподвижных точек по суммарному количеству расчетных задач Коши в сравнении с градиентными методами.

6. Заключение. В классе линейных по управлению задач оптимального управления на основе новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке построены итерационные методы, позволяющие приближенно находить экстремальные управления, в том числе особые экстремальные управления.

Эффективность поиска особых экстремальных управлений, определяется следующими свойствами предлагаемых итерационных методов неподвижных точек:

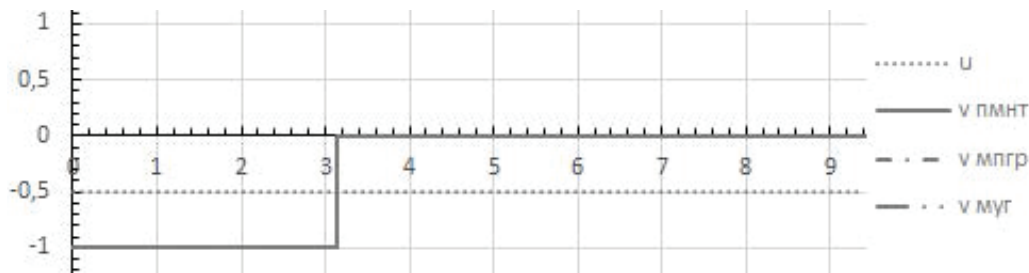


Рис. 4. u — стартовое управление, v пмнт — расчетное управление проекционного метода неподвижных точек, v мпгр — расчетное управление метода проекции градиента, v муг — расчетное управление метода условного градиента.

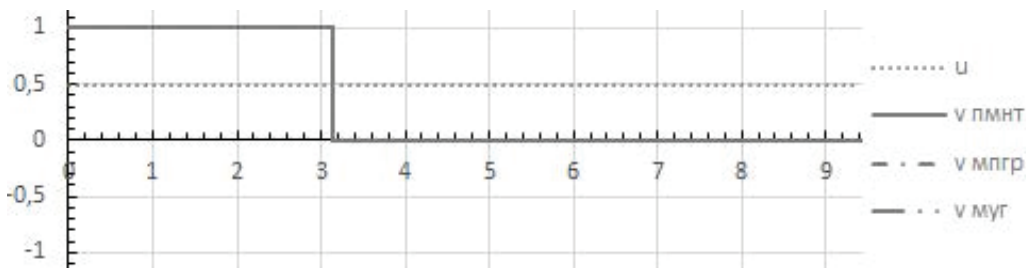


Рис. 5. u — стартовое управление, v пмнт — расчетное управление проекционного метода неподвижных точек, v мпгр — расчетное управление метода проекции градиента, v муг — расчетное управление метода условного градиента.

- (i) трудоемкость вычисления последовательных приближений особого экстремального управления на каждой итерации оценивается решением двух задач Коши для фазовых и сопряженных переменных;
- (ii) корректность определения значений итерационных приближений особого экстремального управления для любых значений функции переключения;
- (iii) повышение точности расчета итерационных приближений особого экстремального управления с помощью численного решения специальных задач Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Указанные свойства предлагаемых методов являются важными для повышения эффективности поиска особых экстремальных управлений в рассматриваемом классе линейных по управлению задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. — М.: Диалог-МИФИ, 2001.
2. Булдаев А. С. Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления // Вестн. Бурят. ун-та. Мат. Информ. — 2020. — № 1. — С. 35–53.
3. Булдаев А. С., Казьмин И. Д. Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 224. — С. 19–27.
4. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994.
5. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1977.
6. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
7. Срочко В. А. Конечномерная аппроксимация управлений в задачах оптимизации линейных систем // Вестн. Бурят. ун-та. Мат. Информ. — 2020. — № 3. — С. 19–31.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Булдаев Александр Сергеевич (Buldaev Aleksandr Sergeevich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
(Buryat State University named after D. Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: buldaev@mail.ru

Казьмин Иван Дмитриевич (Kazmin Ivan Dmitrievich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
(Buryat State University named after D. Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: kazminvanya@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 133–142
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-133-142

УДК 517.929

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2024 г. Б. Г. ГРЕБЕНЩИКОВ, С. А. ЗАГРЕБИНА

Аннотация. Обсуждаются методы получения достаточных условий для систем линейных дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием нейтрального типа и методы анализа асимптотических свойств некоторых классов систем нейтрального типа.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, устойчивость, функционалы Ляпунова–Красовского, неустойчивость, разностные системы.

METHODS OF RESEARCH OF SOME SYSTEMS WITH LINEAR DELAY

© 2024 B. G. GREBENSHCHIKOV, S. A. ZAGREBINA

ABSTRACT. In this paper, we discuss methods for obtaining sufficient conditions for systems of linear differential equations with linear delay of neutral type and methods for analyzing asymptotic properties of certain classes of systems of neutral type.

Keywords and phrases: functional differential equation, stability, Lyapunov–Krasovsky functionals, unstability, difference systems.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K10, 34K13

1. Введение. Системы с линейным запаздыванием встречаются в задачах механики, физики, биологии и обмене информации (см. [12]). В частности, при исследовании процесса вертикальных колебаний токоприемника движущегося локомотива при взаимодействии с контактным проводом (при учете воздействия эластичной опоры) в работе задача сводится к исследованию поведения решения однородной системы четвертого порядка. Если же исследовать колебания токоприемника при удалении локомотива от опоры, то возникает, в свою очередь, система нейтрального типа с линейным запаздыванием. Поскольку при некоторых скоростях движения локомотива (при взаимодействии полоза токоприемника с так называемой «легкой» подвеской) колебания токоприемника приобретают большой размах (а иногда, вдобавок, при очень низкой температуре окружающей среды) возможен и обрыв контактного провода, исследование асимптотических свойств соответствующих систем с линейным запаздыванием представляет и практический интерес.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием нейтрального типа m -го порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bx(\mu t) + R(t) \frac{dx(\mu t)}{dt}, \quad t \geq t_0 > 0, \\ \|R(t)\| &< \hat{R}, \quad \hat{R} = \text{const}, \quad \hat{R} > 0, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad x(\eta) = \phi(\eta) : \quad \eta \in [\mu t_0, t_0]. \end{aligned} \quad (1)$$

где A, B — постоянные матрицы, размерности $[m \times m]$; переменная непрерывно дифференцируемая матрица $R(t)$ имеет также размерность $[m \times m]$. Решение $x(t)$ системы (1) определено начальной вектор-функцией $\phi(\eta)$: $\eta \in [\mu t_0, t_0]$; вектор-функция $\phi(\eta)$ имеет непрерывную производную. Данная система имеет линейное запаздывание: $\gamma(t) = (1 - \mu)t$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$. Норму вектора x определим равенством

$$\|x(t)\| = \sum_{j=1}^m |x_j(t)|,$$

где $x_j(t)$ — компоненты вектора $\|x(t)\|$. В соответствии с нормой вектора определим норму матрицы $\|R(t)\|$ (см. [9]).

При некоторых значениях параметра μ будем изучать методы получения достаточных условий устойчивости полагая, что решение системы без нейтральных членов

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + By(\mu t) \quad t \geq t_0 > 0, \quad (2)$$

асимптотически устойчиво, при этом собственные значения λ матрицы A имеют отрицательную вещественную часть и для решения системы без нейтральных членов $y(t)$ справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \hat{C} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\hat{\delta}} \sup_{\eta} \|y(\eta)\|, \quad \hat{C} = \text{const}, \quad \hat{C} > 1, \quad \hat{\delta} = \text{const}, \quad \hat{\delta} > 0. \quad t \geq t_0 > 0. \quad (3)$$

2. Исследование линейных систем с линейным запаздыванием при μ , близком к единице. Академик Н. Н. Красовский (см. [8]) перенес на уравнения с запаздывающим аргументом идею использования квадратичных форм Ляпунова, производные от которых по времени в силу уравнений рассматриваемой системы представляют собой подынтегральную функцию некоторого критерия, описывающего качество переходного процесса; рассматривая решения систем с запаздыванием в функциональном фазовом пространстве, ввел соответствующее обобщение функций Ляпунова — функционалы Ляпунова. Такой функциональный подход лежит в основе современной качественной теории функционально-дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = a\bar{y}(t) + b\bar{y}(\mu t) + r(t)d\bar{y}(\mu t)/dt, \quad \mu = 1 - \varepsilon, \quad t \geq t_0 > 0. \quad (4)$$

Здесь a и b — скалярные постоянные, $r(t)$ — скалярная функция времени t , ε — малая положительная постоянная.

Для получения достаточных условий асимптотической устойчивости уравнения без нейтральных членов

$$\frac{d\bar{y}^0(t)}{dt} = a\bar{y}^0(t) + b\bar{y}^0(\mu t), \quad \mu = 1 - \varepsilon, \quad t \geq t_0 > 0, \quad (5)$$

рассмотрим функционал

$$V(t, \bar{y}^0(t), \bar{y}^0(\mu t)) = (\bar{y}^0(t))^2 + 2\alpha \int_{\mu t}^t (\bar{y}^0(s))^2 ds. \quad (6)$$

Вычислив его производную в силу системы без нейтральных членов и потребовав отрицательной определенности получившейся квадратичной формы переменных $x(t)$, $x(\mu t)$ (см. подробности в [8, 11]), получаем совокупность условий

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad a < 0, \quad |b| < \sqrt{\mu}|a|. \quad (7)$$

Отметим, что в [1, 5] с помощью преобразования Лапласа получена более широкая область асимптотической устойчивости:

$$a < 0, \quad |b| < |a|.$$

Очевидно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем достаточно схожие условия асимптотической устойчивости. К достоинствам этого метода можно отнести тот факт, что подобным методом можно исследовать асимптотическую устойчивость и при переменной величине $b(t)$.

Рассмотрим теперь исходное уравнение нейтрального типа, используя для получения достаточных условий его асимптотической устойчивости методику, предложенную в [7]. При этом для дальнейшего исследования асимптотических свойств систем нейтрального типа

$$\frac{d}{d\tau}[x(\tau) - G(\tau, x(\tau - \sigma))] = F(\tau, x(\tau), x(\tau - \sigma)), \quad F(\tau, 0, 0) = 0, \quad G(\tau, 0) = 0, \quad x(\eta) = \phi(\eta), \quad (8)$$

нам понадобятся дополнительные определения. Рассмотрим наряду с системой (8) разностное неравенство

$$|\bar{Z}(\tau, y(\tau), y(\tau - \sigma))| = |y(\tau) - G(\tau, y(\tau - \sigma))| \leq f(\tau), \quad G(\tau, 0) = 0, \quad y(\eta) = \phi(\eta). \quad (9)$$

Здесь $f(\tau)$ — неотрицательная непрерывная скалярная функция. Обозначим через $y(\tau, \phi)$ решение разностного неравенства (9).

Определение 1. Тривиальное решение неравенства (8) назовем f -устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что при всех начальных условиях и удовлетворяющих условиям

$$\|\phi(\tau_0)\| \leq \delta(\varepsilon), \quad \sup_{\tau > \tau_0} f(\tau) \leq \delta(\varepsilon)$$

правых частях имеем $|y(\tau, \phi)| \leq \varepsilon$.

Определение 2. Если наряду с этим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t, \phi) = 0$$

при любой начальной функции $\phi(\eta)$ (вектор-функции ограниченной вариации) и всякой правой части $f(\tau)$, удовлетворяющей условию $f(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0$, то тривиальное решение называется f -асимптотически устойчивым.

Определение 3. Тривиальное решение неравенства (8) называется f -ограниченным, если каждой ограниченной функции $f(\eta)$ отвечает ограниченное решение $y(\tau, \phi)$.

Очевидно, для линейных систем всякое f -ограниченное решение f -устойчиво.

В целях дальнейшего исследования асимптотических свойств уравнения (4) положим

$$\bar{Z}(t, y_t) = y(t) - r(t)y(\mu t).$$

Рассмотрим функционал

$$V^0(t, y_t, \bar{Z}(t, y_t)) = \bar{Z}(t, y_t) = y(t) - r(t)y(\mu t).$$

Полагаем, что справедливо неравенство

$$|r(t)y(\mu t)| < \bar{\gamma}|y(\tau - \sigma)|, \quad \tau = \ln(t), \quad \sigma = -\ln(\mu), \quad \bar{\gamma} = \text{const}, \quad 0 < \bar{\gamma} < 1. \quad (10)$$

Известно (см. [7]), что ввиду этого тривиальное решение неравенства

$$|y(\tau) - r(\tau)y(\tau - \sigma)| \leq f(\tau) \quad (11)$$

асимптотически f -устойчиво (более подробное обоснование будет представлено ниже).

Очевидно, что функционал $\bar{Z}(t, y_t)$ является определенно положительным, его производная будет определенно отрицательной. Но тогда в силу последнего соотношения получаем, что тривиальное решение уравнения нейтрального типа первого порядка асимптотически устойчиво.

3. Исследование линейных систем с линейным запаздыванием при малом μ . Рассмотрим исходную систему при достаточно малом $\mu > 0$. Произведем замену переменной $\tau = \ln(t)$. Получаем систему с постоянным запаздыванием

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = e^\tau (Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma)) + \mu \hat{R}(\tau) \frac{dz(\tau - \sigma)}{d\tau}, \quad \sigma = -\ln(\mu). \quad (12)$$

Одновременно рассматриваем систему без нейтральных членов, асимптотические свойства которой были исследованы ранее (см. [1, 5]):

$$\frac{dz^0(\tau)}{d\tau} = e^\tau (Az^0(\tau) + Bz^0(\tau - \sigma)). \quad (13)$$

Именно, при выполнении совокупности неравенств

$$\operatorname{Re}(\lambda) < -\beta_1, \quad |\rho| < q, \quad \beta_1 = \text{const}, \quad \beta_1 > 0, \quad q = \text{const}, \quad 0 < q < 1, \quad (14)$$

где λ — собственные значения матрицы A , ρ — собственные значения матрицы $A^{-1}B$, система без нейтральных членов экспоненциально устойчива, и для ее решения справедлива оценка, схожая с (3):

$$\|z^0(\tau)\| \leq \bar{C} e^{-\beta_2(\tau-\tau_0)} \sup_{\eta} \|\phi(\eta)\|, \quad \tau > \tau_0, \quad \beta_2 = \text{const}, \quad \beta_2 > 0, \quad \bar{C} = \text{const}, \quad \bar{C} > 1. \quad (15)$$

Отметим, что при этом константы $\bar{C}$ и β_2 одни и те же при любых $\tau_0 \geq \tau_0^*$, τ_0^* фиксировано. Кроме того, матрица $\exp\{A(t-s)\}$ допускает оценку

$$\|\exp\{A(t-s)\}\| \leq \hat{C} e^{-\hat{\beta}_1(t-s)}, \quad 0 < s < t, \quad \hat{C} = \text{const}, \quad \hat{C} > 1. \quad (16)$$

Для дальнейших исследований, полагая $z(\tau_0 + n\sigma) = z_{n+1}(\tau)$, $\tau_0 < \tau \leq \tau_0 + \sigma$, перейдем к счетной системе дифференциально-разностных уравнений на конечном промежутке времени $[\tau_0, \tau_0 + \sigma]$

$$\mu^n \frac{dz_{n+1}(\tau)}{d\tau} = e^\tau (Az_{n+1}(\tau) + Bz_n(\tau)) + \mu \hat{R}_{n+1}(\tau) \frac{dz_n(\tau)}{d\tau}. \quad (17)$$

Здесь $R_{n+1}(\tau) = R(\tau_0 + n\sigma)$, $z_{n+1}(\tau_0) = z_n(\tau_0 + \sigma)$.

Соответствующая счетная система дифференциально-разностных уравнений без нейтральных членов будет иметь вид

$$\mu^n \frac{dz_{n+1}^0(\tau)}{d\tau} = e^\tau (Az_{n+1}^0(\tau) + Bz_n^0(\tau)), \quad z_{n+1}^0(\tau_0) = z_n^0(\tau_0 + \sigma), \quad \tau \in [\tau_0, \tau_0 + \sigma]. \quad (18)$$

Представим вектор-функцию $z_{n+1}(\tau)$ в интегральной форме (форме Коши; см. [11]):

$$\begin{aligned} z_{n+1}(\tau) = & \exp\left\{\mu^{-n}A(e^\tau - e^{\tau_0})\right\} z_n(\tau_0 + \sigma) + \\ & + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\mu^{-n}A(e^\tau - e^s)\right\} \left(\frac{e^s}{\mu^n} Bz_n(s) + \mu R_{n+1}(s) \frac{dz_n(s)}{ds}\right) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим в последнем равенстве выражение

$$\mu \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\mu^{-n}A(e^\tau - e^s)\right\} R_{n+1}(s) z'_n(s) ds. \quad (20)$$

Считаем его «возмущением» для системы без нейтральных членов, имеющей вид

$$z_{n+1}^0(\tau) = \exp\left\{\mu^{-n}A(e^\tau - e^{\tau_0})\right\} z_n^0(\tau_0 + \sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\mu^{-n}A(e^\tau - e^s)\right\} \frac{e^s}{\mu^n} Bz_n^0(s) ds. \quad (21)$$

Рассмотрим оценки «возмущающих» членов. Для интеграла, содержащего $z'_0(s)$, имеем оценку

$$\mu \left\| \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\mu^{-n}A(e^\tau - e^s)\right\} R_{n+1}(s) z'_0(s) ds \right\| \leq \mu \frac{\hat{C}\hat{R}}{\hat{\beta}_1} \sup_{\eta} \|z'_0(\eta)\|. \quad (22)$$

Для интегралов, содержащих величины $z'_n(s)$, $n = 1, 2, \dots$, производя интегрирование по частям, имеем соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left\{\mu^{-n}A(e^\tau - e^s)\right\} R_{n+1}(s) z'_n(s) ds = \\ = R_{n+1}(\tau) z_n(\tau) - \exp\left\{\mu^{-n}A(e^\tau - e^{\tau_0})\right\} R_{n+1}(\tau_0) z_n(\tau_0) - I_n, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$I_n = \int_{\tau_0}^{\tau} \exp \left\{ \mu^{-n} A(e^{\tau} - e^s) \right\} e^{-s} \left[\frac{dR_{n+1}(s)}{ds} - AR_{n+1}(s) \right] z_n(s) ds. \quad (24)$$

Очевидно, $\|I_n\| = O(\mu^n) \max_{\tau} \|z_n(\tau_0)\|$. Следовательно, при малом $\mu > 0$ эти «возмущения» также малы. Тогда при ограниченности величин $\sup_{\eta} \|z_0(\eta)\|$, $\sup_{\eta} \|z'_0(\eta)\|$ ввиду оценок (14) из результатов [3] следует, что и решение «возмущенной» системы экспоненциально устойчиво при достаточно малом $\mu > 0$.

4. Следствие. При исследовании систем с постоянными матрицами A , B и R для асимптотической устойчивости исследуемой системы нейтрального типа при любом $0 < \mu < 1$ при выполнении оценок (14) достаточно, чтобы матрица R имела собственные значения ρ_R , по модулю меньшие единицы (см. [5]). В связи с этим рассмотрим несколько иную систему при $R(\tau + \sigma) = R(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau} [z(\tau) - \mu R(\tau) z(\tau)] = e^{\tau} [Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma)]. \quad (25)$$

Любую периодическую вектор-функцию можно представить в виде абсолютно сходящегося ряда Фурье (см. [6]). Тогда имеем соотношение

$$R(\tau) = \frac{\bar{\alpha}_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\bar{\alpha}_j \cos \left(\frac{2\pi j(\tau - \tau_0)}{\sigma} \right) + \bar{\beta}_j \sin \left(\frac{2\pi j(\tau - \tau_0)}{\sigma} \right) \right). \quad (26)$$

Коэффициенты данного ряда вычисляются следующим образом (см. [6]):

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{2}{\sigma} \int_{\tau_0}^{\tau_0+\sigma} R(s) ds, \quad \bar{\alpha}_j = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\sigma} R(s) \cos \left(\frac{2\pi s j}{\sigma} \right) ds, \quad \bar{\beta}_j = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\sigma} R(s) \sin \left(\frac{2\pi s j}{\sigma} \right) ds. \quad (27)$$

Ввиду абсолютной сходимости ряда Фурье для системы первого приближения достаточно взять вместо матрицы $R(\tau)$ тригонометрический полином k -го порядка $Q_k(\tau)$, удовлетворяющий условию $\|R(\tau) - Q_k(\tau)\| < \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число. Имеем систему первого приближения

$$\frac{d}{d\tau} (y^0(\tau) + \mu Q_k(\tau) y^0(\tau - \sigma)) = e^{\tau} (Ay^0(\tau) + By^0(\tau - \sigma)). \quad (28)$$

Если сделать замену переменной $\vartheta = \mu\tau$, получаем систему

$$\left(y^0(\vartheta) + \mu Q_k(\vartheta) y^0 \left(\vartheta - \frac{\sigma}{\mu} \right) \right)' = \mu^{-1} e^{\mu^{-1}\vartheta} \left(Ay^0(\vartheta) + By^0 \left(\vartheta - \frac{\sigma}{\mu} \right) \right). \quad (29)$$

Получили, что правая часть системы (27) по-прежнему не является ограниченной (ее структура не изменилась), а нестационарные члены в левой части последнего соотношении (вследствие малости параметра μ) являются достаточно быстро осциллирующими (см. [3]); следовательно, при асимптотической устойчивости решения более простой системы (системы первого приближения)

$$\left(y^0(\vartheta) + \frac{\mu}{2} \bar{\alpha}_0 y^0 \left(\vartheta - \frac{\sigma}{\mu} \right) \right)' = \mu^{-1} e^{\mu^{-1}\vartheta} \left(Ay^0(\vartheta) + By^0 \left(\vartheta - \frac{\sigma}{\mu} \right) \right) \quad (30)$$

является асимптотически устойчивой и система (23) (см. [3]). Но тогда асимптотически устойчива также исходная система (10) поскольку производная $dR(\tau)/d\tau$ ограничена. Отметим, что асимптотическая устойчивость систем с постоянными матрицами A , B , R предполагает, что собственные значения матрицы R меньше единицы по модулю (см. [5]).

Замечание 1. Наличие экспоненты в правой части систем вида (10) позволяет исследовать системы более общего вида, в частности, с периодическими (периода σ) матрицами $A(\tau)$, $B(\tau)$, $R(\tau)$. При этом при наличии экспоненциальной устойчивости системы без нейтральных членов требование для собственных значений матрицы $\mu R(\tau)$ быть меньше единицы по модулю не является достаточным для экспоненциальной устойчивости всей исследуемой системы.

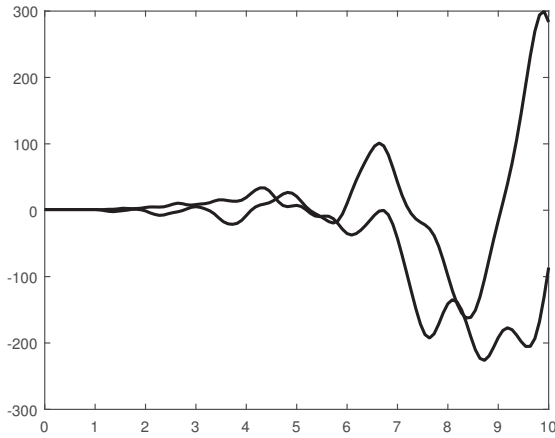


Рис. 1

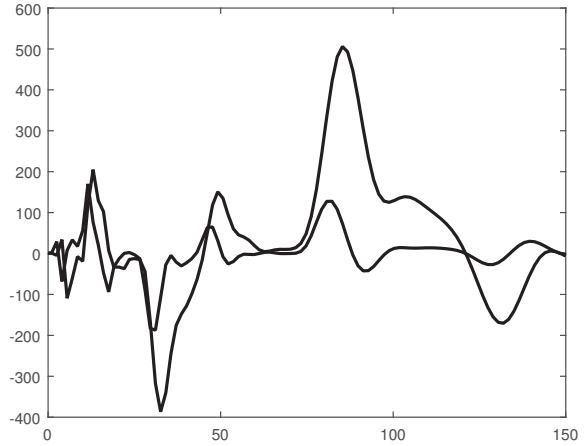


Рис. 2

Приведем пример. Рассмотрим поведение системы второго порядка с матрицами $A(\tau)$, $B(\tau)$, $R(\tau)$, имеющими вид

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} -1 - 9 \cos^2(6\tau) + 6 \sin(12\tau) & \cos^2(6\tau) + 4,5 \sin(12\tau) \\ -12 \sin^2(6\tau) + 4,5 \sin(12\tau) & -1 - 9 \sin^2(6\tau) - 6 \sin(12\tau) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$B(\tau) = \begin{pmatrix} -4,5 \cos^2(6\tau) + 3 \sin(12\tau) & -14,4 \cos^2(6\tau) + 13,35 \sin(12\tau) - 2 \\ -6 \sin^2(6\tau) + 2,25 \sin(12\tau) & -0,3 - 2,67 \sin^2(6\tau) + 7,2 \sin(12\tau) \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 1 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Ввиду того, что в правой части системы имеется экспоненциальный множитель, для экспоненциальной устойчивости системы без запаздывания достаточно, чтобы собственные числа λ матрицы (29) имели отрицательную вещественную часть (см. [2]). Условие выполнено: $\lambda_1(A) = -1$, $\lambda_2(A) = -10$. Теперь же в случае экспоненциальной устойчивости вырожденной системы (т.е. системы вида (19)) при $\mu = 0$ экспоненциально устойчива и система без нейтральных членов. В нашем случае для соответствующей матрицы вырожденной системы

$$-A^{-1}B = \begin{pmatrix} -0,5 & -2 \\ 0 & -0,3 \end{pmatrix}; \quad (33)$$

собственные значения этой матрицы равны $-0,5$ и $-0,3$, т.е. вырожденная система экспоненциально устойчива.

Система с нейтральными членами в правой части неустойчива даже при некоторых $\mu_0 \leq \mu < 1$, например, при $\mu = 0,8825$, несмотря на то, что модули собственных значений постоянной матрицы R меньше единицы. Но при малых μ , в частности, при $\mu = 0,3679$, решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво. В [4] обоснована достаточная точность применения некоторых численных методов для исследования асимптотических свойств систем с запаздыванием. Графики систем без нейтральных членов, исходной системы при $\mu = 0,8825$ и при $\mu = 0,3679$ приведены на рис. 2 и ?? соответственно. Начальный момент $\tau_0 = 1$, начальная вектор-функция имеет компоненты $(1; 1)^T$.

Рассмотрим асимптотическое поведение решения некоторых более сложных систем. Пусть по-прежнему матрицы A и B постоянны и их собственные значения удовлетворяют неравенству (14), матрица $R(\tau)$ имеет вид $R(\tau) = R_0 + \alpha(\tau)$, где R_0 — постоянная матрица размерности $m \times m$, собственные значения ν которой меньше единицы по модулю, матрица $\alpha(\tau)$ размерности $m \times m$ периодична с периодом σ , имеет ограниченную производную и удовлетворяет неравенству

$\|\alpha(\tau)\| < \delta$, где δ — достаточно малое положительное число. Тогда система (17) будет иметь вид

$$\mu^n \frac{dz_{n+1}(\tau)}{d\tau} = e^\tau (Az_{n+1}(\tau) + Bz_n(\tau)) + \mu(R_0 + \alpha(\tau)) \frac{dz_n(\tau)}{d\tau}. \quad (34)$$

Запишем решение этой системы в интегральной форме, считая неоднородностями члены с запаздыванием:

$$\begin{aligned} z_{n+1}(\tau) = \exp \{ \mu^{-n} A(e^\tau - e^{\tau_0}) \} z_n(\tau_0 + \sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp \{ \mu^{-n} A(e^\tau - e^s) \} e^s B z_n(s) ds + \\ + \mu \int_{\tau_0}^{\tau} \exp \{ \mu^{-n} A(e^\tau - e^s) \} (R_0 + \alpha(s)) (z_n(s))' ds. \end{aligned}$$

Здесь $(z_n(s))'$ — производная от вектор-функции $z_n(\tau)$. Рассмотрим в последнем равенстве интеграл, содержащий матрицу $\alpha(s)$; проинтегрировав по частям, получаем соотношение

$$\begin{aligned} S_n = \int_{\tau_0}^{\tau} \exp \{ \mu^{-n} A e^s \} \alpha(s) (z_n(s))' ds = \exp \{ \mu^{-n} A e^\tau \} \delta(s) z_n(s) \Big|_{\tau_0}^{\tau} + \\ + \int_{\tau_0}^{\tau} A \exp \{ \mu^{-n} A e^s \} \mu^{-n} e^s \delta(s) z_n(s) - \int_{\tau_0}^{\tau} \exp \{ \mu^{-n} A e^s \} \delta'(s) z_n(s) ds. \end{aligned}$$

Очевидно, для величины $\exp \{ \mu^{-n} A e^\tau \} S_n$, $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + \sigma]$, справедлива оценка

$$\left\| \exp \{ \mu^{-n} A \tau \} S_n \right\| \leq 2\delta + \frac{\hat{C}}{\beta_1} \left[\|A\| \delta + \mu^n \sup_t \|\delta'(\tau)\| \right] \|z_n(\tau)\|_1 = \delta_n \|z_n(\tau)\|_1. \quad (35)$$

Здесь и далее $\|z_n(\tau)\|_1 = \max_{\tau \in [\tau_0, \tau_0 + \sigma]} \|z_n(\tau)\|$. Считая возмущениями члены, содержащие матрицу $\alpha(\tau)$, и учитывая их малость, вводя оператор сдвига (см. [10])

$$\mathbb{T}_{n,\mu} = \exp \{ \mu^{-n} A(e^\tau - e^{\tau_0}) \} w(\tau_0 + \sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp \{ \mu^{-n} A(e^\tau - e^s) \} [e^s B w(s) + \mu R(s) w'(s)] ds, \quad (36)$$

получаем «возмущенное» неоднородное разностное уравнение

$$z_{n+1}(\tau) = \mathbb{T}_{n,\mu} z_n(s) + \bar{f}_n(z_n(s)). \quad (37)$$

Здесь вектор-функция $\bar{f}_n(z_n(s))$ удовлетворяет оценке малости (35). Запишем решение этого «возмущенного» уравнения с помощью формулы вариации постоянных (см. [10]). Имеем

$$\left\| \prod_{j=0}^n \mathbb{T}_{j,\mu}(w(\eta), w'(\eta)) \right\| \leq \bar{C}(\bar{q}_\mu)^n \left(\sup_{\eta} \|w(\eta)\| + \sup_{\eta} \|w'(\eta)\| \right), \quad (38)$$

где $\bar{C} = \text{const}$, $\bar{C} > 1$, $q_\mu = \text{const}$, $0 < q_\mu < \bar{q} < 1$; эта оценка следует из результатов [5]. Кроме того, учитывая, что $\delta_{j+1} < \delta_j$ по крайней мере для $j > N$, где натуральное число N достаточно велико, получим следующую оценку для $\|z_{n+1}(\tau)\|_1$ при $n > N$:

$$\|z_{n+1}(\tau)\|_1 < \bar{C}(\bar{q}_\mu)^{n-N} \|z_N(\tau)\|_1 + \bar{C} \sum_{j=1}^{n-N-1} (\bar{q}_\mu)^j \delta_j \|z_j(\tau)\|_1 + \delta_n \|z_n(\tau)\|_1. \quad (39)$$

Разделим обе части этого неравенства на величину $(\bar{q}_\mu)^{n-N}$, введем обозначение $u_j = \|z_N(\tau)\|_1 / (\bar{q}_\mu)^{n-j}$ и положим величину $z_N \tau$ равной начальной вектор-функции (см. [10]); тогда

получаем очередное неравенство

$$u_{n+1} < \sup_{k \geq N} \delta_k \frac{\bar{C}}{\bar{q}_\mu} \sum_{j=N+1}^n u_j. \quad (40)$$

Отсюда, возвращаясь к переменным $\|z_j(\tau)\|_1$, окончательно получаем, что для решения «возмущенного» уравнения, имеющего начальной вектор-функцией величину $z_N(\tau)$ при $q_\mu + \sup_{k \geq N} \delta_k \bar{C} < 1$, справедлива оценка

$$\|z_{n+1}(\tau)\|_1 < \bar{C} \left(1 + \frac{\delta_0}{q_\mu}\right) \left(1 + \frac{\bar{C}\delta_0}{q_\mu}\right)^{-1} [q_\mu + \bar{C}\delta_0]^{n-N} \|z_N(\tau)\|_1, \quad \delta_0 = \sup_{k \geq N} \delta_k. \quad (41)$$

Аналогично, ввиду сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^j$ с учетом неравенства, подобного (40), можно доказать ограниченность величин $\|z_1(\tau)\|_1$, $\|z_2(\tau)\|_1$, $\|z_N(\tau)\|_1$. Следовательно, «возмущенная» система асимптотически устойчива.

Вновь рассматривая нестационарную систему m -го порядка, аналогичную (25), применим для исследования ее асимптотических свойств аппарат, разработанный в [7]. Преобразуем ее аналогично соотношениям (9), (10). Имеем

$$\begin{aligned} [z(\tau) - \mu R(\tau)z(\tau - \sigma)]' &= e^\tau \left\{ A(\tau)z(\tau) + [B(\tau) + e^{-\tau} R'(\tau)]z(\tau - \sigma) \right\}, \\ A(\tau + \sigma) &= A(\tau), \quad B(\tau + \sigma) = B(\tau). \end{aligned} \quad (42)$$

Полагаем, что собственные значения $\lambda(\tau)$ матрицы $A(\tau)$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}(\lambda(\tau)) < -2d, \quad d = \text{const} > 0,$$

и, наряду с этим, собственные значения $\rho(\tau)$ матрицы $-A^{-1}(\tau)B(\tau)$ удовлетворяют неравенству $|\rho(\tau)| < 1 - 2\varepsilon$. Отметим, что в этом случае фундаментальная матрица решений $U_n(\tau, s)$ соответствующей системы без запаздывающих членов

$$\mu^n \frac{d\bar{y}(\tau)}{d\tau} = e^\tau (A(\tau)\bar{y}(\tau) + B(\tau)\bar{y}(\tau - \sigma)), \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \sigma, \quad (43)$$

при достаточно большом n допускает оценку

$$\|U_n(\tau, s)\| \leq M \exp \left\{ -\frac{d}{\mu^n} (e^\tau - e^s) \right\}, \quad M = \text{const}, \quad M > 1, \quad \tau_0 \leq s \leq \tau \leq \tau_0 + \sigma. \quad (44)$$

Следовательно, система без нейтральных членов экспоненциально устойчива. Наряду с этими условиями полагаем, что $R(\tau + \sigma) = R(\tau)$, при этом величина μ настолько мала, что тривиальное решение разностного неравенства

$$\|z(\tau) - \mu R(\tau)z(\tau - \sigma)\| \leq f(\tau), \quad (45)$$

где $f(\tau)$ — положительная непрерывная скалярная функция и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = 0$, асимптотически f -устойчиво. Покажем, что и решение системы (42) асимптотически устойчиво. Достаточные условия асимптотической f -устойчивости неравенства (45) приведены в [7]. Умножив обе части системы (42) на $e^{-\tau}$ ввиду того, что производная системы без нейтральных членов также асимптотически устойчива (см. [2]). Учитывая асимптотическую f -устойчивость разностной системы (45), получаем при $\tau \rightarrow \infty$ асимптотическое равенство

$$A(\tau)z(\tau) + [B(\tau) + e^{-\tau} R'(\tau)]z(\tau - \sigma) - \bar{F}(\tau) [\|z(\eta)\| + \|z'(\eta)\|] = 0, \quad (46)$$

где $\bar{F}(\tau)$ — исчезающая вектор-функция.

Рассмотрим вначале асимптотическое поведение вырожденной системы первого приближения

$$\bar{y}(\tau) = -\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)\bar{y}(\tau - \sigma). \quad (47)$$

Покажем, что существуют такие постоянные $\bar{L}_0 > 1$ и $\bar{q} \in (0, 1 - \varepsilon)$, что для решения этой разностной системы при $\tau \in [\tau_0 + n(n-1)\sigma, \tau_0 + n\sigma]$ справедлива оценка (см. [10])

$$\sup_{\tau} \|\bar{y}(\tau)\| \leq \bar{L}_0(\bar{q})^n \sup_{\tau} \|y_0(\tau)\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (48)$$

Ввиду равномерной непрерывности (по τ) матриц $A^{-1}(\tau)B(\tau)$ мы можем разбить интервал $[0, \sigma]$ на конечное число l таких равных промежутков длиной $< \delta_1$, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| A^{-1}(\tau)B(\tau) - A^{-1}(\tau_j)B(\tau_j) \right\| < \bar{\varepsilon} : \\ & |\tau - \tau_j| < \delta_1, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad 0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = \sigma. \end{aligned}$$

Но тогда при достаточно малом $\bar{\varepsilon}$ для каждого промежутка $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ найдутся такие постоянные $\bar{L}_j > 1$, что справедлива оценка

$$\left\| \prod_{i=1}^n A^{-1}(\tau + j\sigma)B(\tau + j\sigma) \right\| < L_j \bar{\gamma}^n, \quad \bar{\gamma} = \text{const}, \quad 0 < \gamma < \bar{\gamma} < 1, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Отсюда следует, что для любых $\tau \in [0, \sigma]$ подобное неравенство справедливо при константах $\bar{L}_0 = \max_j L_j$ и $\bar{q} = \bar{\gamma}$. Следовательно, вырожденная система (47) экспоненциально устойчива. Тогда для неоднородной системы первого приближения, используя формулу вариации постоянных, получаем последовательно на интервалах $\tau \in [\tau_0 + n(n-1)\sigma, \tau_0 + n\sigma]$, $n = 1, 2, \dots$, следующую оценку:

$$\sup_{\tau} \|\bar{y}(\tau)\| \leq \bar{L}_0(\bar{q})^n \sup_{\tau} \|y_0(\tau)\| + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-1} F_1 + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-1} F_2 + \dots + F_n. \quad (49)$$

Здесь

$$F_j = \sup_{\tau \in [\tau_0 + \sigma(j-1), \tau_0 + \sigma j]} \|F(\tau)\|.$$

Рассмотрим это неравенство, представив правую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} \sup_{\tau} \|\bar{y}(\tau)\| \leq & \left\{ \bar{L}_0(\bar{q})^n \sup_{\tau} \|y_0(\tau)\| + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-1} F_1 + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-1} F_2 + \dots + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-k} F_k \right\} + \\ & + \bar{L}_0(\bar{q})^{n-k-1} F_{k+1} + \dots + F_n. \end{aligned} \quad (50)$$

Сумма в фигурных скобках в правой части не превосходит величины

$$\bar{L}_0 \frac{\bar{q}^{n-k}}{1 - \bar{q}} \sup_{\tau} \|F(\tau)\|$$

и, следовательно, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Сумма же оставшихся членов $\bar{S}_k$ в правой части соотношения (50) не превосходит величины

$$\frac{\sup_{j \geq n-k} \|F_j(\tau)\|}{1 - \bar{q}}.$$

Поскольку $F(\tau)$ — исчезающая функция, имеем $\lim_{n-k \rightarrow \infty} \sup \bar{S}_k = 0$. Следовательно, и для вектор-функции $z(\tau)$ имеем предельное равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|z(\tau)\| = 0, \quad (51)$$

т.е. из асимптотической устойчивости системы первого приближения с учетом равенства (46) следует и асимптотическая устойчивость системы (42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гребенщиков Б. Г. Асимптотическое поведение решения одной системы функционально-разностных уравнений// в кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Матвеев Н. М., ред.). — Л., 1989. — С. 24–31.
2. Гребенщиков Б. Г. Об устойчивости систем с постоянным запаздыванием и с экспоненциальными коэффициентами// в кн.: Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания (Матвеев Н. М., ред.). — Л., 1990. — С. 138–148.
3. Гребенщиков Б. Г. Об устойчивости по первому приближению одной нестационарной системы с запаздыванием// Изв. вузов. Мат. — 2012. — № 2. — С. 34–42.
4. Гребенщиков Б. Г., Загребина С. А., Ложников А. Б. Применение некоторых численных методов для решения систем с линейным запаздыванием// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2023. — 15, № 1. — С. 5–12.
5. Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И. Устойчивость стационарных систем нейтрального типа с линейными запаздываниями// в кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Матвеев Н. М., ред.). — СПб., 1992. — С. 50–56.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
7. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
8. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
9. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1978.
10. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971.
11. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
12. Polyanin A. D., Sorokin V. G., Zhurov A. I. Delay Ordinary and Partial Differential Equations. — New York: : CRC Press, 2024.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Гребенщиков Борис Георгиевич (Grebenshchikov Boris Georgievich)
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск
(South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)
E-mail: grebenshchikovbg@susu.ru

Загребина Софья Александровна (Zagrebina Sofia Aleksandrovna)
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск
(South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)
E-mail: zagrebinasa@susu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 143–158
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-143-158

УДК 517.9, 51.72

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ЖЕСТКИХ И МЯГКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПЛАЗМЕ С НЕАБЕЛЕВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© 2024 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

Аннотация. Разработана гамильтонова теория для коллективных продольно поляризованных глюонных возбуждений (плазмонов), взаимодействующих с классической высокоэнергетической цветозаряженной пробной частицей, распространяющейся через высокотемпературную глюонную плазму. Проведено обобщение скобки Ли–Пуассона на случай сплошной среды, включающей бозонную нормальную переменную поля a_k^a и неабелев цветной заряд Q^a , и представлены соответствующие уравнения Гамильтона. Выписаны канонические преобразования, включающие одновременно как бозонные степени свободы мягких коллективных возбуждений в горячей глюонной плазме, так и степень свободы жесткой пробной частицы, связанной с ее цветным зарядом. Получена полная система условий каноничности для этих преобразований. Найден явный вид эффективного гамильтониана четвертого порядка, описывающего упругое рассеяние плазмона на жесткой цветной частице, и получена самосогласованная система кинетических уравнений Больцмановского типа, учитывающая эволюцию по времени среднего значения цветного заряда данной частицы.

Ключевые слова: гамильтонов формализм, скобка Ли–Пуассона, каноническое преобразование, специальная унитарная группа, плазмон, кинетическое уравнение, глюонная плазма.

HAMILTONIAN FORMALISM FOR HARD AND SOFT EXCITATIONS IN A PLASMA WITH A NON-ABELIAN INTERACTION

© 2024 Yu. A. MARKOV, M. A. MARKOVA, N. Yu. MARKOV

ABSTRACT. Hamiltonian theory for collective longitudinally polarized gluon excitations (plasmons) interacting with classical high-energy color-charged test particle propagating through a high-temperature gluon plasma is developed. A generalization of the Lie–Poisson bracket to the case of a continuous medium involving bosonic normal field variable a_k^a and a non-Abelian color charge Q^a is performed and the corresponding Hamilton equations are derived. The canonical transformations including simultaneously both bosonic degrees of freedom of the soft collective excitations in the hot gluon plasma and the degree of freedom of a hard test particle associated with its color charge are presented. A complete system of the canonicity conditions for these transformations is obtained. An explicit form of the effective fourth-order Hamiltonian describing the elastic scattering of a plasmon off a hard color particle is found and the self-consistent system of Boltzmann-type kinetic equations taking into account the time evolution of the mean value of the color charge of this particle is obtained.

Keywords and phrases: Hamiltonian formalism, Lie–Poisson bracket, canonical transformation, special unitary group, plasmon, kinetic equation, gluon plasma.

AMS Subject Classification: 34C14, 82D99

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос. регистрации 12104130005-1).

1. Введение. В наших предыдущих работах [4, 10] было достигнуто определенное продвижение в построении (псевдо)классического гамильтонова формализма для описания нелинейных процессов взаимодействия мягких коллективных возбуждений бозе- и ферми-типов в горячей слабовзаимодействующей кварк-глюонной плазме (КГП). В этих работах были рассмотрены простейшие случаи взаимодействий, а именно, взаимодействие коллективных продольно поляризованных бесцветных глюонных возбуждений (плазмонов) и коллективных кварк-антикварковых возбуждений (плазминов) с абнормальным соотношением между киральностью и спиральностью в КГП. В рамках общего гамильтонова подхода к выводу волновой теории в нелинейных средах с дисперсией (см. [1, 2, 13, 14]) мы определили в явном виде специальные канонические преобразования вплоть до членов третьего порядка по фермионным (b_q^i, b_q^{*i}) и бозонным (a_k^a, a_k^{*a}) нормальным переменным. Для сохранения правильной статистики мягких коллективных возбуждений в рамках классического описания мы полагали, что фермионные переменные принимают значения в алгебре Грассмана, т.е. являются антикоммутирующими. Далее нами были получены условия каноничности, связывающие между собой высшие и низшие коэффициентные функции в подынтегральных выражениях членов разложения канонических преобразований. В силу трехволновой нераспадной природы дисперсионных соотношений для бесцветных плазминов и плазмонов, канонические преобразования позволили исключить гамильтонианы третьего порядка H_3 по степеням нормальных переменных (b_q^i, b_q^{*i}) и (a_k^a, a_k^{*a}) . Исключение «несущественных» (по терминологии В. Е. Захарова [1]) гамильтонианов взаимодействия H_3 дало возможность получить новые эффективные гамильтонианы четвертого порядка $\tilde{H}_4$, подынтегральные выражения которых содержат калибровочно инвариантные амплитуды рассеяния, определяющие на древесном уровне простейшие амплитуды упругого рассеяния двух плазмонов друг на друге, плазмина на плазмоне и плазмина на плазмине.

В настоящей работе, являющейся первой статьей из двух статей цикла, мы распространяем гамильтонов анализ динамики фермионных и бозонных возбуждений в горячей КХД-среде на мягкой импульсной шкале, выполненный в [4, 10], на жесткий сектор возбуждений КГП-плазмы. Здесь мы сосредотачиваем свое внимание на исследовании процессов рассеяния мягких плазменных волн на жестких частицах в рамках формализма реального времени, основанного на кинетических уравнениях для мягких мод. При достаточно высоком уровне энергии мягких плазменных возбуждений процессы рассеяния плазмина и плазмона на жесткой частице будут давать вклады того же порядка в правую часть соответствующих уравнений Больцмана, что и вклады от процессов плазмон-плазмонного, плазмин-плазмонного и плазмин-плазминного рассеяний. Во второй статье будет проведен анализ полученной в данной работе системы кинетических уравнений и построено ее точное решение.

2. Гамильтониан взаимодействия плазмонов и жестких частиц. Как известно (см. [3]), в равновесной горячей чисто глюонной плазме существуют два типа физических мягких бозонных полей: поперечное и продольно поляризованное. Рассмотрим потенциал калибровочного поля $A_\mu^a(x)$ в виде разложения по плоским волнам (см. [6, 8]):

$$A_\mu^a(x) = \int d\mathbf{k} \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_k^l} \right)^{1/2} \left\{ \epsilon_\mu^l(\mathbf{k}) a_k^a e^{-i\omega_k^l(t-t_0)+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon_\mu^{*l}(\mathbf{k}) a_k^{*a} e^{i\omega_k^l(t-t_0)-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\} + \\ + \sum_{\zeta=1,2} \int d\mathbf{k} \left(\frac{Z_t(\mathbf{k})}{2\omega_k^t} \right)^{1/2} \left\{ \epsilon_\mu^t(\mathbf{k}, \zeta) a_k^a(\zeta) e^{-i\omega_k^t(t-t_0)+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon_\mu^{*t}(\mathbf{k}, \zeta) a_k^{*a}(\zeta) e^{i\omega_k^t(t-t_0)-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\}, \quad (2.1)$$

где $\epsilon_\mu^l(\mathbf{k})$ — вектор поляризации продольной моды ($\mathbf{k}$ — волновой вектор), а $\epsilon_\mu^t(\mathbf{k}, \zeta)$ — вектор поляризации поперечной моды. Дискретная переменная $\zeta = 1, 2$ обозначает два возможных состояния поперечной поляризации, а звездочка * — комплексное сопряжение. Цветовые индексы $a, b, c, \dots$ пробегает значения $1, 2, \dots, N_c^2 - 1$ для цветовой группы $SU(N_c)$, в то время как векторные индексы $\mu, \nu, \lambda, \dots$ принимают значения $0, 1, 2, 3$. В данной статье мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам и используем систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Коэффициенты $Z_l(\mathbf{k})$ и $Z_t(\mathbf{k})$ — вычеты эффективного пропагатора глюона в полюсах продольной и поперечной

мод, соответственно. Наконец, $\omega_{\mathbf{k}}^l$ и $\omega_{\mathbf{k}}^t$ — дисперсионные соотношения соответствующих мод как функции волнового вектора $\mathbf{k}$. Амплитуды продольного $a_{\mathbf{k}}^a$ и поперечного $a_{\mathbf{k}}^a(\zeta)$ возбуждений считаем обычными (комплексными) случайными функциями, а величины математических ожиданий произведений двух бозонных амплитуд представим в виде

$$\langle a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}'}^b \rangle = \delta^{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^l, \quad \langle a_{\mathbf{k}}^{*a}(\zeta) a_{\mathbf{k}'}^b(\zeta') \rangle = \delta^{ab} \delta_{\zeta\zeta'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^t,$$

где $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^l$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^t$ — плотности числа продольных и поперечных плазменных волн. Отметим, что эти корреляционные функции выписаны для горячей глюонной плазмы без внешних цветных полей или высокоэнергетических цветозаряженных частиц, проникающих в плазму извне.

Для простоты ограничимся анализом только процессов с продольно поляризованными плазменными возбуждениями, которые называются *плазмонами*. Дисперсионное соотношение $\omega_{\mathbf{k}}^l$ для плазмонов удовлетворяет следующему дисперсионному уравнению (см. [3]):

$$\text{Re } \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{3\omega_{pl}^2}{k^2} \left[1 - F\left(\frac{\omega}{|\mathbf{k}|^2}\right) \right], \quad F(x) = \frac{x}{2} \left[\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - i\pi\theta(1-|x|) \right]$$

— продольная проницаемость, $\omega_{pl}^2 = g^2 N_c T^2 / 9$ — квадрат плазменной частоты глюонных плазменных возбуждений, T — температура системы, g — константа сильного взаимодействия.

Амплитуды $a_{\mathbf{k}}^a$ и $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ в разложении для продольной части потенциала калибровочного поля (2.1) удовлетворяют соотношениям скобки Ли—Пуассона (LPB):

$$\{a_{\mathbf{k}}^a, a_{\mathbf{k}'}^b\}_{\text{LPB}} = 0, \quad \{a_{\mathbf{k}}^{*a}, a_{\mathbf{k}'}^{*b}\}_{\text{LPB}} = 0, \quad \{a_{\mathbf{k}}^a, a_{\mathbf{k}'}^{*b}\}_{\text{LPB}} = \delta^{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.3)$$

С другой стороны, если рассматривать цветной заряд Q^a жесткой пробной частицы в качестве дополнительной независимой переменной для исследуемой физической системы, то аналогичная скобка Ли—Пуассона должна иметь следующий вид (см. [5, 9]):

$$\{Q^a, Q^b\}_{\text{LPB}} = f^{abc} Q^c. \quad (2.4)$$

Для случая непрерывных сред в качестве определения скобки Ли—Пуассона возьмем выражение

$$\{F, G\}_{\text{LPB}} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta a_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta G}{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta F}{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta G}{\delta a_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + \frac{\partial F}{\partial Q^a} \frac{\partial G}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c. \quad (2.5)$$

Первый член в правой части — это стандартная каноническая скобка. Далее для простоты обозначений аббревиатуру LPB будем опускать; тем самым скобки $\{\cdot, \cdot\}$ всегда обозначают скобку Ли—Пуассона (2.5).

Запишем уравнения Гамильтона для функций $a_{\mathbf{k}}^a$, $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ и Q^a :

$$\frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} = -i\{a_{\mathbf{k}}^a, H\} \equiv -i\frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^{*a}}, \quad \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} = -i\{a_{\mathbf{k}}^{*a}, H\} \equiv i\frac{\delta H}{\delta a_{\mathbf{k}}^a}, \quad (2.6)$$

$$\frac{dQ^a}{dt} = \{Q^a, H\} = \frac{\partial H}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c, \quad Q^a|_{t=t_0} = Q_0^a. \quad (2.7)$$

Здесь функция H представляет собой гамильтониан для системы плазмонов и жесткой тестовой частицы, который равен сумме $H = H^{(0)} + H_{\text{Int}}$, где

$$H^{(0)} = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}^l a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}}^a \quad (2.8)$$

— гамильтониан невзаимодействующих плазмонов, а H_{Int} — гамильтониан взаимодействия плазмонов и жесткой цветозаряженной частицы. Мы предполагаем, что данная (тестовая) частица движется в глюонной плазме с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Простейшим способом учета наличия движущейся частицы в этой среде является переход в систему отсчета, в которой эта частица

находится в состоянии покоя. Для этой цели достаточно заменить $a_{\mathbf{k}}^a$ на $a_{\mathbf{k}}^a \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(t - t_0))$ в потенциале калибровочного поля (2.1). В этом случае вместо гамильтониана (2.8) будем иметь

$$H^{(0)} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}}^a. \quad (2.9)$$

Таким образом, $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}^l \equiv \omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$ представляет собой частоту мягкого глюонного поля A_{μ}^a в системе координат, где заряд находится в состоянии покоя, т.е. частоту, воспринимаемую движущимся зарядом (за счет эффекта Доплера). Следует особо отметить одно важное для дальнейшего рассмотрения обстоятельство. В силу специфического характера дисперсионного уравнения для мягких (продольных) бозонных возбуждений (2.2) в горячей глюонной плазме коэффициент $(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})$ в интеграле (2.9) никогда не обращается в ноль, т.е.

$$\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \neq 0 \quad (2.10)$$

для произвольных значений волнового вектора $\mathbf{k}$. Другими словами, линейное затухание Ландау (черенковское излучение) кинематически запрещено в горячей глюонной плазме.

В приближении малых амплитуд гамильтониан взаимодействия может быть представлен в виде формального интегро-степенного ряда по бозонным функциям $a_{\mathbf{k}}^a$ и $a_{\mathbf{k}}^{*a}$ и цветному заряду Q^a :

$$H_{\text{Int}} = H^{(3)} + H^{(4)} + \dots,$$

где гамильтониан взаимодействия третьего порядка имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} H^{(3)} = & \int d\mathbf{k} \left[\phi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^a Q^a + \phi_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^{*a} Q^a \right] \\ & + \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left\{ \mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + \mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^a a_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \\ & + \frac{1}{3} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left\{ \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^a a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} a_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \right\} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Соответственно, гамильтониан взаимодействия четвертого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} H^{(4)} = & \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 \left\{ T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^a a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} Q^{a_2} + T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1) a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} Q^{a_2} \right\} \\ & + i \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 a_2} a_{\mathbf{k}}^{*a} a_{\mathbf{k}_1}^{a_1} Q^{a_2} + \Xi Q^a Q^a. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Следует особо пояснить следующее обстоятельство. Несмотря на то, что, например, гамильтониан $H^{(3)}$ содержит смешанные вклады, формально квадратичные по переменным $a_{\mathbf{k}}^a$ и Q^a , и вклады, кубичные по $a_{\mathbf{k}}^a$, тем не менее, все выражение (2.11) представляет собой гамильтониан взаимодействия третьего порядка. Таким образом, мы присваиваем степень нелинейности 2 цветному заряду Q^a . Члены в квадратных скобках в первой строке в (2.11) соответствуют элементарным вершинам взаимодействия мягких глюонных возбуждений с жесткой цветозаряженной частицей, как показано на рис. 1. Вершинные функции $\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ и $\mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ в оставшихся вкладах в (2.11) определяют процессы трехплазмонного взаимодействия (см. [4]). То же самое относится и к гамильтониану $H^{(4)}$, который содержит квадратичные вклады по переменной Q^a и кубичные смешанные вклады по переменным $a_{\mathbf{k}}^a$ и Q^a , однако все эти вклады образуют в точности гамильтониан взаимодействия четвертого порядка, если предположить, что степень нелинейности цветового заряда равна двум.

Вершинные функции $\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$, $\mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ и $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1) a a_1 a_2}$ удовлетворяют «условиям естественной симметрии», которые означают, что интегралы в уравнениях (2.11) и (2.12) не зависят от перестановки немых цветовых индексов и переменных интегрирования. Эти условия имеют следующий вид:

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} = \mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{a a_2 a_1}, \quad \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} = \mathcal{U}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{a a_2 a_1} = \mathcal{U}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}, \quad T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1) a a_1 a_2} = T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{(1) a_1 a a_2}. \quad (2.13)$$

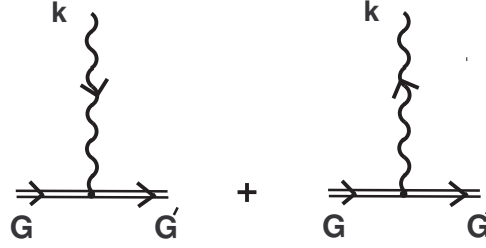


Рис. 1. Вершины элементарного взаимодействия мягких бозонных возбуждений с жесткой тестовой цветозаряженной частицей G . Двойная линия обозначает жесткую частицу с цветным зарядом Q^a . Вершины взаимодействия для входящих и выходящих волновых линий (плазмонов) определяются функциями $\phi_{\mathbf{k}}$ и $\phi_{\mathbf{k}}^*$ в гамильтониане $H^{(3)}$.

Вещественность гамильтониана (2.11) очевидна. Вещественность гамильтониана (2.12) влечет за собой справедливость дополнительного соотношения для вершинной функции $T_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2}$:

$$T_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2} = -T_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}}^{*(2)a_1aa_2}.$$

Вершинные функции в гамильтонианах $H^{(3)}$ и $H^{(4)}$ определяются специфическими свойствами исследуемой системы, в нашем случае - высокотемпературной глюонной плазмы. Явная форма трехточечных амплитуд $\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{aa_1a_2}$ и $\mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{aa_1a_2}$ в приближении жестких температурных петель была получена в [4]:

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{aa_1a_2} = f^{aa_1a_2} \mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}, \quad \mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{aa_1a_2} = f^{aa_1a_2} \mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = \frac{1}{2^{3/4}} g \left(\frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_1}^l(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_2}^l(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}^l}} \right)^* \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k, -k_1, -k_2) \Big|_{\text{on-shell}}, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = \frac{1}{2^{3/4}} g \left(\frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_1}^l(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_2}^l(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}^l}} \right)^* \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(-k, -k_1, -k_2) \Big|_{\text{on-shell}}. \quad (2.16)$$

Вид эффективной трехглюонной вершины ${}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k, k_1, k_2)$ в правой части этих выражений определяется формулами (A.1)–(A.3) в Приложении работы [4]. В силу цветового разложения (2.14) и свойств симметрии (2.13) для эффективных вершин (2.15) и (2.16) выполняются следующие перестановочные соотношения:

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = -\mathcal{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1}, \quad \mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = -\mathcal{U}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1} = -\mathcal{U}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k},\mathbf{k}_2}.$$

3. Канонические преобразования. Рассмотрим преобразование от нормальной бозонной переменной $a_{\mathbf{k}}^a$ и классического цветного заряда Q^a к новой полевой переменной $c_{\mathbf{k}}^a$ и цветному заряду $\mathcal{Q}^a$:

$$a_{\mathbf{k}}^a = a_{\mathbf{k}}^a(c_{\mathbf{k}}^a, c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{Q}^a), \quad (3.1)$$

$$Q^a = \mathcal{Q}^a(c_{\mathbf{k}}^a, c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{Q}^a). \quad (3.2)$$

Потребуем, чтобы уравнения Гамильтона в терминах новых переменных имели вид (2.6) и (2.7) с одним и тем же гамильтонианом H . Поскольку мы рассматриваем преобразования, не зависящие явно от времени, то старый и новый гамильтонианы численно равны, но в общем случае отличаются по функциональному виду, поскольку записаны в разных переменных. Несложные, но

достаточно громоздкие вычисления приводят к двум системам интегральных соотношений, гарантирующих каноничность преобразований (3.1) и (3.2). Первая из них имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= \delta^{ab} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= 0, \\ \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta Q^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta a_{\mathbf{k}}^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta Q^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial Q^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Соответственно, вторая система имеет вид

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial Q^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^{*b}}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= 0, \\ \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta a_{\mathbf{k}'}^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial Q^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial a_{\mathbf{k}'}^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= 0, \\ \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \frac{\delta Q^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} - \frac{\delta Q^a}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*c}} \frac{\delta Q^b}{\delta c_{\mathbf{k}'}^c} \right\} + i \frac{\partial Q^a}{\partial \mathcal{Q}^c} \frac{\partial Q^b}{\partial \mathcal{Q}^{c'}} f^{cc'd} \mathcal{Q}^d &= i f^{abd} \mathcal{Q}^d. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эти условия каноничности можно записать в очень компактной форме, если воспользоваться определением скобки Ли—Пуассона (2.5) и заменить вариационные переменные на новые: $a_{\mathbf{k}}^a \rightarrow c_{\mathbf{k}}^a$ и $Q^b \rightarrow \mathcal{Q}^b$. В этом случае скобка Ли—Пуассона для исходных переменных $a_{\mathbf{k}}^a$ и Q^b , уравнения (2.3) и (2.4), переходит в условия каноничности (3.3) и (3.4), которые накладывают определенные ограничения на функциональные зависимости (3.1) и (3.2). Представим канонические преобразования (3.1) и (3.2) в виде интегро-степенных рядов по нормальной переменной $c_{\mathbf{k}}^a$ и цветному заряду $\mathcal{Q}^a$. В этом случае преобразование (3.1) с точностью до членов шестого порядка по $c_{\mathbf{k}}^a$ и $\mathcal{Q}^a$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^a &= c_{\mathbf{k}}^a + F_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}^a + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} + V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 \left[\tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^{a_2} + \tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 \left[\tilde{W}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + \tilde{W}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \right] + \dots + \\ &+ \left(G_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} + G_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2a_3} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогично, наиболее общее разложение в ряд для преобразования (3.2) с точностью до членов шестого порядка записывается как

$$\begin{aligned} Q^a &= \mathcal{Q}^a + \int d\mathbf{k}_1 \left[M_{\mathbf{k}_1}^{aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} + M_{\mathbf{k}_1}^{*aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1)aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{*a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \right] + \\ &+ \int d\mathbf{k}_1 \left[\tilde{M}_{\mathbf{k}_1}^{aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + \tilde{M}_{\mathbf{k}_1}^{*aa_1a_2a_3} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} \right] + \dots + \\ &+ F^{aa_1a_2} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} + F^{aa_1a_2a_3} \mathcal{Q}^{a_1} \mathcal{Q}^{a_2} \mathcal{Q}^{a_3} + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

В преобразовании (3.5) мы не выписали кубичные члены, такие как $c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} c_{\mathbf{k}_3}^{a_3}$, поскольку в рассматриваемом нами приближении они не дают никакого вклада. В преобразовании (3.6) опущены

вклады, содержащие только нормальные переменные $c_{\mathbf{k}}^a$ и $c_{\mathbf{k}}^{*a}$ (т.е. без цветных зарядов Q^a). Это можно интерпретировать так, что цветные заряды являются заданными физическими объектами, которые не могут быть наведены мягким калибровочным полем рассматриваемой системы. Впрочем, то, что эти вклады в любом случае обращаются в ноль, можно проверить прямым вычислением. Кроме того, в преобразовании (3.6) было учтено требование вещественности цветного заряда, в частности, оно также приводит к условиям

$$M_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(2)aa_1a_2a_3} = M_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_2a_1a_3}, \quad F^{*aa_1a_2} = F^{aa_1a_2}, \quad F^{*aa_1a_2a_3} = F^{aa_1a_2a_3}.$$

Далее, подставляя разложения (3.5) и (3.6) в систему условий каноничности (3.3) и (3.4), получаем весьма нетривиальные интегральные соотношения, связывающие между собой высшие и низшие коэффициентные функции, которые мы здесь не выписываем ввиду их громоздкости. Мы приведем лишь простые алгебраические соотношения для низших коэффициентных функций второго порядка:

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = -2V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{*(1)a_2a_1a} \quad , \quad V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3)aa_1a_2} = V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{(3)a_1aa_2} \quad , \quad (3.7)$$

$$M_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2} + iF_{\mathbf{k}}^* f^{aa_1a_2} = 0, \quad (3.8)$$

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(1)aa_1a_2} - \tilde{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{(1)a_1aa_2} - iF_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}_1} f^{aa_1a_2} = 0, \quad (3.9)$$

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2} + \tilde{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{*(2)a_1aa_2} + iF_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}_1}^* f^{aa_1a_2} = 0. \quad (3.10)$$

4. Исключение «несущественного» гамильтониана $H^{(3)}$. Эффективный гамильтониан четвертого порядка. Следующим шагом в построении эффективной теории является процедура исключения гамильтониана взаимодействия третьего порядка $H^{(3)}$, уравнение (2.11), при переходе от исходной бозонной функции $a_{\mathbf{k}}^a$ и цветного заряда Q^a к новой функции $c_{\mathbf{k}}^a$ и цветному заряду Q^a в результате канонических преобразований (3.5) и (3.6). Подобного рода исключение мы уже проводили в [4], рассматривая взаимодействие мягких бозонных возбуждений между собой. В данной работе новым элементом является учет взаимодействия мягких бозонных возбуждений с жесткой тестовой частицей. Поэтому здесь мы более подробно остановимся на этом новом аспекте.

Для исключения гамильтониана взаимодействия третьего порядка $H^{(3)}$ подставим разложения (3.5) и (3.6) в гамильтониан свободного поля $H^{(0)}$, заданный выражением (2.9), и оставим только члены, имеющие степень нелинейности два или три по новым переменным $c_{\mathbf{k}}^a$ и Q^a . Затем в гамильтониане третьего порядка $H^{(3)}$, уравнение (2.11), произведем просто замену переменных: $a_{\mathbf{k}}^a \rightarrow c_{\mathbf{k}}^a$ и $Q^a \rightarrow Q^a$. Добавив полученное таким образом выражение к выражению, которое следует из гамильтониана свободного поля $H^{(0)}$, и собирая подобные члены, получим

$$H^{(0)} + H^{(3)} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}}^a + \\ + \int \frac{d\mathbf{x}_0}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \left\{ [(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) F_{\mathbf{k}}^* + \phi_{\mathbf{k}}] c_{\mathbf{k}}^a Q^a + [(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) F_{\mathbf{k}} + \phi_{\mathbf{k}}^*] c_{\mathbf{k}}^{*a} Q^a \right\}. \quad (4.1)$$

Требование обращения в ноль выражения в фигурных скобках в правой части (4.1) приводит к определению коэффициентной функции $F_{\mathbf{k}}$ в каноническом преобразовании (3.5) в терминах вершинной функции $\phi_{\mathbf{k}}$:

$$F_{\mathbf{k}} = -\frac{\phi_{\mathbf{k}}^*}{\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}. \quad (4.2)$$

Соотношение (4.2) имеет смысл в силу условия (2.10). Используя (4.2), из соотношения (3.8) находим явный вид другой коэффициентной функции $M_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2}$, входящей в каноническое преобразование цветного заряда Q^a , уравнение (3.6):

$$M_{\mathbf{k}}^{aa_1a_2} = i f^{aa_1a_2} \frac{\phi_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}. \quad (4.3)$$

Таким образом, вместо суммы исходных гамильтонианов $H^{(0)} + H^{(3)}$ (уравнение (4.1)) получаем теперь новый гамильтониан свободного поля $\mathcal{H}^{(0)}$ для невзаимодействующих плазмонов в терминах новых нормальных переменных $c_{\mathbf{k}}^{*a}$ и $c_{\mathbf{k}}^a$:

$$\mathcal{H}^{(0)} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}}^a. \quad (4.4)$$

Здесь и далее гамильтонианы в новых переменных будут обозначаться буквой каллиграфического шрифта $\mathcal{H}$.

После исключения гамильтониана третьего порядка в новых переменных можем перейти к построению явного вида эффективного гамильтониана четвертого порядка $\mathcal{H}^{(4)}$, который описывает упругое рассеяние плазмона на жесткой частице. Для этого необходимо собрать все вклады, пропорциональные произведению $c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^a$, из гамильтониана свободного поля $H^{(0)}$ (уравнение (2.9)) и из гамильтонианов взаимодействия $H^{(3)}$ и $H^{(4)}$ (уравнения (2.11) и (2.12)), которые порождаются каноническими преобразованиями (3.5) и (3.6). Таким образом, опуская детали вычислений, получаем эффективный гамильтониан четвертого порядка, описывающий процесс упругого рассеяния плазмона на жесткой цветозаряженной частице:

$$\mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} = i \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^a, \quad (4.5)$$

где *полная эффективная амплитуда* $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} i\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = & iT_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} + \left[(\omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_2) \tilde{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)a_2a_1a} + (\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_1) \tilde{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1a_2a} \right] + \\ & + \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \left\{ F_{\mathbf{k}}^* e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} + F_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)aa_2a_1} \right\} + \\ & + \int d\mathbf{k} \left\{ \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} + \phi_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)aa_2a_1} \right\} + \left[\phi_{\mathbf{k}_2} M_{\mathbf{k}_1}^{*a_2a_1a} + \phi_{\mathbf{k}_1}^* M_{\mathbf{k}_2}^{a_1a_2a} \right] + \\ & + 2 \int d\mathbf{k} \left\{ \mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{a_1a_2a} F_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) + \mathcal{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^{*a_2a_1a} F_{\mathbf{k}}^* \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \right\}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Отметим, что амплитуда $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$ должна удовлетворять условию симметрии:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = -\mathcal{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)aa_2a_1}. \quad (4.7)$$

Это соотношение является следствием требования вещественности эффективного гамильтониана (4.5). Мы уже сталкивались с этим условием для вершинной функции $T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)aa_1a_2}$ в разделе 2.

Проанализируем структуру $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$ более подробно. Первым шагом, с помощью соотношения (3.10), избавимся от коэффициентной функции $\tilde{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2)a_2a_1a}$ в первой строке (4.6). Далее заметим, что выражения во второй и третьей строках взаимно сокращаются при использовании (4.2). Для коэффициентной функции $M_{\mathbf{k}_1}^{a_1a_2a}$ в следующей четвертой строке используем ее связь с вершинной функцией $\phi_{\mathbf{k}}$, уравнение (4.3). Наконец, в последнем вкладе в (4.6), с вершинной функцией $\mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}}^{a_1a_2a}$, выполняем интегрирование по $\mathbf{k}$, учитываем цветовую декомпозицию (2.14) и переходим от коэффициентной функции $F_{\mathbf{k}}$ к «физической» вершинной функции $\phi_{\mathbf{k}}$ по правилу (4.2). В результате вместо (4.6) получаем

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = -i [\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)] \tilde{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1a_2a} + \tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}, \quad (4.8)$$

где в правой части эффективная амплитуда $\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} = & T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2} + \\ & + f^{a_1a_2a} \left\{ \frac{\phi_{\mathbf{k}_1}^* \phi_{\mathbf{k}_2}}{\omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_2} + 2i \left(\frac{\mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^*}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} - \frac{\mathcal{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^* \phi_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)} \right) \right\}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

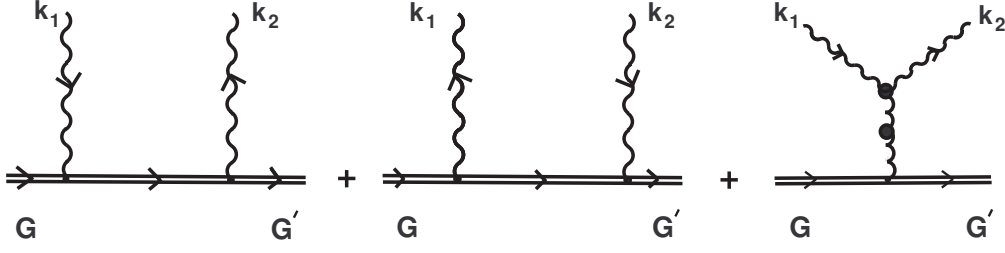


Рис. 2. Эффективная амплитуда $\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1 a_2 a}$ для процесса упругого рассеяния плазмона на жесткой цветной частице. Черный кружок обозначает HTL-ресуммирование, а двойная линия — жесткую частицу

Первый член в правой части (4.8) имеет резонансный фактор

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \equiv \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (4.10)$$

который фактически является следствием законов сохранения импульса и энергии в исследуемом процессе рассеяния. Если это условие резонанса выполняется точно, то вкладом этого члена в эффективный гамильтониан можно полностью пренебречь. На рис. 2 дана диаграммная интерпретация различных членов в фигурных скобках в эффективной амплитуде (4.9).

Первые два графика представляют комптоновское рассеяние мягких бозонных возбуждений на жесткой тестовой частице, индуцированное первым членом в фигурных скобках выражения (4.9).

В эффективной амплитуде (4.9) вершинная функция $\phi_{\mathbf{k}}$, входящая в исходный гамильтониан взаимодействия (2.11), нам неизвестна. Наиболее просто можно определить эту функцию на основе гамильтониана взаимодействия классической цветозаряженной частицы с внешним калибровочным полем $A_\mu^a(x)$:

$$H_{\text{Int}} = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^3} j_Q^{a\mu}(x) A_\mu^a(x),$$

где цветной ток жесткой частицы $j_Q^{a\mu}(x)$ определяется выражением (см. [12])

$$j_Q^{a\mu} = g v^\mu Q^a(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{v}(t - t_0)), \quad v^\mu = (1, \mathbf{v}).$$

Подставим этот ток в H_{Int} и проинтегрируем по $\mathbf{x}$. В качестве калибровочного потенциала $A_\mu^a(x)$ используем первый продольно поляризованный вклад в правой части разложения (2.1). В результате получаем

$$\begin{aligned} H_{\text{Int}} &= g v^\mu Q^a(t) A_\mu^a(t - t_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)) = \\ &= \int d\mathbf{k} \left[g \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} (v \cdot \epsilon^l(\mathbf{k})) a_{\mathbf{k}}^a Q^a e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(t - t_0)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} + \right. \\ &\quad \left. + g \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} (v \cdot \epsilon^{*l}(\mathbf{k})) a_{\mathbf{k}}^{*a} Q^a e^{i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(t - t_0)} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с соответствующими членами в гамильтониане $H^{(3)}$, уравнение (2.11), находим следующее отождествление для функции $\phi_{\mathbf{k}}$:

$$\phi_{\mathbf{k}} = g \left(\frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega_{\mathbf{k}}^l} \right)^{1/2} (v \cdot \epsilon^l(\mathbf{k})). \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.9) и полагая $T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1 a_2} = 0$, получим окончательный вид эффективной амплитуды $\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1 a_2}$. Найденное таким образом выражение совпадает с эффективной амплитудой, полученной в рамках высокотемпературной хромодинамики в [11].

5. Корреляционная функция четвертого порядка. Перейдем к построению кинетического уравнения, описывающего процесс упругого рассеяния плазмона на жесткой цветной частице. В качестве гамильтониана свободного движения здесь возьмем новый гамильтониан $\mathcal{H}^{(0)}$, уравнение (4.4), а в качестве гамильтониана взаимодействия рассмотрим эффективный гамильтониан $\mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)}$ (уравнение (4.5)). Уравнения движения для бозонных нормальных переменных $c_{\mathbf{k}}^a$ и $c_{\mathbf{k}'}^{*a'}$ и цветного заряда $\mathcal{Q}^a$ определяются соответствующими уравнениями Гамильтона. Для мягких бозе-возбуждений находим

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}'}^{a'}}{\partial t} = -i \left\{ c_{\mathbf{k}'}^{a'}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\} = -i(\omega_{\mathbf{k}'}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}') c_{\mathbf{k}'}^{a'} + \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1}^{a' a_1 d} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} = -i \left\{ c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\} = i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) c_{\mathbf{k}}^{*a} - \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*a a_1 d} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} \mathcal{Q}^d, \quad (5.2)$$

и, соответственно, для классического цветного заряда получим

$$\frac{d\mathcal{Q}^d}{dt} = \left\{ \mathcal{Q}^d, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\} = \frac{\partial(\mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)})}{\partial \mathcal{Q}^d} f^{dd'e} \mathcal{Q}^e = i f^{dd'e} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a_1 a_2 d'} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^e.$$

Здесь и далее для простоты опускаем метку «(2)» в обозначении полной эффективной амплитуды $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a_1 a_2}$. Если ансамбль взаимодействующих бозе-возбуждений при низком уровне нелинейности имеет случайные фазы, то его можно описать статистически, введя бозонную корреляционную функцию:

$$\langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}'}^{a'} \rangle = \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.3)$$

где $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$ — плотность числа плазмонов, которая является нетривиальной матрицей в некотором эффективном цветовом пространстве.

Определим кинетическое уравнение для плотности числа плазмонов с помощью уравнений Гамильтона (5.1), (5.2) и определения (5.3). Используя рассуждения, аналогичные приведенным в [4, 10], находим исходное для анализа выражение

$$\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\partial \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}}{\partial t} = \int d\mathbf{k}_1 \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*a a_1 d} \langle c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}'}^{a'} \mathcal{Q}^d \rangle + \mathcal{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1}^{a' a_1 d} \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle \right\}. \quad (5.4)$$

Далее, продифференцировав корреляционную функцию четвертого порядка $\langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle$ по t с учетом (5.1)–(5.3), получаем уравнение, правая часть которого будет содержать корреляционные функции четвертого и шестого порядка по переменным $c_{\mathbf{k}}^{*a}$, $c_{\mathbf{k}}^a$ и $\mathcal{Q}^d$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle}{\partial t} = & i[\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)] \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle + \\ & + \int d\mathbf{k}_1' \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1'}^{*a a_1' e} \langle c_{\mathbf{k}_1'}^{*a_1'} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle + \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'}^{a_1' a_1' e} \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1'}^{a_1'} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle \right\} + \\ & + i f^{dd'e} \int d\mathbf{k}_1' d\mathbf{k}_2' \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2'}^{a_1' a_2' d'} \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^e \rangle. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Замкнем цепочку уравнений, выразив корреляционные функции шестого порядка в терминах парных корреляционных функций для нормальных переменных $c_{\mathbf{k}}^{*a}$, $c_{\mathbf{k}}^a$ и среднего цветного заряда $\mathcal{Q}^d$. Оставляем только те члены, которые дают соответствующие вклады в искомое кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned} \langle c_{\mathbf{k}_1'}^{*a_1'} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle & \simeq \delta(\mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_1) \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}^{a_1' a_1} \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle, \\ \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1'}^{a_1'} \mathcal{Q}^d \mathcal{Q}^e \rangle & \simeq \delta(\mathbf{k}_1' - \mathbf{k}) \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{a a_1'} \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle, \\ \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_1'}^{*a_1'} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2'} \mathcal{Q}^e \rangle & \simeq \delta(\mathbf{k}_2' - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_1) \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{a a_2'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}^{a_1' a_1} \langle \mathcal{Q}^e \rangle. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Полагаем для полной эффективной амплитуды $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2}$ следующую декомпозицию относительно цвета и волнового вектора:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{a a_1 a_2} = f^{a a_1 a_2} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}. \quad (5.7)$$

Следует отметить, что функция $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$, в силу требования (4.7), должна удовлетворять условию

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = \mathcal{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^*. \quad (5.8)$$

Подставляя выражения (5.6) и (5.7) в правую часть (5.5) и учитывая условие симметрии (5.8) для амплитуды рассеяния, вместо (5.5) получаем уравнение для корреляционной функции четвертого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle}{\partial t} = & i [\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)] \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle + \\ & + i \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \left[(T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1})^{aa_1} - (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e)^{aa_1} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^* (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1})^{aa_1} \langle \mathcal{Q}^e \rangle f^{dd'e}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь $(T^a)^{bc} \equiv -if^{abc}$ — генераторы в присоединенном представлении алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$ и введена матричная формулировка для плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = (\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa_1})$.

6. Матричное кинетическое уравнение для мягких глюонных возбуждений. Самосогласованная система уравнений (5.4) и (5.9), дополненная уравнением для усредненного цветного заряда, определяет временную эволюцию плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$. Введем еще одно упрощение: в уравнении (5.9) отбросим член с производной по времени в сравнении с членом, содержащим резонансный фактор $\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}$, уравнение (4.10). Вместо уравнения (5.9) имеем

$$\begin{aligned} \langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle \simeq & \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa_1} \langle \mathcal{Q}^d \rangle - \\ & - \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} + i0} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \left\{ [(T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1})^{aa_1} - (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e)^{aa_1}] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle - i (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1})^{aa_1} \langle \mathcal{Q}^e \rangle f^{dd'e} \right\}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь первый член в правой части, соответствующий отсутствию взаимодействия между мягкими глюонными возбуждениями и жесткой цветной частицей, является решением однородного уравнения для корреляционной функции четвертого порядка $\langle c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1} \mathcal{Q}^d \rangle$. Остальные члены определяют отклонение трехточечного коррелятора в случае отсутствия взаимодействия.

Подставим первый член из (6.1) в правую часть (5.4) для $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$. В результате получим

$$-i \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^d)^{aa'} - \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* (T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}'})^{aa'} \right\} \langle \mathcal{Q}^d \rangle. \quad (6.2)$$

Далее подставим второй член из (6.1) в правую часть уравнения (5.4). Простые алгебраические преобразования с учетом условия симметрии (5.8) приводят к следующему выражению:

$$\begin{aligned} & - \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^* \mathcal{T}_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} + i0} \left((\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e T^d)^{aa'} - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1} - i0} \left((T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}'})^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[(T^d T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}'})^{aa'} - (T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^e)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Используя полученные выражения (6.2), (6.3) и полагая $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, вместо (5.4) находим следующее кинетическое уравнение для плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}}{\partial t} = & -i \left\{ \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}} (\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e)^{aa'} - \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}^* (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}})^{aa'} \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle - \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} + i0} \left((\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e T^d)^{aa'} - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} - i0} \left((T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}})^{aa'} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle + i \left[(T^e T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}})^{aa'} - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)^{aa'} \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

В отличие от наших предыдущих работ [4, 10], здесь не собирается буквально нужная разность

$$\frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + i0} - \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - i0} (\equiv -2i\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})), \quad (6.5)$$

поскольку здесь мы имеем различное расположение матриц плотности $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$ с различными волновыми векторами, которые не коммутируют с цветовыми матрицами T^d и друг с другом.

7. Первый момент по цвету кинетического уравнения (6.4). Рассмотрим следующую цветовую декомпозицию матричной функции $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} = \delta^{aa'} N_{\mathbf{k}}^l + (T^c)^{aa'} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_{\mathbf{k}}^l. \quad (7.1)$$

В этом разделе определим уравнение для бесцветной части плотности числа плазмонов, т.е. для скалярной функции $N_{\mathbf{k}}^l$. С этой целью возьмем след левой и правой частей уравнения (6.4) относительно цветных индексов, т.е. полагаем $a = a'$ и проводим суммирование по a . Используя цветовое разложение (7.1) и формулы для следов произведения двух- и трех цветовых матриц (генераторов) в присоединенном представлении (см. [7])

$$\text{tr}(T^a T^b) = N_c \delta^{ab}, \quad \text{tr}(T^a T^b T^c) = \frac{i}{2} N_c f^{abc}, \quad (7.2)$$

легко находим следы для членов, линейных по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$ в правой части (6.4):

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathcal{N}_{\mathbf{k}} &= (N_c^2 - 1) N_{\mathbf{k}}^l, \quad \text{tr}(T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}}) = N_c \langle \mathcal{Q}^e \rangle W_{\mathbf{k}}^l, \\ \text{tr}[(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e T^d) - (T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d)] &= \delta^{ed} N_c (N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l) - \frac{1}{2} N_c (T^c)^{ed} (W_{\mathbf{k}}^l + W_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^c \rangle. \end{aligned} \quad (7.3)$$

При свертывании последнего выражения с $\langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle$ член с суммой $W_{\mathbf{k}}^l + W_{\mathbf{k}_1}^l$ в правой части обращается в ноль.

Следы членов, квадратичных по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$, в (6.4) имеют несколько более сложную структуру. Так, например,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d) &= N_c \delta^{d'd} N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} + \\ &+ \frac{i}{2} N_c f^{d'dc} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} - \frac{i}{2} N_c f^{d'dc} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}} + \text{tr}(T^c T^{d'} T^f T^d) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle W_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}_1}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Если далее свернуть это выражение с антисимметричной структурной константой $f^{dd'e}$, как это имеет место в исходном уравнении (6.4), то первый член в правой части (7.4) обращается в ноль. Последний член также равен нулю в силу свойства симметрии для следа произведения четырех генераторов по отношению к перестановке индексов a и c (и, соответственно, b и d), т.е.

$$\text{tr}(T^a T^b T^c T^d) = \text{tr}(T^c T^b T^a T^d) = \text{tr}(T^a T^d T^c T^b). \quad (7.5)$$

В результате имеем

$$f^{dd'e} \text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d) = -\frac{i}{2} N_c^2 \langle \mathcal{Q}^e \rangle (W_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l - N_{\mathbf{k}}^l W_{\mathbf{k}_1}^l).$$

Используя полученные выражения для цветных следов, можно выписать первый момент по цвету для уравнения (6.4) на бесцветную часть плотности числа плазмонов $N_{\mathbf{k}}^l$:

$$\begin{aligned} d_A \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} &= 2N_c \mathfrak{q}_2(t) (\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}}) W_{\mathbf{k}}^l - N_c \mathfrak{q}_2(t) \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}|^2 \times \\ &\times \left\{ (N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l) - \frac{1}{2} N_c (W_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l - N_{\mathbf{k}}^l W_{\mathbf{k}_1}^l) \right\} (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \end{aligned} \quad (7.6)$$

При выводе этого выражения мы учли формулу Сохоцкого (6.5) и ввели обозначение для бесцветной квадратичной комбинации усредненного цветного заряда

$$\mathfrak{q}_2(t) \equiv \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle. \quad (7.7)$$

Коэффициент $d_A \equiv N_c^2 - 1$ в левой части (7.6) является инвариантом для группы $SU(N_c)$.

8. Второй момент по цвету кинетического уравнения (6.4). Вернемся к матричному кинетическому уравнению (6.4). Свернем теперь левую и правую части этого уравнения с цветной матрицей $(T^s)^{a'a}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}(T^s \mathcal{N}_k)}{\partial t} = & -i \left\{ \text{tr}(T^e T^s \mathcal{N}_k) \mathcal{T}_{k,k} - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_k) \mathcal{T}_{k,k}^* \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle - \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{k,k_1}|^2 \langle \mathcal{Q}^e \rangle \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\Delta\omega_{k,k_1} + i0} \left(\text{tr}(\mathcal{N}_k T^{d'} \mathcal{N}_{k_1} T^d T^s) f^{dd'e} + i \left[\text{tr}(T^s \mathcal{N}_k T^e T^d) - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_{k_1} T^d) \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Delta\omega_{k,k_1} - i0} \left(\text{tr}(\mathcal{N}_{k_1} T^d \mathcal{N}_k T^s T^{d'}) f^{dd'e} + i \left[\text{tr}(T^s T^e T^d \mathcal{N}_k) - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_{k_1} T^d) \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \right) \right\}. \quad (8.1) \end{aligned}$$

Здесь для следа в левой части в силу разложения (7.1) мы используем вторую формулу из (7.3). Рассмотрим следы в первом члене правой части (8.1). С учетом представления (7.1) простые вычисления приводят данные следы к виду

$$\text{tr}(T^e T^s \mathcal{N}_k) = \delta^{es} N_c N_k^l + \frac{i}{2} N_c f^{esc} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_k^l, \quad \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_k) = \delta^{es} N_c N_k^l - \frac{i}{2} N_c f^{esc} \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_k^l.$$

Мнимая часть в этих двух выражениях обращается в ноль в результате свертки с цветным зарядом $\langle \mathcal{Q}^e \rangle$. Таким образом, первый член в правой части (8.1) принимает следующий вид:

$$-i \left\{ \text{tr}(T^e T^s \mathcal{N}_k) \mathcal{T}_{k,k} - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_k) \mathcal{T}_{k,k}^* \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle = 2N_c (\text{Im } \mathcal{T}_{k,k}) N_k^l \langle \mathcal{Q}^s \rangle. \quad (8.2)$$

Далее проанализируем следы членов, квадратичных по $\mathcal{N}_k$ и $\mathcal{N}_{k_1}$ в (8.1). С учетом разложения (7.1) мы легко находим для первого следа исходное представление

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{N}_k T^{d'} \mathcal{N}_{k_1} T^d T^s) = & \text{tr}(T^{d'} T^d T^s) N_k N_{k_1} + \text{tr}(T^c T^{d'} T^d T^s) \langle \mathcal{Q}^c \rangle W_k N_{k_1} + \\ & + \text{tr}(T^{d'} T^c T^d T^s) \langle \mathcal{Q}^c \rangle N_k W_{k_1} + \text{tr}(T^d T^s T^c T^{d'} T^f) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle W_k W_{k_1}. \quad (8.3) \end{aligned}$$

Свернем это выражение с $f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle$, как и в (8.1). Для первого члена в правой части (8.3), в силу второй формулы в (7.2), имеем

$$\text{tr}(T^{d'} T^d T^s) N_k N_{k_1} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle = -\frac{i}{2} N_c^2 \langle \mathcal{Q}^s \rangle N_k N_{k_1}.$$

Третий член в (8.3), содержащий след произведения четырех генераторов, обращается в ноль в силу свойства симметрии (7.5). След во втором члене в (8.3) легко вычисляется с использованием правила коммутации: $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ и второй формулы в (7.2). В итоге получим

$$\text{tr}(T^c T^{d'} T^d T^s) f^{dd'e} \equiv \frac{1}{2} \text{tr}(T^c [T^{d'}, T^d] T^s) f^{dd'e} = \frac{i}{2} \text{tr}(T^c T^\lambda T^s) f^{d'\lambda} f^{dd'e} = -\left(\frac{i}{2}\right)^2 N_c f^{ces}.$$

При свертке этого выражения с $\langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle$ оно обращается в ноль. Так, вместо (8.3) сейчас имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{N}_k T^{d'} \mathcal{N}_{k_1} T^d T^s) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle = \\ = -\frac{i}{2} N_c^2 \langle \mathcal{Q}^s \rangle N_k N_{k_1} + \text{tr}(T^d T^s T^c T^{d'} T^f) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle W_k W_{k_1}. \quad (8.4) \end{aligned}$$

Осталось рассмотреть след пятого порядка. В связи с наличием множителя $\langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle$, симметричного по индексам c и f , вместо прямого вычисления данного следа здесь проще использовать соотношение

$$\text{tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_4} T^{a_5}) + \text{tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_5} T^{a_4} T^{a_3}) = -i f^{a_2 a_1 b} \text{tr}(T^b T^{a_5} T^{a_4} T^{a_3}),$$

откуда сразу получаем

$$\text{tr}(T^d T^s T^c T^{d'} T^f) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle = -\frac{i}{2} f^{sdb} \text{tr}(T^b T^f T^{d'} T^c) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle.$$

Для следа четвертого порядка в правой части применим формулу (см. [7])

$$\text{tr}(T^a T^b T^c T^d) = \delta^{ad} \delta^{bc} + \frac{1}{2}(\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd}) + \frac{1}{4} N_c (f^{ade} f^{bce} + d^{ade} d^{bce}), \quad (8.5)$$

где d^{abc} — полностью симметричные структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$. После несложных алгебраических преобразований правая часть предыдущего выражения может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} f^{sdb} \text{tr}(T^b T^f T^{d'} T^c) f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle = \\ = -\frac{i}{2} \left\{ \frac{1}{2} N_c \delta^{fc} \delta^{se} - \frac{1}{4} N_c [\text{tr}(T^e T^s T^c T^f) - \text{tr}(T^e T^s D^c D^f)] \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle - \\ - \frac{i}{4} N_c \left\{ \delta^{fc} \delta^{se} - \frac{1}{2} (\delta^{ef} \delta^{sc} + \delta^{ec} \delta^{fs}) \right\} \langle \mathcal{Q}^e \rangle \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^f \rangle. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Здесь $(D^a)^{bc} \equiv d^{abc}$. Далее, используя формулу для следа четвертого порядка (8.5) и также еще одну формулу подобного рода (см. [7])

$$\text{tr}(T^a T^b D^c D^d) = \frac{1}{2} (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd}) + \left(\frac{N_c^2 - 8}{4N_c} \right) f^{ade} f^{bce} + \frac{1}{4} N_c d^{ade} d^{bce},$$

убеждаемся, что (8.6) в точности обращается в ноль. Таким образом, коэффициент перед произведением $W_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}_1}$ в правой части (8.4) равен нулю, и этот вклад можно исключить из рассмотрения.

Для следа $\text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^s T^{d'})$ в (8.1) мы получаем аналогичный результат. В итоге для квадратичных по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$ членов в (8.1), используя формулу Сохоцкого (6.5), получим

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^{d'} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d T^s)}{\Delta \omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} + i0} - \frac{\text{tr}(\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d \mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^s T^{d'})}{\Delta \omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} - i0} \right\} f^{dd'e} \langle \mathcal{Q}^e \rangle = \\ = \frac{1}{2} i N_c^2 N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} \langle \mathcal{Q}^s \rangle (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Рассмотрим оставшиеся следы или, точнее, разности следов, линейные по $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{k}_1}$, в квадратных скобках в (8.1). Учитывая декомпозицию (7.1), для первой разности следов находим

$$\begin{aligned} \left[\text{tr}(T^s \mathcal{N}_{\mathbf{k}} T^e T^d) - \text{tr}(T^s T^e \mathcal{N}_{\mathbf{k}_1} T^d) \right] \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle = \\ = \text{tr}(T^s T^e T^d) (N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle + \text{tr}(T^e T^s T^c T^f) (W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle = \\ = \left\{ 2\delta^{sd} \delta^{ce} + \frac{1}{4} N_c d^{sd\lambda} d^{ce\lambda} \right\} (W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулы для следов (7.2) и (8.5). Член с разностью $N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l$ обратился в нуль. Коэффициент оставшегося члена с разностью $W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l$ содержит свертку двух симметричных структурных констант, которая в общем случае произвольного N_c не может быть сведена к разложению по произведению дельта-символов Кронекера типа $\delta^{sd} \delta^{ce} + \dots$ (см. ниже). В частности, это не позволяет свести в конечном счете зависимость кинетического уравнения для $W_{\mathbf{k}}^l$ от среднего значения цветных зарядов к зависимости лишь от их бесцветной комбинации (7.7). Данное обстоятельство существенно усложняет динамику рассматриваемого процесса рассеяния.

Учитывая вышеполученное выражение и (7.3), (8.2), (8.7), вместо (8.1) находим искомое кинетическое уравнение для второй «цветной» части плотности числа плазмонов мягких глюонных

плазменных возбуждений $W_{\mathbf{k}}^l$:

$$N_c \frac{\partial(\langle \mathcal{Q}^s \rangle W_{\mathbf{k}}^l)}{\partial t} = 2N_c (\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}) N_{\mathbf{k}}^l \langle \mathcal{Q}^s \rangle - \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 \times \\ \times \left\{ 2\delta^{sd} \delta^{ce} + \frac{1}{4} N_c d^{sd\lambda} d^{ce\lambda} \right\} (W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l) \langle \mathcal{Q}^c \rangle \langle \mathcal{Q}^d \rangle \langle \mathcal{Q}^e \rangle (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) + \\ + \frac{1}{2} N_c^2 \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l \langle \mathcal{Q}^s \rangle (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \quad (8.8)$$

Мы можем упростить свертку двух симметричных структурных констант в (8.8) в двух случаях. Первый «тривиальный» случай относится к $N_c = 2$, когда $d^{abc} \equiv 0$. Второй случай соответствует значению $N_c = 3$ и связан с наличием хорошо известного тождества (см. [7])

$$d^{abe} d^{cde} + d^{ace} d^{bde} + d^{ade} d^{bce} = \frac{1}{3} (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}).$$

9. Заключение. В данной работе мы построили классический гамильтонов формализм для описания процесса нелинейного взаимодействия мягких и жестких мод возбуждений в высокотемпературной глюонной плазме. В явном виде выписали канонические преобразования для бозонной нормальной переменной $a_{\mathbf{k}}^a$ и классического цветного заряда Q^a жесткой тестовой частицы, уравнения (3.5) и (3.6), которые были представлены в виде интегро-степенного ряда по новой нормальной переменной $c_{\mathbf{k}}^a$ и новому цветному заряду $\mathcal{Q}^a$. Канонические преобразования позволили исключить гамильтониан взаимодействия третьего порядка $H^{(3)}$ (уравнение (2.11)). Это, в свою очередь, позволило определить новый эффективный гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)}$ (уравнение (4.5)) с калибровочно ковариантной амплитудой рассеяния $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)aa_1a_2}$. Эта амплитуда описывает упругое рассеяние плазмона на жесткой цветной заряженной частице в древесном приближении. На основе условий каноничности (3.3) и (3.4) мы определили полную систему независимых соотношений алгебраического и интегрального типов, связывающих низшие и высшие коэффициентные функции в подынтегральных выражениях различных членов в канонических преобразованиях (3.5) и (3.6). Мы также ввели понятие плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$, которая является нетривиальной матрицей в цветовом пространстве и получили самосогласованную систему кинетических уравнений типа Больцмана для бесцветной $N_{\mathbf{k}}^l$ и цветовой $W_{\mathbf{k}}^l$ частей плотности числа плазмонов, учитывающую временную эволюцию среднего значения цветного заряда жесткой тестовой частицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В. Е. Гамильтонов формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией// Изв. вузов. Радиофизика. — 1974. — 17. — С. 431–453.
2. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Гамильтонов формализм для нелинейных волн// Усп. физ. наук. — 1997. — 167. — С. 1137–1167.
3. Калашиников О. К., Климов В. В. Поляризационный оператор в КХД при конечных температурах и плотностях// Яд. физ. — 1980. — 31. — С. 1357–1371.
4. Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю., Гитман Д. М. Гамильтонов формализм для Бозе-возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействием// ЖЭТФ. — 2020. — 157. — С. 327–341.
5. Balachandran A. P., Salomonson P., Skagerstam B. and Winnberg J. Classical description of a particle interacting with a non-Abelian gauge field// Phys. Rev. D. — 1977. — 15. — P. 2308–2317.
6. Blaizot J.-P., Iancu E. Energy-momentum tensors for the quark-gluon plasma// Nucl. Phys. B. — 1994. — 421. — P. 565–592.
7. Haber H. E. Useful relations among the generators in the defining and adjoint representations of $SU(N)$ // SciPost. Phys. Lect. Notes. — 2021. — 21. — P. 1–11.
8. Hakim R. Introduction to relativistic statistical mechanics: classical and quantum. — World Scientific, 2011.
9. Linden N., Macfarlane A. J., Van Holten J. W. Particle motion in a Yang–Mills field: Wong’s equations and spin- $\frac{1}{2}$ analogues// Czech. J. Phys. — 1995. — 45. — P. 209–215.
10. Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu. Hamiltonian formalism for Fermi excitations in a plasma with a non-Abelian interaction// Int. J. Mod. Phys. A. — 2023. — 38. — P. 2350015(77).

11. *Markov Yu. A., Markova M. A., Vall A.N.* Nonlinear dynamics of soft boson collective excitations in hot QCD plasma II: plasmon–hard-particle scattering and energy losses// *Ann. Phys.* — 2004. — 309. — P. 93–150.
12. *Wong S. K.* Field and particle equations for the classical Yang–Mills field and particles with isotopic spin// *Nuovo Cim. A.* — 1970. — 65. — P. 689–694.
13. *Zakharov V. E., Musher S. L., Rubenchik A. M.* Hamiltonian approach to the description of nonlinear plasma phenomena// *Phys. Rep.* — 1985. — 129. — P. 285–366.
14. *Zakharov V. E., L'vov V. S., Falkovich G.* Kolmogorov Spectra of Turbulence I. Wave Turbulence. — Springer-Verlag, 1992.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос. регистрации 12104130005-1).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марков Юрий Адольфович (Markov Yurii Adolfovich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна (Markova Margarita Anatol'evna)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич (Markov Nikita Yurievich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: NYumarkov@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 159–169
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-159-169

УДК 517.923

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ УЗКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕАБЕЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ

© 2024 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

Аннотация. Выписана самосогласованная система кинетических уравнений бoльцмановского типа, учитывающая эволюцию по времени t мягких возмущений неабелевой плазмы и среднего значения цветного заряда при взаимодействии высокоэнергичной цветозаряженной частицы с плазмой. На основе этих уравнений рассмотрена модельная задача взаимодействия двух бесконечно узких волновых пакетов. Получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющая динамику взаимодействия бесцветной N_k^l и цветовой W_k^l компонент плотности числа коллективных бозонных возмущений. В силу автономности правых частей данная система сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению типа Абеля второго рода. Показано, что при определенном соотношении между постоянными, входящими в данное нелинейное уравнение, можно получить точное решение в параметрическом виде.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, неабелева плазма, волновой пакет, уравнение Абеля второго рода, функция Ламберта.

ON THE EXACT SOLUTION OF THE EVOLUTION EQUATIONS FOR TWO INTERACTING NARROW WAVE PACKETS PROPAGATING IN A NON-ABELIAN PLASMA

© 2024 Yu. A. MARKOV, M. A. MARKOVA, N. Yu. MARKOV

ABSTRACT. In this paper, we present and discuss a self-consistent system of kinetic equations of the Boltzmann type, which takes into account the time evolution of soft non-Abelian plasma excitations and the mean value of the color charge in the interaction of a high-energy color-charged particle with a plasma. Based on these equations, we examine a model problem of interaction of two infinitely narrow wave packets and obtain a system of first-order nonlinear ordinary differential equations, which governs the dynamics of interacting the colorless N_k^l and color W_k^l components of the density of the number collective bosonic excitations. Due to the autonomy of the right-hand sides, we reduce this system to a single nonlinear Abel differential equation of the second kind. Finally, we show that at a certain ratio between the constants involved in this nonlinear equation, one can obtain an exact solution in the parametric form.

Keywords and phrases: kinetic equation, non-Abelian plasma, wave packet, Abel equation of the second kind, Lambert function.

AMS Subject Classification: 34C14

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос. регистрации 12104130005-1).

1. Введение. В первой работе цикла [3], была развита гамильтонова теория для коллективных продольно поляризованных бозе-возбуждений (плазмонов), взаимодействующих с классической высокоэнергетической цветозаряженной пробной частицей, распространяющейся через высокотемпературную чисто глюонную плазму. Было проведено обобщение скобки Ли—Пуассона на случай составной системы: сплошной среды, описываемой бозонной нормальной переменной поля $a_{\mathbf{k}}^a$, и жесткой тестовой частицы с неабелевым цветовым зарядом Q^a , и представлены соответствующие уравнения Гамильтона. Были выписаны канонические преобразования, включающие одновременно как бозонную степень свободы мягких коллективных возбуждений, так и степень свободы жесткой пробной частицы, связанной с ее цветовым зарядом, в горячей глюонной плазме. Нами была получена полная система условий каноничности для этих преобразований и введено в рассмотрение важное понятие плотности числа плазмонов $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$, которая является нетривиальной матрицей в эффективном цветовом пространстве. Найден явный вид эффективного гамильтониана четвертого порядка, описывающего упругое рассеяние плазмона на жесткой цветной частице. Для функции $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'}$ было определено матричное кинетическое уравнение. На основе цветовой декомпозиции данной матричной функции вида

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}^{aa'} = \delta^{aa'} N_{\mathbf{k}}^l + (T^c)^{aa'} \langle Q^c \rangle W_{\mathbf{k}}^l$$

были вычислены первый и второй моменты матричного кинетического уравнения относительно цвета, определяющие скалярные кинетические уравнения для бесцветной $N_{\mathbf{k}}^l$ и цветовой $W_{\mathbf{k}}^l$ частей данной декомпозиции. Здесь $\langle Q^c \rangle$ — среднее значение цветового заряда пробной частицы, а цветовые генераторы T^a в присоединенном представлении определены как $(T^a)^{bc} \equiv -if^{abc}$, где f^{abc} — антисимметричные структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$. Цветовые индексы $a, b, c, \dots$ пробегает значения $1, 2, \dots, N_c^2 - 1$.

Целью данной (второй) статьи цикла является проведение более глубоко анализа полученной системы кинетических уравнений на скалярные функции $N_{\mathbf{k}}^l$ и $W_{\mathbf{k}}^l$. Данные уравнения представляют собой нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с весьма нетривиальным по структуре интегральным ядром (в данном случае квадратом амплитуды упругого рассеяния плазмона на жесткой цветозаряженной частице). Прямое построение каких-либо аналитических решений данных уравнений не представляется возможным, и поэтому здесь необходимо привлекать различные модельные приближения. В качестве одного из таких приближений будем рассматривать задачу взаимодействия двух бесконечно узких волновых пакетов, позволяющую в частности свести исходную систему интегро-дифференциальных уравнений к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, допускающей построение точного решения. Данная задача важна, например, в контексте определения направления спектральной перекачки энергии мягких бозе-возбуждений при наличии волновой турбулентности в нелинейных средах с дисперсией.

2. Система кинетических уравнений для мягких глюонных возбуждений. В данном разделе выпишем исходную систему интегро-дифференциальных уравнений на скалярные плотности числа плазмонов $N_{\mathbf{k}}^l$ и $W_{\mathbf{k}}^l$, полученные в первой статье цикла:

$$\begin{aligned} d_A \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = & 2q_2(t) N_c (\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}) W_{\mathbf{k}}^l - q_2(t) N_c \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 \times \\ & \times \left\{ (N_{\mathbf{k}}^l - N_{\mathbf{k}_1}^l) - \frac{1}{2} N_c (W_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l - N_{\mathbf{k}}^l W_{\mathbf{k}_1}^l) \right\} (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)), \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\mathbf{k}}^l}{\partial t} = & -\frac{1}{2} A(t) W_{\mathbf{k}}^l + 2(\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}) N_{\mathbf{k}}^l - \int d\mathbf{k}_1 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}|^2 \times \\ & \times \left\{ \rho q_2(t) (W_{\mathbf{k}}^l - W_{\mathbf{k}_1}^l) - \frac{1}{2} N_c N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}_1}^l \right\} (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)). \quad (2.2) \end{aligned}$$

Здесь $\omega_{\mathbf{k}}^l$ — частота собственных колебаний мягких бозонных возбуждений, являющаяся функцией волнового вектора $\mathbf{k}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = & T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_1} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_2} \right) \phi_{\mathbf{k}_1}^* \phi_{\mathbf{k}_2} + \\ & + i \left[\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l} \right) \mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^* - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l} \right) \mathcal{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^* \phi_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

— полная эффективная амплитуда упругого рассеяния плазмона на жесткой цветозаряженной частице, где, в свою очередь,

$$\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = \frac{1}{2^{3/4}} g \left(\frac{\epsilon_{\mu}^l(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_1}^l(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_1}^l}} \right) \left(\frac{\epsilon_{\mu_2}^l(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_2}^l}} \right) * \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k, -k_1, -k_2) \Big|_{\text{on-shell}} \quad (2.4)$$

— вершинная функция трехплазмонного взаимодействия в НТЛ-приближении (см. [4, 7]). Функции $\mathbf{q}_2(t)$ и $A(t)$ определяются, соответственно, выражениями $\mathbf{q}_2(t) \equiv \langle \mathcal{Q}^a \rangle \langle \mathcal{Q}^a \rangle$ и

$$A(t) \equiv N_c^2 \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 |\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}|^2 N_{\mathbf{k}_1}^l N_{\mathbf{k}_2}^l (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) \quad (2.5)$$

и связаны между собой соотношением

$$\mathbf{q}_2(t) = \mathbf{q}_2(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.6)$$

Коэффициент $d_A \equiv N^2 - 1$ в левой части (2.1) является инвариантом для группы $SU(N)$, а коэффициент ρ в последнем уравнении равен

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{для цветовой группы } SU(2), \\ 3/4 & \text{для цветовой группы } SU(3). \end{cases}$$

Величина ρ не зависит от начального значения цветного заряда тестовой частицы только для этих частных значений цветовой группы $SU(N_c)$.

Введем полное число «бесцветных» плазмонов, полагая по определению

$$\mathbb{N}^l(t) \equiv \int d\mathbf{k} N_{\mathbf{k}}^l(t). \quad (2.7)$$

С помощью (2.1) и того факта, что квадрат модуля амплитуды (2.3) является четной функцией относительно перестановки моментов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$, легко находим

$$\frac{d\mathbb{N}^l(t)}{dt} = 2 \frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2(t) \int d\mathbf{k} (\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}) W_{\mathbf{k}}^l(t), \quad (2.8)$$

т.е. полное число плазмонных возбуждений будет сохраняться только в отсутствие диссипативных эффектов, когда $\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}} = 0$ (см. следующий раздел).

Кроме того, если ввести в рассмотрение полную энергию и импульс волновой системы бесцветных плазмонов

$$\mathbb{E}^l(t) \equiv \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{k}}^l(t), \quad \mathbf{K}^l(t) \equiv \int d\mathbf{k} \mathbf{k} N_{\mathbf{k}}^l(t), \quad (2.9)$$

то в силу того же кинетического уравнения имеем

$$\frac{d(\mathbb{E}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}^l)(t)}{dt} = 2 \frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2(t) \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) (\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}}) W_{\mathbf{k}}^l(t). \quad (2.10)$$

Видим, что величина $(\mathbb{E}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}^l)(t)$ также не сохраняется из-за диссипативных эффектов.

3. Взаимодействие бесконечно узких волновых пакетов. Чтобы получить некоторое представление о поведении решения системы кинетических уравнений (2.1) и (2.2), рассмотрим модельную задачу взаимодействия двух бесконечно узких пакетов с характерными волновыми векторами $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}'_0$. Введем скалярные плотности числа плазмонов $N_{\mathbf{k}}^l$ и $W_{\mathbf{k}}^l$ следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{k}}^l(t) &= N_1(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + N_2(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0), \\ W_{\mathbf{k}}^l(t) &= W_1(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + W_2(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0), \end{aligned} \quad (3.1)$$

так что $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{k}'_0$. В частности, из этого представления для функции $N_{\mathbf{k}}^l(t)$ и из определений (2.7) и (2.9) сразу следует

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^l(t) &= N_1(t) + N_2(t), \\ (\mathbb{E}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}^l)(t) &= (\omega_{\mathbf{k}_0}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_0)N_1(t) + (\omega_{\mathbf{k}'_0}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}'_0)N_2(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставим (3.1) в левую и правую части уравнений (2.1) и (2.2). После выполнения интегрирования по $d\mathbf{k}_1$ в правых частях, получаем систему двух самосогласованных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые запишем следующим образом: первое уравнение для функций $N_1(t)$ и $N_2(t)$ — в виде

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \frac{dN_2(t)}{dt} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0) = & \\ & \left\{ A_{11}N_1 + A_{13}W_1 - \frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2(t)B(N_1W_2 - N_2W_1) \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \\ & + \left\{ A_{22}N_2 + A_{24}W_2 + \frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2(t)B(N_1W_2 - N_2W_1) \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0) + \\ & + \frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2(t) \left\{ |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_0}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_0})N_1 + |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'_0}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'_0})N_2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Второе уравнение для функций $W_1(t)$ и $W_2(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dW_1(t)}{dt} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \frac{dW_2(t)}{dt} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0) = & \\ & \left\{ A_{31}N_1 + A_{33}W_1 - \frac{1}{2} A(t)W_1 + BN_1N_2 + \frac{1}{2} N_c |\mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0})N_1^2 \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \\ & + \left\{ A_{42}N_2 + A_{44}W_2 - \frac{1}{2} A(t)W_2 + BN_1N_2 + \frac{1}{2} N_c |\mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}'_0}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}'_0})N_2^2 \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0) + \\ & + \rho \mathbf{q}_2(t) \left\{ |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_0}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_0})W_1 + |\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'_0}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'_0})W_2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где для краткости введено обозначение

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \equiv \omega_{\mathbf{k}}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1). \quad (3.5)$$

Ненулевые «матричные элементы» A_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A_{31} &= 2(\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}), & A_{13} &= \frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2(t)A_{31}, \\ A_{42} &= 2(\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}'_0}), & A_{24} &= \frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2(t)A_{42}, \\ A_{11} &= -\frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2(t) \int d\mathbf{k} |\mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}}), & A_{33} &= \rho \frac{d_A}{N_c} A_{11}, \\ A_{22} &= -\frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2(t) \int d\mathbf{k} |\mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}}), & A_{44} &= \rho \frac{d_A}{N_c} A_{22}, \end{aligned}$$

а коэффициент B задается в виде

$$B = \frac{1}{2} N_c \mathbf{q}_2(t) |\mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}'_0}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}'_0}). \quad (3.6)$$

Заметим, однако, что этот коэффициент зависит явным образом от δ -функции Дирака и поэтому является, вообще говоря, *обобщенной* функцией. Обозначения для элементов матрицы A_{ij} выбраны так, чтобы соответствовать обычному матричному умножению матрицы $\mathcal{A} \equiv (A_{ij})$ на некоторый эффективный вектор $\mathbf{\Lambda}$, составленный из искомых функций:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}.$$

Из структуры правых частей уравнений (3.3) и (3.4) видно, что только последние члены в этих уравнениях не позволяют выделить вклады, пропорциональные δ -функциям: $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ и $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'_0)$, как это было сделано, например, в [9, 10] для аналогичных задач взаимодействия бесконечно узких волновых пакетов. Кроме того, (3.4) содержит члены с плохо определенными произведениями, например, $|\mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}|^2 (2\pi) \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0})$, которые в дальнейших рассуждениях мы просто отбрасываем.

Далее поступаем следующим образом. Проинтегрируем выражения (3.3) и (3.4) по $\mathbf{k}$. В силу требования $\mathbf{k}_0 \neq \mathbf{k}'_0$ можем выбрать области интегрирования вблизи волновых векторов $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}'_0$ непересекающимися. В этом случае из (3.3) и (3.4) легко получаем систему четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= A_{13}W_1 - \frac{N_c}{d_A} q_2(t)B(N_1W_2 - N_2W_1), \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= A_{24}W_2 + \frac{N_c}{d_A} q_2(t)B(N_1W_2 - N_2W_1), \\ \frac{dW_1(t)}{dt} &= A_{31}N_1 - \frac{1}{2}A(t)W_1 + BN_1N_2, \\ \frac{dW_2(t)}{dt} &= A_{42}N_2 - \frac{1}{2}A(t)W_2 + BN_1N_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что при таком подходе вклады с матричными элементами A_{11} , A_{22} , A_{33} и A_{44} в точности сокращаются с последними членами в (3.3) и (3.4). Система (3.7) может быть также получена несколько иным путем. Рассмотрим для конкретности исходное выражение (3.3). Проинтегрируем его по всему пространству импульсов $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^3$. Затем умножим (3.3) на функцию $(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})$ и снова проинтегрируем по $\mathbf{k}$. В результате получаем систему из двух уравнений, которую удобно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_{\mathbf{k}_0}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_0 & \omega_{\mathbf{k}'_0}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{N}_1 \\ \dot{N}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_{\mathbf{k}_0}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_0 & \omega_{\mathbf{k}'_0}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{13}W_1 \\ A_{24}W_2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{N_c}{d_A} q_2(t)B(N_1W_2 - N_2W_1)\Delta\omega_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}'_0} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где точка над N_1 и N_2 обозначает дифференцирование по t . Предположим, что определитель матрицы в левой части (3.8) отличен от нуля:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_{\mathbf{k}_0}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_0 & \omega_{\mathbf{k}'_0}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}'_0 \end{pmatrix} = -\Delta\omega_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}'_0} \neq 0.$$

Напомним, что мы используем обозначение (3.5). В этом случае, умножая уравнение (3.8) на соответствующую обратную матрицу, легко приходим к первым двум уравнениям системы (3.7). Заметим, что в этих уравнениях множитель $\Delta\omega_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}'_0}$ полностью сокращается (он представлен только в коэффициенте B (уравнение (3.6)) как аргумент δ -функции), и требование $\Delta\omega_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}'_0} \neq 0$ можно формально отбросить. Вторая пара уравнений в системе (3.7) может быть получена полностью аналогичным образом. Легко видеть, что первые два уравнения в (3.7) находятся в полном соответствии с соотношениями, полученными в предыдущем разделе, а именно, с (2.8) и (2.10) при использовании представления (3.1).

Максимально упростим полученную систему. Матричные элементы A_{13} , A_{24} , A_{31} и A_{42} перед линейными членами в правых частях (3.7) пропорциональны коэффициентам $\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}(\mathbf{v})$ и

$\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}'_0}(\mathbf{v})$. Эти коэффициенты фактически связаны с так называемым бесстолкновительным затуханием Ландау мягких глюонных колебаний и, следовательно, должны содержать дельта-функцию Дирака, отражающую соответствующие законы сохранения энергии и импульса данного физического процесса:

$$\text{Im } \mathcal{T}_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}(\mathbf{v}) \sim \int \frac{d\Omega_{\mathbf{v}'}}{4\pi} w_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v}; \mathbf{k}_0) (2\pi) \delta(\omega_{\mathbf{k}_0}^l - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{k}_0),$$

где $w_{\mathbf{v}'}(\mathbf{v}; \mathbf{k}_0)$ — вероятность процесса затухания Ландау. Явный вид этой вероятности можно получить, используя выражения для амплитуды рассеяния (2.3), трехточечной вершинной функции $\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$, уравнение (2.4) и НТЛ-поправки $\delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2)$. Однако, как известно, *линейное* затухание Ландау кинематически запрещено в горячей глюонной плазме, поэтому эти матричные элементы можно полагать равными нулю, т.е.

$$A_{13} = A_{24} = A_{31} = A_{42} = 0.$$

Далее рассмотрим члены последних двух уравнений в (3.7), содержащие функцию $A(t)$. В силу определения (2.5) эта функция квадратична по (бесцветной части) плотности числа плазмонов, и поэтому члены $A(t)W_1$ и $A(t)W_2$ в (3.7) имеют третий порядок. При построении кинетических уравнений (2.1) и (2.2) мы ограничились линейным и квадратичным вкладами плотности числа плазмонов. Поэтому, в пределах принятой точности, в последних двух уравнениях в (3.7) следует отбросить вклады с функцией $A(t)$, а в первых двух уравнениях, в силу соотношения (2.6), по той же причине следует полагать

$$\mathbf{q}_2(t) \simeq \mathbf{q}_2(t_0) \equiv \mathbf{q}_2^0.$$

Учитывая все вышесказанное, вместо (3.7) теперь имеем

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= -\frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2^0 B (N_1 W_2 - N_2 W_1), & \frac{dW_1(t)}{dt} &= B N_1 N_2, \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= \frac{N_c}{d_A} \mathbf{q}_2^0 B (N_1 W_2 - N_2 W_1), & \frac{dW_2(t)}{dt} &= B N_1 N_2, \end{aligned}$$

откуда, в частности, непосредственно следуют соотношения

$$N_1(t) + N_2(t) = \mathcal{C}_1, \quad W_1(t) - W_2(t) = \mathcal{C}_2, \quad (3.9)$$

где $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — некоторые постоянные. Эти соотношения позволяют свести систему четырех уравнений к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= \beta B [N_1(\mathcal{C}_2 - W_1) + W_1(\mathcal{C}_1 - N_1)], \\ \frac{dW_1(t)}{dt} &= B N_1(\mathcal{C}_1 - N_1), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где для краткости мы обозначили $\beta \equiv N_c \mathbf{q}_2^0 / d_A$. Очевидно, что эта система имеет две стационарные точки, одна из которых тривиальна: $N_1 = W_1 = 0$, а вторая имеет вид $N_1 = \mathcal{C}_1$, $W_1 = \mathcal{C}_2$. Из равенств (3.2) и первого соотношения в (3.9) следует, что $N^l(t) = \text{const}$, т.е. полное число плазменных возбуждений в отсутствие диссипации сохраняется, как и должно быть в силу (2.8).

При определенном соотношении между константами $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, а именно при

$$\mathcal{C}_2^2 = \frac{1}{2\beta} \mathcal{C}_1^2,$$

можем получить точное решение системы (3.10). С этой целью первым шагом, в силу автономности правых частей, сведем эту систему к одному уравнению

$$\frac{dN_1}{dW_1} = \beta \left(\frac{\mathcal{C}_2 - W_1}{\mathcal{C}_1 - N_1} + \frac{W_1}{N_1} \right)$$

или в несколько иной форме:

$$\left[(2N_1 - \mathcal{C}_1)W_1 - \mathcal{C}_2 N_1 \right] \frac{dW_1}{dN_1} = \frac{1}{\beta} (N_1^2 - \mathcal{C}_1 N_1), \quad (3.11)$$

которое определяет W_1 как функцию от N_1 . Построение решения уравнения (3.11), а затем и исходной системы (3.10) выполнено в следующем разделе. Здесь же сразу приведем явный вид точного решения для системы (3.10) в параметрической форме:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_1(\tau, C) = \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{4a} C_1 C_2 \frac{\tau}{f(\tau)}, \\ W_1 &= W_1(\tau, C) = a \left[\frac{1+\tau}{\tau} f(\tau) - \frac{1}{2} \frac{\tau}{f(\tau)} \right] + \frac{C_2 N_1}{2N_1 - C_1}, \\ t &= t(\tau, C, \tilde{C}) = -\frac{2a}{BC_1^2} \int \frac{d\tau}{(1+\tau)f(\tau)} + \tilde{C}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где C и $\tilde{C}$ — произвольные постоянные интегрирования и

$$a^2 = \frac{1}{4\beta} C_1^2, \quad f(\tau) \equiv (\tau - \ln|1+\tau| - C)^{1/2}.$$

В разделе 5 интеграл по τ в параметрическом представлении времени t в (3.12) переписан в терминах интеграла от известной функции Ламберта W (см. [5]).

4. Построение точного решения системы (3.10). Перепишем систему (3.10) и уравнение (3.11) в иной форме, введя общепринятые в теории дифференциальных уравнений обозначения. Полагаем

$$y \equiv W_1, \quad x \equiv N_1; \quad (4.1)$$

тогда вместо (3.10) имеем

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = x(C_1 - x), \\ \frac{dx(t)}{dt} = \beta [x(C_2 - y) + y(C_1 - x)], \end{cases} \quad (4.2)$$

а вместо (3.11) —

$$\left[(2x - C_1)y - C_2x \right] \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta} x(x - C_1) \quad (4.3)$$

или в более стандартных обозначениях (см. [2])

$$[g_1(x)y + g_0(x)] \frac{dy}{dx} = f_0(x), \quad (4.4)$$

где

$$g_0(x) \equiv -C_2x, \quad g_1(x) \equiv 2x - C_1, \quad f_0(x) \equiv \frac{1}{\beta} x(x - C_1).$$

В системе (4.2) мы избавились от параметра B , формально переопределив время

$$t \rightarrow t/B. \quad (4.5)$$

Напомним, что данный параметр, в силу определения (3.6), является обобщенной функцией волновых векторов $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}'_0$. Уравнение (4.4) относится к классу уравнений Абеля второго рода. Первым шагом приведем его к «нормальной» форме. Произведем замену неизвестной функции

$$w = y + \frac{g_0(x)}{g_1(x)}.$$

Это преобразование приводит исходное уравнение (4.4) к виду

$$w \frac{dw}{dx} = F_1(x)w + F_0(x), \quad (4.6)$$

где

$$F_1(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{g_0(x)}{g_1(x)} \right) = \frac{C_1 C_2}{(2x - C_1)^2}, \quad F_0(x) = \frac{f_0(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{\beta} \frac{x(x - C_1)}{2x - C_1}.$$

Далее, замена аргумента функции w

$$\xi = \int F_1(x) dx = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{2x - C_1} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{4\xi} C_1 C_2$$

позволяет привести уравнение (4.6) к каноническому виду

$$w \frac{dw}{d\xi} = w + F(\xi). \quad (4.7)$$

Здесь

$$F(\xi) = \frac{F_0(x)}{F_1(x)} = \frac{\mathcal{C}_1^2}{8\beta} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\mathcal{C}_2^2}{4\xi^3} \right).$$

Для уравнения (4.7) при некотором соотношении между параметрами $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, а именно, при

$$\mathcal{C}_2^2 = \frac{1}{2\beta} \mathcal{C}_1^2, \quad (4.8)$$

существует точное решение в параметрическом виде (см. [2, уравнение 1.3.7]):

$$\xi = \frac{a}{\tau} (\tau - \ln |1 + \tau| - C)^{1/2}, \quad w = a \left[\frac{1 + \tau}{\tau} (\tau - \ln |1 + \tau| - C)^{1/2} - \frac{1}{2} \tau (\tau - \ln |1 + \tau| - C)^{-1/2} \right],$$

где τ — параметр, C — произвольная постоянная и

$$a^2 = \frac{1}{4\beta} \mathcal{C}_1^2. \quad (4.9)$$

Возвращаясь к исходной функции y и ее аргументу x , определим точное решение уравнения (4.3) в параметрической форме

$$x = x(\tau, C) = \frac{1}{2} \mathcal{C}_1 - \frac{1}{4a} \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 \frac{\tau}{f(\tau)}, \quad (4.10a)$$

$$y = y(\tau, C) = a \left[\frac{1 + \tau}{\tau} f(\tau) - \frac{1}{2} \frac{\tau}{f(\tau)} \right] + \frac{\mathcal{C}_2 x}{2x - \mathcal{C}_1}. \quad (4.10b)$$

Здесь введено обозначение

$$f(\tau) \equiv (\tau - \ln |1 + \tau| - C)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Решение исходной динамической системы (4.2) определяется формулами

$$x = x(\tau, C), \quad y = y(\tau, C), \quad t = \frac{1}{\beta} \int \frac{\dot{x}_\tau d\tau}{[\mathcal{C}_1 - 2x(\tau, C)]y(\tau, C) + \mathcal{C}_2 x(\tau, C)} + \tilde{C}. \quad (4.12)$$

Здесь $\dot{x}_\tau \equiv dx(\tau, C)/d\tau$ и $\tilde{C}$ — другая произвольная постоянная интегрирования. Последнее соотношение в (4.12) определяет неявную зависимость параметра τ от времени t : $\tau = \tau(t, C, \tilde{C})$. Тем самым, используя формулы (4.10a) и (4.10b), можно установить зависимость x и y от t . Заметим, что вместо последнего выражения в (4.12) с тем же успехом можно использовать формулу

$$t = \int \frac{\dot{y}_\tau d\tau}{x(\tau, C)(\mathcal{C}_1 - x(\tau, C))} + \tilde{C}.$$

К сожалению, прямое использование обоих параметрических представлений для времени $t = t(\tau, C, \tilde{C})$ приводит к довольно громоздким выражениям, поэтому здесь будем действовать иначе.

Фактически задача сводится к определению такой функции $\mathcal{F}(\tau)$, что выполняется система уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy(\tau, C)}{d\tau} = \mathcal{F}(\tau)x(\mathcal{C}_1 - x), \\ \frac{dx(\tau, C)}{d\tau} = \beta \mathcal{F}(\tau)[(\mathcal{C}_1 - 2x)y + \mathcal{C}_2 x]. \end{cases} \quad (4.13)$$

Здесь в правой части для краткости опущена зависимость функций x и y от параметра τ и константы C . Зависимость времени t от τ в этом случае задается неопределенным интегралом вида

$$t = \int \mathcal{F}(\tau) d\tau + \tilde{C}. \quad (4.14)$$

Для определения подынтегральной функции $\mathcal{F}(\tau)$ выразим $f(\tau)$ как функцию от x из параметрического решения (4.10а), подставим ее в y (решение (4.10б)) и продифференцируем по τ . В результате получим

$$\dot{y}_\tau = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 - 2x} + C_1 C_2 \frac{\tau \dot{x}_\tau}{(C_1 - 2x)^2} + \frac{2a^2}{C_1 C_2} \dot{x}_\tau.$$

Напомним, что коэффициент a^2 определялся равенством (4.9). Основная особенность последнего выражения — отсутствие производной $\dot{x}_\tau$ в первом члене правой части. Осталось подставить соответствующие правые части из (4.13) в предыдущее выражение вместо производных $\dot{y}_\tau$ и $\dot{x}_\tau$, а затем подставить точные решения (4.10) вместо y и x . После несложных, но несколько громоздких алгебраических преобразований, учитывая соотношения (4.8) и (4.9), находим искомую функцию

$$\mathcal{F}(\tau) = -\frac{2a}{C_1^2} \frac{1}{(1+\tau)f(\tau)}. \quad (4.15)$$

Преимущество такого подхода заключается в том, что большинство членов взаимно сокращаются, и мы получаем достаточно простое выражение. Подставляя $\mathcal{F}(\tau)$ в (4.14) и вспоминая определение (4.11), находим искомую параметризацию времени

$$t = t(\tau, C, \tilde{C}) = -\frac{2a}{C_1^2} \int \frac{d\tau}{(1+\tau)(\tau - \ln|1+\tau| - C)^{1/2}} + \tilde{C}. \quad (4.16)$$

Прямой подстановкой (4.15) и точных решений (4.10) в систему уравнений (4.13), мы убеждаемся, что они обращаются в тождество. Переходя к исходным функциям N_1 и W_1 в соответствии с (4.1) и восстанавливая параметр B , уравнение (4.5), мы тем самым определяем точное решение системы (3.10), задаваемое выражением (3.12).

5. Функция Ламберта. Проанализируем структуру подынтегрального выражения в (4.16) более детально. Для этого заменим переменную интегрирования $\ln|1+\tau| = \zeta$, что дает

$$\int \frac{d\tau}{(1+\tau)(\tau - \ln|1+\tau| - C)^{1/2}} = \int \frac{d\zeta}{[\pm e^\zeta - \zeta - (1+C)]^{1/2}}, \quad (5.1)$$

где в правой части в подынтегральном выражении имеем

$$\begin{cases} +e^\zeta & \text{для } \tau > -1, \\ -e^\zeta & \text{для } \tau < -1. \end{cases}$$

Еще раз выполним замену переменной интегрирования:

$$\pm e^\zeta - \zeta - (1+C) = \lambda. \quad (5.2)$$

Решение этого уравнения относительно новой переменной λ можно представить в следующем виде:

$$\zeta = \zeta(\lambda) = -\lambda - (1+C) - W(\mp e^{-(1+C)} e^{-\lambda}),$$

где $W(x)$ — функция Ламберта W (см. [5]). Используя правило дифференцирования этой функции (см. [1, 5, 6]), находим далее

$$d\zeta = -d\lambda + \frac{W(\mp e^{-(1+C)} e^{-\lambda})}{1 + W(\mp e^{-(1+C)} e^{-\lambda})} d\lambda \equiv -\frac{1}{1 + W(\mp e^{-(1+C)} e^{-\lambda})} d\lambda.$$

С учетом замены переменной интегрирования (5.2) и явного вида дифференциала $d\zeta$, находим вместо последнего интеграла в (5.1)

$$-\int \frac{d\lambda}{\lambda^{1/2} [1 + W(\mp e^{-(1+C)} e^{-\lambda})]} \quad \text{или} \quad -2 \int \frac{d\xi}{1 + W(\mp e^{-(1+C)} e^{-\xi^2})}, \quad \xi \equiv \lambda^{1/2}. \quad (5.3)$$

Таким образом, мы свели интеграл от трансцендентной функции в (4.16) к интегралу от функции Ламберта W .

Однако такой интеграл также не может быть найден непосредственно, т.е. не может быть выражен в виде известных алгебраических и трансцендентных функций. Сложность заключается

в том, что функция Ламберта W зависит от переменной ξ^2 . Здесь мы можем использовать частное интегральное представление для функции Ламберта W , приведенное в [8, уравнение (45)]. В нашем случае оно будет выглядеть следующим образом:

$$\int \frac{d\xi}{1 + W(\mp e^{-(1+C)} e^{-\xi^2})} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dv \int \frac{d\xi}{1 \mp e^{-(1+C)} e^{-\xi^2} e^{v \operatorname{ctg} v} \sin v/v}. \quad (5.4)$$

Далее представим интеграл в виде разложения в ряд:

$$\frac{1}{1 \mp e^{-(1+C)} e^{-\xi^2} e^{v \operatorname{ctg} v} \sin v/v} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\pm 1)^\nu e^{-\nu(1+C)} e^{-\nu \xi^2} \left\{ e^{v \operatorname{ctg} v} \frac{\sin v}{v} \right\}^\nu.$$

Запишем интеграл по ξ через функцию ошибки Гаусса:

$$\int_0^\xi e^{-\nu \xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} \operatorname{erf}(\sqrt{\nu} \xi),$$

а для интегрирования по v используем [8, следствие 3.4]:

$$\int_0^\pi \left\{ e^{v \operatorname{ctg} v} \frac{\sin v}{v} \right\}^\nu dv = \frac{\pi \nu^\nu}{\nu!}.$$

В результате для интеграла (5.4) находим представление в виде ряда

$$\int \frac{d\xi}{1 + W(\mp e^{-(1+C)} e^{-\xi^2})} = \xi + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^\nu}{\nu! \sqrt{\nu}} (e^{-(1+C)} \nu)^\nu \operatorname{erf}(\sqrt{\nu} \xi).$$

Подставив это представление в (5.3) и вернувшись к исходной переменной τ (в нашем случае просто заменив ξ на $f(\tau)$), получим следующее представление для параметризации времени (4.16):

$$t = \frac{4a}{\mathcal{C}_1^2} \left\{ f(\tau) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^\nu}{\nu! \sqrt{\nu}} (e^{-(1+C)} \nu)^\nu \operatorname{erf}(\sqrt{\nu} f(\tau)) \right\} + \tilde{C}.$$

Напомним, что под знаком суммы выбираем $(+1)^\nu \equiv 1$, если $\tau > -1$, и $(-1)^\nu$, если $\tau < -1$. Возможно, такое представление более удобно для приближенных аналитических выражений времени t как функции параметра τ , с использованием, например, нескольких первых членов ряда или, наоборот, с использованием асимптотической аппроксимации по $\nu \rightarrow \infty$ для членов этого ряда.

6. Заключение. В данной работе в рамках гамильтоновой теории была выписана самосогласованная система кинетических уравнений бoльцмановского типа, учитывающая эволюцию по времени мягких возбуждений плазмы и среднего значения цветового заряда при взаимодействии жесткой тестовой цветозаряженной частицы с плазмой с неабелевым типом взаимодействия. На основе найденных кинетических уравнений была рассмотрена модельная задача взаимодействия двух бесконечно узких волновых пакетов. Полученная система четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющая динамику взаимодействия бесцветной $N_{\mathbf{k}}^l$ и цветовой $W_{\mathbf{k}}^l$ компонент плотности числа коллективных бозонных возбуждений, в силу отсутствия в системе бесстолкновительного затухания Ландау, была приведена на первом шаге к системе из двух уравнений. Затем в силу автономности правых частей редуцированная система была сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению типа Абеля второго рода. Показано, что при определенном соотношении между постоянными, входящими в данное нелинейное уравнение, можно получить точное решение в параметрическом виде. На последнем шаге было восстановлено соответствующее точное решение в параметрической форме исходной эволюционной системы (2.1) и (2.2) на функции $N_{\mathbf{k}}^l$ и $W_{\mathbf{k}}^l$.

Было найдено простое параметрическое представление времени в виде неопределенного интеграла, который затем был представлен как интеграл от известной функции Ламберта W . Такое представление позволило, в частности, получить явное выражение для времени t как функции

параметра τ в виде ряда по специальной функции интеграла ошибок $\operatorname{erf}(f(\tau))$, которое, возможно, более удобно для приближенных выражений времени t как функции параметра τ , при использовании, например, нескольких первых членов ряда или, наоборот, при асимптотической аппроксимации членов этого ряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К. *W-Функция Ламберта и её применение в математических задачах физики*. — Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006.
2. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения*. — М.: Наука, 1993.
3. Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю. Гамильтонов формализм для жестких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — 234. — С. 143–158.
4. Blaizot J.-P., Iancu E. The quark-gluon plasma: collective dynamics and hard thermal loops// Phys. Rep. — 2002. — 359. — P. 355–528.
5. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. et al. On the Lambert W function// Adv. Comput. Math. — 1996. — 5. — P. 329–359.
6. Corless R. M., Jeffrey D. J., Knuth D. E. A sequence series for the Lambert W function// Proc. Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC, 1997). — New York, 1997. — P. 197–204.
7. Ghiglieri J., Kurkela A., Strickland M., Vuorinen A. Perturbative thermal QCD: Formalism and applications// Phys. Rep. — 2020. — 880. — P. 1–73.
8. Kalugin G. A., Jeffrey D. J., Corless R. M. Stieltjes, Poisson and other integral representations for functions of Lambert W/ arXiv:math.CV/1103.5640v1.
9. Markov Yu. A., Markova M. A. Nonlinear plasmon damping in the quark-gluon plasma// J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. — 2000. — 26. — P. 1581–1619.
10. Markov Yu. A., Markova M. A. Nonlinear Landau damping of a plasmino in the quark-gluon plasma// Phys. Rev. D. — 2001. — 64. — 105009.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ гос. регистрации 12104130005-1).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марков Юрий Адольфович (Markov Yurii Adolfovich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна (Markova Margarita Anatol'evna)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич (Markov Nikita Yurievich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: NYumarkov@gmail.com

CONTENTS

On a discrete two-parameter fractional control problem (<i>S. T. Aliyeva, K. B. Mansimov</i>)	3
The optimal control problem of the thermal effect of a laser beam on a two-layer biomaterial (<i>V. R. Barseghyan, S. V. Solodusha</i>)	11
On asymptotics of solution of nonlinear difference equation of convolution type (<i>V. A. Voblyi</i>)	21
The influence of lower derivatives on the solvability of the Dirichlet problem for multidimensional elliptic systems (<i>E. A. Golovko, N. S. Katsapova</i>)	27
Cauchy problem for a special case of fluid motion in a pressure pipeline (<i>E. Yu. Grazhdantseva</i>)	35
Support majorants and feedback minimum principles for discrete optimal control problems (<i>V. A. Dykhta</i>)	43
On some systems of partial differential equations with a small parameter in the principal part (<i>I. V. Zakharova, M. V. Falaleev</i>)	50
On one class of exact solutions of the multidimensional nonlinear heat equation with a zero front (<i>A. L. Kazakov, L. F. Spevak</i>)	59
Composition of numbers with constraints and the hierarchical structure of planar sections of Pascal's pyramid (<i>O. V. Kuzmin, M. V. Strikhar</i>)	67
Quantum search with entanglement-breaking channel of queries to the oracle (<i>A. E. Rastegin, A. M. Shemet</i>)	75
The problem of identifying the input signal of dynamic systems modeled by Volterra polynomials (<i>S. V. Solodusha, Yu. I. Kokonova</i>)	83
On some S_I^* -precomplete sets of multifunctions of rank 2 (<i>E. S. Taglasov</i>)	91
On some problems of spherical trigonometry (<i>E. P. Krugova</i>)	99
Lyapunov stability criteria for systems of ordinary differential equations in multiplicative and additive forms (<i>S. G. Bulanov</i>)	108
An approach to calculating degenerate extremal controls based on fixed point problems (<i>A. S. Buldaev, I. D. Kazmin</i>)	118
Methods of research of some systems with linear delay (<i>B. G. Grebenshchikov, S. A. Zagrebina</i>)	133
Hamiltonian formalism for hard and soft excitations in a plasma with a non-Abelian interaction (<i>Yu. A. Markov, M. A. Markova, N. Yu. Markov</i>)	143
On the exact solution of the evolution equations for two interacting narrow wave packets propagating in a non-Abelian plasma (<i>Yu. A. Markov, M. A. Markova, N. Yu. Markov</i>)	159

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНИТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович