ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 229

Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 229 (2023)

Дата публикации 13 ноября 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года — Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска	А. С. Бондарев М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска	Н. А. Архипова
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN	2782–4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 229

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ ЗИМНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ «СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ»

ВОРОНЕЖ, 27 ЯНВАРЯ – 1 ФЕВРАЛЯ 2023 г.

Часть 3

Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 3–11
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-3-11

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ» ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА ПОД РУКОВОДСТВОМ Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2023 г. **Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2022 г.

Ключевые слова: качественная теория динамических систем, геометрия, классическая механика, механика жидкости и газа, механика деформируемого твердого тела.

SESSIONS OF THE WORKSHOP OF THE MATHEMATICS AND MECHANICS DEPARTMENT OF THE LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY, “URGENT PROBLEMS OF GEOMETRY AND MECHANICS” NAMED AFTER V. V. TROFIMOV

© 2023 **D. V. GEORGIEVSKY, M. V. SHAMOLIN**

Abstract. Brief information on sessions of the workshop in 2022 is presented.

***Keywords and phrases*:** qualitative theory of dynamical systems, geometry, classical mechanics, fluid and gas mechanics, solid mechanics.

***AMS Subject Classification*:** 58Cxx, 70Cxx

Заседание 466 (18 февраля 2022 г.)
В. И. Ванько.
Математические модели в механике конструкций.

В начале доклада несколько слов о жизни механиков в 50–60-х годах прошлого века: отсутствие хорошей вычислительной техники заставляло придумывать адекватные модели поведения материалов и конструкций. Это ярко характеризует научные школы М. А. Лаврентьева, А. А. Ильюшина, Ю. Н. Работнова и других выдающихся механиков.

В докладе приведены примеры математического моделирования (общепринятый термин, хотя, по мнению докладчика, следует говорить о механико-математическом моделировании) некоторых механических объектов.

Излагаются результаты исследования поведения упругопластического стержня в условиях продольного изгиба (рассматриваются любые упругопластические атериалы, любые законы ползучести). Автор пытается ответить на «сакраментальный» (в свое время) вопрос: «Карман или Шэнли?», т.е. чья постановка более отвечает действительности (см. [1, 4]).

Используя кинематическую модель поведения кругового кольца с «малым эксцентриситетом» (разработанную совместно с С. А. Шестериковым), находим большие перемещения точек цилиндрических оболочек бесконечной и конечной длин под внешним гидростатическим давлением. Выведены адекватные асимптотические формулы (см. [2, 4]).

Построена линейная теория колебаний расщепленного провода высоковольтной ЛЭП. Выводится достаточное условие неустойчивости по Ляпунову положений равновесия произвольного профиля в воздушном (ветровом) потоке. Полученное условие (так же, как и классическое необходимое условие Глауэрта—Ден-Гартога) инвариантно относительно механических характеристик конструкции. Оба условия проверены экспериментально в аэродинамической трубе ЦАГИ им. профессора Н. Е. Жуковского. Выведенное условие используется для доказательства утверждения: «пляска (галопирование) провода есть неустойчивость по Ляпунову», а также для определения наиболее устойчивого (относительно крутильных колебаний) монтажного положения расщепленного провода (см. [3, 4]).

Библиография

1. *Ванько В. И.* О несущей способности элементов конструкций // Прикл. мех. техн. физ. — 2016, № 5. — С. 24–29.
2. *Ванько В. И.* Цилиндрическая оболочка под внешним гидростатическим давлением: неклассическое решение задачи о больших перемещениях // Вестн. Нижегород. гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. — 2014. — № 4, ч. 4. — С. 1413–1414.
3. *Ванько В. И.* Неустойчивость по Ляпунову в аэроупругости: некоторые приложения // Тез. докл. IX Междунар. конф. «Лаврентьевские чтения», посв. 120-летию акад. М. А. Лаврентьева. — Новосибирск, 2020. — С. 71.
4. *Ванько В. И.* Очерки об устойчивости элементов конструкций. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015.

Заседание 467: совместное заседание с научно-образовательным семинаром СУНЦ МГУ (25 февраля 2022 г.).

Д. В. Георгиевский.

П-теорема теории размерностей и ее приложения в задачах механики.

Заседание 468 (4 марта 2022 г.)

А. А. Бобылев.

Применение дискретного преобразования Фурье к решению контактных задач с односторонними связями.

Рассматриваются задачи о вдавливании гладкого жесткого штампа в упругое тело. Область, занимаемая упругим телом, может быть одного из следующих типов: полуплоскость, полоса, полупространство и слой. Для первых двух типов областей рассматриваются задачи о плоской деформации, а для двух других — пространственные контактные задачи. Контактное взаимодействие упругого тела со штампом описывается нелинейными условиями одностороннего гладкого контакта, содержащими неравенства. Для решения задач применяется вариационный подход. Построено граничное вариационное неравенство с использованием оператора Стеклова—Пуанкаре, отображающего на части границы упругого тела нормальные напряжения в нормальные перемещения. Получена эквивалентная граничному вариационному неравенству задача минимизации граничного функционала на множестве статически допустимых нормальных напряжений. Операторы Стеклова—Пуанкаре для рассматриваемых полубесконечных упругих областей строятся с использованием интегрального преобразования Фурье.

В численном анализе использование преобразования Фурье наиболее эффективно в случае периодических функций, благодаря дискретности их спектра и, как следствие, переходе от непрерывного преобразования к дискретному. Поэтому основная идея используемого подхода состоит в аппроксимации искомых нормальных напряжений периодическими сеточными функциями. Для уменьшения так называемой ошибки периодичности используется расширенная вычислительная область. В результате вычисление оператора Пуанкаре—Стеклова сводится к выполнению пары (прямого и обратного) преобразований Фурье и перемножению спектров. Численная реализация прямого и обратного дискретных преобразований Фурье производится с помощью алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Для численного решения полученных в результате дискретизации задач квадратичного программирования используется разработанный автором алгоритм на основе метода сопряженных градиентов, учитывающий специфику множества ограничений и позволяющий рассматривать случаи внецентренного нагружения штампа. Вычислительный алгоритм реализован на языке FORTRAN с применением программного пакета для разработчиков NVIDIA HPC SDK. Для выполнения БПФ используется библиотека cuFFT, позволяющая с помощью технологии CUDA производить вычисления на графических процессорах. Получены решения ряда задач дискретного контакта о вдавливании в упругое тело жесткого штампа, имеющего поверхностный рельефом.

Заседание 469 (18 марта 2022 г.)

В. А. Банько.

Динамический подход к задаче Лагранжа об оптимальной форме колонны в упругой среде.

Заседание 470 (8 апреля 2022 г.)

В. И. Горбачев.

Тензор Кельвина для однородной и неоднородной упругой анизотропной среды. Приближенные методы.

Заседание 471 в рамках конференции «Ломоносовские чтения» (15 апреля 2022 г.).

Д. В. Георгиевский.

Изотропные тензорные функции с квазиполиномиальным скалярным потенциалом в нелинейной теории упругости.

И. Н. Молодцов, А. А. Ткаченко.

О процессах сложного нагружения с криволинейными траекториями деформации.

Э. Б. Завойчинская, А. С. Плотников.

Об определении неоднородного поля остаточных напряжений на основе измерений компонент вектора перемещений.

М. Н. Кирсанов.

Свойства спектров собственных частот регулярных стержневых систем.

А. А. Бобылев.

Численное моделирование дискретного контакта упругого слоя.

В. А. Банько.

Динамический подход к задаче Лагранжа об оптимальной форме колонны в упругой среде.

Заседание 472 (29 апреля 2022 г.)

Н. А. Раутиан.

Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и их приложения.

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина—Пипкина) и имеют ряд других важных приложений. Для широкого класса ядер интегральных операторов установлены результаты о существовании и единственности классических решений указанных уравнений, полученные на основе подхода, связанного с применением теории полугрупп операторов. Проведен спектральный анализ генераторов полугрупп операторов, порождаемых указанными интегро-дифференциальными уравнениями. На основе полученных ранее результатов, устанавливается связь между спектрами оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, и спектрами генераторов полугрупп операторов. На основе спектрального анализа генераторов полугрупп операторов и соответствующих оператор-функций получены представления решений рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений.

Заседание 473 (13 мая 2022 г.)
М. В. Шамолин.
Инварианты систем с диссипацией в динамике.

Обсуждается теорема Ли о достаточном количестве первых интегралов, векторных полей симметрий и дифференциальных форм объема для интегрирования в квадратурах систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Предъявлены тензорные инварианты (первые интегралы и дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные. Предъявлены примеры из динамики твердого тела.

Как известно (см. [1–3]), наличие достаточного количества не только первых интегралов (скалярных инвариантов), но и других тензорных инвариантов (например, дифференциальных форм) позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объема позволяет внести вклад в интегрируемость. Для консервативных систем этот факт естествен. Для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций (см. [4–6]).

Так, например, задача о движении плоского (пространственного) маятника на цилиндрическом (сферическом) шарнире в потоке набегающей среды приводит к системе на касательном расслоении к одномерной (двумерной) сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (см. [5, 6]).

Предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Библиография

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilites. — Paris: Gauthier–Villars, 1912.
2. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
3. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.

4. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
5. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
6. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.

Заседание 474, посвященное 85-летию со дня рождения профессора Бориса Ефимовича Победри (27 мая 2022 г.).

Заседание 475 (17 июня 2022 г.)
Д. В. Георгиевский.

Тонкослойные сингулярные асимптотики в обобщенной задаче Прандтля для неоднородного по толщине пластического материала.

Рассмотрена обобщенная краевая задача Прандтля, моделирующая квазистатический технологический процесс сдавливания в одном направлении и быстром растекании в другом тонкого несжимаемого идеально жесткопластического слоя (плоское деформированное состояние), соответствующего критерию пластичности Мизеса—Генки с переменным по толщине пределом текучести. Стратификация может быть непрерывной либо кусочно постоянной; в последнем случае задача моделирует прессование слоистых пластических композитов (ламинатов, «сэндвичей») и прецизионное доведение их до нужной толщины. На основе тонкослойных сингулярных асимптотик по малому геометрическому параметру с помощью развиваемого в работе метода асимптотического интегрирования найдено приближенное решение для кинематических и силовых величин. Обсуждена применимость квазистатического подхода на различных временных диапазонах процесса сдавливания.

Заседание 476 (24 июня 2022 г.)
Г. В. Москвитин (Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН).

Некоторые методы повышения прочности и ресурса в машиностроении.

Заседание 477 (1 июля 2022 г.)
М. К. Тлеулинов (Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева — КАИ).

Геометрически нелинейные явления и эффекты в статике и динамике стержней и пластин, моделирующих несущие и управляющие поверхности летательных аппаратов.

Заседание 478 (9 сентября 2022 г.)
И. М. Цветков.

Динамическое осесимметричное растяжение тонкого круглого идеально жесткопластического слоя.

Рассматривается напряженно-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородного круглого слоя из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса—Генки. Верхнее и нижнее основания свободны от напряжений, на боковой границе задана радиальная скорость. Учитывается возможность утолщения либо утоньшения слоя, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. Выявлено два характерных режима растяжения; один связан с достаточно большой скоростью удаления боковой границы слоя от центра, второй с ускорением. Во втором случае проведен анализ с использованием метода асимптотического интегрирования, позволяющий приближенно найти параметры напряженно-деформированного состояния.

Заседание 479 (16 сентября 2022 г.)
Н. И. Старцев.

Куртка мотоциклиста с интегрированным парашютом для обеспечения безопасности дорожного движения.

Заседание 480 (30 сентября 2022 г.)

Н. Н. Шамаров.

Гамильтоново вторичное квантование по Смолянову и гильбертовы тензорные произведения Гишарде.

Излагаются результаты, касающиеся квантования бесконечномерных гамильтоновых систем. Используемая техника приводит также к естественному L_2-представлению бесконечного гильбертова тензорного произведения пространств вида $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Квантование некоторых бесконечномерных гамильтоновых систем определено в [1] как линейный оператор, задающий, в частности, фоковское по Березину представление бозонных канонических коммутационных соотношений. Докладчику в этой статье принадлежит реализация идеи, принадлежащей О. Г. Смолянову и состоящей в том, что формула для оператора квантования может быть написана в виде, не зависящем от размерности квантуемой системы, причем в конечномерном случае получится стандартное квантование по Шредингеру, а в бесконечномерном — вторичное квантование по Березину; в этом последнем случае сепарабельное комплексное гильбертово пространство $\mathcal{H}_\hbar$, в котором действуют квантованные наблюдаемые, является, в некотором естественном смысле, L_2-пополнением бесконечномерного Фурье-инвариантного аналога пространства Шварца $\mathcal{S}_h(Q)$ (где $h \equiv 2\pi\hbar$ играет роль исторической константы Планка) гладких быстроубывающих функций на вещественном гильбертовом (конфигурационном) сепарабельном пространстве Q.

Библиография

1. *Смолянов О. Г., Шамаров Н. Н.* Квантование по Шредингеру бесконечномерных гамильтоновых систем с неквадратичной функцией Гамильтона // Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 492. — С. 65–69.

Заседание 481 (7 октября 2022 г.)

Э. Б. Завойчинская, И. Ю. Панарин.

Моделирование хрупкого усталостного разрушения материалов при одноосных процессах почти периодического нагружения.

Заседание 482 (14 октября 2022 г.)

Д. В. Георгиевский.

Экспериментальное определение ядер некоторых разностных операторов в теории вязкоупругости.

В рамках интегральных определяющих соотношений для линейных изотропных вязкоупругих сред с ядрами разностного типа в случае нерелаксирующего объема предложены возможные, дополняющие известные, установочные эксперименты по определению ядер операторов $\check{g}_\beta$ Ильюшина. Один из них базируется на использовании образца из вспомогательного вязкоупругого материала, материальные функции которого связаны с функцией ползучести и модулем объемного сжатия исходного материала. Также предложены аналогичные схемы установочных экспериментов для нахождения ядер операторов $\check{h}_\gamma$, в определенном смысле сопряженных с $\check{g}_\beta$.

Заседание 483, посвященное 75-летию со дня рождения профессора Сергея Алексеевича Агафонова (1947–2021), одного из основателей и руководителей семинара (21 октября 2022 г.).

Заседание 484 (28 октября 2022 г.)

А. А. Бобылев.

Численное построение оператора Пуанкаре—Стеклова для стратифицированной упругой полосы.

Рассматривается оператор Пуанкаре—Стеклова для изотропной стратифицированной упругой полосы, отображающий на части границы нормальные напряжения в нормальные перемещения. Для построения трансформанты ядра интегрального представления этого оператора (передаточной функции) предложен новый подход. Получена вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений. Дано определение и доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи. Построен итерационный метод решения вариационных уравнений и на основе принципа сжатых отображений получены условия его сходимости. Предложен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимость для любого начального значения параметра.

Аппроксимация вариационных уравнений производится методом конечных элементов. Используются двухузловые конечные элементы первого порядка. В результате на каждом шаге итерационного метода требуется решить две независимые системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрицы которых имеют диагональное преобладание. Для решения этих СЛАУ применяется метод прогонки, алгоритм которого в данном случае является корректным и устойчивым.

Проведена верификация вычислительного алгоритма и разработанного программного обеспечения. В качестве тестовых выбирались краевые задачи для трех типов изотропных упругих полос: однородных полос, непрерывно-неоднородных полос, параметры Ламе которых являлись экспоненциальными функциями, и кусочно-однородных полос с полностью сцепленными слоями. Даны рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток для уменьшения вычислительных затрат.

Разработанный вычислительный алгоритм может быть применен и в более общем случае — при наличии на границе полосы касательных напряжений. Предложенный подход к вычислению передаточной функции может быть обобщен на случай слоистой полосы при неполном сцеплении слоев и на случай, когда упругая стратифицированная полоса сцеплена с упругой однородной полуплоскостью.

Заседание 485 (11 ноября 2022 г.)

М. В. Шамолин.

Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: интегрируемость и анализ.

Работа является обзорной по вопросам интегрируемости систем с четырьмя степенями свободы. Подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил; рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере; в заключение рассмотрены касательные расслоения к достаточно обширному классу гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Данная работа является обзором по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с четырьмя степенями свободы. Если конфигурационное многообразие системы — гладкое четырехмерное многообразие, то касательное (кокасательное) его расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Заседание 486 (18 ноября 2022 г.)

А. Г. Петров (Институт прикладной механики им. А. Ю. Ишлинского РАН).

О сверхсходящихся численных схемах метода граничных элементов и их приложение к гидродинамике и теории упругости.

Рассматривается метод граничных элементов численного решения краевых задач для гармонических и бигармонических уравнений в многосвязной области на плоскости с приложениями к гидродинамике и теории упругости. Интегральные уравнения на границе области аппроксимируются системой линейных уравнений. Для аппроксимации предлагаются квадратурные формулы специального вида, учитывающие периодичность подынтегральных функций, заданных на граничных контурах, что позволяет существенно сократить вычисления и повысить их точность. Особенно это проявляется, если граница многосвязной области состоит из системы гладких замкнутых контуров, то погрешность аппроксимации убывает быстрее любой степени шага сетки. Проводятся проверки сходимости численных решений, построенных предлагаемым методом, к известным точным решениям задач механики: потенциальное обтекания эллиптического профиля с циркуляцией, течения вязкой жидкости в слое между двумя эксцентрично расположенными и произвольно движущимися круговыми цилиндрами, задача теории упругости об эксцентрической трубе, находящейся под равномерным внешним и внутренним давлением (точное решение Я. С. Уфлянда и для частного случая концентрической трубы задача Ламе).

Заседание 487 (2 декабря 2022 г.)
А. В. Муравлев, М. А. Степина.
О теории упругопластических процессов средней кривизны и среднего кручения.

Заседание 488: совместное заседание с семинаром «Операторные модели в математической физике» (9 декабря 2022 г.).

Д. В. Георгиевский.
Задача Орра–Зоммерфельда и новые энергетические оценки устойчивости сдвиговых течений.

Рассматривается широкий класс тензорно нелинейных изотропных несжимаемых сплошных сред, которые могут обладать скалярным потенциалом напряжений по скоростям деформаций. Приводятся постановки линеаризованных задач устойчивости течений таких сред в движущихся трехмерных областях относительно трехмерной картины кинематических и силовых возмущений. Развивается техника метода интегральных соотношений, позволяющего получать достаточные интегральные (энергетические) оценки устойчивости. Общие оценки устойчивости, в том числе и экспоненциальной, уточняются для каждого конкретного вида сред: тензорно линейных, или квазилинейных, сред, обладающих либо не обладающих скалярным потенциалом, тела Бингама, тела Сен-Венана, ньютоновской вязкой жидкости.

Заседание 489 (23 декабря 2022 г.)
В. И. Горбачев.
Задача Штурма—Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

Рассмотрена классическая задача Штурма—Лиувилля для однородного самосопряженного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, зависящими от постоянного параметра:

$$\frac{d}{dx}\left[C(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u = 0, \quad x \in (a,b),$$

где либо оба коэффициента $C(x)$ и $q(x)$, либо один из них зависят от постоянного параметра λ. Показано, что с помощью интегральной формулы, полученной ранее автором, можно выписать общее решение уравнения, содержащее две произвольные константы:

$$u(x) = K_I A_I(x) \equiv K_1 A_1(x) + K_2 A_2(x),$$

где K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. Фундам. направл. — 2007. — *23*. — С. 16–45.
2. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *62*. — С. 3–13.
3. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2009. — *65*. — С. 3–10.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 3–10.

5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова// Совр. мат. прилож. — 2013. — *88.* — С. 3–19.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2015. — *98.* — С. 3–8.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100.* — С. 3–11.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2018. — *150.* — С. 3–25.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *174.* — С. 3–11.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2020. — *187.* — С. 3–11.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2021. — *202.* — С. 3–9.
12. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *205.* — С. 3–9.
13. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *210.* — С. 6–11.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Георгиевский Дмитрий Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `cotedurhone@mail.ru, georgiev@mech.math.msu.su`

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin@imec.msu.ru, shamolin.maxim@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 12–21
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-12-21

УДК 517.9

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2023 г. А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. В работе рассматривается разностный оператор специального типа (с инволюцией), бесконечная матрица которого имеет две ненулевые диагонали: главную и побочную. Введено понятие абстрактного оператора инволюции и исследованы его свойства, такие как обратимость, спектр, условие коммутируемости. Рассмотрен вопрос о принадлежности исходного оператора и обратного к нему специальным операторным классам.

***Ключевые слова*:** разностный оператор, инволюция, абстрактная инволюция, спектр, обратимость, коммутируемость.

ON BOUNDED DIFFERENCE OPERATORS WITH INVOLUTION

© 2023 A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA

Abstract. In this paper, we considers difference operators of a special type (with involution) whose infinite matrix has two nonzero diagonals. We introduce the notion of an abstract involution operator and examine its such as invertibility, spectrum, and commutability condition. Also, we discuss the problem of whether the original operator and its inverse belong to special operator classes.

***Keywords and phrases*:** difference operator, involution, abstract involution, spectrum, invertibility, commutability.

***AMS Subject Classification*:** 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое комплексное банахово пространство и $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$, со стандартной нормой

$$\|X\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|, \quad X \in \operatorname{End}\mathcal{X}, \quad x \in \mathcal{X},$$

и $I \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ — тождественный оператор в $\mathcal{X}$.

Определение 1. Оператор $J \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ называется инволюцией, если

$$J^2 = I. \tag{1}$$

Заметим, что равенству (1) удовлетворяют, например, операторы I и $-I$. Такую инволюцию назовем тривиальной инволюцией. Далее в работе рассматриваются инволюции, не являющиеся тривиальными.

Всюду рассматривается банахово пространство $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{C})$, $p = [1,\infty]$, двусторонних комплексных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$; будем обозначать кратко его через l_p, $p \in [1,\infty]$. Напомним, что

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1,\infty), \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|.$$

При $p = 2$ пространство l_2 является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{y}(n).$$

Стандартный безусловный базис в l_p, $p \in [1, \infty)$, обозначим через $(e_n, n \in \mathbb{Z})$, $e_n(k) = \delta_{nk}$, где δ_{nk} — символ Кронекера. Отметим, что инволюция существует в любом банаховом пространстве с двусторонним базисом и определяется формулой

$$(Jx)(n) = x(-n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)e_n \in \mathcal{X}, \tag{2}$$

причем $(Jx)(0) = x(0)$.

Через $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ обозначим пространство всех двусторонних комплексных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (необязательно ограниченных), $l_p \subset l^\infty$ для всех $p \in [1, \infty]$. Пространство l^∞ является алгеброй с поточечным умножением $(\alpha\beta)(n) = \alpha(n)\beta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, α, $\beta \in l^\infty$.

Инволюцию можно определить и в линейном пространстве формулойЁ(1). Она также существует в любом линейном пространстве с двусторонним базисом и определяется формулой (2).

Инволюцию, задаваемую формулой (2) в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, также называют простейшей или стандартной (см. [7, 8]). Эта инволюция связана со стандартной (или простейшей) инволюцией, например, на отрезке $[0, 1]$, задаваемой формулой $\omega(x) = 1 - x$, $\omega^2(x) = x$, $x \in [0, 1]$, использующейся в дифференциальных уравнениях.

Для любой последовательности $\alpha \in l^\infty$ определим оператор $A_\alpha = \alpha I$, $Ax = \alpha x$. Область определения $D(A_\alpha)$ оператора A_α определяется следующим образом:

$$D(A_\alpha) = \{x \in l_p, \alpha x \in l_p\}.$$

Оператор A_α будем называть диагональным оператором. Рассмотрим оператор

$$A_{\alpha,\beta} = A_\alpha + A_\beta J = \alpha I + \beta J, \quad \alpha, \beta \in l^\infty,$$

где оператор J определен формулой (2). Множество таких операторов обозначим через $\mathcal{M}$. Аналогично $D(A_\alpha)$ определяется область определения для оператора $A_\beta J$ и $D(A_{\alpha,\beta}) = D(A_\alpha) \cap D(A_\beta J)$. Очевидно, что при $\alpha, \beta \in l_\infty$ оператор $A_{\alpha,\beta}$ ограничен и

$$\|A_{\alpha,\beta}\| \leqslant \|\alpha\|_\infty + \|\beta\|_\infty.$$

Оператор $A_{\alpha,\beta} : D(A_{\alpha,\beta}) \subset l_p \to l_p$ действует по формуле

$$(A_{\alpha,\beta}x)(n) = \alpha(n)x(n) + \beta(n)x(-n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и в стандартном базисе пространства l_p имеет разреженную матрицу $A_{\alpha,\beta} \sim (a_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, где $a_{ii} = \alpha(i)$, $a_{i,-i} = \beta(i)$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a_{00} = \alpha(0) + \beta(0)$, а остальные элементы равны нулю.

Необходимость изучения оператора $A_{\alpha,\beta}$ возникает, например, при исследовании системы дифференциально-разностных уравнений

$$u'(t) = A_{\alpha,\beta}u(t) + f(t),$$

где $u : \mathbb{R} \to l_p$, $u(0) = u_0$, $u_0 \in l_p$, $f : \mathbb{R} \to l_p$.

Важность изучения оператора $A_{\alpha,\beta}$ также связана с возможностью применения метода подобных операторов для исследования спектральных свойств различных классов дифференциальных и разностных операторов. Идеологию метода подобных операторов можно найти, например, в [4, 17]. При этом исследуемый оператор представляют в виде $A - B$, где в роли A выступает оператор с известными спектральными свойствами, а возмущение B мало в некотором смысле по сравнению с A. Обычно в качестве A выступает диагональный оператор. Но это не всегда удобно, особенно если у исследуемого оператора по побочной диагонали также стоит растущая последовательность. Тогда в качестве невозмущенного оператора удобно брать именно оператор вида $A_{\alpha,\beta}$, остальное относить к его возмущению и адаптировать метод подобных операторов именно к такому случаю.

Приведем еще один пример. Оператор вида $A_{\alpha,\beta} - B$ возникает при дискретизации оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом с инволюцией.

Отметим, что дифференциальные операторы с инволюцией в настоящее время активно исследуются в работах разных авторов (см., например, [10, 14, 18]).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассматриваются свойства оператора инволюции сначала в абстрактном банаховом пространстве, а затем в пространстве l_p, $p \in [1, \infty)$, доказана лемма 2, из которой следуют другие примеры инволюции, отличные от стандартной. В разделе 3 рассматривается определение и примеры инволюции порядка n, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$. В разделе 4 изучаются свойства оператора $A_{\alpha,\beta}$ такие как обратимость, условия коммутируемости двух операторов, спектр. В последнем разделе рассматривается оператор $A_{\alpha,\beta}$ при α, $\beta \in l_\infty$ и приводятся результаты относительно его принадлежности специальным операторным классам.

2. Оператор J в абстрактном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Вначале опишем свойства оператора инволюции в абстрактном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Непосредственно из определения 1 вытекает обратимость оператора J и равенство $J^{-1} = J$.

Из (1) немедленно следует, что спектр $\sigma(J)$ оператора J таков, что $\sigma(J) \subseteq \{-1, 1\}$. Так как рассматриваются нетривиальные инволюции, то $\sigma(J)$ совпадает со множеством $\{-1, 1\}$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство. Вектор $x \in \mathcal{X}$ назовем четным, если $Jx = x$, и нечетным, если $Jx = -x$. Четный вектор иногда будем обозначать x_+, нечетный — x_-.

Обозначим через $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ соответственно подпространства четных и нечетных векторов из $\mathcal{X}$. Из определения 2 вытекает, что $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ — замкнутые подпространства и пространство $\mathcal{X}$ представимо в виде их прямой суммы

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \oplus \mathcal{X}_-. \tag{3}$$

Введем два оператора P_+, $P_- \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ формулами

$$P_+ = \frac{I + J}{2}, \quad P_- = \frac{I - J}{2}.$$

Свойства операторов P_+ и P_- удобно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Операторы P_+ и P_- обладают следующими свойствами*:

(1) P_+ *и* P_- — *проекторы*;
(2) $P_+ + P_- = I$, $P_+P_- = 0$;
(3) $JP_+ = P_+$, $JP_- = -P_-$;
(4) $J = P_+ - P_-$ (*спектральное разложение оператора* J);
(5) $\operatorname{Im} P_+ = \mathcal{X}_+$, $\operatorname{Im} P_- = \mathcal{X}_-$.

Таким образом, есть два проектора, осуществляющих разложение пространства $\mathcal{X}$ в виде прямой суммы (3). При этом собственному значению -1 отвечает $\mathcal{X}_-$, а собственному значению 1 — $\mathcal{X}_+$, причем

$$x = \frac{x + Jx}{2} + \frac{x - Jx}{2} = x_+ + x_-, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Перейдем к оператору $I + J$. Он обладает следующими свойствами:

(1) $\sigma(I + J) = \{2, 0\}$;
(2) $\operatorname{Im}(I + J) = \mathcal{X}_+$;
(3) $\operatorname{Ker}(I + J) = \mathcal{X}_-$.

Очевидно, что операторы I и J перестановочны, $e^I = eI$. Поэтому $e^{I+J} = e \cdot e^J$, где

$$e^J = I\Big(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots\Big) + J\Big(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots\Big) = \frac{1}{2}\Big(I(e + e^{-1}) + J(e - e^{-1})\Big),$$

$$e^{Jt} = \operatorname{ch} tI + \operatorname{sh} tJ, \quad e^{I+J} = \frac{1}{2}\Big(I(e^2 + 1) + J(e^2 - 1)\Big), \quad e^{(I+J)t} = e^t \operatorname{ch} tI + e^t \operatorname{sh} tJ.$$

Далее везде в статье под оператором инволюции мы будем понимать именно стандартный оператор инволюции, действующий в пространстве l_p, $p \in [1, \infty)$, по формуле (2) и обозначать его через J. Кроме указанных выше свойств он в пространстве l_2 обладает еще и следующими:

(1) $J^* = J$, $J^{-1} = J^*$;

(2) $(I+J)^* = I+J$.

Стандартный оператор инволюции J является не единственным оператором инволюции (в смысле определения 1), действующим в l_p, $p \in [1,\infty)$. Непосредственная проверка выполнения равенства (1) показывает, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для любой последовательности $\beta \in l_\infty$ такой, что $|\beta(n)| > \varepsilon > 0$ для всех $n \neq 0$, $\beta(0)=1$, и $\beta(-n) = 1/\beta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, оператор βJ является инволюцией.*

Подчеркнем, что для оператора βJ выполняется лемма 1 и его спектр, как и спектр любого нетривиального оператора инволюции, есть множество $\{-1, 1\}$. В стандартном базисе пространства l_p, $p \in [1,\infty)$, оператор βJ, определенный в лемме 2, имеет матрицу только с одной ненулевой побочной диагональю, причем $b_{n,-n} = \beta(n)$, $b_{0,0} = 1$, $\beta_{-n,n} = 1/\beta(n)$, $n \in \mathbb{N}$. К подпространству X_+ относятся, например, векторы, где на $(-n)$-м месте стоит единица, на n-м месте $\beta(n)$, $n \in \mathbb{N}$, а остальные координаты нулевые. К подпространству X_- относятся векторы, у которых на $(-n)$-м месте стоит -1, на n-м месте $\beta(n)$, $n \in \mathbb{N}$, а остальные координаты нулевые.

Такая инволюция βJ не является самосопряженным оператором в пространстве l_2. Очевидно, что оператор $(\beta J)^*$ также является инволюцией, а операторы βJ и $(\beta J)^*$ не перестановочны. Отметим еще одно очевидное свойство. Если D_1 и D_2 — два некоммутирующих оператора инволюции, то $(D_1 D_2)^{-1} = D_2 D_1$.

Кроме приведенных выше примеров, инволюцией, например, является оператор $A_\alpha : l_p \to l_p$, $p \in [1,\infty)$, если $\alpha(n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Для него подпространство $\mathcal{X}_+$ содержит элементы с нулевыми нечетными координатами, а $\mathcal{X}_-$ — с нулевыми четными.

Согласно лемме 2 операторы βJ, где $\beta(n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, также является инволюцией, причем он самосопряжен в пространстве l_2.

Оператор $-J$, где J определен формулой (2) в пространстве l_p, $p \in [1,\infty)$, также является инволюцией. Очевидно, что у него подпространство $\mathcal{X}_+$ содержит нечетные последовательности, а $\mathcal{X}_-$ — четные.

3. Абстрактная инволюция.

В этом разделе приведем примеры абстрактной инволюции.

Определение 3. Оператор $\widetilde{J} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ называется обобщенной инволюцией, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, выполняется соотношение $\widetilde{J}^n = I$. Наименьшее такое n называется порядком обобщенной инволюции.

Для обобщенной инволюции $\widetilde{J}$ n-го порядка имеет место равенство $\widetilde{J}^{-1} = \widetilde{J}^{n-1}$.

Определение 4 (см. [13, с. 87])**.** Оператор $A \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ называется оператором простейшего типа, если его спектр состоит из конечного числа собственных значений и пространство $\mathcal{X}$ есть прямая сумма соответствующих собственных подпространств.

Лемма 3 ((см. [13])**.** *Оператор A является оператором простейшего типа тогда и только тогда, когда существует такой многочлен $P(\lambda)$ с простыми корнями, что $P(A)=0$.*

Из определения 3 и леммы 3 немедленно следует, что обобщенная инволюция является оператором простейшего типа, так как многочлен $P(\lambda) = \lambda^n - 1$ есть для нее аннулирующий многочлен. Следовательно, также $\sigma(J) \subseteq \{\sqrt[n]{1}\}$, все собственные значения обобщенной инволюции простые и лежат на единичной окружности. Соответствующие проекторы можно найти по интерполяционной формуле Лагранжа

$$P_j = \frac{(\widetilde{J} - \lambda_1 I)\ldots(\widetilde{J} - \lambda_{j-1} I)(\widetilde{J} - \lambda_{j+1} I)\ldots(\widetilde{J} - \lambda_n I)}{(\lambda_j - \lambda_1)\ldots(\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j - \lambda_n)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

где λ_1, λ_2, …, λ_n — собственные значения обобщенной инволюции.

Оператор обобщенной инволюции имеет спектральное разложение вида

$$\widetilde{J} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{(\widetilde{J} - \lambda_1 I)\ldots(\widetilde{J} - \lambda_{j-1} I)(\widetilde{J} - \lambda_{j+1} I)\ldots(\widetilde{J} - \lambda_n I)}{(\lambda_j - \lambda_1)\ldots(\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j - \lambda_n)}.$$

Такое разложение также называется интерполяционной формулой Сильвестра.

Приведем примеры обобщенных инволюций. Тривиальной обобщенной инволюцией третьего порядка является оператор $e^{i2\pi/3}I$, четвертого порядка — оператор iI.

К нетривиальной инволюции четвертого порядка относится оператор $\widetilde{J}$, действующий по формуле

$$(\widetilde{J}x)(n) = ix(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

У него два собственных значения $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$; соответствующие проекторы P_{λ_1} и P_{λ_2} задаются формулами $P_{\lambda_1} = (I - iJ)/2$, $P_{\lambda_2} = (I + iJ)/2$.

Приведем еще один пример. Пусть

$$(\widetilde{J}x)(n) = \begin{cases} (-1)^n x(-n), & n \geqslant 0, \\ (-1)^{n+1} x(-n), & n < 0. \end{cases}$$

Оператор $\widetilde{J}$ является обобщенной инволюцией четвертого порядка. Заметим также, что если $\widetilde{J}$ — обобщенная инволюция нечетного порядка, то оператор $I + \widetilde{J}$ обратим.

4. Исследование оператора $A_{\alpha,\beta}$. Пусть $\mathcal{X} = l_p$, $p \in [1, \infty)$. Обозначим символом $e : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ единичную последовательность, т.е. $e(n) = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, а символом $0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — нулевую последовательность. Отметим, что $e \in l_\infty$.

Операторы $I, J \in \operatorname{End} l_p$ принадлежат $\mathcal{M}$, так как $I = A_{e,0} = eI + 0J$, $J = A_{0,e} = 0I + eJ$. Напомним, что символом J теперь обозначена простейшая или стандартная инволюция, т.е. J действует по формуле (2). Далее используется очевидное свойство оператора J: $J(\alpha x) = (J\alpha)(Jx)$; вместо $\alpha(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, иногда будем писать $J\alpha$.

Отметим, что операторы, заданные своими бесконечными матрицами, широко исследованы в различных работах. Но, обычно, это матрицы несколько другого типа. Особенно хорошо изучаются трехдиагональные матрицы, что связано с их приложениями в разных прикладных задачах. Также бесконечные трехдиагональные матрицы возникают при дискретизации дифференциальных уравнений второго порядка с (обычным) потенциалом (без инволюции). Соответствующие результаты, касающиеся нахождения спектральных свойств бесконечных трехдиагональных матриц, можно посмотреть, например, в [5, 11, 19, 20]. Результаты из этих работ к $A_{\alpha,\beta}$ неприменимы (они относятся к замкнутым линейным операторам специального вида, причем существенным образом используется тот факт, что последовательность $(\alpha(n), n \in \mathbb{Z})$ растущая). В [12] рассматривались трехдиагональные матрицы с ненулевой побочной диагональю, причем кроме условия, что диагональная последовательность $(\alpha(n), n \in \mathbb{Z})$ растущая, еще ставились условия на последовательность $(\beta(n), n \in \mathbb{Z})$, например, $\beta \in l_2$.

Напомним также, что матрица оператора $A_{\alpha,\beta}$ является разреженной матрицей. Пусть $A_{\alpha,\beta}$, $A_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{M}$. Рассмотрим оператор

$$A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}} = A_{\alpha,\beta} A_{\alpha',\beta'} : D(A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}) \subset l_p \to l_p, \quad D(A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}) = \Big\{ x \in D(A_{\alpha',\beta'}) : A_{\alpha',\beta'} x \in D(A_{\alpha,\beta}) \Big\}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что $A_{\alpha,\beta} A_{\alpha',\beta'} = A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где

$$\widetilde{\alpha}(n) = \alpha(n)\alpha'(n) + \beta(n)\beta'(-n), \quad \widetilde{\beta}(n) = \alpha(n)\beta'(n) + \beta(n)\alpha'(-n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Замечание 1. Равенства (4) удобнее записывать в виде

$$\widetilde{\alpha} = \alpha\alpha' + \beta J\beta', \quad \widetilde{\beta} = \alpha\beta' + \beta J\alpha'.$$

Лемма 4. *Операторы A_α, A_β и $A_{\alpha,\beta}$ обладают следующими свойствами*:

(1) *если $\beta \in l_+^\infty$ (четная последовательность), то операторы A_β и J коммутируют, т.е. $A_\beta J = J A_\beta$*;

(2) *если α, $\beta \in l_+^\infty$, то операторы A_α и $A_\beta J$ коммутируют*;

(3) *в пространстве l_2 имеем $A^*_{\alpha,\beta} = A_{\overline{\alpha}} + JA_{\overline{\beta}}$*;

(4) *$A_{\alpha,\beta} = A^*_{\alpha,\beta}$ в пространстве l_2, если α, $\beta \in l_+^\infty$, α, $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.*

Для оператора $A_{\alpha,\beta}$ спектр хорошо ищется в явном виде, а также легко можно выписать условие обратимости и найти обратный оператор.

Сначала рассмотрим условия коммутирования двух операторов $A_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}$ и $A_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{M}$, при этом предполагается, что операторы $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'}$ и $A_{\alpha',\beta'}A_{\alpha,\beta}$ определены корректно.

Лемма 5. *Операторы $A_{\alpha,\beta}$ и $A_{\alpha',\beta'}$ коммутируют, если выполнены равенства*

$$\beta'(\alpha - J\alpha) = \beta(\alpha' - J\alpha'), \quad \beta' J\beta = \beta J\beta'. \tag{5}$$

Доказательство. Из (4) следует, что для коммутирования операторов $A_{\alpha,\beta}$ и $A_{\alpha',\beta'}$ должны быть выполнены условия

$$\alpha\alpha' + \beta J\beta' = \alpha\alpha' + \beta' J\beta, \quad \alpha\beta' + \beta J\alpha' = \alpha'\beta + \beta' J\alpha,$$

откуда и получаются равенства (5). □

Для любой последовательности $\alpha \in l^\infty$ введем множество ее нулей $Z(\alpha) = \{n \in \mathbb{Z} : \alpha(n) = 0\}$. В терминах $Z(\alpha)$ мы будем формулировать условие обратимости.

Теорема 1. *Оператор $A_{\alpha,\beta}$ обратим тогда и только тогда, когда*

$$Z(\alpha J\alpha - \beta J\beta) = \varnothing \tag{6}$$

и $\alpha(n)\alpha(-n) - \beta(n)\beta(-n) \geqslant \varepsilon > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обратным к $A_{\alpha,\beta}$ в этом случае является оператор $A^{-1}_{\alpha,\beta} = A_{\alpha',\beta'}$, где

$$\alpha' = J\alpha(\alpha J\alpha - \beta J\beta)^{-1}, \quad \beta' = -\beta(\alpha J\alpha - \beta J\beta)^{-1}, \quad \alpha'(0) = \frac{1}{\alpha(0) + \beta(0)}. \tag{7}$$

Доказательство. Из (4) получим, что для выполнения равенства $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'} = I$ должны выполняться условия

$$\alpha\alpha' + \beta J\beta' = e, \quad \alpha\beta' + \beta J\alpha' = 0,$$

откуда и вытекает условие (6) и формулы (7). Осталось показать, что равенства (5) выполнены, что легко сделать непосредственной подстановкой. Теорема доказана. □

Перейдем к нахождению спектра оператора $A_{\alpha,\beta} : D(A_{\alpha,\beta}) \subset l_2 \to l_2$, α, $\beta \in l^\infty$. Воспользуемся идеями замены, предложенными в [9, 16] для перехода от оператора инволюции к оператору Дирака и в [15] при исследовании интегральных операторов с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов.

Каждой последовательности $x \in l_2$ поставим в соответствие последовательность $\overline{x} \in l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ формулой $\overline{x}(n) = \{x(n), x(-n)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $U : l_2 \to l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$, $Ux = \overline{x}$. Введем оператор $\widetilde{B}_{\alpha,\beta}$, который связан с оператором $A_{\alpha,\beta}$ соотношением $\widetilde{B}_{\alpha,\beta} = UA_{\alpha,\beta}U^{-1}$. Непосредственным подсчетом доказывается следуюий факт.

Лемма 6. *Оператор $A_{\alpha,\beta}$ унитарно эквивалентен оператору $\widetilde{B}_{\alpha,\beta} : l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2) \to l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ вида*

$$(\widetilde{B}_{\alpha,\beta}x)(n) = \begin{pmatrix} \alpha(n) & \beta(n) \\ \beta(-n) & \alpha(-n) \end{pmatrix} \overline{x}(n) = Q(n)\overline{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

Итак,

$$\sigma(\widetilde{B}_{\alpha,\beta}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \sigma(Q(n)),$$

и далее необходимо вычислить собственные значения матриц второго порядка $Q(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, что не составляет труда.

Из представления (8) вытекает следующее утверждение.

Лемма 7. *Спектр оператора $A_{\alpha,\beta}$ есть замыкание множества чисел*

$$\left\{\alpha(0) + \beta(0),\ \frac{\alpha(n) + \alpha(-n) \pm \sqrt{(\alpha(n) + \alpha(-n))^2 - 4\beta(n)\beta(-n)}}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{9}$$

Подчеркнем, что в лемме 7 ограниченность последовательностей α, β не предполагается.

5. О принадлежности ограниченного оператора $A_{\alpha,\beta}$ специальным операторным классам. В предыдущем разделе в явном виде выписан спектр оператора $A_{\alpha,\beta}$, приведено условие его обратимости и получены формулы для последовательностей α', β' у обратного оператора при условии $\alpha, \beta \in l^{\infty}$. В частном, но важном, случае $\alpha, \beta \in l_{\infty}$, иногда не столь существенен явный вид последовательностей α', β', сколь важна принадлежность исходного и обратного операторов специальным операторным классам. Для этого можно применить общие результаты, касающиеся оценок элементов обратных матриц из [1, 2].

Итак, пусть $\alpha, \beta \in l_{\infty}$; тогда $A_{\alpha,\beta} \subset \operatorname{End} l_p$. Опишем классы, ограниченных операторов, опираясь на результаты [1, 2], для чего введем в рассмотрение некоторую последовательность, а также весовые функции.

По каждой матрице $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ построим последовательность $(d_A(n), n \in \mathbb{Z})$, $d_A(n) = \sup\limits_{i-j=n} |a_{ij}|$. Введенная последовательность отвечает за скорость убывания элементов матрицы $\mathcal{A}$ оператора $A \in \operatorname{End} l_p$ на диагоналях, параллельных главной диагонали. Если $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} d_A(n) < \infty$, то оператор $A \in \operatorname{End} l_p$, $p \in [1, \infty)$, отнесем к пространству $\operatorname{End}_1 l_p$ операторов с суммируемыми диагоналями, норма в котором задается формулой

$$\|A\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_A(n).$$

Свойства таких операторов можно найти, например, в [3]. Для исследуемого оператора $A_{\alpha,\beta}$ имеем

$$d_{A_{\alpha,\beta}}(n) = |\beta(n)|, \quad n \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad d_{A_{\alpha,\beta}}(0) = |\alpha(0) + \beta(0)|.$$

Очевидно, что $A_{\alpha,\beta} \in \operatorname{End}_1 l_p$, если $\beta \in l_1$. Введем две функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ и $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ со следующими свойствами:

$$\text{(a)} \quad \lim_{|k|\to\infty} \frac{\ln f(k)}{|k|} = 0, \quad f(k) \geqslant 1,\ k \in \mathbb{Z}, \quad f(m+n) \leqslant f(m)f(n),\ m, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{g(k)} < \infty; \quad \lim_{|k|\to\infty} \frac{\ln g(k)}{|k|} = 0;$$

существует такая постоянная $C(g) > 0$, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{g(k-j)g(j)} \leqslant \frac{C(g)}{g(k)},\ k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{m\to\infty} \sup_{|k|\geqslant 2} \frac{g(k)}{g(mk+j)} = 0,\ m \geqslant 1.$$

Такая функция $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ называется субэкспоненциальным весом.

Из [1, теорема 1] вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in l_{\infty}$ и для последовательности $\beta \in l_{\infty}$ выполнено одно из следующих условий*:

(1) $\beta \in l_1$;

(2) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\beta(k)| f(k) < \infty$;

(3) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\beta(k)| g(k) < \infty$;

(4) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\beta(k)|(1+|k|)^q < \infty$ *для некоторого* $q > 1$;

(5) *для некоторых постоянных* $M = M(A_{\alpha,\beta}) > 0$ *и* $\gamma = \gamma(A_{\alpha,\beta}) \in (0,1)$ *выполняется неравенство* $|\beta(k)| \leqslant M\gamma^{|k|}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Если оператор $A_{\alpha,\beta}$ обратим, то для обратного оператора $B = A_{\alpha,\beta}^{-1}$ также выполнено одно из соответствующих условий:

(1) $B \in \operatorname{End}_1 l_p$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) < \infty$;

(2) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) f(k) < \infty$;

(3) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) g(k) < \infty$;

(4) $\sup_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k)(1+|k|)^q < \infty$ *для некоторого* $q > 1$;

(5) $d_B(k) \leqslant M\gamma^{|k|}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Определение 5 (см. [6])**.** Подалгебра $\mathfrak{B}$ из $\operatorname{End}\mathcal{X}$ с единицей называется наполненной в $\operatorname{End}\mathcal{X}$, если каждый обратимый в $\operatorname{End}\mathcal{X}$ оператор обратим также и вЁ$\mathfrak{B}$.

В частности, $\operatorname{End}_1 l_p$ — наполненная алгебра в $\operatorname{End} l_p$, $1 \leqslant p < \infty$.
Из теоремы 1 вытекает следующий факт.

Лемма 8. *Если* $\alpha, \beta \in l_\infty$, *то* $\mathcal{M}$ — *наполненная подалгебра в* $\operatorname{End} l_p$, $1 \leqslant p < \infty$.

Приведем еще один результат для $A_{\alpha,\beta}$, доказанный в [1].

Теорема 3 (см. [1])**.** *Спектр оператора* $A_{\alpha,\beta}$ *при* $\alpha, \beta \in l_\infty$ *не зависит от* $p \in [1, \infty)$.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha, \beta \in l_\infty$. *Тогда* $\sigma(A_{\alpha,\beta})$, *где* $A_{\alpha,\beta} : l_p \to l_p$, $1 \leqslant p < \infty$, *задается формулой* (9).

Приведем следующую очевидную лемму.

Лемма 9. *Пусть выполнено одно из двух условий*:

(a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (|\alpha(n)|^2 + |\beta(n)|^2) < 1$;

(b) $\|\alpha\|_\infty + \|\beta\|_\infty < 1$.

Тогда оператор $I + A_{\alpha,\beta}$ *обратим в* $\operatorname{End} l_2$ *и*

$$(I + A_{\alpha,\beta})^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (I + A_{\alpha,\beta})^n}{n!}.$$

Далее остановимся на вопросах принадлежности оператора $A_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in l^\infty$, идеалам $\mathfrak{S}_1(l_2)$ и $\mathfrak{S}_2(l_2)$. Напомним, что обычно символом $\mathfrak{S}_2(l_2) \subset \operatorname{End} l_2$ обозначается двусторонний идеал операторов Гильберта—Шмидта с (эквивалентной) нормой $\|X\|_2^2 = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} |x_{ij}|^2$, где оператор $X \in \mathfrak{S}_2(l_2)$ имеет матрицу $X \sim (x_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, относительно стандартного базиса в l_2 (или любого другого ортонормированного базиса в l_2). Через $\mathfrak{S}_1(l_2)$ обозначен двусторонний идеал ядерных операторов и $\operatorname{End} l_2$ с нормой $\|X\|_1 = \operatorname{tr}(X^*X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s_n$, где $(s_n, n \in \mathbb{Z})$ — последовательность s-чисел оператора $X \in \mathfrak{S}_1(l_2)$ и $\operatorname{tr}\zeta$ — след оператора ζ. Таким образом, для принадлежности оператора $A_{\alpha,\beta}$ идеалу $\mathfrak{S}_1(l_2)$ требуется вычислить собственные значения оператора

$$A_{\alpha,\beta}^* A_{\alpha,\beta} = (A_{\overline{\alpha}} + JA_{\overline{\beta}})(A_\alpha + A_\beta J),$$

для чего воспользуемся формулами (4) и леммой 7.

В формулировке следующей теоремы используются последовательности $\delta^+(n), \delta^-(n) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, определяемые формулой:

$$\begin{aligned}\delta^\pm(n) = \Bigg(\frac{1}{2}\Big(&\overline{\alpha}(n)\alpha(n) + \overline{\beta}(-n)\beta(-n) + \overline{\alpha}(-n)\alpha(-n) + \overline{\beta}(n)\beta(n) \pm \\ &\pm \Big(\big(\overline{\alpha}(n)\alpha(n) + \overline{\beta}(-n)\beta(-n) - \overline{\alpha}(-n)\alpha(-n) - \overline{\beta}(n)\beta(n)\big)^2 + \\ &+ 4\big(\overline{\alpha}(n)\beta(n) + \overline{\beta}(-n)\alpha(-n)\big)\big(\overline{\alpha}(-n)\beta(-n) + \overline{\beta}(n)\alpha(n)\big)\Big)^{1/2}\Bigg), \quad (10)\end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. *Пусть выполнено одно из следующих условий*:

(i) *последовательности* α, β *принадлежат* l_2;

(ii) *последовательности* $\delta^+(n)$, $\delta^-(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *принадлежат* l_1;

(iii) *последовательности* α, β *принадлежат подпространству* c_0 *сходящихся к нулю последовательностей.*

Тогда

(1) $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_2(l_2)$;
(2) $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$;
(3) *оператор* $A_{\alpha,\beta}$ *компактен.*

Утверждение последнего, третьего пункта теоремы 4, следует из того, что в этом случае оператор $A_{\alpha,\beta}$ является пределом операторов конечного ранга.

Формула (10) в общем случае довольно громоздкая, но ее можно существенно упростить в ряде частных случаев. Соответствующие результаты сформулируем в виде следствий.

Следствие 2. *Если последовательности* $\alpha, \beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *вещественны, то формула* (10) *принимает вид*

$$\delta^{\pm} = \frac{1}{2}\Big(\alpha^2(n) + \beta^2(-n) + \alpha^2(-n) + \beta^2(n) \pm \\ \pm \Big(\big(\alpha^2(n) + \beta^2(-n) - \alpha^2(-n) - \beta^2(n)\big)^2 + \\ + 4\big(\alpha(n)\beta(n) + \beta(-n)\alpha(-n)\big)^2\Big)^{1/2}\Big).$$

Если $\delta^{\pm} \in l_1$, *то* $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$.

Следствие 3. *Пусть последовательности* α, β *вещественны и четны* (*или нечетны*). *Если* $\delta^{\pm} \in l_1$, *где* $\delta^{\pm} = |\alpha(n) \pm \beta(n)|$, *то* $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$.

Следствие 4. *Пусть вещественные последовательности* α, β *таковы, что одна из них четная, а вторая — нечетная и* $(\alpha^2(n) + \beta^2(n))^{1/2} \in l_1$. *Тогда* $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 17–26.
2. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 1997. — *61*, № 6. — С. 3–26.
3. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О матрицах с суммируемыми диагоналями// 2021. — *194*. — С. 23–37.
4. *Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц// Прикл. мат. физ. — 2020. — *52*, № 2. — С. 71–85.
5. *Бройтигам И. Н., Поляков Д. М.* Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц// Уфим. мат. ж. — 2019. — *11*, № 3. — С. 10–29.
6. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. — М.: Мир, 1972.
7. *Бурлуцкая М. Ш.* Вопросы спектральной теории для операторов с инволюцией и приложения. — Воронеж: Научная книга, 2020.
8. *Бурлуцкая М. Ш.* Некоторые свойства функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ и их приложения// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 5. — С. 89–97.
9. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией// Докл. РАН. — 2007. — *414*, № 4. — С. 443–446.
10. *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией// Докл. РАН. — 2019. — *484*, № 1. — С. 12–17.
11. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах одной трехдиагональной бесконечной матрицы// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *199*. — С. 31–42.
12. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах одного разностного оператора с инволюцией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *208*. — С. 15–23.
13. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
14. *Крицков Л. В., Сарсенби А. М.* Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 35–48.

15. *Пальчиков А. Н.* Спектральный анализ интегральных операторов с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов// Изв. вузов. Мат. — 1990. — № 3. — С. 80–83.
16. *Хромов А. П., Кувардина Л. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией// Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 5. — С. 67–76.
17. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *477*, № 2. — P. 930–960.
18. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// Eurasian Math. J. — 2020. — *11*, № 2. — P. 30–39.
19. *Boutet de Monvel A., Zielinski L.* Approximation of eigenvalues for unbounded Jacobi matrices using finite submatrices// Cent. Eur. J. Math. — 2014. — *12*, № 3. — P. 445–463.
20. *Malejki M.* Eigenvalues for some complex infinite matrices// J. Adv. Math. Comp. Sci. — 2018. — *26*, № 5. — P. 1–9.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский государственный университет
E-mail: `anatbaskakov@yandex.ru`

Гаркавенко Галина Валериевна
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: `gala_69@mail.ru`

Ускова Наталья Борисовна
Воронежский государственный технический университет
E-mail: `nat-uskova@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 22–32
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-22-32

УДК 519.6

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. **С. Г. БУЛАНОВ**

Аннотация. Разработан подход к анализу устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на условиях устойчивости в мультипликативной форме. При дополнительных ограничениях получены разновидности условий устойчивости на основе поведения правой части системы.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE STABILITY OF SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 **S. G. BULANOV**

Abstract. In this paper, we develop an approach to the analysis of the Lyapunov stability for systems of ordinary differential equations based on stability conditions in the multiplicative form. Under additional restrictions, various versions of stability conditions are obtained based on the behavior of the right-hand side of the system.

Keywords and phrases: Lyapunov stability, computer analysis of stability, numerical modeling of stability.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Исследование устойчивости по Ляпунову составляет актуальное направление в качественной теории дифференциальных уравнений. Хорошо известна возможность приложений этой теории в механике, физике, теории автоматического регулирования, теории сложных систем, теории управления, в радиоэлектронике и в других областях теоретических и прикладных исследований. Для технических приложений представляется важным обеспечить возможность компьютерного моделирования и компьютерного анализа устойчивости в режиме оперативного контроля за протеканием моделируемого физического процесса (см. [4]). В частности, такая задача возникает при моделировании энергетических систем большой мощности (см. [5]). Использование компьютерной техники для данного анализа целесообразно для ряда технологических, физических, механических, производственных и других процессов (см. [1, 6]).

В статье представлен подход, разрабатываемый с целью автоматизировать анализ устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В основе подхода лежат условия устойчивости, полученные первоначально на основе преобразования разностных схем численного интегрирования. Далее конструируются разновидности условий в аддитивной и интегральной форме, приводится схема анализа устойчивости на основе сравнения подынтегральных функций. При выполнении дополнительных ограничений с помощью условий в интегральной форме строятся условия устойчивости на основе поведения правой части системы и ее производных.

2. Условия устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$V' = U(t, V), \quad V_0 = V(t_0), \quad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

которая имеет нулевое решение. Предполагается, что существует такое $\delta > 0$, что в области

$$R = \Big\{ t_0 \leqslant t < \infty; \ \forall \tilde{V}(t), V(t) : \big\| \tilde{V}_0 - V_0 \big\| \leqslant \delta \Big\}$$

выполнены все условия существования и единственности решения системы (1). Вектор-функция $U(t, V)$ определена, непрерывна в R и удовлетворяет условию Липшица:

$$\big\| U(t, \tilde{V}) - U(t, V) \big\| \leqslant L \big\| \tilde{V}(t) - V(t) \big\| \quad \forall \tilde{V}(t), V(t) \in R, \quad L = \mathrm{const}\,.$$

Требуется исследовать на устойчивость в смысле Ляпунова (см. [12]) решение системы (1).

2.1. Условия устойчивости в мультипликативной форме. Величина возмущения решения задачи (1) методом Эйлера в форме с остаточным членом на произвольном промежутке $[t_0, t]$ определяется из соотношения

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \tilde{v}_{ki} - v_{ki} + h \frac{u_k(t_i, \tilde{V}_i) - u_k(t_i, V_i)}{\tilde{v}_{ki} - v_{ki}} (\tilde{v}_{ki} - v_{ki}) + w_{ki},$$

или

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \big(1 + h D_i^{(k)}\big)(\tilde{v}_{ki} - v_{ki}) + w_{ki}, \quad k \in \overline{1, n}, \tag{2}$$

где

$$D_i^{(k)} = \frac{u_k(t_i, \tilde{V}_i) - u_k(t_i, V_i)}{\tilde{v}_{ki} - v_{ki}}, \quad t = t_{i+1}, \quad h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i + 1}, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Рекуррентное преобразование (2) влечет выражение для возмущения на текущем шаге через возмущение начальных данных:

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^{i} \big(1 + h D_{i-\ell}^{(k)}\big)(\tilde{v}_{k0} - v_{k0}) + R_i^{(k)}, \quad k \in \overline{1, n},$$

$$R_i^{(k)} = \sum_{r=0}^{i-1} \prod_{\ell=0}^{r} \big(1 + h D_{i-\ell}^{(k)}\big) w_{k(i-r-1)} + w_{ki}.$$

В рассматриваемых условиях

$$\lim_{i \to \infty} R_i^{(k)} = 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \ \forall k \in \overline{1, n}$$

(см. [7, 8]). Отсюда следует

$$\tilde{v}_k(t) - v_k(t) = \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} \big(1 + h D_{i-\ell}^{(k)}\big)\big(\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)\big) \quad \forall t \in [t_0, \infty), \ \forall k \in \overline{1, n}. \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует, что величина возмущения равна бесконечному произведению, умноженному на возмущение начальных данных. Следовательно, для устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно существование такого Δ_1, $0 < \Delta_1 \leqslant \delta$, что для любой функции $\tilde{V}(t)$, удовлетворяющей условию $\tilde{V}(t_0) = \tilde{V}_0$, где $\|\tilde{V}_0 - V_0\| \leqslant \Delta_1$, выполняется неравенство

$$\left| \lim_{i \to \infty} \prod_{\ell=0}^{i} \big(1 + h D_{i-\ell}^{(k)}\big) \right| \leqslant c_1, \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \ \forall k \in \overline{1, n}. \tag{4}$$

Для асимптотической устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_2 \leqslant \Delta_1$, что условие $\|\tilde{V}_0 - V_0\| \leqslant \Delta_2$ влечет

$$\lim_{t\to\infty}\left|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\bigl(1+hD_{i-\ell}^{(k)}\bigr)\right| = 0 \quad \forall k\in\overline{1,n}. \tag{5}$$

Практическая значимость условий (4), (5) заключается в возможности выполнять анализ устойчивости нелинейной системы ОДУ без представления решения в аналитической форме, непосредственно по значениям разностных приближений. Мультипликативная форма выражений под знаком предела позволяет выполнить программную реализацию условий (4), (5) и осуществить компьютерный анализ устойчивости систем нелинейных ОДУ. Предложенный подход можно использовать для анализа устойчивости систем линейных ОДУ с переменной и постоянной матрицей коэффициентов, систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой (см. [2]). При компьютерном анализе устойчивости систем линейных ОДУ на основе предложенного подхода не требуется находить приближенное решение системы, достаточно на вход программы подать матрицу из правой части системы.

Соотношение (3) эквивалентно

$$\frac{\tilde{v}_k(t)-v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0)-v_k(t_0)} = \lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\bigl(1+hD_{i-\ell}^{(k)}\bigr) \quad \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n}.$$

Следовательно, имеют место следующие разновидности условий устойчивости и асимптотической устойчивости решения системы (1):

$$\left|\frac{\tilde{v}_k(t)-v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0)-v_k(t_0)}\right| \leqslant c_1, \quad c_1=\mathrm{const}, \quad \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n},$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde{v}_k(t)-v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0)-v_k(t_0)}\right| = 0 \quad \forall k\in\overline{1,n}.$$

Для анализа устойчивости на основе полученных условий целесообразно вычисление возмущенного и невозмущенного решения с более высокой точностью, чем на основе разностных методов (см. [7]). С этой целью используется метод варьируемого кусочно-полиномиального приближения решения задачи Коши для ОДУ (см. [3]). При этом в качестве приближающего полинома используется полином Лагранжа, преобразованный описанным ниже способом (см. [13]).

В формуле полинома Лагранжа

$$\Psi_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j)\left[\prod_{\substack{r=0\\r\neq j}}^{n_0}(t-t_r)\Big/\prod_{\substack{r=0\\r\neq j}}^{n_0}(t_j-t_r)\right]$$

выполним следующие преобразования. Пусть $(t-t_0)/h = x$, $t_j = t_0 + jh$; тогда

$$\prod_{\substack{r=0\\r\neq j}}^{n_0}(t-t_r) = \prod_{\substack{r=0\\r\neq j}}^{n_0}(x-r)h, \quad \prod_{\substack{r=0\\r\neq j}}^{n_0}(t_j-t_r) = \prod_{\substack{r=0\\r\neq j}}^{n_0}(j-r)h.$$

В результате

$$\Psi_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j)\,\frac{P_{n_0 j}(x)}{G_{n_0 j}(j)},$$

где

$$P_{n_0 j}(x) = \prod_{r=0}^{n_0-1}(x-x_r), \quad G_{n_0 j}(j) = \prod_{r=0}^{n_0-1}(j-x_r), \quad x_r = \begin{cases} r, & r<j;\\ r+1, & r\geqslant j.\end{cases}$$

Переменную $P_{n_0 j}(x)$ можно представить в виде полинома

$$P_{n_0 j}(x) = d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + \cdots + d_{n_0 j}x^{n_0};$$

аналогично, $G_{n_0j}(j)$ преобразуется к виду

$$G_{n_0j}(j) = d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + \cdots + d_{n_0j}j^{n_0} \quad \text{или} \quad G_{n_0j}(j) = (-1)^{n_0-j}\, j!\,(n_0-j)!.$$

Таким образом,

$$\Psi_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j)\,\frac{d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + \cdots + d_{n_0j}x^{n_0}}{d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + \cdots + d_{n_0j}j^{n_0}}. \tag{6}$$

Из соотношения (6) следует, что полином Лагранжа всегда можно представить в виде

$$\Psi_{n_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{n_0} a_\ell x^\ell, \quad \text{где} \quad a_\ell = \sum_{j=0}^{n_0} \frac{f(t_j)d_{\ell j}}{G_{n_0j}(j)}, \quad x = \frac{t-t_0}{h}.$$

Приближение решения и правой части (1) на $[a,b] = \bigcup\limits_{i=0}^{R-1}[a_i,b_i]$ сводится к последовательному приближению на подынтервалах

$$[a_i,b_i] = \bigcup_{j=0}^{P-1}[t_j,t_{j+1}], \quad P = 2^{k_0}, \quad k_0 = \{0,1,\ldots\}. \tag{7}$$

При каждом $i \geqslant 1$ полагаем $\tilde v_k(a_i) = \tilde v_{k-1}(b_{i-1})$, $\tilde v_k(a_0) = \tilde v_0$ и на каждом подынтервале из (7) строим кусочно полиномиальное приближение функции правой части (1). Количество подынтервалов $P = 2^{k_0}$ и степень интерполяционного полинома n_0 выбираются так, чтобы было минимальным значение

$$\delta_{kij}(t) = \Big|\psi_{kjn_0}(t) - u_k\big(t, z_{1j}(t),\ldots,z_{nj}(t)\big)\Big|, \quad t\in[t_j,t_{j+1}], \quad j=\overline{0,P-1}, \quad k\in\overline{1,n},$$

где $\psi_{kjn_0}(t) \approx u_k(t,\tilde v_1,\ldots,\tilde v_n)$,

$$z_{kj}(t) = \tilde v_{kj} + \int\limits_{t_j}^{t}\psi_{kjn_0}(t)dt$$

— полином с числовыми коэффициентами, приближающий искомое решение. При этом значения в узлах интерполяции на каждом подынтервале априори вычисляются по методу Эйлера с излагаемыми ниже особенностями.

При каждом j подынтервал $[t_j,t_{j+1}]$ из (7) разобьем на n_0 равноотстоящих узлов с шагом h_0:

$$t_{jp} = t_j + ph_0, \quad p=\overline{0,n_0}, \quad h_0 = \frac{t_{j+1}-t_j}{n_0}. \tag{8}$$

В каждом из узлов (8) вычислим значения $u_k(t_{jp},\bar v_{1jp},\ldots,\bar v_{njp})$, где $\bar v_{kjp}$ определяется по методу Эйлера:

$$\bar v_{kjp} = \bar v_{kj(p-1)} + h_0\cdot u_k\big(t_{j(p-1)},\bar v_{1j(p-1)},\ldots,\bar v_{nj(p-1)}\big), \quad p=\overline{0,n_0}, \quad k\in\overline{1,n}. \tag{9}$$

При этом в качестве $\bar v_{j0}$ берется значение на границе справа из окончательного приближения на предыдущем подынтервале: $\bar v_{kj0} = \bar v_{k(j-1)n0}$, для начального подынтервала из (7) $\bar v_{k00} = \tilde v_{k0}$. При этом значения в (9) можно получить и на основе разностных методов высокого порядка. Значения $u_k(t_{jp},\bar v_{1jp},\ldots,\bar v_{njp})$ принимаются за значения в узлах интерполяции:

$$\varphi_{kjp} = u_k\big(t_{jp},\bar v_{1jp},\ldots,\bar v_{njp}\big), \quad p=\overline{0,n_0}, \quad k\in\overline{1,n}. \tag{10}$$

Аналогично, всюду ниже через $\bar v$ будем обозначать вычисляемое приближение точного решения $\tilde v$. По условиям интерполяции (10) строим полином Лагранжа степени n_0, который приводится к виду

$$\psi_{kjn_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{n_0} a_{kj\ell}\left(\frac{t-t_{j0}}{h_0}\right)^\ell, \quad a_{kj\ell} = \sum_{p=0}^{n_0}\frac{\varphi_{kjp}d_{\ell p}}{G_{n_0p}}. \tag{11}$$

Полином (11) приближает производную решения задачи (1). Приближение самого решения строится как первообразная от (11) с постоянной, принимающей значение $\bar{v}_{kj0}$. Семейство первообразных от полинома $\psi_{kjn_0}(t)$ на j-м подынтервале имеет вид

$$\int \psi_{kjn_0}(x)dx = C + h\sum_{\ell=0}^{n_0} \frac{a_{kj\ell}}{\ell+1}x^{\ell+1}.$$

Фиксация значения нижнего предела в правой части и замена константы C на $\bar{v}_{kj0}$ определяет функцию

$$z_{kj}(t) = \bar{v}_{kj0} + \int\limits_{t_{j0}}^{t} \psi_{kjn_0}(t)dt$$

или

$$z_{kj}(t) = \bar{v}_{kj0} + h_0\sum_{\ell=0}^{n_0} \frac{a_{kj\ell}}{\ell+1}\left(\frac{t-t_{j0}}{h_0}\right)^{\ell+1}. \tag{12}$$

Полином (12) принимается за приближение решения $\tilde{v}_k(t)$ на j-м подынтервале: $\tilde{v}_k(t) \approx z_{kj}(t)$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Вычисление значений полинома (12) производится по схеме Горнера при $x = (t - t_{j0})/h_0$:

$$z_{kj}(x) = \bar{v}_{kj0} + h\left(\ldots\left(\left(\frac{a_{kjn_0}}{n_0+1}x + \frac{a_{kj(n_0-1)}}{n_0}\right)x + \frac{a_{kj(n_0-2)}}{n_0-1}\right)x + \ldots + a_{kj0}\right)x.$$

Значения $\bar{v}_{kjp} = z_{kj}(t_{jp})$, $p = \overline{1, n_0}$, из (12) в процессе компьютерной реализации оказываются более точными приближениями решения, чем получаемые непосредственно с помощью разностного метода. Эти значения целесообразно принять за новые уточненные значения в интерполяционных узлах для последующего интерполирования. Данный рекуррентный процесс позволяет существенно уточнить полученные приближения.

Аналогичное приближение строится на следующем подынтервале и т. д., до исчерпания интервала $[a_i, b_i]$. Полученное приближение по построению является непрерывным и непрерывно дифференцируемым на всем отрезке интегрирования. Также одновременно с приближением решения имеет место непрерывное на всем рассматриваемом интервале приближение производной от решения.

2.2. Условия устойчивости в аддитивной и интегральной форме. Далее приводится вывод условий устойчивости нулевого решения системы (1), при этом на ненулевое решение и его производную не ставится знак волны.

Для получения условий устойчивости системы (1) в аддитивной форме выполним следующее преобразование соотношения (3)

$$v_k(t) = \exp\left(\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} \ln\left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right)\right)v_k(t_0) \quad \forall k \in \overline{1,n}, \quad D_{i-\ell}^{(k)} = \frac{u_k(t_{i-\ell}, V_{i-\ell})}{v_{k(i-\ell)}}.$$

С учетом того, что $hD_{i-\ell}^{(k)}$ — бесконечно малая, и соотношения

$$\frac{\ln\left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right)}{hD_{i-\ell}^{(k)}} \to 1 \quad \forall \ell \leqslant i, \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

получим аддитивную форму условий устойчивости нулевого решения системы (1):

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} hD_{i-\ell}^{(k)} \leqslant c_2, \quad c_2 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}, \quad \lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} hD_{i-\ell}^{(k)} = -\infty.$$

Выражение в левой части аддитивных условий — предел интегральной суммы на $[t_0, t]$ элементами которой являются дискретные функции

$$D^{(k)}(t) = \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}, \quad k \in \overline{1,n}.$$

Следовательно, выражения аддитивных условий включают определенные интегралы, и условия можно сформулировать в интегральной форме:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \leqslant c_2, \quad c_2 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}, \tag{13}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt = -\infty \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{14}$$

Числитель переменной дроби $D^{(k)}(t)$ является производной возмущения решения и делится на само возмущение, поэтому существует первообразная

$$\int\limits_{t_0}^{t} D^{(k)}(t) dt = \ln\left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right|.$$

Соответственно условия (13) (14) примут следующий вид:

$$\ln\left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right| \leqslant c_2, \quad c_2 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

$$\lim_{t\to\infty} \ln\left|\frac{v_k(t)}{v_k(t_0)}\right| = -\infty \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

2.3. Схема анализа устойчивости на основе сравнения подынтегральных функций.

Лемма 1. *Рассмотрим систему* (1)*, где* $t_0 > 0$ *и* $v_k(t) \neq 0$ *при всех* $t \in [t_0, \infty)$ *и всех* $k \in \overline{1,n}$*. Если для любого* $\Delta_1 > 0$ *найдется такое* V_0*, что* $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_1$*, а также существуют* $k \in \overline{1,n}$ *и* $\rho > 0$*,* $\rho = \text{const}$*, при которых* $u_k/v_k \geqslant \rho/t$ *при всех* $t \in [t_0, \infty)$*, то нулевое решение системы* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. В сколь угодно малой окрестности нулевого начального вектора выполняется неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \geqslant \rho \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{t} dt = \rho \ln\frac{t}{t_0},$$

поэтому для произвольного $N > 0$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt > N,$$

если $t > t_0 e^{N/\rho}$, что противоречит (13). □

Лемма 2. *В условиях леммы* 1*, если существуют постоянные* $\alpha > -1$ *и* $\rho > 0$*, при которых* $u_k/v_k \geqslant \rho t^\alpha$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$*, то нулевое решение системы* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. В сколь угодно малой окрестности нулевого начального вектора имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \geqslant \rho \int\limits_{t_0}^{t} t^\alpha dt = \frac{\rho}{\alpha+1}(t^{\alpha+1} - t_0^{\alpha+1}) \to \infty \quad \text{при } t \to \infty$$

вопреки (13). □

Лемма 3. *Если в условиях леммы 1 существует такое $\Delta_1 > 0$, что для всех решений $V(t)$ с начальным вектором V_0, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_1$, при некоторых постоянных $\beta < -1$, ρ и $t_0 > 0$ неравенства $u_k/v_k \leqslant \rho t^\beta$ выполняются для всех $t \in [t_0, \infty)$ и всех $k = 1, 2, \dots, n$, то нулевое решение системы (1) устойчиво.*

Доказательство. В данных условиях $\beta + 1 < 0$ и $t^{\beta+1} \leqslant t_0^{\beta+1}$, поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t} t^\beta dt = \frac{1}{\beta+1}(t^{\beta+1} - t_0^{\beta+1}) \leqslant \frac{t_0^{\beta+1}}{|\beta+1|}.$$

Для всех решений $V(t)$, для которых $0 < \|V(t_0)\| \leqslant \Delta_1$, верны неравенства

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \leqslant \rho \int\limits_{t_0}^{t} t^\beta dt \leqslant \frac{\rho t_0^{\beta+1}}{|\beta+1|},$$

и (13) выполнено при $c_2 = \rho t_0^{\beta+1}/|\beta+1| = \mathrm{const}$. □

Из лемм 1–3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $t_0 > 0$ и для произвольного $t > t_0$ при каждом $k \in \overline{1,n}$ функции $f_k(t)$, $g_k(t)$ интегрируемы на $[t_0, t]$. Если в рассматриваемых условиях существует такое $\Delta_1 > 0$, что для всех решений $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V(t_0)\| \leqslant \Delta_1$, выполняются неравенства*

$$\frac{u_k}{v_k} \leqslant f_k(t), \quad \int\limits_{t_0}^{t} f_k(t) dt \leqslant c_2, \quad c_2 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

то нулевое решение системы (1) устойчиво. Если для любого $\Delta_1 > 0$ существует такое $V(t)$, удовлетворяющее условию $0 < \|V(t_0)\| \leqslant \Delta_1$, что $u_k/v_k \geqslant g_k(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$ при некотором $k \in \overline{1,n}$, причем

$$\int\limits_{t_0}^{t} g_k(t) dt \to \infty \quad \textit{при } t \to \infty,$$

то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Если $u_k/v_k \leqslant f_k(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$ и всех $k = 1, 2, \dots, n$, то при тех же t и k выполнено неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} f_k(t) dt \leqslant c_2, \quad c_2 = \mathrm{const}\,.$$

С учетом условия и соотношения (13) это неравенство означает устойчивость нулевого решения. Если $u_k/v_k \geqslant g_k(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, то

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \geqslant \int\limits_{t_0}^{t} g_k(t) dt \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \to \infty \quad \text{при } t \to \infty,$$

что противоречит (13). □

Следствие 1. *В тех же условиях нулевое решение системы (1) устойчиво, если $u_k/v_k \leqslant t^\beta$ для всех $t \in [t_0, \infty)$ и всех $k = 1, 2, \dots, n$ при некотором $\beta < -1$, и неустойчиво, если хотя бы при одном k неравенство $u_k/v_k \geqslant t^\beta$ выполнено для всех $t \in [t_0, \infty)$, где $\beta \geqslant -1$.*

Теорема 2. *Если выполнено условие устойчивости теоремы 1 и существует такое Δ_2, $0 < \Delta_2 \leqslant \Delta_1$, что для всех решений $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V(t_0)\| \leqslant \Delta_2$, неравенство $u_k/v_k \leqslant f_k(t)$ верно для всех $t \in [t_0, \infty)$ и при этом*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} f_k(t)dt = -\infty \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. В частности, это справедливо, если при тех же k и t для некоторых постоянных $\beta \geqslant -1$ и $\rho > 0$ выполняется неравенство $u_k/v_k \leqslant -\rho t^{\beta}$.

Доказательство. В условиях теоремы для всех $N > 0$ выполнены неравенства

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} f_k(t)dt \leqslant -N \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

Переходя к пределу в неравенстве при $N \to \infty$, получим

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}dt = -\infty,$$

что с учетом условий и соотношения (14) означает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1). В случае $\beta \geqslant -1$, $\rho > 0$ имеем

$$-\rho \int\limits_{t_0}^{t} t^{\beta}dt \to -\infty \quad \text{при } t \to \infty,$$

и в данных условиях неравенство $u_k/v_k \leqslant -\rho t^{\beta}$ влечет асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1). □

Представленную схему анализа устойчивости на основе сравнения подынтегральных функций можно использовать для априорного и апостериорного анализа устойчивости, если известно аналитическое решение в окрестности начального вектора (см. [8]).

2.4. Условия устойчивости по характеру поведения правой части системы. Ниже дополнительно предполагается существование и непрерывность в R второй производной решения системы (1) и выполнение для $U'(t, V)$ условия Липшица. Кроме того, предполагается что существует такое $\Delta_3 \leqslant \delta$, что для каждого $V(t)$, удовлетворяющего условию $\|V_0\| \leqslant \Delta_3$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}dt \leqslant c_3 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u'_k(t,V)}{u_k(t,V)}dt, \quad c_3 = \text{const}, \quad c_3 > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n} \tag{15}$$

(см. [9]), или следующее неравенство, из которого следует (15):

$$\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} \leqslant c_4 \frac{u'_k(t,V)}{u_k(t,V)}, \quad c_4 = \text{const}, \quad c_4 > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{16}$$

При выполнении данных ограничений и неравенства (15) или (16) для устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно существование такого Δ_4, $0 < \Delta_4 \leqslant \delta$, что для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $\|V_0\| \leqslant \Delta_4$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u'_k(t,V)}{u_k(t,V)}dt \leqslant c_5, \quad c_5 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{17}$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_5 \leqslant \Delta_4$, что неравенство $\|V_0\| \leqslant \Delta_5$ влечет

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k'(t,V)}{u_k(t,V)} dt = -\infty. \tag{18}$$

Условия устойчивости (17), (18) можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Для устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно существование такого Δ_4, $0 < \Delta_4 \leqslant \delta$, что для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_4$, выполняется соотношение

$$\left|\frac{u_k(t,V)}{u_k(t_0,V_0)}\right| \leqslant c_6, \quad c_6 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad u_k(t_0,V_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{19}$$

Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_5 \leqslant \Delta_4$, что условие $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_5$ влечет

$$\lim_{t\to\infty} \left|\frac{u_k(t,V)}{u_k(t_0,V_0)}\right| = 0, \quad u_k(t_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{20}$$

Если для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_6$, дополнительно потребовать выполнение неравенства

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k'(t,V)}{u_k(t,V)} dt - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt\right| \leqslant c_0, \quad c_0 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad \forall k \in \overline{1,n} \tag{21}$$

то условия (17) – (20) будут необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости.

Неравенство (21) преобразуется к виду

$$e^{-c_0} \leqslant \left|\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}\right| \Big/ \left|\frac{u_k(t_0,V_0)}{v_k(t_0)}\right| \leqslant e^{c_0}, \quad c_0 > 0, \quad c_0 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{22}$$

Выполнение соотношения (22) при $u_k(t,V) \to 0$ возможно только если $v_k(t) \to 0$, иначе не выполнится левое неравенство в (22), а если $v_k(t) \to 0$, то необходимо $u_k(t,V) \to 0$, иначе нарушится правое неравенство.

Предложенный подход допускает конструировать условия устойчивости для производных правой части системы (1) произвольного порядка $\ell \geqslant 2$, если эти производные существуют (см. [10]). В этом случае условия устойчивости и асимптотической устойчивости примут вид

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k^{(\ell)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t,V)} dt \leqslant c_7, \quad c_7 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $\|V_0\| \leqslant \Delta_4$, и

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k^{(\ell)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t,V)} dt = -\infty \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $\|V_0\| \leqslant \Delta_5$.

Полученные условия будут необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости при ограничении

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k^{(\ell)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t,V)} dt - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt\right| \leqslant c_0, \quad c_0 = \text{const},$$

для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_6$. При этом дополнительно потребуется выполнение для $U^{(\ell-1)}(t,V)$ условия Липшица.

При переходе к первообразным условия устойчивости и асимптотической устойчивости примут следующий вид:

$$\left|\frac{u_k^{(\ell-1)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0)}\right| \leqslant c_8, \quad c_8 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{u_k^{(\ell-1)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0)}\right| = 0, \quad u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0) \neq 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

Для компьютерной реализации условий устойчивости достаточно с высокой точностью находить приближенное решение системы, правой части системы вместе с производными требуемого порядка. Повышение точности разностного приближения решения и его производных, входящих в конструкцию условий, особенно необходимо при анализе устойчивости жестких систем ОДУ. В этом случае можно воспользоваться методами, представленными в [11] или методом варьируемого кусочно полиномиального приближения решения (см. [3]). Требуемые приближения находятся на основе кусочно-полиномиальной аппроксимации интерполяционными полиномами Лагранжа, преобразованными к форме полинома с числовыми коэффициентами. Компьютерная аппроксимация подынтегральных функций повышает точность вычисления интеграла. В результате повышается точность вычисления выражений в конструкции условий, как следствие повышается достоверность анализа устойчивости. Далее через заданный интервал времени вычисляется значение из левой части условия устойчивости. По характеру поведения этих значений делается вывод о характере устойчивости исследуемой системы. Ограниченное изменение соответствует устойчивости, стремление к нулю свидетельствует об асимптотической устойчивости, неограниченный рост является признаком неустойчивости решения системы ОДУ.

Для анализа устойчивости систем нелинейных ОДУ наряду с данным методом целесообразно применять методы описанные в [14, 15]. Эти методы, основанные на построении функций Ляпунова, предполагают аналитическое применение, в отдельных разновидностях допускают компьютерную реализацию.

3. Заключение. Представлен подход к анализу устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Основой служат условия устойчивости, полученные на основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования. Условия получены в мультипликативной, аддитивной и интегральной формах в виде необходимых и достаточных условий. Условия в интегральной форме допускают использование схемы анализа устойчивости на основе сравнения подынтегральных функций. Кроме этого в границах дополнительных ограничений представлены необходимые и достаточные условия устойчивости на основе поведения правой части системы ОДУ. Представлены ограничения, при которых получены условия устойчивости, выполнено их математическое обоснование.

Полученные условия устойчивости отличаются от известных построением на основе разностных схем. Для случая систем линейных ОДУ подход принципиально не использует преобразований правой части системы (см. [2]). В случае постоянной матрицы коэффициентов не требуется вычисления корней характеристического многочлена, при переменной матрице коэффициентов не нужно нахождение характеристических показателей. При выводе условий устойчивости для нелинейных систем не используются методы качественной теории дифференциальных уравнений. Предложенный подход допускает линеаризацию нелинейной системы, которая связана непосредственно с исследуемым решением. В этом случае подход опирается на предположение, что устойчивость решения системы общего вида эквивалентна устойчивости линеаризованной системы в достаточно малой окрестности возмущения начальных данных (см. [13]).

Помимо построения, отличие достигается в программируемости условий устойчивости для систем ОДУ в общем случае. Компьютерный анализ, исходя из необходимых и достаточных условий, должен позволить однозначно определить характер устойчивости, неустойчивости либо асимптотической устойчивости систем ОДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоглазов В. В., Бирюк Н. Д., Глухов И. Л.* Численный анализ устойчивости параметрического контура первым методом Ляпунова// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2012. — № 1. — С. 13–20.
2. *Буланов С. Г.* Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем// Мехатрон. Автомат. Управл. — 2019. — *20*, № 9. — С. 542–549.
3. *Джанунц Г. А., Ромм Я. Е.* Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 10. — С. 1641–1660.
4. *Куликов Л. И.* Синтез автоматического управления посадкой БЛА самолетного типа и анализ устойчивости желаемых режимов движения// Фундам. прикл. мат. — 2018. — № 2. — С. 209–220.
5. *Орлов А. И., Волков С. В.* Анализ устойчивости синхронных генераторов, оснащенных устройством автоматического регулирования возбуждения// Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. — 2017. — *21*, № 1. — С. 120–128.
6. *Поляк Б. Т., Кузнецов О. Н., Чумаченко В. В.* Исследование устойчивости энергосистемы с однополярным магнитным тормозом// Автомат. телемех. — 2016. — № 9. — С. 58–69.
7. *Ромм Я. Е., Буланов С. Г.* Численное моделирование устойчивости по Ляпунову// Совр. наукоем. технол. — 2021. — № 7. — С. 42–60.
8. *Ромм Я. Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений// Киберн. сист. анал. — 2015. — *51*, № 3. — С. 107–124.
9. *Ромм Я. Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости по знакам компонентов решения дифференциальной системы и их двух производных// Совр. наукоем. технол. — 2021. — № 9. — С. 100–124.
10. *Ромм Я. Е.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости по Ляпунову// Совр. наукоем. технол. — 2022. — № 2. — С. 92–109.
11. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.
12. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.
13. *Bulanov S. G.* Computer analysis of differential systems stability based on linearization and matrix multiplicative criteria// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1902*. — 012101.
14. *Hafstein S.* A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations// Dynam. Syst. — 2005. — *20*. — P. 281–299.
15. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations// J. Appl. Math. Comput. — 2008. — *202*, № 1. — P. 44–53.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Буланов Сергей Георгиевич
Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО
«Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»
E-mail: `bulanovtgpi@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 33–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-33-36

УДК 519.175.3

НОВЫЕ ТОЖДЕСТВА ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ГРАФОВ

© 2023 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. Три новых комбинаторных тождества связаны с перечислением помеченных связных графов с заданным числом концевых вершин. Дано доказательство этих тождеств, не зависящее от перечисления графов. Для одного из тождеств намечен ход доказательства с помощью формул для перечисления графов.

Ключевые слова: комбинаторное тождество, перечисление, помеченный граф, связный граф, концевая вершина, унициклический граф.

NEW IDENTITIES FROM ENUMERATION OF GRAPHS

© 2023 **V. A. VOBLYI**

Abstract. In this paper, three new combinatorial identities related to the enumeration of labeled connected graphs with a given number of endpoints are presented. We give a proof of these identities independent of the enumeration of graphs. For one of the identities, a course of the proof based on formulas for enumerating graphs is outlined.

Keywords and phrases: combinatorial identity, enumeration, labeled graph, connected graph, endpoint, unicyclic graph.

AMS Subject Classification: 05C30

Комбинаторные тождества часто возникают при перечислении графов (см. [2–4]). Из формул перечисления помеченных связных графов с заданным числом концевых вершин (см. [1, 9, 10]) следует несколько новых тождеств. В статье приведены доказательства трех таких тождеств, не зависящие от перечисления графов. Для одного из тождеств намечен ход доказательства с помощью формул для перечисления графов.

Теорема 1. *При $n \geqslant 3$ верно комбинаторное тождесто*

$$\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-i}(-1)^i\frac{(n-i)^{n-j-1}}{i!(n-i-j)!}=\frac{1}{n}. \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим левую часть тождества (1) через $L_1(n)$. После замены индекса суммирования во внешней сумме $s=n-i$, $i=n-s$ имеем

$$L_1(n)=\sum_{s=3}^{n}\sum_{j=3}^{s}(-1)^{n-s-1}\frac{s^{n-j-1}}{(n-s-1)!(s-j)!}.$$

Изменим теперь порядок суммирования в двойной сумме:

$$L_1(n)=\sum_{j=3}^{n}\sum_{s=j}^{n}(-1)^{n-s}\frac{s^{n-j-1}}{(n-s)!(s-j)!}.$$

После замены индекса суммирования во внутренней сумме $p = s - j$, $s = p + j$ и ввода биномиального коэффициента получим

$$L_1(n) = \sum_{j=3}^{n} \frac{1}{(n-j)!} \sum_{p=0}^{n-j} (-1)^{n-j-p} \binom{n-j}{p} (p+j)^{n-j-1}.$$

Используем известное комбинаторное тождество (см. [7, с. 609, формула 15])

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} (p+a)^q = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, m-1, \quad m \geqslant 1.$$

В нашем случае найдем

$$L_1(n) = \frac{1}{n} + \sum_{j=3}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} \sum_{p=0}^{n-j} (-1)^{n-j-p} \binom{n-j}{p} (p+j)^{n-j-1} = \frac{1}{n} + \sum_{j=3}^{n-1} 0 = \frac{1}{n}. \qquad \square$$

Теорема 2. *При $n \geqslant 4$ верно комбинаторное тождесто*

$$\sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=3}^{n-i} (-1)^{i-1} \frac{(n-i)^{n-j-1}}{(i-1)!(n-i-j)!} = n - 3\,. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим левую часть тождества (2) через $L_2(n)$. После замены индекса суммирования во внешней сумме $s = n - i$, $i = n - s$ имеем

$$L_2(n) = \sum_{s=3}^{n-1} \sum_{j=3}^{s} (-1)^{n-s-1} \frac{s^{n-j-1}}{(n-s-1)!(s-j)!}.$$

Изменим теперь порядок суммирования в двойной сумме:

$$L_2(n) = \sum_{j=3}^{n-1} \sum_{s=j}^{n-1} (-1)^{n-s-1} \frac{s^{n-j-1}}{(n-s-1)!(s-j)!}.$$

После замены индекса суммирования во внутренней сумме $p = s - j$, $s = p + j$ и ввода биномиального коэффициента получим

$$L_2(n) = \sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{(n-j-1)!} \sum_{p=0}^{n-j-1} (-1)^{n-j-p-1} \binom{n-j-1}{p} (p+j)^{n-j-1}.$$

Используем известное комбинаторное тождество (см. [7, с. 609, формула 16])

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} (p+a)^m = (-1)^m m!.$$

В нашем случае найдем

$$L_2(n) = \sum_{j=3}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} (-1)^{n-j-1} (n-j-1)! = \sum_{j=3}^{n-1} 1 = n - 3. \qquad \square$$

Пусть $S_p(n,k)$ — нецентральные числа Стирлинга второго рода (см. [8]). Для них известна производящая функция и следующие выражения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_p(n,k) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{pz} (e^z - 1)^k, \quad S_p(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} (l+p)^n,$$
$$S_p(n,k) = 0 \text{ при } k > n, \quad S_p(n,n) = 1.$$

Лемма 1.

$$S_p(n, n-1) = n\left(p + \frac{1}{2}(n-1)\right).$$

Доказательство. Используем метод коэффициентов (см. [6]):

$$S_p(n,n-1) = \frac{n!}{(n-1)!}\operatorname{Coef}_z e^{pz}(e^z-1)^{n-1}z^{n-1} = n\operatorname{Coef}_z e^{pz}\Big(\frac{e^z-1}{z}\Big)^{n-1}\frac{1}{z^2}.$$

Пусть

$$f(z) = e^{pz}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^{n-1}.$$

Для вычета функции $F(z)$ в полюсе $z=a$ порядка n известна формула (см. [5, с. 84])

$$\operatorname{Coef}_z F(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n F(z)].$$

Функция $f(z)$ аналитична в нуле; по формуле для вычета в полюсе второго порядка найдем

$$\begin{aligned} S_p(n,n-1) &= n\operatorname{Coef}_z\frac{f(z)}{z^2} = n\lim_{z\to 0} f'(z) = \\ &= n\lim_{z\to 0}\Big[pe^{pz}\Big(\frac{e^z-1}{z}\Big)^{n-1} e^{pz}(n-1)\Big(\frac{e^z-1}{z}\Big)^{n-2}\frac{e^z z-(e^z-1)}{z^2}\Big] = \\ &= n\Big[p+(n-1)\lim_{z\to 0}\frac{z+z^2-z-\frac{1}{2}z^2+o(z^2)}{z^2}\Big] = n\left(p+\frac{1}{2}(n-1)\right). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3. *При $n \geqslant 5$ верно комбинаторное тождество*

$$\sum_{i=2}^{n-3}\sum_{j=3}^{n-i}(-1)^i\frac{(n-i)^{n-j-1}}{(i-2)!(n-i-j)!} = \frac{1}{6}(n-3)(n-4)(2n-1). \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим левую часть тождества (3) через $L_3(n)$. После замены индекса суммирования во внешней сумме $s=n-i$, $i=n-s$ имеем

$$L_3(n) = \sum_{s=3}^{n-2}\sum_{j=3}^{s}(-1)^{n-s}\frac{s^{n-j-1}}{(n-s-2)!(s-j)!}.$$

Изменим теперь порядок суммирования в двойной сумме:

$$L_3(n) = \sum_{j=3}^{n-2}\sum_{s=j}^{n-2}(-1)^{n-s}\frac{s^{n-j-1}}{(n-s-2)!(s-j)!}.$$

После замены индекса суммирования во внутренней сумме $p=s-j$, $s=p+j$ получим

$$\begin{aligned} L_3(n) &= \sum_{j=3}^{n-2}\frac{1}{(n-j-2)!}\sum_{p=0}^{n-j-2}(-1)^{n-j-p-2}\binom{n-j-2}{p}(p+j)^{n-j-1} = \\ &= \sum_{j=3}^{n-2}S_j(n-j-1,n-j-2) = \sum_{j=3}^{n-2}(n-j-1)(j+\frac{1}{2}(n-j-2)) = \\ &= \frac{1}{6}(2n^3-15n^2+31n-12) = \frac{1}{6}(n-3)(n-4)(2n-1). \end{aligned}$$

Суммирование последовательности и разложение на множители многочлена выполнено с помощью пакета программ Maple. $\square$

В качестве примера наметим ход доказательства тождества (2) с помощью формул для перечисления графов.

Обозначим через $C_k(n,m)$ число помеченных связных графов с n вершинами, из которых k концевых, и m ребрами, а через $C(n,m)$ — число помеченных связных графов с n вершинами и m ребрами. Мун (см. [9]) получил формулу

$$C_k(n,m) = \sum_{i=k}^{n-1}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{n}{i}(n-i)^i C(n-i,m-i). \tag{4}$$

Уницилический граф — это связный граф с n вершинами и n ребрами. Известна формула для числа $C(n,n)$ помеченных уницилических графов с n вершинами (см. [10, с. 20]):

$$C(n,n) = \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n} \frac{n!}{(n-i)!} n^{n-i-1}. \tag{5}$$

Выражение для числа $C_k(n,n)$ помеченных уницилических графов с n вершинами, из которых k концевых, найдено в [1]:

$$C_k(n,n) = \frac{1}{2}\frac{n!}{k!}\sum_{p=3}^{n-k} S_p(n-p-1, n-p-k).$$

Учитывая, что $S_p(n,n) = 1$, имеем

$$C_1(n,n) = \frac{1}{2} n!(n-3); \tag{6}$$

подставляя (5) и (6) в формулу Муна (4) при $k=1$, $m=n$, получим тождество (2).

Отметим, что аналогичным путем можно получить еще ряд тождеств типа (1)–(3), но степень многочлена от n в правой части тождества быстро растет и при $k=3$ уже равна 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воблый В. А.* Асимптотическое перечисление помеченных связных разреженных графов с заданным числом висячих вершин// Методы дискретного анализа в теории графов и схем — 1985. — *42.* — С. 3–14.
2. *Воблый В. А.* Об одном тождестве для многочленов Кравчука// Мат. XX Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (Кропивницкий, 13–14 апреля 2018 г.). — Кропивницкий, 25–28.
3. *Воблый В. А.* О комбинаторном тождестве, связанном с перечислением графов// Мат. XXI Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (Кропивницкий, 17–18 мая 2019 г.). — Кропивницкий, 2019. — С. 30–31.
4. *Воблый В. А.* Два комбинаторных тождества, связанных с перечислением графов// Итоги науки техн. Соврем. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *208.* — С. 11–14.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.
6. *Леонтьев В. К.* Избранные задачи комбинаторного анализа. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
7. *Прудников А. П. и др.* Интегралы и ряды. Т. 1. — Наука, 1981.
8. *Koutras M.* Non-central Stirling numbers and some applications// Discr. Math. — 1982. — *42.* — P. 73–80.
9. *Moon J. W. Connected graphs with unlabeled end-points* J. Comb. Theory. — 1969. — *6.* — P. 65–66.
10. *Moon J. W.* Counting Labelled Trees. — Can. Math. Congr., 1970.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич
Всероссийский институт научной и технической информации (ВИНИТИ РАН), Москва
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 37–46
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-37-46

УДК 517.912, 514.1

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С КОМПЛЕКСНЫМИ, ДВОЙНЫМИ И ДУАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

© 2023 г. **В. А. КЫРОВ**

Аннотация. В статье решается задача вложения трёх двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(3, 2)$, связанных с комплексными, двойными и дуальными числами, в двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(4, 2)$, задаваемую функцией пары точек $f = (x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau)$. Задача сводится к поиску невырожденных решений трех особых систем функциональных уравнений, имеющих прямую связь с комплексными, двойными и дуальными числами.

***Ключевые слова*:** функциональное уравнение, жорданова форма матриц, комплексные числа, двойные числа, дуальные числа.

SOLUTIONS OF SOME SYSTEMS OF FUNCTIONAL EQUATIONS RELATED TO COMPLEX, DOUBLE, AND DUAL NUMBERS

© 2023 **V. A. KYROV**

Abstract. In this paper, we solve the problem on the embedding of three two-metric, phenomenologically symmetric geometries of two sets of rank $(3, 2)$ related to complex, double, and dual numbers, into a two-metric, phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(4, 2)$ determined by a functions of two points $f = (x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau)$. The problem is reduced to the search for nondegeenerate solutions of three special systems of functional equations immediately related to complex, double, and dual numbers.

***Keywords and phrases*:** functional equation, Jordan form, complex numbers, double numbers, dual numbers.

***AMS Subject Classification*:** 30D05

1. Введение. Пусть M и N — двумерное и $2n$-мерное дифференцируемые многообразия. Рассмотрим дифференцируемую функцию

$$f : M \times N \to \mathbb{R}^2, \quad f : \langle i, \alpha \rangle \mapsto \big(f^1(i, \alpha), f^2(i, \alpha)\big)$$

с открытой и плотной областью определения в $M \times N$, а также функцию

$$F : M^n \times N \to \mathbb{R}^{2n}, \quad F : \langle i_1, \dots, i_n, \alpha \rangle \mapsto \big(f^1(i_1, \alpha),\ f^2(i_1, \alpha),\ \dots,\ f^1(i_n, \alpha),\ f^2(i_n, \alpha)\big),$$

где $i_1, \dots, i_n \in M$, $\alpha \in N$. Очевидно, область определения функции F открыта и плотна, а сама функция дифференцируема в этой области определения. Естественным образом строятся функции

$$\begin{aligned} &f_\beta : M \to \mathbb{R}^2, && f_\beta : i \mapsto (f^1(i, \beta), f^2(i, \beta)), \\ &F_{j_1,\dots,j_n} : N \to \mathbb{R}^{2n}, && F_{j_1,\dots,j_n} : \alpha \mapsto \big(f^1(j_1, \alpha),\ f^2(j_1, \alpha),\ \dots,\ f^1(j_n, \alpha),\ f^2(j_n, \alpha)\big), \end{aligned}$$

где $j_1, \ldots, j_n \in M$, $\beta \in N$ — произвольные фиксированные точки. Из построений следует, что функции f_β и $F_{j_1,\ldots,j_n}$ дифференцируемы, а их области определения открыты и плотны.

Определение 1. Дифференцируемая функция $f : M \times N \to \mathbb{R}^2$ с открытой и плотной областью определения задаёт на многообразиях M и N *двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств* (ДФС ГДМ) *ранга* $(n+1, 2)$, где $n \in \mathbb{N}$, если выполняются следующие аксиомы:

Аксиома 1. Функции f_β и $F_{\langle j_1,\ldots,j_n\rangle}$ являются локальными диффеоморфизмами для плотных подмножеств точек из областей определения.

Аксиома 2. Для плотного множества точек $\big\langle i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2\big\rangle$ в $M^{n+1} \times N^2$ все $4(n+1)$ значений функции f связаны уравнением

$$\Phi\Big(f^1(i_1,\alpha_1),\ f^2(i_1,\alpha_1),\ \ldots,\ f^1(i_{n+1},\alpha_2),\ f^2(i_{n+1},\alpha_2)\Big) = 0,$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ — двухкомпонентная функция $4(n+1)$ переменных с $\operatorname{rank}\Phi = 2$.

В работах [1, 3, 6, 7] приведена полная классификация ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ с точностью до замены координат в многообразиях и масштабного преобразования.

Рассмотрим $2(n-1)$-мерное дифференцируемое многообразие N' и двумерное дифференцируемое многообразие L. Пусть

$$\pi_1 : N' \times L \to N', \quad \pi_2 : N' \times L \to L$$

— проекции. Определим проекции

$$\begin{aligned} p_1 &: M \times N \to M, & p_1 &: \langle i, \alpha\rangle \mapsto i \\ p_2 &: M \times N \to N, & p_2 &: \langle i, \alpha\rangle \mapsto \alpha. \end{aligned}$$

Пусть существует дифференцируемое отображение $h : N \to N' \times L$, в некоторой окрестности произвольной точки из N задающее диффеоморфизм на некоторую окрестность из $N' \times L$, а также функция $g : M \times N' \to \mathbb{R}^2$, определяющая ДФС ГДМ ранга $(n, 2)$, причём

$$f = \chi\left(g\Big(p_1, \pi_1\big(h(p_2)\big)\Big),\ \pi_2\big(h(p_2)\big)\right),$$

где $\chi : \mathbb{R}^2 \times L \to \mathbb{R}^2$ — некоторая дифференцируемая функция во всех точках своей открытой и плотной области определения.

Определение 2. l Будем говорить, что ДФС ГДМ ранга $(n, 2)$, задаваемая функцией $g : M \times N' \to \mathbb{R}^2$, *вложена* в ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ с функцией $f : M \times N \to \mathbb{R}^2$, причём N локально диффеоморфно $N' \times L$, если выполняется функциональное соотношение

$$f\big(\lambda(i), \tau(\alpha)\big) = \chi\Big(g\big(i, \pi_1\big(h\big(p_2(\langle i,\alpha\rangle)\big)\big)\big),\ \pi_2\big(h\big(p_2(\langle i,\alpha\rangle)\big)\big)\Big),$$

где $\lambda : M \to M$ и $\tau : N \to N$ — локальные диффеоморфизмы.

В [3] доказано, что в каждую ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$ вложена по крайней мере одна из ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, где $n = 1, 2, 3$.

В данной статье ставится задача о нахождении всех возможных вложений ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с функциями

$$g = (x\xi + \mu, x\eta + y\xi + \nu), \quad g = (x\xi + \mu, y\eta + \nu), \quad g = (x\xi - y\eta + \mu, x\eta + y\xi + \nu)$$

в ДФС ГДМ ранга $(4, 2)$ с функцией $f = (x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau)$. Решение этой задачи сводится к решению особых систем функциональных уравнений. Данная задача является продолжением задачи вложения ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ с функцией $g = (x + \xi, x + \eta)$ в ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с функцией $f = (x\xi + y\mu, x\eta + y\nu)$, опубликованной в [5].

2. Постановка задачи. Согласно определению 2, сформулированная выше задача сводится к решению трёх систем функциональных уравнений

$$
\begin{cases}\bar{x}\bar{\xi}+\bar{y}\bar{\mu}+\bar{\rho}=\chi^1(x\xi+\mu, x\eta+y\xi+\nu,\rho,\tau),\\ \bar{x}\bar{\eta}+\bar{y}\bar{\nu}+\bar{\tau}=\chi^2(x\xi+\mu, x\eta+y\xi+\nu,\rho,\tau);\end{cases}
$$
$$
\begin{cases}\bar{x}\bar{\xi}+\bar{y}\bar{\mu}+\bar{\rho}=\chi^1(x\xi+\mu, y\eta+\nu,\rho,\tau),\\ \bar{x}\bar{\eta}+\bar{y}\bar{\nu}+\bar{\tau}=\chi^2(x\xi+\mu, y\eta+\nu,\rho,\tau);\end{cases} \qquad (1)
$$
$$
\begin{cases}\bar{x}\bar{\xi}+\bar{y}\bar{\mu}+\bar{\rho}=\chi^1(x\xi-y\eta+\mu, x\eta+y\xi+\nu,\rho,\tau),\\ \bar{x}\bar{\eta}+\bar{y}\bar{\nu}+\bar{\tau}=\chi^2(x\xi-y\eta+\mu, x\eta+y\xi+\nu,\rho,\tau),\end{cases}
$$

где $\bar{x}=\bar{x}(x,y)$, $\bar{y}=\bar{y}(x,y)$,

$$
\bar{\xi}=\bar{\xi}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),\quad \bar{\eta}=\bar{\eta}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),\quad \bar{\mu}=\bar{\mu}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),
$$
$$
\bar{\nu}=\bar{\nu}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),\quad \bar{\rho}=\bar{\rho}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),\quad \bar{\tau}=\bar{\tau}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),
$$

χ^1, χ^2 — дифференцируемые функции.

Авторы данной работы ранее изучалась связь двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств с гиперкомплексными числами (см. [4, 8, 9]). Анализируя уравнения (1), находим их связь с двумерными гиперкомплексными числами, которых всего три типа: комплексные числа, дуальные и двойные. Напомним, что комплексные, дуальные и двойные числа можно задать так: $z=x+Iy$, где $I^2=-1,0,1$ соответственно, $\bar{z}=x-Iy$ — сопряжённое число. Операции сложения и умножения определяются как и для комплексных чисел. Хорошо известно, что множество комплексных чисел образует поле, а множества дуальных и двойных чисел — ассоциативные и коммутативные алгебры над полем $\mathbb{R}$ с единицей и частичным делением. Поэтому правые части уравнений (1) можно записать в виде

$$
\chi^1(w,\bar{w},\rho,\tau),\quad \chi^2(w,\bar{w},\rho,\tau),
$$

где $w=(\xi+I\eta)(x+Iy)+(\mu+I\nu)$. Тогда для первой и третьей систем из (1): $u=\mathrm{Re}(w)$, $v=\mathrm{Im}(w)$, а для второй системы линейные комбинации действительной и мнимой частей $\mathrm{Re}(w)$, $\mathrm{Im}(w)$ двойного числа w дают выражения

$$
u=x'\xi'+\mu',\quad v=y'\eta'+\nu'.
$$

Заметим, что u и v — это первый и второй аргументы правых частей в системе (1).

Вложение оказывается возможным, если система (1) имеет хотя бы одно *невырожденное* решение, удовлетворяющее следующим двум условиям (определение 2):

$$
\Delta=\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(x,y)}\neq 0,\quad \square=\frac{\partial(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\mu},\bar{\nu},\bar{\rho},\bar{\tau})}{\partial(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau)}\neq 0. \qquad (2)
$$

Из второго неравенства в данной системе вытекает

$$
\bar{\xi}\bar{\nu}-\bar{\eta}\bar{\mu}\neq 0,\quad \bar{\xi}\neq 0,\quad \bar{\eta}\neq 0,\quad \bar{\mu}\neq 0,\quad \bar{\nu}\neq 0.
$$

Основной целью настоящей работы является определение общего невырожденного решения системы (1) или доказательство того, что решения не существует.

Дифференцируя уравнения из (1) по переменным x, μ, ν, затем их комбинируем, чтобы справа исчезли производные функций χ^1 и χ^2 по их первому и второму аргументам, после чего фиксируя переменные ξ, η, μ, ν, ρ, τ, во всех трёх случаях получаем систему дифференциальных уравнений на функции $\bar{x}=\bar{x}(x,y)$, $\bar{y}=\bar{y}(x,y)$:

$$
\begin{pmatrix}\bar{x}_x\\ \bar{y}_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}=\bar{A}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}. \qquad (3)
$$

Произведём допустимое структурой функциональных уравнений систем (1) преобразование

$$
\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=U^{-1}\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\end{pmatrix},
$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x}'_x\\ \bar{y}'_x\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\bar{x}_x\\ \bar{y}_x\end{pmatrix} = UA\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + U\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix} = UAU^{-1}\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\end{pmatrix} + U\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha'\\ \gamma'\end{pmatrix}$$

с невырожденной матрицей U второго порядка. Система дифференциальных уравнений (3) в прежних обозначениях принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_x\\ \bar{y}_x\end{pmatrix} = UAU^{-1}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}.$$

Хорошо известно (см. [2, с. 485]), что ненулевая матрица A второго порядка с вещественными элементами преобразованием $A \to UAU^{-1}$ может быть приведена к одной их пяти вещественных форм:

$$1)\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad 2)\ \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix},\quad 3)\ \begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & a\end{pmatrix},\quad 4)\ \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix},\quad 5)\ \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где в том же порядке: 2) $a \neq 0$, 3) a любое, 4) $a \neq d$, 5) $b \neq 0$. Решения системы уравнений (3), связанные с формулами (4), будут следующими:

$$1)\quad \bar{x} = \alpha x + \bar{x}(y), \quad \bar{y} = \gamma x + \bar{y}(y), \quad \alpha^2 + \gamma^2 \neq 0; \tag{5}$$

$$2)\quad \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y} = \bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}; \tag{6}$$

$$3.1)\quad \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y} = (\bar{x}(y)x + \bar{y}(y))e^{ax} - \frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{a^2}; \tag{7}$$

$$3.2)\quad \bar{x} = \bar{x}(y) + \alpha x, \quad \bar{y} = \frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y); \tag{8}$$

$$4.1)\quad \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y} = \bar{y}(y)e^{dx} - \frac{\gamma}{a}; \tag{9}$$

$$4.2)\quad \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y} = \gamma x + \bar{y}(y); \tag{10}$$

$$4.3)\quad \bar{x} = \alpha x + \bar{x}(y), \quad \bar{y} = \bar{y}(y)e^{dx} - \frac{\gamma}{a}; \tag{11}$$

$$5)\quad \begin{cases} \bar{x} = \big(\bar{x}(y)\sin bx + \bar{y}(y)\cos bx\big)e^{ax} - \dfrac{a\alpha - b\beta}{a^2 + b^2}, \\ \bar{y} = \big(\bar{x}(y)\cos bx - \bar{y}(y)\sin bx\big)e^{ax} - \dfrac{a\beta + b\alpha}{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Введём матричные обозначения, которые будут использоваться в последующих решениях:

$$\bar{\Xi} = \begin{pmatrix}\bar{\xi} & \bar{\mu}\\ \bar{\eta} & \bar{\nu}\end{pmatrix}, \quad \tilde{\Xi} = \begin{pmatrix}\tilde{\xi} & \tilde{\mu}\\ \tilde{\eta} & \tilde{\nu}\end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \mathrm{const}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

$$\Upsilon_0 = \begin{pmatrix}\xi & 0\\ \eta & \xi\end{pmatrix}, \quad \Upsilon_1 = \begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}, \quad \Upsilon_{-1} = \begin{pmatrix}\xi & -\eta\\ \eta & \xi\end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix}\rho\\ \tau\end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix}\bar{\rho}\\ \bar{\tau}\end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix}\tilde{\rho}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix}\chi^1\\ \chi^2\end{pmatrix},$$

причем матрицы $\bar{\Xi}$, $\tilde{\Xi}$, Λ, Ω невырожденные, $a_{ij} = a_{ij}(\rho,\tau)$, $b_i = b_i(\rho,\tau)$ — дифференцируемые функции, $i, j = 1, 2$. Заметим, что тогда системы функциональных уравнений (1) принимают общий вид:

$$\bar{\Xi}\bar{X} + \bar{R} = \chi.$$

Основной результат этой статьи сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Общее невырожденное решение системы* (1) *функциональных уравнений может быть представлено в следующем виде*:

$$\begin{aligned} &\bar{X} = \Lambda X + A_1, && \bar{\Xi} = \Omega\Upsilon_\varepsilon\Lambda^{-1}, \\ &\bar{R} = \Omega\big[R - \Upsilon_\varepsilon\Lambda^{-1}A_1\big] + B_1, && \chi = \Omega\big[\Upsilon_\varepsilon X + R\big] + B_1, \end{aligned} \tag{13}$$

причем для первой системы из (1) $\varepsilon = 0$, *для второй* — $\varepsilon = 1$, *а для третьей* — $\varepsilon = -1$.

Заметим, что множество матриц Υ_{-1} образует поле, изоморфное полю комплексных чисел (см. [2, с. 196]), множество матриц Υ_0 изоморфно алгебре дуальных чисел, а множество матриц Υ_1 изоморфно множеству матриц $\begin{pmatrix} m & n \\ n & m \end{pmatrix}$, которое в свою очередь изоморфно алгебре двойных чисел. Таким образом, в равенствах (13) прослеживается тесная связь с двумерными гиперкомплексными числами.

3. Доказательство теоремы. Отметим, что метод доказательства этой теоремы разработан и апробирован в [5]. В процессе доказательства некоторые подобные вычисления будут опускаться.

Случай 1. Здесь будет использоваться матричная система записей. Решение (5) подставим в уравнения первой системы из (1), которые затем продифференцируем по переменным y и η:

$$\bar{\Xi}\begin{pmatrix} \bar{x}'(y) \\ \bar{y}'(y) \end{pmatrix} = \xi\chi_v, \quad \bar{\Xi}_\eta\begin{pmatrix} \alpha x + \bar{x}(y) \\ \gamma x + \bar{y}(y) \end{pmatrix} + \bar{R}_\eta = x\chi_v,$$

где $u = x\xi + \mu$, $v = x\eta + y\xi + \nu$, откуда вытекает

$$x\bar{\Xi}\begin{pmatrix} \bar{x}'(y) \\ \bar{y}'(y) \end{pmatrix} = \xi\bar{\Xi}_\eta\begin{pmatrix} \alpha x + \bar{x}(y) \\ \gamma x + \bar{y}(y) \end{pmatrix} + \xi\bar{R}_\eta.$$

Дифференцируя по x, получаем алгебраическую систему уравнений для производных $\bar{x}'(y)$ и $\bar{y}'(y)$:

$$\bar{\Xi}\begin{pmatrix} \bar{x}'(y) \\ \bar{y}'(y) \end{pmatrix} = \xi\bar{\Xi}_\eta\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Как сказано выше, матрица $\bar{\Xi}$ невырождена, поэтому система (14) имеет единственное решение, в котором зафиксируем переменные ξ, η, μ, ν, ρ, τ:

$$\bar{x}'(y) = \beta = \mathrm{const}, \quad \bar{y}'(y) = \delta = \mathrm{const}\,.$$

Интегрируя эти уравнения и возвращаясь в (5), будем иметь $\bar{X} = \Lambda X + A_1$, причём согласно первому из условий (2) матрица Λ невырождена. Подставляя найденное в систему (1), получаем:

$$\tilde{\Xi}X + \tilde{R} = \chi, \tag{15}$$

где $\tilde{\Xi} = \bar{\Xi}\Lambda$, $\tilde{R} = \bar{R} + \bar{\Xi}A_1$.

Далее, продифференцируем (15) по переменным ξ, η, μ, ν:

$$\tilde{\Xi}_\xi X + \tilde{R}_\xi = x\chi_u + y\chi_v, \quad \tilde{\Xi}_\eta X + \tilde{R}_\eta = x\chi_v, \quad \tilde{\Xi}_\mu X + \tilde{R}_\mu = \chi_u, \quad \tilde{\Xi}_\nu X + \tilde{R}_\nu = \chi_v.$$

Второе и четвёртое соотношения, а также первое, третье и четвёртое, связаны следующими соотношениями:

$$\tilde{\Xi}_\xi X + \tilde{R}_\xi = x\tilde{\Xi}_\mu X + x\tilde{R}_\mu + y\tilde{\Xi}_\nu X + y\tilde{R}_\nu, \quad \tilde{\Xi}_\eta X + \tilde{R}_\eta = x\tilde{\Xi}_\nu X + x\tilde{R}_\nu.$$

Далее, сравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями переменных x и y, будем иметь

$$\tilde{\xi}_\nu = \tilde{\mu}_\nu = \tilde{\xi}_\mu = \tilde{\mu}_\mu = \tilde{\eta}_\nu = \tilde{\nu}_\nu = \tilde{\eta}_\mu = \tilde{\nu}_\mu = \tilde{\mu}_\eta = \tilde{\nu}_\eta = \tilde{\rho}_\xi = \tilde{\rho}_\eta = \tilde{\tau}_\xi = \tilde{\tau}_\eta = 0.$$

С учётом последнего, в (15) дифференцируем по μ и ν:

$$\tilde{\rho}_\mu = \chi^1_u, \quad \tilde{\rho}_\nu = \chi^1_v, \quad \tilde{\tau}_\mu = \chi^2_u, \quad \tilde{\tau}_\nu = \chi^2_v.$$

Интегрируя, получаем четвёртое равенство из (13) при $\varepsilon = 0$. Затем найденное подставляя в (15), получаем остальные равенства из (13) при $\varepsilon = 0$.

Решение (5) подставим теперь в уравнения второй системы из (1), где $u = x\xi + \mu$, $v = y\eta + \nu$. Затем, дифференцируя по x и y, получаем $\chi^i_{uv} = 0$, следовательно,

$$\chi^i = P^i(x\xi + \mu, \rho, \tau) + Q^i(y\eta + \nu, \rho, \tau), \quad i = 1, 2.$$

Далее возвращаясь к системе (1), с учётом (5) будем иметь

$$P^i(x\xi + \mu, \rho, \tau) = p^i(\rho, \tau)(x\xi + \mu), \quad \alpha\bar{\xi} + \gamma\bar{\mu} = \xi p^1(\rho, \tau), \quad \alpha\bar{\eta} + \gamma\bar{\nu} = \xi p^2(\rho, \tau).$$

Тогда система (1) принимает следующий вид:

$$\bar{\Xi}\begin{pmatrix}\bar{x}(y)\\ \bar{y}(y)\end{pmatrix}+\bar{R}=\begin{pmatrix}Q^1\\ Q^2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}p^1\\ p^2\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Затем, дифференцируя по y и ξ, учитывая первое неравенство из (2), с точностью до переобозначения получаем $\bar{y}'(y)=a\bar{x}'(y)$.

С учетом найденного продифференцируем систему (16) по переменным y и η:

$$\bar{x}'(y)(\bar{\xi}+a\bar{\mu})=\eta Q^1_v,\qquad \bar{x}(y)(\bar{\xi}_\eta+a\bar{\mu}_\eta)+\bar{\rho}_\eta=yQ^1_v,$$
$$\bar{x}'(y)(\bar{\eta}+a\bar{\nu})=\eta Q^2_v,\qquad \bar{x}(y)(\bar{\eta}_\eta+a\bar{\nu}_\eta)+\bar{\tau}_\eta=yQ^2_v,$$

откуда получаем следуют дифференциальные уравнения

$$y\bar{x}'(y)(\bar{\xi}+a\bar{\mu})=\eta\bar{x}(y)(\bar{\xi}_\eta+a\bar{\mu}_\eta)+\eta\bar{\rho}_\eta,\quad y\bar{x}'(y)(\bar{\eta}+a\bar{\nu})=\eta\bar{x}(y)(\bar{\eta}_\eta+a\bar{\nu}_\eta)+\eta\bar{\tau}_\eta,$$

которые имеют решения

$$\bar{x}(y)=\beta y+a_1,\quad \bar{y}(y)=\delta y+a_2.$$

Тогда получаем $\bar{X}=\Lambda X+A_1$, причём согласно первому из условий (2) матрица Λ невырождена. Подставляя найденное в систему (1), имеем тождество (15), в котором $u=x\xi+\mu$, $v=y\eta+\nu$.

Равенство (15), в котором $u=x\xi+\mu$, $v=y\eta+\nu$, продифференцируем по ξ, η, μ, ν:

$$\tilde{\Xi}_\xi X+\tilde{R}_\xi=x\chi_u,\quad \tilde{\Xi}_\eta X+\tilde{R}_\eta=y\chi_v,\quad \tilde{\Xi}_\mu X+\tilde{R}_\mu=\chi_u,\quad \tilde{\Xi}_\nu X+\tilde{R}_\nu=\chi_v.$$

Первое и третье соотношения, а также второе и четвёртое связаны следующим образом:

$$\tilde{\Xi}_\xi X+\tilde{R}_\xi=x\tilde{\Xi}_\mu X+x\tilde{R}_\mu,\quad \tilde{\Xi}_\eta X+\tilde{R}_\eta=y\tilde{\Xi}_\nu X+y\tilde{R}_\nu.$$

Далее, сравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями переменных x и y, будем иметь

$$\tilde{\xi}_\nu=\tilde{\mu}_\nu=\tilde{\xi}_\mu=\tilde{\mu}_\mu=\tilde{\eta}_\nu=\tilde{\nu}_\nu=\tilde{\eta}_\mu=\tilde{\nu}_\mu=\tilde{\xi}_\eta=\tilde{\rho}_\eta=\tilde{\rho}_\xi=\tilde{\mu}_\xi=\tilde{\eta}_\eta=\tilde{\tau}_\eta=\tilde{\nu}_\xi=\tilde{\tau}_\xi=0,$$
$$\tilde{\rho}_\nu=\tilde{\mu}_\eta,\quad \tilde{\xi}_\xi=\tilde{\rho}_\mu,\quad \tilde{\nu}_\eta=\tilde{\tau}_\nu,\quad \tilde{\tau}_\mu=\tilde{\eta}_\xi.$$

С учётом последнего ещё получаем

$$\tilde{\rho}_\mu=\chi^1_u,\quad \tilde{\rho}_\nu=\chi^1_v,\quad \tilde{\tau}_\mu=\chi^2_u,\quad \tilde{\tau}_\nu=\chi^2_v.$$

Интегрируя найденное, затем подставляя в (15), окончательно получаем (13) при $\varepsilon=1$. Наконец, решение (5) подставим в уравнения третьей системы из (1) (напомним, что $u=x\xi-y\eta+\mu$, $v=x\eta+y\xi+\nu$), которые затем продифференцируем по x, ξ, μ, ν:

$$\bar{\Xi}_\eta\begin{pmatrix}\alpha x+\bar{x}(y)\\ \gamma x+\bar{y}(y)\end{pmatrix}+\bar{R}_\eta=-y\chi_u+x\chi_v,\quad \bar{\Xi}_\xi\begin{pmatrix}\alpha x+\bar{x}(y)\\ \gamma x+\bar{y}(y)\end{pmatrix}+\bar{R}_\xi=x\chi_u+y\chi_v,$$
$$\bar{\Xi}_\mu\begin{pmatrix}\alpha x+\bar{x}(y)\\ \gamma x+\bar{y}(y)\end{pmatrix}+\bar{R}_\mu=\chi_u,\, \bar{\Xi}_\nu\begin{pmatrix}\alpha x+\bar{x}(y)\\ \gamma x+\bar{y}(y)\end{pmatrix}+\bar{R}_\nu=\chi_v,$$

откуда следуют равенства

$$\bar{\Xi}_\mu\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}=\bar{\Xi}_\nu\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}=\bar{\Xi}_\mu\begin{pmatrix}\bar{x}'(y)\\ \bar{y}'(y)\end{pmatrix}=\bar{\Xi}_\nu\begin{pmatrix}\bar{x}'(y)\\ \bar{y}'(y)\end{pmatrix}=0.$$

Интегрируя найденное по μ и ν, после чего разделяя переменные, получаем

$$\bar{x}'(y)=\beta=\mathrm{const},\quad \bar{y}'(y)=\delta=\mathrm{const};$$

следовательно, $\bar{X}=\Lambda X+A_1$, где матрица Λ невырождена. Подставляя найденное в систему (1), имеем равенство (15), в котором $u=x\xi-y\eta+\mu$, $v=x\xi+y\eta+\nu$. Далее, дифференцируя (15) по переменным ξ, η, μ, ν, после чего рассуждая как выше, получаем

$$\tilde{\xi}_\nu=\tilde{\mu}_\nu=\tilde{\xi}_\mu=\tilde{\mu}_\mu=\tilde{\eta}_\nu=\tilde{\nu}_\nu=\tilde{\eta}_\mu=\tilde{\nu}_\mu=\tilde{\rho}_\xi=\tilde{\rho}_\eta=\tilde{\tau}_\xi=\tilde{\tau}_\eta=0,$$
$$\tilde{\rho}_\mu=-\tilde{\mu}_\eta,\quad \tilde{\rho}_\nu=\tilde{\xi}_\eta,\quad \tilde{\rho}_\mu=\tilde{\xi}_\xi,\quad \tilde{\rho}_\nu=\tilde{\mu}_\xi,\quad \tilde{\tau}_\mu=-\tilde{\nu}_\eta,\quad \tilde{\tau}_\nu=\tilde{\eta}_\eta,$$
$$\tilde{\tau}_\mu=\tilde{\eta}_\xi,\quad \tilde{\tau}_\nu=\tilde{\nu}_\xi,\quad \tilde{\rho}_\mu=\chi^1_u,\quad \tilde{\rho}_\nu=\chi^1_v,\quad \tilde{\tau}_\mu=\chi^2_u,\quad \tilde{\tau}_\nu=\chi^2_v.$$

Проинтегрируя полученное и подставив в (15), получим (13) при $\varepsilon=-1$.

Случай 2. Теперь подставим решение (6) в уравнения первой системы из (1), которые затем продифференцируем по переменным y и η:

$$(\bar{x}'(y)\bar{\xi} + \bar{y}'(y)\bar{\mu})e^{ax} = \xi\chi_v^1, \qquad \left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\eta + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta = x\chi_v^1,$$
$$(\bar{x}'(y)\bar{\eta} + \bar{y}'(y)\bar{\nu})e^{ax} = \xi\chi_v^2, \qquad \left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\eta + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\eta + \bar{\tau}_\eta = x\chi_v^2,$$

откуда следуют равенства

$$x(\bar{x}'(y)\bar{\xi} + \bar{y}'(y)\bar{\mu})e^{ax} = \xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\eta + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta\right),$$
$$x(\bar{x}'(y)\bar{\eta} + \bar{y}'(y)\bar{\nu})e^{ax} = \xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\eta + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\eta + \bar{\tau}_\eta\right),$$

и далее однородная алгебраическая система уравнений относительно производных $\bar{x}'(y)$ и $\bar{y}'(y)$:

$$\bar{x}'(y)\bar{\xi} + \bar{y}'(y)\bar{\mu} = 0, \quad \bar{x}'(y)\bar{\eta} + \bar{y}'(y)\bar{\nu} = 0,$$

которая имеет только нулевое решение $\bar{x}'(y) = 0$, $\bar{y}'(y) = 0$, поскольку, согласно второму из условий (2) матрица $\bar{\Xi}$ невырождена. Тогда $\bar{x}(y) = \mathrm{const}$, $\bar{y}(y) = \mathrm{const}$, что несовместимо с первым из условий (2).

Теперь подставим решение (6) в уравнения второй системы из (1), которые затем продифференцируем по переменным x и ξ:

$$a(\bar{x}(y)\bar{\xi} + \bar{y}(y)\bar{\mu})e^{ax} = \xi\chi_u^1, \qquad \left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\xi + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\xi + \bar{\rho}_\xi = x\chi_u^1,$$
$$a(\bar{x}(y)\bar{\eta} + \bar{y}(y)\bar{\nu})e^{ax} = \xi\chi_u^2, \qquad \left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\xi + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\xi + \bar{\tau}_\xi = x\chi_u^2,$$

откуда следуют равенства

$$ax(\bar{x}(y)\bar{\xi} + \bar{y}(y)\bar{\mu})e^{ax} = \xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\xi + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\xi + \bar{\rho}_\xi\right),$$
$$ax(\bar{x}'(y)\bar{\eta} + \bar{y}'(y)\bar{\nu})e^{ax} = \xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\xi + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\xi + \bar{\tau}_\xi\right),$$

и далее однородная алгебраическая система уравнений относительно $\bar{x}(y)$ и $\bar{y}(y)$:

$$\bar{x}(y)\bar{\xi} + \bar{y}(y)\bar{\mu} = 0, \quad \bar{x}(y)\bar{\eta} + \bar{y}(y)\bar{\nu} = 0,$$

которая имеет только нулевое решение $\bar{x}(y) = \bar{y}(y) = 0$, поскольку матрица $\bar{\Xi}$ невырождена. Тогда для функций $\bar{x}$ и $\bar{y}$ первое из условий в (2) не выполняется.

Наконец, подставим решение (6) в уравнения третьей системы в (1), которые затем продифференцируем по переменным x, ξ, μ, ν:

$$a(\bar{x}(y)\bar{\xi} + \bar{y}(y)\bar{\mu})e^{ax} = \xi\chi_u^1 + \eta\chi_v^1,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\xi + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\xi + \bar{\rho}_\xi = x\chi_u^1 + y\chi_v^1,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\mu + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\mu + \bar{\rho}_\mu = \chi_u^1,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\nu + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\nu + \bar{\rho}_\nu = \chi_v^1,$$
$$a(\bar{x}(y)\bar{\eta} + \bar{y}(y)\bar{\nu})e^{ax} = \xi\chi_u^2 + \eta\chi_v^2,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\xi + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\xi + \bar{\tau}_\xi = x\chi_u^2 + y\chi_v^2,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\mu + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\mu + \bar{\tau}_\mu = \chi_u^2,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\nu + \left(\bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\nu + \bar{\tau}_\nu = \chi_v^2.$$

Подставляя третье и четвёртое равенства во второе, а седьмое и восьмое в шестое, после чего сравнивая коэффициенты перед xe^{ax} и ye^{ax}, получаем:

$$\bar{x}(y)\bar{\xi}_\mu + \bar{y}(y)\bar{\mu}_\mu = 0, \quad \bar{x}(y)\bar{\eta}_\mu + \bar{y}(y)\bar{\nu}_\mu = 0, \quad \bar{x}(y)\bar{\xi}_\nu + \bar{y}(y)\bar{\mu}_\nu = 0, \quad \bar{x}(y)\bar{\eta}_\nu + \bar{y}(y)\bar{\nu}_\nu = 0;$$

следовательно функции χ^1_u, χ^1_v, χ^2_u, χ^2_v зависят только от ξ, η, μ, ν, ρ, τ. Тогда из первого и пятого уравнений вытекает:
$$\bar{x}(y)\bar{\xi} + \bar{y}(y)\bar{\mu} = 0, \quad \bar{x}(y)\bar{\eta} + \bar{y}(y)\bar{\nu} = 0;$$
следовательно, $\bar{x}(y) = \bar{y}(y) = 0$, что приводит к противоречию с первым из неравенств в (2).

Случай 3.1. Подставим решение (7) в первое уравнение первой системы в (1) и продифференцируем его по переменным y и η:
$$\big(\bar{x}'(y)\bar{\xi} + (\bar{x}'(y)x + \bar{y}'(y))\bar{\mu}\big)e^{ax} = \xi\chi^1_v,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\eta + \left((\bar{x}(y)x + \bar{y}(y))e^{ax} - \frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{a^2}\right)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta = x\chi^1_v,$$
откуда следует соотношение
$$x\big(\bar{x}'(y)\bar{\xi} + (\bar{x}'(y)x + \bar{y}'(y))\bar{\mu}\big)e^{ax} = \\ = \xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\eta + \left((\bar{x}(y)x + \bar{y}(y))\,e^{ax} - \frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{a^2}\right)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta\right).$$
Сравнивая коэффициенты при x^2e^{ax}, xe^{ax}, e^{ax}, получаем
$$\bar{x}'(y) = 0, \quad \bar{x}(y) = \beta, \quad \bar{y}'(y) = \delta = \frac{\beta\xi\bar{\mu}_\eta}{\bar{\mu}} = \mathrm{const}, \quad \bar{y}(y) = \delta y + b, \quad \beta\bar{\xi}_\eta + (\delta y + b)\bar{\mu}_\eta = 0;$$
следовательно, $\beta\bar{\mu}_\eta = 0$ и $\delta = 0$. Тогда получаем решение
$$\bar{x} = \beta e^{ax} - \frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y} = (\beta x + b)e^{ax} - \frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{a^2},$$
которое не удовлетворяет первому неравенству из (2), что недопустимо.

Подобным образом рассуждая относительно второй и третий систем из (1), получаем отрицательный результат.

Случай 3.2. Подставим решение (8) в уравнения первой системы из (1) и продифференцируем по переменным y и η:
$$\bar{x}'(y)\bar{\xi} + (\bar{x}'(y)x + \bar{y}'(y))\bar{\mu} = \xi\chi^1_v, \quad (\alpha x + \bar{x}(y))\bar{\xi}_\eta + \left(\frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y)\right)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta = x\chi^1_v,$$
$$\bar{x}'(y)\bar{\eta} + (\bar{x}'(y)x + \bar{y}'(y))\bar{\nu} = \xi\chi^1_v, \quad (\alpha x + \bar{x}(y))\bar{\eta}_\eta + \left(\frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y)\right)\bar{\nu}_\eta + \bar{\tau}_\eta = x\chi^1_v.$$
откуда следуют соотношения
$$x\big(\bar{x}'(y)\bar{\xi} + \bar{x}'(y)x\bar{\mu} + \bar{y}'(y)\bar{\mu}\big) = \xi\left((\alpha x + \bar{x}(y))\bar{\xi}_\eta + \left(\frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y)\right)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta\right),$$
$$x\big(\bar{x}'(y)\bar{\eta} + \bar{x}'(y)x\bar{\nu} + \bar{y}'(y)\bar{\nu}\big) = \xi\left((\alpha x + \bar{x}(y))\bar{\eta}_\eta + \left(\frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y)\right)\bar{\nu}_\eta + \bar{\tau}_\eta\right).$$
Сравнивая коэффициенты при x^2 и x, получаем:
$$\bar{x}'(y) = \frac{\alpha\xi\bar{\mu}_\eta}{2\bar{\mu}} = \alpha p, \quad \bar{x}'(y)\bar{\xi} + \bar{y}'(y)\bar{\mu} = \alpha\xi\bar{\xi}_\eta + \xi\bar{x}(y)\bar{\mu}_\eta + \gamma\bar{\mu}_\eta, \quad \bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta + \bar{y}(y)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta = 0,$$
$$\bar{x}'(y) = \frac{\alpha\xi\bar{\nu}_\eta}{2\bar{\nu}} = \alpha p, \quad \bar{x}'(y)\bar{\eta} + \bar{y}'(y)\bar{\nu} = \alpha\xi\bar{\eta}_\eta + \xi\bar{x}(y)\bar{\nu}_\eta + \gamma\bar{\nu}_\eta, \quad \bar{x}(y)\bar{\eta}_\eta + \bar{y}(y)\bar{\nu}_\eta + \bar{\tau}_\eta = 0,$$
со следующим решением:
$$\bar{x}(y) = \alpha py + b, \quad \bar{y}(y) = \alpha^2p^2y^2 + \delta y + c,$$
которым дополним выражения (8):
$$\bar{x} = \alpha x + \alpha py + b, \quad \bar{y} = \frac{\alpha x^2}{2} + \alpha pxy + \alpha^2p^2y^2 + \gamma x + \delta y + bx + c.$$
Следовательно,
$$(\alpha py + b)\bar{\xi}_\eta + (\alpha^2p^2y^2 + \delta y + c)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta = 0, \quad (\alpha py + b)\bar{\eta}_\eta + (\alpha^2p^2y^2 + \delta y + c)\bar{\nu}_\eta + \bar{\tau}_\eta = 0,$$

то есть $\alpha p = 0$. Согласно первому неравенству в (2) будем иметь $\alpha \neq 0$, $p = 0$. Значит,

$$\bar{x} = \alpha x + b, \quad \bar{y} = \frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \delta y + bx + c, \quad \delta = \frac{\alpha \xi \bar{\xi}_\eta}{\bar{\mu}} = \frac{\alpha \xi \bar{\eta}_\eta}{\bar{\nu}} \neq 0, \quad \bar{\mu}_\eta = \bar{\nu}_\eta = 0. \tag{17}$$

Подставляя найденное в выше полученные выражения, содержащие χ_v^1, будем иметь

$$\chi_v^1 = \alpha \bar{\xi}_\eta = \alpha \bar{\eta}_\eta;$$

следовательно, $\bar{\xi}_\eta = \bar{\eta}_\eta$. Учитывая выражения для δ, получаем $\bar{\mu} = \bar{\nu}$, поэтому во втором соотношении из (2) имеем $\square = 0$, что недопустимо.

Подставим теперь решение (8) в первое уравнение второй системы из (1) и продифференцируем их по переменным x и ξ:

$$\alpha \bar{\xi} + (\alpha x + \gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu} = \xi \chi_u^1, \quad (\alpha x + \bar{x}(y))\bar{\xi}_\xi + \left(\frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y)\right)\bar{\mu}_\xi + \bar{\rho}_\xi = x\chi_u^1,$$

откуда следуют соотношения

$$x\big(\alpha \bar{\xi} + (\alpha x + \gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu}\big) = \xi \left((\alpha x + \bar{x}(y))\bar{\xi}_\xi + \left(\frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y)\right)\bar{\mu}_\xi + \bar{\rho}_\xi\right).$$

Сравнивая коэффициенты при x^2 и x, получаем равенства

$$2\alpha\bar{\mu} = \alpha\xi\bar{\mu}_\xi, \quad \alpha\bar{\xi} + (\gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu} = \alpha\xi\bar{\xi}_\xi + \xi(\gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu}_\xi, \quad \bar{x}(y)\bar{\xi}_\xi + \bar{y}(y)\bar{\mu}_\xi + \bar{\rho}_\xi = 0.$$

Пусть $\alpha \neq 0$; тогда $\bar{\mu}_\xi = 2\bar{\mu}/\xi \neq 0$. Затем, дифференцируя второе и третье равенства по y, будем иметь $\bar{x}'(y) = \bar{y}'(y) = 0$, что противоречит первому неравенству из (2). Поэтому $\alpha = 0$ и тогда, согласно (2),

$$\bar{x}'(y) \neq 0, \quad \bar{\mu}_\xi = \frac{\bar{\mu}}{\xi} \neq 0.$$

Подставим теперь решение (8) в первое уравнение второй системы из (1) и продифференцируем их по переменным y и η:

$$\bar{x}'(y)\bar{\xi} + (\bar{x}'(y)x + \bar{y}'(y))\bar{\mu} = \eta\chi_v^1, \quad \bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta + (\gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y))\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta = y\chi_v^1,$$

поэтому

$$y\big(\bar{x}'(y)\bar{\xi} + (\bar{x}'(y)x + \bar{y}'(y))\bar{\mu}\big) = \eta\big(\bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta + (\gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y))\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta\big).$$

Сравнивая коэффициенты, получаем

$$y\bar{x}'(y)\bar{\mu} = \eta(\gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu}_\eta, \quad y(\bar{x}'(y)\bar{\xi} + \bar{y}'(y)\bar{\mu}) = \eta(\bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta + \bar{y}(y)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta).$$

Решая первое уравнение, получаем

$$\bar{x}(y) = -\gamma + y^c, \quad c = \frac{\eta\bar{\mu}_\eta}{\bar{\mu}} \neq 0.$$

Подставляя найденное в первое равенство, содержащее χ_u^1, получаем $\chi_u^1 = y^c\bar{\mu}/\xi$. Согласно построениям должно быть $\chi_u^1 = \varphi(u, v, \rho, \tau)$. Приравнивая правые части, дифференцируя по y, ν, x и сравнивая результаты, получаем $\bar{\mu} = 0$, что недопустимо.

Подставляя решение (8) в уравнения третьей системы из (1), после чего дифференцируя по всем переменным и рассуждая как выше, приходим к противоречию.

Случаи 2, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3 и 5 дают отрицательный результат. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданова Р. А., Михайличенко Г. Г.* Последовательное по рангу $(n+1, 2)$ вложение двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств// Изв. вузов. Мат. — 2020. — *6*. — С. 9–14.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
3. *Кыров В. А.* О вложении двуметрических феноменологически симметричных геометрий// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2018. — *56*. — С. 5–16.
4. *Кыров В. А.* Гиперкомплексные числа в некоторых геометриях двух множеств, II// Изв. вузов. Мат. — 2020. — *7*. — С. 39–54.

5. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2021. — *8*. — С. 46–55.
6. *Михайличенко Г. Г.* Двуметрические физические структуры ранга $(n+1,2)$// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 3. — С. 132–143.
7. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур. — Барнаул: Барнаул. гос. пед. ун-т, 2003.
8. *Михайличенко Г. Г., Кыров В. А.* Гиперкомплексные числа в некоторых геометриях двух множеств, I// Изв. вузов. Мат.. — 2017. — *7*. — С. 19–29.
9. *Kyrov V. A.* Commutative hypercomplex numbers and the geometry of two sets// Ж. СФУ. Сер. Мат. физ. — 2020. — *13*, № 3. — С. 373–382.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет
E-mail: `kyrovVA@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 47–52
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-47-52

УДК 517.51

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ РАВНОМЕРНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ ФУНКЦИЙ И ИХ ЧЕТНЫМИ И НЕЧЕТНЫМИ ПРОДОЛЖЕНИЯМИ

© 2023 г. **Т. С. МАРДВИЛКО**

Аннотация. В работе изучается связь между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями непрерывной на отрезке функции и ее четным и нечетным продолжениями. Рассмотрены примеры, демонстрирующие точность полученных результатов. Аналогичные вопросы обсуждаются также для рациональных приближений.

Ключевые слова: наилучшее равномерное полиномиальное приближение, наилучшее равномерное рациональное приближение, четное продолжение функции, нечетное продолжение функции, неравенство Джексона.

RELATIONSHIPS BETWEEN THE BEST UNIFORM POLYNOMIAL APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS AND THEIR EVEN AND ODD PROLONGATIONS

© 2023 **T. S. MARDVILKO**

Abstract. In this paper, we study the relationships between the best uniform polynomial approximations of a continuous function on an interval and its even and odd prolongations. We consider examples that demonstrate the accuracy of the results obtained. Similar issues are also discussed for rational approximations.

Keywords and phrases: best uniform polynomial approximation, best uniform rational approximation, even continuation of a function, odd continuation of a function, Jackson's inequality.

AMS Subject Classification: 41A10, 41A17, 41A20

1. Введение. Основные результаты. Обозначим через $C([a,b])$ пространство непрерывных действительных функций на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Для $f \in C([a,b])$ определим стандартную максимумЭ=норму

$$\|f\|_{[a,b]} = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Через $\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначим множество алгебраических полиномов над полем $\mathbb{R}$ степени не выше n. Для $f \in C([a,b])$ введем наилучшее равномерное приближение множеством $\mathcal{P}_n$, т.е.

$$E_n(f;[a,b]) = \inf\{\|f-p\|_{[a,b]} : p \in \mathcal{P}_n\}.$$

Для $f \in C([0,1])$ через f^+ и f^- обозначим соответственно четное и нечетное продолжение f на отрезок $[-1,1]$:

$$f^+(x) = f(|x|), \quad f^-(x) = f(|x|)\operatorname{sign} x.$$

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ НАН Беларуси «Конвергенция» 2021–2025 гг.

Ясно, что $f^+ \in C([-1,1])$. При дополнительном условии $f(0)=0$ имеем также $f^- \in C([-1,1])$. Очевидно, что при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место неравенства

$$E_n\left(f^{\pm};[-1,1]\right) \geqslant E_n(f;[0,1]). \tag{1}$$

Естественно, для f^- предполагается, что $f(0)=0$. Основным результатом настоящей работы являются теоремы 1 и 2, в которых получены обращения неравенств (1).

Теорема 1. *Пусть $f \in C([0,1])$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$E_n\left(f^+;[-1,1]\right) \leqslant \frac{32\pi}{n}\left\{E_0(f;[0,1]) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}} kE_k(f;[0,1])\right\}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $f \in C([0,1])$, причем $f(0)=0$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$E_n\left(f^-;[-1,1]\right) \leqslant \frac{2^{11}\pi}{n^2}\left\{\sum_{1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}} k^3E_k(f;[0,1])\right\}. \tag{3}$$

Из теорем 1 и 2 несложно получить соответственно следствия 1 и **??**.

Следствие 1. *Пусть $f \in C([0,1])$, $\alpha > 0$ и $E_n(f;[0,1]) = O(n^{-\alpha})$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеют место соотношения*

(i) $E_n\left(f^+;[-1,1]\right) = O\left(n^{-\alpha/2}\right)$ *при* $0 < \alpha < 2$;

(ii) $E_n\left(f^+;[-1,1]\right) = O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ *при* $\alpha = 2$;

(iii) $E_n\left(f^+;[-1,1]\right) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *при* $\alpha > 2$.

Следствие 2. *Пусть $f \in C([0,1])$, причем $f(0)=0$, $\alpha > 0$ и $E_n(f;[0,1]) = O(n^{-\alpha})$ для $n \in \mathbb{N}$. Тогда для $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеют место соотношения*

(i) $E_n\left(f^-;[-1,1]\right) = O\left(n^{-\alpha/2}\right)$ *при* $0 < \alpha < 4$;

(ii) $E_n\left(f^-;[-1,1]\right) = O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$ *при* $\alpha = 4$;

(iii) $E_n\left(f^-;[-1,1]\right) = O\left(n^{-2}\right)$ *при* $\alpha > 4$.

Приведенные ниже примеры 1–3 показывают, что теоремы 1 и 2, а также следствия 1 и **??**, довольно хорошо отвечают на поставленный вопрос об обращении неравенств (1).

Пример 1 (см. [1])**.** Пусть $\alpha > 0$ и $\varphi_\alpha(x) = x^{\alpha/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

(i) $E_n(\varphi_\alpha;[0,1]) \asymp n^{-\alpha}$ при $\alpha/2 \notin \mathbb{N}$;

(ii) $E_n\left(\varphi_\alpha^+;[-1,1]\right) \asymp n^{-\alpha/2}$ при $\alpha/4 \notin \mathbb{N}$;

(iii) $E_n\left(\varphi_\alpha^-;[-1,1]\right) \asymp n^{-\alpha/2}$ при $(\alpha+2)/4 \notin \mathbb{N}$.

Пример 2 (см. [3, с. 424, 474])**.** Пусть $\psi(x) = x\ln x$ при $x \in (0,1]$ и $\psi(0) = 0$. Тогда для $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеют место соотношения

(i) $E_n(\psi;[0,1]) \asymp \dfrac{1}{n^2}$;

(ii) $E_n\left(\psi^+;[-1,1]\right) \asymp \dfrac{\ln n}{n}$.

Пример 3 (см. [3, с. 425, 474])**.** Пусть $\lambda(x) = x^2\ln x$ при $x \in (0,1]$ и $\lambda(0) = 0$. Тогда для $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеют место соотношения

(i) $E_n(\lambda;[0,1]) \asymp \dfrac{1}{n^4}$;

(ii) $E_n\left(\lambda^-;[-1,1]\right) \asymp \dfrac{\ln n}{n^2}$.

2. Доказательство основных результатов. Приведем сведения, необходимые для доказательства теорем 1 и 2. Обозначим через $L_\infty([a,b])$ пространство Лебега существенно ограниченных функций на отрезке $[a,b]$. Норма функции $f \in L_\infty([a,b])$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{[a,b]} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Очевидно, $C([a,b])$ является подпространством $L_\infty([a,b])$ и для функции $f \in C([a,b])$ ее норма в $L_\infty([a,b])$ совпадает с нормой в $C([a,b])$.

Обозначим через $W^s_\infty([a,b])$, $s \in \mathbb{N}$, пространство Соболева функций на отрезке $[a,b]$. Именно, $f \in W^s_\infty([a,b])$, если f непрерывно дифференцируема $s-1$ раз на $[a,b]$, $f^{(s-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(s)} \in L_\infty([a,b])$.

Для доказательства теорем 1 и 2 применим теорему типа Джексона в следующей форме.

Теорема 3. *Пусть $s = 1, 2$ и $n \in \mathbb{N}$. Если $f \in W^s_\infty([-1,1])$, то*

$$E_n(f;[-1,1]) \leqslant \frac{\pi}{2n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{[-1,1]}. \tag{4}$$

Неравенство (4) следует из [4, теорема 4.2.5] и известных соотношений для констант Фавара [4, с. 5].

Будем использовать также неравенство Маркова [3, с. 233]. Для $p \in \mathcal{P}_n$, $n \geqslant 1$, справедлива оценка

$$\left\|p'\right\|_{[0,1]} \leqslant 2n^2 \|p\|_{[0,1]}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1. Так как функция f^+ четная, то ее элемент наилучшего приближения из $\mathcal{P}_1$ также является четной функцией и, следовательно, принадлежит $\mathcal{P}_0$. Таким образом,

$$E_1\left(f^+;[-1,1]\right) = E_0\left(f^+;[-1,1]\right) = E_0(f;[0,1]).$$

Значит, неравенство (2) для $n = 1$ выполняется.

Считаем далее $n \geqslant 2$. Через m обозначим наибольшее целое число, удовлетворяющее условию $2^m \leqslant n$. Для $l = 0, 1, \ldots, m$ через p_l обозначим полином степени не выше 2^l наилучшего приближения f, т.е. $p_l \in \mathcal{P}_{2^l}$ и для него выполняется неравенство

$$\|f - p_l\|_{[0,1]} = E_{2^l}(f;[0,1]) =: \varepsilon_l.$$

Для удобства будем также считать, что p_{-1} — элемент наилучшего приближения из $\mathcal{P}_0$ и

$$\varepsilon_{-1} = E_{2^{-1}}(f;[0,1]) = E_0(f;[0,1]).$$

Для функции f справедливо равенство

$$f = p_{-1} + q_0 + q_1 + \ldots + q_m + r_m, \tag{6}$$

где $q_l = p_l - p_{l-1}$ при $l = 0, 1, \ldots, m$, а $r_m = f - p_m$. Следовательно,

$$f^+ = p_{-1} + q_0^+ + q_1^+ + \ldots + q_m^+ + r_m^+. \tag{7}$$

Здесь мы учли, что p_{-1} является константой и, значит, $p_{-1}^+ = p_{-1}$. Заметим, что

$$\|r_m^+\|_{[-1,1]} = \|r_m\|_{[0,1]} = \varepsilon_m. \tag{8}$$

Функции $q_0^+, q_1^+, \ldots, q_m^+$ четны и принадлежат пространству $W^1_\infty([-1,1])$. Поэтому, применив неравенство Маркова (5), получим

$$\begin{aligned}\left\|(q_l^+)'\right\|_{[-1,1]} &= \left\|q_l'\right\|_{[0,1]} \leqslant 2^{2l+1} \|q_l\|_{[0,1]} = 2^{2l+1} \|(f - p_{l-1}) - (f - p_l)\|_{[0,1]} \leqslant \\ &\leqslant 2^{2l+1} \left(\|f - p_{l-1}\|_{[0,1]} + \|f - p_l\|_{[0,1]}\right) = 2^{2l+1}(\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) \leqslant 2^{2l+2}\varepsilon_{l-1}, \quad l = 0, 1, \ldots, m.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\|\left(p_{-1} + q_0^+ + q_1^+ + \ldots + q_m^+\right)'\right\|_{[-1,1]} \leqslant 4 \sum_{l=0}^{m} 2^{2l} \varepsilon_{l-1} = 16 \sum_{l=-1}^{m-1} 2^{2l} \varepsilon_l.$$

Используя равенства (6), (7), (8), последнее неравенство и неравенство типа Джексона (4), получим, что при $n \geqslant 2$ справедлива оценка

$$E_n\left(f^+;[-1,1]\right) \leqslant \|r_m^+\|_{[-1,1]} + E_n\left(p_{-1}^+ + \sum_{k=0}^{m} q_k^+;[-1,1]\right) \leqslant \varepsilon_m + \frac{\pi}{2n}\left\|\left(p_{-1}^+ + \sum_{k=0}^{m} q_k^+\right)'\right\|_{[-1,1]} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_m + \frac{8\pi}{n}\sum_{l=-1}^{m-1} 2^{2l}\varepsilon_l \leqslant \frac{2\pi}{n}\left(E_0\left(f;[0,1]\right) + 4\sum_{l=0}^{m} 2^{2l}E_{2^l}\left(f;[0,1]\right)\right). \quad (9)$$

Здесь мы учли, что

$$\varepsilon_m = \frac{2^{2(m+1)}}{2^{2(m+1)}}\varepsilon_m \leqslant \frac{4\cdot 2^{2m}}{n}\varepsilon_m.$$

Далее для краткости обозначим $E_k = E_k\left(f;[0,1]\right)$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, и учтем, что последовательность $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ неотрицательна и не возрастает. Тогда для $l \in \mathbb{N}$ получим

$$2^{2l}E_{2^l} \leqslant 2^{l+1}\left(E_{2^{l-1}+1} + E_{2^{l-1}+2} + \ldots E_{2^l}\right) \leqslant 4\sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} kE_k.$$

Из (9) и последнего неравенства следует неравенство (2) для $n \geqslant 2$. □

Доказательство теоремы 2. Пусть n, m, p_l и ε_l такие же, как и при доказательстве теоремы 1. Поскольку $f(0) = 0$, то $|p_l(0)| \leqslant \varepsilon_l$. Положим $u_l = u_l(x) = p_l(x) - p_l(0)$. Тогда

$$\varepsilon_l \leqslant \|f - u_l\|_{[0,1]} = \left\|f^- - u_l^-\right\|_{[-1,1]} \leqslant 2\varepsilon_l. \quad (10)$$

Поскольку f^- и u_0 — нечетные функции, то из (10) получаем $E_1\left(f^-;[-1,1]\right) \leqslant 2E_1\left(f;[0,1]\right)$. Значит, неравенство (3) заведомо выполняется для $n = 1$. Поэтому далее считаем $n \geqslant 2$. Имеем

$$f^- - u_0 = v_1^- + v_2^- + \ldots + v_m^- + r_m^-, \quad (11)$$

где $v_l = u_l - u_{l-1}$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ и $r_m = f - u_m$. Здесь мы учли, что $u_0^-(x) = u_0(x)$, $x \in [-1,1]$. Из (10) получаем

$$\|r_m^-\|_{[-1,1]} \leqslant 2\varepsilon_m = 2E_{2^m}\left(f;[0,1]\right), \quad (12)$$

и для всех $l = 1, 2, \ldots, m$ справедливы оценки

$$\|v_l\|_{[0,1]} = \left\|\,(f - u_{l-1}) - (f - u_l)\,\right\|_{[0,1]} \leqslant \|f - u_{l-1}\|_{[0,1]} + \|f - u_l\|_{[0,1]} \leqslant 2\varepsilon_{l-1} + 2\varepsilon_l \leqslant 4\varepsilon_{l-1}. \quad (13)$$

Функции $v_1^-, v_2^-, \ldots, v_m^-$ непрерывно дифференцируемы в точке 0, а на отрезках $[-1,0]$ и $[0,1]$ являются полиномами, следовательно, эти функции принадлежат пространству $W_\infty^2\left([-1,1]\right)$. Дважды применив неравенство А. А. Маркова (5), с учетом (13) получим

$$\left\|\left(v_l^-\right)''\right\|_{[-1,1]} = \left\|(v_l)''\right\|_{[0,1]} \leqslant 16\cdot 2^{4l}\varepsilon_{l-1}, \quad l = 1, 2, \ldots, m. \quad (14)$$

Из неравенства Джексона (4) для $s = 2$, равенства (11) и неравенств (12) и (14) получаем

$$E_n\left(f^-;[-1,1]\right) \leqslant \left\|r_m^-\right\|_{[-1,1]} + E_n\left(\sum_{l=2}^{m} v_l^-;[-1,1]\right) \leqslant 2\varepsilon_m + \frac{\pi}{2n^2}\left\|\left(\sum_{l=2}^{m} v_l^-\right)''\right\|_{[-1,1]} \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon_m + \frac{\pi}{2n^2}\sum_{l=2}^{m} 16\cdot 2^{4l}\varepsilon_{l-1} = 2\varepsilon_m + \frac{\pi}{n^2}2^7\sum_{l=1}^{m-1} 2^{4l}\varepsilon_l \leqslant \frac{2^7\pi}{n^2}\left(\sum_{l=1}^{m} 2^{4l}\varepsilon_l\right). \quad (15)$$

Здесь учтено, что

$$\varepsilon_m = \frac{2^{4(m+1)}}{2^{4(m+1)}}\varepsilon_m \leqslant \frac{2^4\cdot 2^{4m}}{n^2}\varepsilon_m.$$

В силу неотрицательности и невозрастания $E_k = E_k(f;[0,1])$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$2^{4l} E_{2^l} \leqslant 2^{3l+1} \left(E_{2^{l-1}+1} + E_{2^{l-1}+2} + \ldots + E_{2^l} \right) \leqslant 2^4 \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} k^3 E_k.$$

Из (15) и последней оценки следует (3). □

3. Рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжения функции. Вопросы, обсуждаемые в данной статье, естественным образом возникли при изучении вопросов рациональной аппроксимации четного и нечетного продолжений непрерывных функций.

Обозначим через $\mathcal{R}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множество алгебраических рациональных функций степени не выше n с действительными коэффициентами. Для $f \in C[a,b]$ будем рассматривать наилучшие равномерные рациональные приближения

$$R_n(f;[a,b]) := \inf \left\{ \|f - r\|_{[a,b]} : r \in \mathcal{R}_n \right\}.$$

Очевидно, что для наилучшего рационального приближения $f \in C([0,1])$ и ее четного и нечетного продолжений на $[-1,1]$ справедливы неравенства

$$R_n\left(f^{\pm};[-1,1]\right) \geqslant R_n(f;[0,1]), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{16}$$

Здесь для f^- предполагается, что $f(0) = 0$. В [2] доказана следующая теорема для наилучших рациональных приближений четного продолжения непрерывной функции.

Теорема 4. *Для любой функции $f \in C([0,1])$ и любых $n, s \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$R_{2n}\left(f^+;[-1,1]\right) \leqslant \frac{c(s)}{n^s} \left[\sum_{k=0}^{n} \sqrt[s]{R_k(f;[0,1])} \right]^s,$$

где $c(s)$ — некоторая положительная величина, зависящая от s.

Отметим, что в [2] теорема 4 получена не только для отрезка, но и для функций, непрерывных на расширенной полуоси $[0,+\infty]$ и продолженной четным образом на расширенную числовую прямую.

Рассматривая случай, когда наилучшие рациональные приближения имеют порядок стремления к нулю не выше степенного, из неравенства (16) и теоремы 4, получаем интересное следствие.

Следствие 3. *Пусть $f \in C([0,1])$ и $\alpha \in (0,+\infty)$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ справедлива эквивалентность*

$$R_n\left(f^+;[-1,1]\right) = O\left(n^{-\alpha}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad R_n(f;[0,1]) = O\left(n^{-\alpha}\right).$$

В качестве примера, демонстрирующего применение теоремы 4, рассмотрим следующие функции с логарифмическими особенностями:

$$h_{\nu\beta}(x) = \left(\ln_{(\nu)} \frac{a}{x} \right)^{-\beta}, \quad 0 < x \leqslant 1; \quad h_{\nu\beta}(0) = 0.$$

Здесь $\nu \in \mathbb{N}$ означает порядок итерации логарифма, т.е. $\ln_{(1)}(\cdot) = \ln(\cdot)$ и $\ln_{(\nu)}(\cdot) = \ln(\ln_{(\nu-1)}(\cdot))$ при $\nu \geqslant 2$. Число $\beta > 0$; $a > 1$ и достаточно велико, чтобы функция $\ln_{(\nu)}(a/x)$ была положительна при $x \in (0,1]$. Именно, $a > 1$ при $\nu = 1$, $a > e$ при $\nu = 2$, $a > e^e$ при $\nu = 3$ и т. д.

Для наилучших рациональных приближений функций $h_{\nu\beta}$ при указанных значениях ν, β и α справедливы следующие порядковые оценки:

$$R_n(h_{1\beta};[0,1]) \asymp R_n\left(h_{1\beta}^+;[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{n^{1+\beta}}, \quad n \geqslant 1; \tag{17}$$

$$R_n(h_{\nu\beta};[0,1]) \asymp R_n\left(h_{\nu\beta}^+;[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{n\left(\ln_{(\nu-1)} n\right)^\beta}, \quad \nu \geqslant 2, \quad n \geqslant n(\nu). \tag{18}$$

Исследованием наилучших рациональных приближений функций $h_{\nu\beta}$ занимались А. А. Гончар, А. П. Буланов, А. А. Пекарский и др. (см. подробнее [2]). В [2] найдены также точные порядки наилучших рациональных приближений нечетного продолжения функций $h_{\nu\beta}$:

$$R_n\left(h^-_{1\beta};[-1,1]\right)\asymp\frac{1}{n^\beta},\quad n\geqslant 1;$$

$$R_n\left(h^-_{\nu\beta};[-1,1]\right)\asymp\frac{1}{\left(\ln_{(\nu-1)}n\right)^\beta}\quad\text{при}\quad\nu\geqslant 2,\quad n\geqslant n(\nu).$$

Из этих соотношений видно, что обращение неравенства (16) для f^- без потери скорости стремления к нулю последовательности $\{R_n\left(f^-;[-1,1]\right)\}_{n=1}^\infty$ по сравнению с $\{R_n\left(f;[0,1]\right)\}_{n=1}^\infty$ невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов И. И.* О наилучшем приближении многочленами функций $[ax+b|x|]|x|^s$ на отрезке $[-1,1]$// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1950. — *14*, № 5. — С. 405–412.
2. *Мардвилко Т. С., Пекарский А. А.* Применение действительного пространства Харди—Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2022. — С. 16–36.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функции действительного переменного. — М.: ГИФМЛ, 1960.
4. *Bustamante J.* Algebraic Approximation: A Guide to Past and Current Solutions. — Basel AG: Springer, 2012.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ НАН Беларуси «Конвергенция» 2021–2025 гг.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Мардвилко Татьяна Сергеевна
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
E-mail: mardvilko@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 53–82
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-53-82

УДК 517.984

СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ЧЕТЫРЕХЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА. ТРЕТЬЕ ТРИПЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

© 2023 г. **С. М. ТАШПУЛАТОВ, Р. Т. ПАРМАНОВА**

Аннотация. Исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии четырехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда для третьего триплетного состояния системы. Доказаны следующие утверждения. а) Существенный спектр третьего триплета является объединением трех отрезков, а дискретный спектр третьего триплета пуст; б) существенный спектр третьего триплета является объединением восьми отрезков, а дискретный спектр третьего триплета состоит из трех собственных значений; в) существенный спектр третьего триплета является объединением шестнадцати отрезков, а дискретный спектр третьего триплета состоит из одиннадцати собственных значений.

Ключевые слова: модель Хаббарда, примесная модель Хаббарда, четырехэлектронная система, триплетное состояние, существенный спектр, дискретный спектр.

STRUCTURE OF THE ESSENTIAL SPECTRUM AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL. THE THIRD TRIPLET STATE

© 2023 **S. M. TASHPULATOV, R. T. PARMANOVA**

Abstract. The structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the energy operator of four-electron systems in the Hubbard impurity model for the third triplet state of the system are examined. The following statements are proved. (a) The essential spectrum of the third triplet is the union of three segments and the discrete spectrum of the third triplet is empty. (b) The essential spectrum of the third triplet is the union of eight segments and the discrete spectrum of the third triplet consists of three eigenvalues. (c) The essential spectrum of the third triplet is the union of sixteen segments and the discrete spectrum of the third triplet consists of eleven eigenvalues.

Keywords and phrases: Hubbard model, Hubbard impurity model, four-electron system, triplet state, essential spectrum, discrete spectrum.

AMS Subject Classification: 62M15, 46L60, 47L90

1. Введение. В 1963 г. почти одновременно и независимо появились три работы [3, 4, 9], в которых была предложена простая модель металла, ставшая фундаментальной моделью теории сильно коррелированных электронных систем. В этой модели рассматривается единственная невырожденная зона электронов с локальным кулоновским взаимодействием.

Гамильтониан модели содержит всего два параметра: параметр B перескока электрона с узла на соседний узел решетки и параметр U кулоновского отталкивания двух электронов в одном узле. В представлении вторичного квантования он записывается в виде

$$H = B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}. \tag{1}$$

Здесь через $a^+_{m,\gamma}$ $(a_{m,\gamma})$ обозначен ферми-оператор рождения (уничтожения) электрона со спином γ на узле m, суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям в решетке.

Предложенная в [3, 4, 9] модель получила название модели Хаббарда в честь Дж. Хаббарда, внесшего фундаментальный вклад в изучение статистической механики этой системы, хотя локальная форма кулоновского взаимодействия впервые введена Андерсоном для примесной модели в металле (см. [2]. Напоминим также, что модель Хаббарда является частным случаем полярной модели Шубина—Вонсовского (см. [15]), появившейся за тридцать лет до [3,4,9]. В модели Шубина—Вонсовского наряду с кулоновским взаимодействием на одном узле, учитывается взаимодействие электронов на соседних узлах.

Модель Хаббарда является приближением, которое используется в физике твердого тела для описания перехода между проводящим и диэлектрическим состояниями. Она представляет собой простейшую модель, описывающей взаимодействие частиц в решетке. Ее гамильтониан содержит только два слагаемых: кинетический член, соответствующий туннелированию («перескокам») частиц между узлами решетки, и слагаемое, соответствующее внутриузловому взаимодействию. Частицы могут быть фермионами, как в исходной работе Хаббарда, а также бозонами. Простота и достаточность гамильтониана (1) сделала модель Хаббарда весьма популярной и эффективной для описания сильно коррелированных электронных систем.

Модель Хаббарда хорошо описывает поведение частиц в периодическом потенциале при достаточно низких температурах, когда все частицы находятся в нижней блоховской зоне, а дальними взаимодействиями можно пренебречь. Если учитывается взаимодействие между частицами на разных узлах, то такую модель часто называют «расширенной моделью Хаббарда». Впервые эта модель была предложена для описания электронов в твердых телах, с тех пор она представляет особый интерес при изучении высокотемпературной сверхпроводимости. Позднее расширенная модель Хаббарда стала использоваться и при описании поведения ультрахолодных атомов в оптических решетках.

При рассмотрении электронов в твердых телах модель Хаббарда можно считать усложнением модели сильно связанных электронов, которая учитывает только член гамильтониана, связанный с перескоками электронов. В случае сильных взаимодействиях эти две модели могут давать значительно отличающиеся друг от друга результаты. При этом модель Хаббарда точно предсказывает существование так называемых изоляторов Мотта, в которых проводимость отсутствует из-за сильного отталкивания между частицами.

Модель Хаббарда основана на приближении сильно связанных электронов. В приближении сильной связи электроны изначально занимают стандартные орбитали в атомах (узлах решетки), а затем перескакивают на другие атомы в процессе проведения тока. Математически это представляется так называемым интегралом перескока. Этот процесс можно рассматривать как физическое явление, благодаря которому появляются электронные зоны в кристаллических материалах. Однако в более общих зонных теориях взаимодействия между электронами не рассматривается. Кроме интеграла перескока, объясняющего проводимость материала, модель Хаббарда содержит так называемое внутриузловое отталкивание, соответствующее кулоновскому отталкиванию между электронами. Это проводит к конкуренции между интегралом перескока, зависящим от взаимного расположения узлов решетки, и внутриузловым отталкиванием, которое от расположения атомов не зависит. Благодаря этому факту модель Хаббарда объясняет переход проводник-диэлектрик в оксидах некоторых переходных металлов. При нагревании такого материала расстояния между ближайшими соседними узлами в нем увеличиваются, интеграл перескока уменьшается, и внутриузловое отталкивание становится доминирующим фактором.

В настоящее время модель Хаббарда является одной из наиболее интенсивно изучаемых многоэлектронных моделей металла (см. [8, 10–12, 18]). Однако до сих пор имеется очень мало точных результатов для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, и получение соответствующих утверждений представляет большой интерес.

В [10] изучался спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда. Известно, что двухэлектронные системы могут находиться в двух состояниях: триплетном и синглетном (см. [8, 10–12, 18]. В [10] доказано, что спектр гамильтониана H^t системы в триплетном состоянии чисто непрерывен и совпадает с отрезком $[m, M]$, а у оператора H^s системы в синглетном состоянии, кроме непрерывного спектра $[m, M]$, при некоторых значениях квазиимпульса существует единственное антисвязанное состояние (см. [10]). Для антисвязанного состояния реализуется такое коррелированное движение электронов, при котором велик вклад двоичных состояний. При этом в силу замкнутости системы энергия должна оставаться постоянной и большой. Это вынуждает электроны не расходиться на большие расстояния. Далее, существенным является то обстоятельство, что связанные состояния (их иногда называют состояния типа рассеяния) ниже непрерывного спектра не формируется. Это вполне понятно, так как взаимодействие имеет характер отталкивания. Заметим, что при $U < 0$ реализуется, как нетрудно видеть, обратная ситуация: ниже непрерывного спектра имеется связанное состояние (антисвязанные состояния отсутствуют), поскольку в этом случае электроны притягиваются друг к другу.

Для первой полосы спектр не зависит от параметра U кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле и соответствует энергии двух невзаимодействующих электронов, в точности совпадая с триплетной полосой. Вторая полоса в гораздо большей степени определяется кулоновским взаимодействием: от U зависят как амплитуды, так и энергия двух электронов, причем сама полоса исчезает при $U \to 0$, а при $U \to \infty$ неограниченно возрастает. Вторая полоса в основном соответствует одночастичному состоянию, а именно движению двойки, т.е. двухэлектронным связанным состояниям.

В [1] изучался спектр и волновые функции системы трёх электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда. Известно, что трехэлектронные системы могут находиться в трех состояниях: квартетном и двух дублетных (см. [1]).

Квартетное состояние соответствует свободному движению трех электронов на решетке, и ему отвечают базисные функции

$$q^{3/2}_{m,n,p} = a^+_{m,\uparrow} a^+_{n,\uparrow} a^+_{p,\uparrow} \varphi_0.$$

В [1] доказано, что существенный спектр системы в квартетном состоянии состоит из единственного отрезка, а трехэлектронное связанное состояние или трехэлектронное антисвязанное состояние отсутствуют.

Дублетному состоянию соответствуют базисные функции

$$^1 d^{1/2}_{m,n,p} = a^+_{m,\uparrow} a^+_{n,\downarrow} a^+_{p,\uparrow} \varphi_0, \quad ^2 d^{1/2}_{m,n,p} = a^+_{m,\uparrow} a^+_{n,\uparrow} a^+_{p,\downarrow} \varphi_0.$$

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора первого дублетного состояния $\widetilde{H}^d_1$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, т.е. в системе существует единственное антисвязанное состояние. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора первого дублетного состояния $\widetilde{H}^d_1$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр оператора пуст, т.е., в системе антисвязанные состояние отсутствуют. В одномерном случае существенный спектр оператора второго дублетного состояния $\widetilde{H}^d_2$ является объединением трёх отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора второго дублетного состояния $\widetilde{H}^d_2$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки, т.е. в системе существует не более одного антисвязанного состояния, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст, т.е., в системе антисвязанные состояния отсутствуют.

В [16] изучался спектр и волновые функции системы четырех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в триплетном состоянии системы. Четырехэлектронные системы могут находиться в шести состояниях: квинтетном, трех триплетных и двух синглетных (см. [16]). Триплетным состояниям соответствуют следующие базисные функции:

$$^1t^1_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}\varphi_0, \quad ^2t^1_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0, \quad ^3t^1_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\downarrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0.$$

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора в первом триплетном состоянии $^1\widetilde{H}^1_t$ является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора в первом триплетном состоянии $^1\widetilde{H}^1_t$ является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст. Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора второго дублетного состояния $^2\widetilde{H}^1_t$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора во втором триплетном состоянии $^2\widetilde{H}^1_t$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст.

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора в третьем триплетном состоянии $^3\widetilde{H}^1_t$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора третьего триплетного состояния $^3\widetilde{H}^1_t$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрехков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст. Итак, здесь существует три типа триплетных состояний, имеющих различное происхождение.

В [17] изучался спектр и волновые функции системы четырех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в квинтетном и синглетных состояниях системы. В квинтетном состоянии свободные движения четырех электронов в решетке описываются следующими базисными функциями:

$$q^2_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0.$$

В [17] доказано, что спектр системы в квинтетном состоянии чисто непрерывен и совпадает с сегментом $[4A - 8B\nu, 4A + 8B\nu]$, и в системе отсутствуют четырехэлектронные связанные состояния или четырехэлектронные антисвязанные состояния. Синглетному состоянию соответствуют следующие базисные функции:

$$^1s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0, \quad ^2s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0,$$

и эти два синглетные состояния имеют различное происхождение.

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора первого синглетного состояния $^1\widetilde{H}^s_4$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае существенный спектр оператора первого синглетного состояния $^1\widetilde{H}^s_4$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр оператора $^1\widetilde{H}^s_4$ пуст. Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора второго синглетного состояния $^2\widetilde{H}^s_4$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае существенный спектр оператора второго синглетного состояния

${}^2\widetilde{H}_4^s$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр оператора пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст.

2. Гамильтониан системы. В настоящей работе рассматривается оператор энергии четырехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда и описывается структура существенного и дискретного спектров системы для третьих триплетных состояний. Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$\begin{aligned} H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}+ \\ +(A_0-A)\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где A (A_0) — энергия электрона в узле решетке, B (B_0) — интеграл переноса между соседними узлами (между электрона и примесями); для удобства считаем, что $B>0$ $(B_0>0)$, $\tau=\pm e_j$, $j=1,2,\ldots,\nu$, где e_j — единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям; U — параметр кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле, γ — спиновый индекс, $\gamma=\uparrow$ или $\gamma=\downarrow$; через $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены значения спина $1/2$ и $-1/2$; $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m\in Z^\nu$.

Энергия системы зависит от ее полного спина S. В случае насыщенного ферромагнитного состояния ($S=N_e/2$, где N_e — число электронов в системе) решение задачи является точным и тривиальным для любого допустимого числа электронов N_e. В этом случае система представляет собой идеальный ферми-газ электронов с одним направлением проекции спинов.

Наряду с гамильтонианом H, N_e-электронная система характеризуется полным спином S, $S=S_{\max},S_{\max}-1,\ldots,S_{\min}$, $S_{\max}=N_e/2, S_{\min}=0,1/2$. Гамильтониан (2) коммутирует со всеми компонентами оператора $S=(S^+,S^-,S^z)$ полного спина системы, поэтому структура собственных функций и собственные значения системы зависят от S. Гамильтониан H действует в антисимметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$.

Пусть φ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$. Третье триплетное состояние соответствует свободному движению четырех электронов на решетке и их взаимодействие, и ему отвечают базисные функции

$${}^3t^1_{p,q,r,k\in Z^\nu} = a^+_{p\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r\uparrow}a^+_{k\uparrow}\varphi_0.$$

Подпространство ${}^3\mathcal{H}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$, соответствующее третьему триплетному состоянию, есть множество всех векторов вида

$${}^3\psi^1_t = \sum_{p,q,r,k\in Z^\nu}\widetilde{f}(p,q,r,k)\,{}^3t^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}, \quad \widetilde{f}\in l_2^{\mathrm{as}},$$

где l_2^{as} — подпространство антисимметричных функций из пространства $l_2((Z^\nu)^4)$.

Теорема 1. *Подпространство ${}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$ инвариантно относительно оператора H, и сужение ${}^3H^1_t = H/_{{}^3\mathcal{H}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}}$ оператора H на подпространство ${}^3\mathcal{H}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор ${}^3\overline{H}^1_t$, действующий в пространстве l_2^{as} по формуле*

$$\begin{aligned} \big({}^3\overline{H}^1_t f\big)(p,q,r,k) = 4Af(p,q,r,k)+ \\ +B\sum_{\tau}\Big[f(p+\tau,q,r,k)+f(p,q+\tau,r,k)+f(p,q,r+\tau,k)+f(p,q,r,k+\tau)\Big]+ \\ +U\Big[\delta_{p,q}+\delta_{q,r}+\delta_{q,k}\Big]+(A_0-A)\Big[\delta_{p,0}+\delta_{q,0}+\delta_{r,0}+\delta_{k,0}\Big]f(p,q,r,k)+ \\ +(B_0-B)\sum_{\tau}\Big[\delta_{p,0}f(\tau,q,r,k)+\delta_{q,0}f(p,\tau,r,k)+\delta_{r,0}f(p,q,\tau,k)+\delta_{k,0}f(p,q,r,\tau)+ \end{aligned}$$

$$+\,\delta_{p,\tau} f(0,q,r,k)+\delta_{q,\tau} f(p,0,r,k)+\delta_{r,\tau} f(p,q,0,k)+\delta_{k,\tau} f(p,q,r,0)\Big]+$$
$$+\,(U_0-U)\Big[\delta_{p,0}\delta_{p,q}+\delta_{q,0}\delta_{q,r}+\delta_{k,0}\delta_{q,k}\Big] f(p,q,r,k). \quad (3)$$

Сам оператор ${}^3H_t^1$ *на вектор* ${}^3\psi_t^1\in {}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$ *действует по формуле*

$$ {}^3H_t^1{}^3\psi_t^1=\sum_{p,q,r,k\in Z^\nu}\big({}^3\overline{H}{}^1_t f\big)(p,q,r,k){}^3t^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}. \quad (4)$$

Доказательство. Подействуем гамильтонианом H на векторы ${}^3\psi_t^1\in {}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$ с использованием обычных антикоммутационных соотношений между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах

$$\{a_{m,\gamma},a^+_{n,\beta}\}=\delta_{m,n}\delta_{\gamma,\beta},\quad \{a_{m,\gamma},a_{n,\beta}\}=\{a^+_{m,\gamma},a^+_{n,\beta}\}=\theta,$$

а также учтем, что $a_{m,\gamma}\varphi_0=\theta$, где θ — нулевой элемент пространства ${}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$. Отсюда получается утверждение теоремы. □

Лемма 1. *Спектры операторов* ${}^3H_t^1$ *и* ${}^3\overline{H}{}^1_t$ *совпадают.*

Доказательство. Так как операторы ${}^3H_t^1$ и ${}^3\overline{H}{}^1_t$ являются ограниченными самосопряженными операторами, то из критерия Вейля (см. [13, гл. VII, раздел 3]) следует существование такой последовательности векторов ψ_i, что

$$\psi_i=\sum_{p,q,r,k} f_i(p,q,r,k)a^+_{p\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r\uparrow}a^+_{k\uparrow}\varphi_0,\quad \|\psi_i\|=1,\quad \lim_{i\to\infty}\big\|\big({}^3H_t^1-\lambda\big)\psi_i\big\|=0, \quad (5)$$

где $\lambda\in\sigma\big({}^3H_t^1\big)$. С другой стороны,

$$\Big\|\big({}^3H_t^1-\lambda\big)\psi_i\Big\|^2=\Big(\big({}^3H_t^1-\lambda\big)\psi_i,\big({}^3H_t^1-\lambda\big)\psi_i\Big)=$$
$$=\sum_{p,q,r,k}\Big\|\big({}^3\overline{H}{}^1_t-\lambda\big)f_i(p,q,r,k)\Big\|^2\Big(a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0,a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0\Big)=$$
$$=\sum_{p,q,r,k}\Big\|\big({}^3\overline{H}{}^1_t-\lambda\big)F_i(p,q,r,k)\Big\|^2\Big(a_{k,\uparrow}a_{r,\uparrow}a_{q,\downarrow}a_{p,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0,\varphi_0\Big)=$$
$$=\sum_{p,q,r,k}\Big\|\big({}^3\overline{H}{}^1_t-\lambda\big)F_i(p,q,r,k)\big\|^2(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{p,q,r,k}\Big\|\big({}^3\overline{H}{}^1_t-\lambda\big)F_i(p,q,r,k)\Big\|^2\to 0,$$

при $i\to\infty$, где

$$F_i=\sum_{p,q,r,k} f_i(p,q,r,k),\quad \|F_i\|^2=\sum_{p,q,r,k}|f_i(p,q,r,k)|^2=\|\psi_i\|^2=1.$$

Это означает, что $\lambda\in\sigma\big({}^3\overline{H}{}^1_t\big)$. Следовательно, $\sigma\big({}^3\overline{H}{}^1_t\big)\subset\sigma\big({}^3\overline{H}{}^1_t\big)$.

Обратно, пусть $\overline{\lambda}\in\sigma(\overline{H}{}^q_2)$. Тогда в силу того же критерия Вейля существует такая последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty$, что

$$\|F_i\|=1,\quad \lim_{i\to\infty}\big\|({}^3\overline{H}{}^1_t-\overline{\lambda})\psi_i\big\|=0.$$

Полагая

$$F_i=\sum_{p,r,t,k} f_i(p,r,t,k),\quad \|F_i\|=\Bigg(\sum_{p,r,t,k}|f_i(p,r,t,k)|^2\Bigg)^{1/2},$$

получим

$$\|\psi_i\|=\|F_i\|=1,\quad \big\|({}^3\overline{H}{}^1_t-\overline{\lambda})F_i\big\|=\big\|({}^3\overline{H}{}^1_t-\overline{\lambda})\psi_i\big\|\to 0\quad \text{при } i\to\infty.$$

Отсюда вытекает, что $\overline{\lambda} \in \sigma\big({}^3\overline{H}{}_t^1\big)$ и, следовательно, $\sigma\big({}^3\overline{H}{}_t^1\big) \subset \sigma\big({}^3H_t^1\big)$. Эти два соотношения означают, что $\sigma\big({}^3H_t^1\big) = \sigma\big({}^3\overline{H}{}_t^1\big)$. □

Оператор ${}^3H_t^1$ будем называть оператором четырехэлектронного третьего триплета в примесной модели Хаббарда.

Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^4) \to L_2((T^\nu)^4) \equiv {}^3\widetilde{\mathcal{H}}{}_t^1,$$

где T^ν — ν-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, т.е. $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим ${}^3\widetilde{H}{}_t^1 = \mathcal{F}\,{}^3\overline{H}{}_t^1\mathcal{F}^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор ${}^3\overline{H}{}_t^1$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{as}}((T^\nu)^4)$, где L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^4)$.

Положим $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$ и $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

Теорема 2. *Преобразование Фурье оператора ${}^3\overline{H}{}_t^1$ есть оператор ${}^3\widetilde{H}{}_t^1 = \mathcal{F}\,{}^3\overline{H}{}_t^1\mathcal{F}^{-1}$, который действует в пространстве $L_2^{\mathrm{as}}((T^\nu)^4)$ по формуле*

$$\begin{aligned}
{}^3\widetilde{H}{}_t^1\,{}^3\psi_t^1 &= h(\lambda,\mu,\gamma,\theta)f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)+\\
&+U\left[\int\limits_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s,\gamma,\theta)ds + \int\limits_{T^\nu} f(\lambda,s,\mu+\gamma-s,\theta)ds + \int\limits_{T^\nu} f(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s)ds\right]+\\
&+\varepsilon_1\left[\int\limits_{T^\nu} f(s,\mu,\gamma,\theta)ds + \int\limits_{T^\nu} f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt + \int\limits_{T^\nu} f(\lambda,\mu,k,\theta)dk + \int\limits_{T^\nu} f(\lambda,\mu,\gamma,\xi)d\xi\right]+\\
&+2\varepsilon_2\Bigg[\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\lambda_i+\cos s_i\big]f(s,\mu,\gamma,\theta)ds + \int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\mu_i+\cos t_i\big]f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt+\\
&+\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\gamma_i+\cos k_i\big]f(\lambda,\mu,k,\theta)dk + \int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\theta_i+\cos\xi_i\big]f(\lambda,\mu,\gamma,\xi)d\xi\Bigg]+\\
&+\varepsilon_3\left[\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(s,t,\gamma,\theta)\,ds\,dt + \int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(\lambda,s,t,\theta)\,ds\,dt + \int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(\lambda,s,\gamma,t)\,ds\,dt\right], \qquad (6)
\end{aligned}$$

где

$$h(\lambda,\mu,\gamma,\theta) = 4A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\lambda_i+\cos\mu_i+\cos\gamma_i+\cos\theta_i\big]$$

и L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^4)$.

Учитывая, что функция $f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)$ является антисимметрической, и используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространствах (см. [14]), нетрудно убедиться, что оператор ${}^3\widetilde{H}{}_t^1$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
{}^3\widetilde{H}{}_t^1\,{}^3\psi_t^1 &= \widetilde{H}_1\otimes I\otimes I\otimes I + I\otimes\widetilde{H}_1\otimes I\otimes I + I\otimes I\otimes\widetilde{H}_1\otimes I+\\
&+I\otimes I\otimes I\otimes\widetilde{H}_1 + U\int\limits_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds + \varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(s,t)\,ds\,dt =\\
&=\left\{\widetilde{H}_1\otimes I + I\otimes\widetilde{H}_1 + U\int\limits_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds + \varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(s,t)\,ds\,dt\right\}\otimes I\otimes I+\\
&+I\otimes I\otimes\Big\{\widetilde{H}_1\otimes I + I\otimes\widetilde{H}_1\Big\}, \qquad (7)
\end{aligned}$$

где

$$(\widetilde{H}_1 f)(\lambda) = \left\{ A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos\lambda_i \right\} f(\lambda) + \varepsilon_1 \int\limits_{T^\nu} f(s)ds + 2B \int\limits_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \left[\cos\lambda_i + \cos s_i \right] f(s)ds, \tag{8}$$

и I — единичный оператор в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ одноэлектронных состояний.

Спектр оператора $A \otimes I + I \otimes B$, где A и B — плотно определенные ограниченные линейные операторы, был изучен в [5–7]. В этих работах даны явные формулы, выражающие существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(A \otimes I + I \otimes B)$ и дискретный спектр $\sigma_{\mathrm{disc}}(A \otimes I + I \otimes B)$ оператора $A \otimes I + I \otimes B$ через спектр $\sigma(A)$ и дискретный спектр $\sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ оператора A и через спектр $\sigma(B)$ и дискретный спектр $\sigma_{\mathrm{disc}}(B)$ оператора B:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{disc}}(A \otimes I + I \otimes B) = \Big\{ \sigma(A) \backslash \sigma_{\mathrm{ess}}(A) + \sigma(B) \backslash \sigma_{\mathrm{ess}}(B) \Big\} \backslash \\ \backslash \Big\{ \big(\sigma_{\mathrm{ess}}(A) + \sigma(B) \big) \cup \big(\sigma(A) + \sigma_{\mathrm{ess}}(B) \big) \Big\}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A \otimes I + I \otimes B) = \big(\sigma_{\mathrm{ess}}(A) + \sigma(B) \big) \cup \big(\sigma(A) + \sigma_{\mathrm{ess}}(B) \big). \tag{10}$$

Ясно, что

$$\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \big\{ \lambda + \mu : \lambda \in \sigma(A),\ \mu \in \sigma(B) \big\}.$$

Следовательно, сначала необходимо исследовать спектр оператора одноэлектронных систем в примесной модели Хаббарда $\widetilde{H}_1$.

3. Одноэлектронная система в примесной модели Хаббарда. Гамильтониан одноэлектронных систем в примесной модели Хаббарда имеет вид

$$H = A \sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma} a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma} a_{m+\tau,\gamma} + (A_0 - A) \sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma} a_{0,\gamma} + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a^+_{0,\gamma} a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma} a_{0,\gamma}), \tag{11}$$

где A (A_0) — энергия электрона в узле решетке, B (B_0) — интеграл переноса между соседними узлами (между электрона и примесями); для удобства считаем, что $B > 0$ ($B_0 > 0$), $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, где e_j — единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям; γ — спиновый индекс ($\uparrow$ или $\downarrow$); $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ соответственно — операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$, через $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены значения спина $1/2$ и $-1/2$.

Через $\mathcal{H}_1$ обозначим гильбертово пространство, натянутое на векторы вида

$$\psi = \sum_p a^+_{p,\uparrow} \varphi_0.$$

Это пространство называется пространством одноэлектронных состояний оператора H. Пространство $\mathcal{H}_1$ инвариантно относительно действий оператора H. Обозначим через $H_1 = H|_{\mathcal{H}_1}$ сужение оператора H на подпространство $\mathcal{H}_1$.

Как и в доказательстве теоремы 2, используя антикоммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электрона в узле решетке, докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пространство $\mathcal{H}_1$ инвариантно относительно оператора H. Сужение H_1 является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим в $\mathcal{H}_1$ по формуле*

$$H_1 \psi = \sum_p (\overline{H}_1 f)(p) a^+_{p,\uparrow} \varphi_0, \quad \psi \in \mathcal{H}_1, \tag{12}$$

где $\overline{H}_1$ является линейным ограниченным оператором, действующим в пространстве l_2 по формуле

$$(\overline{H}_1 f)(p) = A f(p) + B \sum_\tau f(p + \tau) + \varepsilon_1 \delta_{p,0} f(p) + \varepsilon_2 \sum_\tau (\delta_{p,\tau} f(0) + \delta_{p,0} f(\tau)). \tag{13}$$

Лемма 2. *Спектры операторов $\overline{H}_1$ и H_1 совпадают.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Как и выше, обозначим через $\mathcal{F} : l_2(Z^\nu) \to L_2(T^\nu) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_1$ преобразование Фурье. Положим $\widetilde{H}_1 = \mathcal{F}\overline{H}_1\mathcal{F}^{-1}$. Оператор $\overline{H}_1$ действует в гильбертовом пространстве $L_2(T^\nu)$.

Используя формулы (13) и свойства преобразования Фурье, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Оператор $\widetilde{H}_1$ действует в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ по формуле*

$$(\widetilde{H}_1 f)(\mu) = \left[A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\mu_i\right] f(\mu) + \varepsilon_1\int\limits_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left[\cos\mu_i + \cos s_i\right]f(s)ds, \qquad (14)$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $s = (s_1, \ldots, s_n) \in T^\nu$.

Известно, что непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ не зависит от чисел ε_1 и ε_2 и заполняет весь отрезок

$$[m_\nu, M_\nu] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu],$$

где

$$m_\nu = \min_{x\in T^\nu} h(x), \quad M_\nu = \max_{x\in T^\nu} h(x), \quad h(x) = A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos x_i).$$

Для нахождения собственных значений и собственных функций оператора $\widetilde{H}_1$ запишем (14) в следующем виде:

$$\left\{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\mu_i - z\right\} f(\mu) + \varepsilon_1\int\limits_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left[\cos\mu_i + \cos s_i\right]f(s)ds = 0, \qquad (15)$$

где $z \in R$.

Сначала рассмотрим случай $\nu = 1$. Введем обозначения

$$a = \int\limits_T f(s)ds, \quad b = \int\limits_T f(s)\cos s ds, \quad h(\mu) = A + 2B\cos\mu.$$

Из (15) следует, что

$$f(\mu) = -\frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\cos\mu)a + 2\varepsilon_2 b}{h(\mu) - z}. \qquad (16)$$

Используя (16), выразим a и b и получим следующую систему двух линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\left(1 + \int\limits_T \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\cos s}{h(s) - z}ds\right) a + 2\varepsilon_2\int\limits_T \frac{ds}{h(s) - z} b = 0,$$

$$\int\limits_T \frac{\cos s(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\cos s)}{h(s) - z}dsa + \left(1 + 2\varepsilon_2\int\limits_T \frac{\cos sds}{h(s) - z}\right) b = 0.$$

Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда детерминант системы $\Delta_1(z)$ равен нулю, где

$$\Delta_1(z) = \left(1 + \int\limits_T \frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\cos s)ds}{h(s) - z}\right) \cdot \left(1 + 2\varepsilon_2\int\limits_T \frac{\cos sds}{h(s) - z}\right) - \\ - 2\varepsilon_2\int\limits_T \frac{ds}{h(s) - z}\int\limits_T \frac{\cos s(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 coss)}{h(s) - z}ds.$$

Поэтому имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Действительное число $z \notin [m_1, M_1]$ является собственным значением оператора $\widetilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_1(z)$.*

Следующая теорема описывает спектр оператора $\widetilde{H}_1$ в случае, когда $\nu = 1$.

Теорема 5. *Пусть $\nu = 1$.*

A. *Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

B. *Если $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (соответственно, $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$), лежащее ниже (соответствено, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

C. *Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения*

$$z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}, \quad z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}, \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащих ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

D. *Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение*

$$z = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1} \quad (\text{соответственно,} \quad z = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}), \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащее выше (соответственно, ниже) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

E. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение*

$$z = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$; здесь $\alpha > 1$ — действительное число.

F. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение*

$$z = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1, \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$; здесь $\alpha > 1$ — действительное число.

G. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения*

$$\begin{aligned} z_1 &= A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1, \\ z_2 &= A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} > M_1, \end{aligned} \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра $\widetilde{H}_1$; здесь $0 < \alpha < 1$ — действительное число.

H. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения*

$$\begin{aligned} z_1 &= A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1, \\ z_2 &= A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} > M_1, \end{aligned} \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра $\widetilde{H}_1$; *здесь* $0 < \alpha < 1$ — *действительное число.*

I. *Если* $-2B < \varepsilon_2 < 0$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$.

Доказательство. В случае, когда $\nu = 1$, непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ совпадает с отрезком $[m_1, M_1] = [A - 2B, A + 2B]$. Выражая все интегралы, входящие в уравнение $\Delta_1(z) = 0$, через интеграл

$$J(z) = \int_T \frac{ds}{A + 2B\cos s - z}, \tag{17}$$

получаем, что уравнение $\Delta_1(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\Big[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\Big] J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0. \tag{18}$$

Поскольку функция (17) является дифференцируемой на множестве $\mathbb{R} \setminus [m_1, M_1]$ и

$$J'(z) = \int_T \frac{ds}{[A + 2B\cos s - z]^2} > 0, \quad z \notin [m_1, M_1],$$

функция $J(z)$ является монотонно возрастающей функцией z в $(-\infty, m_1)$ и в $(M_1, +\infty)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} &J(z) \to +0 \quad \text{при } z \to -\infty, &&J(z) \to +\infty \quad \text{при } z \to m_1 - 0,\\ &J(z) \to -\infty \quad \text{при } z \to M_1 + 0, &&J(z) \to -0 \quad \text{при } z \to +\infty. \end{aligned}$$

Если $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$, то из (18) вытекает, что

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Функция

$$\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$$

имеет точку разрыва $z_0 = A - \dfrac{B^2\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$. Так как

$$\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2}$$

для всех $z \neq z_0$, отсюда следует, что функция $\psi(z)$ является монотонно возрастающей (убывающей) функцией z в $(-\infty, z_0)$ и в $(z_0, +\infty)$ в случае, когда $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$). Кроме того, если $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_2 < -2B$, то

$$\begin{aligned} &\psi(z) \to +0 \quad \text{при } z \to -\infty, &&\psi(z) \to +\infty \quad \text{при } z \to z_0 - 0,\\ &\psi(z) \to -\infty \quad \text{при } z \to z_0 + 0, &&\psi(z) \to -0 \quad \text{при } z \to +\infty. \end{aligned}$$

Соответственно, если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то

$$\begin{aligned} &\psi(z) \to -0 \quad \text{при } z \to -\infty, &&\psi(z) \to -\infty \quad \text{при } z \to z_0 - 0,\\ &\psi(z) \to +\infty \quad \text{при } z \to z_0 + 0, &&\psi(z) \to +0 \quad \text{при } z \to +\infty. \end{aligned}$$

A. Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (18) имеет вид

$$\big\{\varepsilon_1 B^2 - B^2(z - A)\big\} J(z) = 0. \tag{19}$$

Ясно, что $J(z) \neq 0$ для значений $z \notin \sigma_{\text{cont}}(\widetilde{H}_1)$. Поэтому $\varepsilon_1 - z + A = 0$, т.е. $z = A + \varepsilon_1$. Если $\varepsilon_1 < -2B$, то это собственное значение лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$; если же $\varepsilon_1 > 2B$, то это собственное значение лежит выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

B. Если $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (18) имеет вид

$$\varepsilon_1 B^2 J(z) + B^2 = 0,$$

т.е. $J(z) = -1/\varepsilon_1$. Ясно, что интеграл $J(z)$ вычисляется в квадратурах, и ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем $J(z) > 0$ (соответственно, $J(z) < 0$); следовательно, $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 0$). Вычисляя интеграл

$$J(z) = \int\limits_{T^\nu} \frac{ds}{A + 2B\cos s - z}$$

для z, лежащих ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, получаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1},$$

имеющее решение $z = A - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Для значений z, лежащих выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, имеем уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1};$$

его решение, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, имеет вид $z = A + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$.

C. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то уравнение для собственных значений и собственных функций принимает вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2 \quad \text{или} \quad J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A)}.$$

Положим $E = \dfrac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$; тогда $J(z) = -\dfrac{E}{z-A}$ или $J(z) = \dfrac{E}{A-z}$. Если z лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A-z},$$

имеющее решение вида

$$z = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}.$$

Ясно, что $E^2 > 1$. Это собственное значение лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если z лежит выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, уравнение для собственных значений и его решение имеют соответственно вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z-A}, \quad z = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}};$$

это собственное значение лежит выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

D. Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то уравнение для собственных значений имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2 \quad \text{или} \quad J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}. \tag{20}$$

Положим $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Сначала рассмотрим уравнение (20) в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Из (20) получаем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2B},$$

решения которого суть

$$z_1 = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}, \quad z_2 = A - 2B.$$

Неравенства $z_i < A - 2B$, $i = 1, 2$, не выполняются. Рассмотрим уравнение (20) в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$:

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A + 2B}.$$

Проверяя условия $z_i > A + 2B$, $i = 1, 2$, обнаруживаем, что неравенство $z_1 > A + 2B$ выполняется, а неравенство $z_2 > A + 2B$ нет. Следовательно, в этом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A + 2B(E^2+1)/(E^2-1)$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Пусть $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$; тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2B}, \quad \text{где} \quad E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}.$$

В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z + 2B},$$

корни которого суть

$$z_1 = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + 2B.$$

Неравенство $z_1 < A - 2B$ верно, а неравенство $z_2 < A - 2B$ нет. В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A - 2B}, \quad z_1 = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}, \quad z_2 = A + 2B.$$

Неравенства $z_1 > A + 2B$ и $z_2 > A + 2B$ не выполняются. Поэтому в рассматриваемом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

E. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ или, соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то, положив $\varepsilon_1 = 2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $\alpha > 1$ — действительное число, получим уравнение для собственных значений в виде

$$\left\{\alpha\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B} \cdot B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\right\} J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0,$$

или

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) + (B+\varepsilon_2)^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)}.$$

Положив $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$, запишем

$$J(z) = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}. \tag{21}$$

Сначала рассмотрим это выражение в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, где

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2\alpha B};$$

решения имеют вид

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}.$$

Решение z_1 не удовлетворяет условию $z_1 < A - 2B$, в то время как $z_2 < A - 2B$, но неравенство $z_2 < A - 2\alpha B$ не выполняется. Неравенство $z_1 > A + 2B$ верно, а $z_2 > A + 2B$ нет. Поскольку $A - 2\alpha B < A + 2B$, получаем, что $z_1 > A - 2\alpha B$. Следовательно, в рассматриваемом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A+2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})/(E^2-1)$, лежащее выше непрерывного спектра.

F. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ или, соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то положим $\varepsilon_1 = -2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $\alpha > 1$. Уравнение для собственных значений имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)}.$$

Положив $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$, запишем

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}. \tag{22}$$

В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z + 2\alpha B}$$

примет вид

$$(E^2-1)(A-z)^2 - 4\alpha B(A-z) - 4B^2(E^2+\alpha^2) = 0.$$

Отсюда находим

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

Проверим условия $z_i < m_1 = A - 2B$, $i = 1, 2$. Неравенство $z_1 < A - 2B$ верно, а $z_2 < A - 2B$ нет. Уравнение (22) в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B};$$

его корни суть

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(-\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

Условие $z > A+2B$ не выполняется для z_1 и выполняется для z_2 верно. Неравенство $z_2 > A+2\alpha B$ не выполнено. Следовательно, в рассматриваемом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A - 2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})/(E^2-1) < m_1$, лежащее ниже непрерывного спектра.

G. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ или, соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то, положив $\varepsilon_1 = 2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $0 < \alpha < 1$, получим уравнение для собственных значений

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{23}$$

Положив $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$, перепишем уравнение (23) в виде (21). В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2\alpha B}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

корни которого суть

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

Неравенства $z_1 < A - 2B$, $z_1 < A - 2\alpha B$, $z_2 < A - 2B$ и $z_2 < A - 2\alpha B$ выполняются, а неравенство $z_1 < A - 2B$ нет. В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение (23) принимает вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B};$$

его корни равны

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

Неравенства $z_1 > A+2B$, $z_1 > A-2\alpha B$, $z_1 > A-2\alpha B$ выполнены, а неравенства $z_2 > A+2B$ и $z_2 > A+2\alpha B$ нет. Следовательно, в рассматриваемом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},$$

лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

H. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ или, соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$, то, полагая $\varepsilon_1 = -2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $0 < \alpha < 1$, получаем уравнение для собственных значений

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1,$$

которое примет вид (22), где $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ получаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z + 2\alpha B}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

с корнями

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},$$

для которых $z_1 < A-2B$, $z_1 < A-2\alpha B$, $z_2 < A-2B$ и $z_1 < A-2B$, но неравенство $z_2 < A-2\alpha B$ не выполняется. В области выше непрерывного спектра имеем уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 4B^2}} = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B},$$

решения которого

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$$

удовлетворяют условиям для которых $z_1 > A-2\alpha B$, $z_2 > A+2B$, $z_2 > A+2\alpha B$. Следовательно, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственные значения

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},$$

лежащие соответственно ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

I. Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$, и функция

$$\psi(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A)}$$

является монотонно убывающей в интервалах $(-\infty, z_0)$ и $(z_0, +\infty)$. Кроме того,

$$\psi(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} -0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to z_0-0]{} -\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} +0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to z_0+0]{} +\infty.$$

Для функции $J(z)$ имеем

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} 0, \quad J(z) \xrightarrow[z\to m_1-0]{} +\infty, \quad J(z) \xrightarrow[z\to M_1+0]{} -\infty, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0.$$

Поэтому уравнение $\psi(z) = J(z)$ не может имеет решения вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Следовательно, в этом случае, оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. □

Теперь рассмотрим двумерный случай. Уравнение $\Delta_2(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$(\varepsilon_2 + B)^2 + \Big\{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A)\Big\}J(z) = 0,$$

где

$$J(z) = \int\limits_{T^2} \frac{ds_1 ds_2}{A + 2B(\cos s_1 + \cos s_2) - z}.$$

В этом случае

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(z) \xrightarrow[z\to m_2-0]{} +\infty, \quad J(z) \xrightarrow[z\to M_2+0]{} -\infty, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0.$$

В одномерном и двумерном случаях поведение функции $J(z)$ идентично. Поэтому имеем результаты, аналогичные результатам для одномерного случая.

Рассмотрим трехмерный случай. Обозначим через W интеграл Ватсона (см. [19])

$$W = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3\,dx\,dy\,dz}{3-\cos x-\cos y-\cos z} \simeq 1{,}516. \tag{24}$$

Теорема 6. *Пусть $\nu = 3$.*

A. 1. *Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A+\varepsilon_1$, лежащее ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

2. *Если $\varepsilon_2 = -B$ и $-6B \leqslant \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $2B < \varepsilon_1 \leqslant 6B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

B. *Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 \leqslant -6B/W$, (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \geqslant 6B/W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 (соответственно, z_2), лежащих ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ и $-6B/W \leqslant \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B/W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

C. *Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E < W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E < W$), где $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z (соответственно, $\widetilde{z}$), лежащее ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

D. *Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < 4W/3$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < 4W/3$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z (соответственно, $\widetilde{z}$), лежащее выше (соответственно, ниже) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

E. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

F. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

G. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2, лежащих соответственно выше и ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

H. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $-2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $-2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2, лежащих соответственно выше и ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

I. *Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

Доказательство. В случае, когда $\nu = 3$, непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ представляет собой отрезок $[m_3, M_3] = [A - 6B, A + 6B]$. Выражая все интегралы, выходящие в уравнение

$$\Delta_3(z) = \left(1 + \int\limits_{T^3} \frac{\left(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i\right) ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z}\right) \left(1 + 6\varepsilon_2 \int\limits_{T^3} \frac{\cos s_i \, ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z}\right) -$$

$$- 6\varepsilon_2 \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z} \int\limits_{T^3} \frac{\left(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{3} \cos s_i\right) \cos s_1 \, ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z} = 0,$$

через интеграл

$$J(z) = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z}, \tag{25}$$

получаем, что уравнение $\Delta_3(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\left[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\right] J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Функция (25) дифференцируема по z на множестве $\mathbb{R} \setminus [m_3, M_3]$ и

$$J'(z) = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\left[A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z\right]^2} > 0, \quad z \notin [m_3, M_3].$$

В трехмерном случае интеграл

$$\int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_2} = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_2}$$

имеет конечное значение. Выражая этот интеграл через интеграл Ватсона (24) и учитывая, что рассматриваемая мера нормирована, находим $J(z) = W/(6B)$. Кроме того, функция $J(z)$ монотонно возрастает на множестве $(-\infty, m_3) \cup (M_3, +\infty)$, и в трехмерном случае

$$J(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} +0, \quad J(A - 6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} -0, \quad J(A + 6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Если $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$, то из уравнения (18) следует

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Функция в правой части последнего равенства имеет точку разрыва

$$z_0 = A - \frac{B^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}.$$

Так как

$$\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2 (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2}$$

для всех $z \neq z_0$, заключаем, что функция $\psi(z)$ монотонно возрастает на множестве $(-\infty, z_0) \cup (z_0, +\infty)$, в случае $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$). Кроме того, если $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_2 < -2B$, то

$$\psi(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} +0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to z_0 - 0]{} +\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to z_0 + 0]{} -\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} -0.$$

Соответственно, если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то

$$\psi(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} -0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to z_0 - 0]{} -\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to z_0 + 0]{} +\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} +0.$$

A. Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (18) имеет вид (19). Ясно, что $J(z) \neq 0$ для значений $z \notin \sigma_{\mathrm{cont}}(\widetilde{H}_1)$. Следовательно, $\varepsilon_1 - z + A = 0$, т.е. $z = A + \varepsilon_1$. Если $\varepsilon_1 < -6B$, то это собственное значение лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, а если $\varepsilon_1 > 6B$ — то выше. Если $-6B \leqslant \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $2B < \varepsilon_1 \leqslant 6B$), то указанное собственное значение не лежит вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

B. Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$), то уравнение для собственных значений имеет вид

$$\varepsilon_1 B^2 J(z) + B^2 = 0 \quad \text{или} \quad J(z) = -\frac{1}{\varepsilon_1}.$$

В трехмерном случае

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Следовательно, для того, чтобы уравнение $J(z) = -1/\varepsilon_1$ в оласти ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имело решение, должно выполнятся неравенство $-1/\varepsilon_1 < W/(6B)$ (соответственно, $-1/\varepsilon_1 > -W/(6B)$), т.е. $\varepsilon_1 < -6B/W$, $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 6B/W$, $\varepsilon_1 > 0$). Если $-6B/W < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $0 < \varepsilon_1 < 6B/W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

C. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$), то уравнение для собственных значений примет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2 \quad \text{или} \quad J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A)}.$$

Положим $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Тогда

$$J(z) = -\frac{E}{z-A} \quad \text{или} \quad J(z) = \frac{E}{A-z}.$$

В трехмерном случае

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Следовательно, для того, чтобы уравнение $J(z) = -E/(z-A)$ в области ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имело решение, должно выполняться неравенство $E/(6B) < W/(6B)$ (соответственно, $-E/(6B) > -W/(6B)$,) т.е. $E < W$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

D. Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то уравнение для собственных значений имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A+2B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2,$$

откуда получаем уравнение в виде (20):

$$J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A+2B)}.$$

Положим $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Сначала рассмотрим уравнение (20) в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. В этой области

$$\frac{E}{A-z-2B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad \frac{E}{A-z-2B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{4B},$$
$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Итак, в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение $J(z) = E/(A-z-2B)$ имеет единственное решение, если $E/(4B) > W/(6B)$, т.е. $E > 2W/3$. Это неравенство неверно;

следовательно, в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, это уравнение не имеет решения.

Теперь рассмотрим уравнение $J(z) = -E/(z - A + 2B)$ в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. В этой области

$$\frac{E}{A - z - 2B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad \frac{E}{A - z - 2B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{8B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Итак, в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение $J(z) = E/(A - z - 2B)$ имеет единственное решение, если $-E/(8B) > -W/(6B)$, т.е. $E < 4W/3$. Это неравенство верно; следовательно, в рассматриваемой области уравнение имеет единственное собственное значение z.

Если $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то уравнение для собственных значений имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2.$$

Отсюда получаем уравнение в виде (20):

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}.$$

Положим $E = (B + \varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Сначала рассмотрим уравнение (20) в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. В этой области

$$\frac{E}{A - z + 2B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad \frac{E}{A - z + 2B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{8B},$$
$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(A - 6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Итак, ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, уравнение $J(z) = E/(A - z + 2B)$ имеет единственное решение, если $E/(8B) < W/(6B)$, т.е. $E < 4W/3$. Это неравенство верно; следовательно, в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, уравнение имеет единственное решение.

Теперь рассмотрим уравнение для собственных значений $J(z) = -E/(z - A - 2B)$ в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. В этой области

$$\frac{E}{A - z + 2B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad \frac{E}{A - z + 2B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{4B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Итак, в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение $J(z) = E/(A - z + 2B)$ имеет единственное решение, если $-E/(4B) > -W/(6B)$, т.е. $E < 2W/3$. Это неравенство неверно. Следовательно, в рассматриваемой области уравнение не имеет решений.

E. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то положим $\varepsilon_1 = 2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $\alpha > 1$. Тогда уравнение для собственных значений имеет вид

$$\left\{\alpha\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\right\}J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0,$$

или

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)}.$$

Положив $E = (B + \varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$, получим уравнение (21). В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(A - 6B) = \frac{W}{6B},$$
$$-\frac{E}{z - A + 2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad -\frac{E}{z - A + 2\alpha B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{(6 - 2\alpha)B}.$$

Уравнение (21) имеет единственное решение, если $E/(6-2\alpha)B < W/(6B)$, т.е. $E < (3-\alpha)W/3$. Поскольку это неравенство не выполняется, оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений в области ниже своего непрерывного спектра.

В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем

$$J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A-6B) = -\frac{W}{6B},$$
$$-\frac{E}{z-A+2\alpha B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad -\frac{E}{z-A+2\alpha B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{6B+2\alpha B}.$$

Решение уравнения (21) единственно, если $-E/((6+2\alpha)B) > -W/(6B)$, т.е. $E < (3+\alpha)W/3$. Поскольку это неравенство не выполняется, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1, расположенное выше непрерывного спектра.

F. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), положим $\varepsilon_1 = -2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $\alpha > 1$. Уравнение для собственных значений примет вид

$$J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A-2\alpha B)}.$$

Пусть $E = (B+\varepsilon_2)^2/\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2$. Тогда получим уравнение вида (22). В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем уравнение

$$J(z) = \frac{E}{A+2\alpha B - z},$$

причем

$$-\frac{E}{z-A-2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad -\frac{E}{z-A-2\alpha B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{6B+2\alpha B}.$$

Уравнение (21) имеет единственное решение, если $E/((6+2\alpha)B) < W/(6B)$, т.е. $E < (3+\alpha)W/3$. Поскольку это неравенство выполняется, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение, расположенное ниже непрерывного спектра.

В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z-A-2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} -0, \quad -\frac{E}{z-A-2\alpha B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{6B-2\alpha B}.$$

Следовательно, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение в области выше непрерывного спектра, если $-E/(6B-2\alpha B) > -W/(6B)$, т.е. $E < (3-\alpha)W/3$. Поскольку последнее неравенство не выполняется, оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений выше непрерывного спектра.

G. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то положим $\varepsilon_1 = 2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда уравнение для собственных значений имеет вид (23):

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A+2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обозначим $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$; тогда уравнение (23) примет вид (21).

В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z-A+2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad -\frac{E}{z-A+2\alpha B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{2B(3-\alpha)}.$$

Уравнение (21) имеет единственное решение, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, если $E/((6-2\alpha)B) > W/(6B)$, т.е. $E > (3-\alpha)W/3$. Это неравенство верно, так что оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 в области ниже непрерывного спектра.

В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z-A+2\alpha B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad -\frac{E}{z-A+2\alpha B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{2B(3+\alpha)}.$$

Уравнение (21) имеет единственное решение, расположенное выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, если $-E/(2B(3+\alpha)) > -W/(6B)$, т.е. $E < (3+\alpha)W/3$. Это неравенство выполнено, поэтому в этом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значений z_1 и z_2, лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра.

H. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$), то положим $\varepsilon_1 = -2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $0 < \alpha < 1$. Уравнение для собственных значений принимает вид (23):

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Тогда уравнение (23) примет вид (22).

В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z - A - 2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{2B(3+\alpha)}.$$

Уравнение (22) имеет единственное решение, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, если $E/((6+2\alpha)B) < W/(6B)$. Отсюда $E < (3+\alpha)W/3$. Это неравенство выполняется, так что оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 в области ниже непрерывного спектра оператора.

В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z - A - 2\alpha B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{2B(3-\alpha)}.$$

Уравнение (22) имеет единственное решение, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, если $-E/(2B(3-\alpha)) < -W/(6B)$, т.е. $E > (3-\alpha)W/3$. Это неравенство верно, так что оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значений z_1 и z_2, лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра.

I. Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$, функция

$$\psi(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$$

монотонно убывает на множестве $(-\infty, z_0) \cup (z_0, +\infty)$ и

$$\psi(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} -0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to z_0-0]{} -\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} +0, \psi(z) \xrightarrow[z\to z_0+0]{} +\infty,$$

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(A+6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0.$$

Следовательно, уравнение $\psi(z) = J(z)$ не может имеет решения, лежащего вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, и указанный оператор не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра. □

Из полученных результатов очевидно, что спектр оператора $\widetilde{H}_1$ состоит из непрерывного спектра и не более чем двух собственных значений.

4. Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$. Оператор ${}^3\widetilde{H}_t^1$ представляется в виде

$${}^3\widetilde{H}_t^1 = \left\{\widetilde{H}_2^t + K(\lambda,\mu)\right\} \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes \widetilde{H}_2^t, \tag{26}$$

где $\widetilde{H}_2^t = \widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1$ — оператор энергии двухэлектронной системы в примесной модели Хаббарда в триплетном состоянии. Используя полученные результаты и представления (7) и (26), опишем структуру существенного спектра и дискретный спектр оператора $\widetilde{H}_2^s = \widetilde{H}_2^t + K(\lambda,\mu)$ и оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

Сначала рассмотрим оператор $\widetilde{H}(U) = \widetilde{H}_2^t + K_1$, где

$$(K_1 f)(s) = U \int\limits_{T^\nu} f_{\Lambda_1}(s)ds, \quad \Lambda_1 = \lambda + \mu.$$

Семейство операторов $\widetilde{H}(U)$ является семейством ограниченных операторнозначных аналитических функций, поэтому можно применить теорему Като—Реликса.

Теорема 7 (теорема Като—Реллиха). *Пусть $T(\beta)$ — аналитическое семейство в смысле Като. Пусть E_0 — невырожденное собственное значение оператора $T(\beta_0)$. Тогда при β, близком к β_0, существует в точности одна точка $E(\beta) \in \sigma(T(\beta))$ вблизи E_0, причем эта точка изолирована и невырождена. При β, близких к β_0, функция $E(\beta)$ аналитична и существует аналитический собственный вектор $\Omega(\beta)$. Если при действительных $\beta - \beta_0$ оператор $T(\beta)$ самосопряжен, то $\Omega(\beta)$ можно выбрать так, что он будет нормирован при действительных $\beta - \beta_0$.*

Так как оператор $\widetilde{H}_2^t$ имеет невырожденное собственное значение вблизи собственного значения $2z_1$ оператора $\widetilde{H}_2^t$, то при U, близком к $U_0 = 0$, оператор $\widetilde{H}(U)$ имеет в точности одно собственное значение $E(U) \in \sigma(\widetilde{H}(U))$ вблизи $2z_1$, причем оно изолировано и невырождено. Таким образом, $E(U)$ — аналитическая функция при U вблизи $U_0 = 0$. При больших значениях существование не более одного дополнительного собственного значения оператора $\widetilde{H}(U)$ следует из того, что возмущение

$$(K_1\widetilde{f})(\lambda, \mu) = U \int\limits_{T^\nu} f_{\Lambda_1}(s)ds$$

есть одномерный оператор.

Теперь рассмотрим семейство операторов $\widetilde{H}(\varepsilon_3) = \widetilde{H}(U) + K_2$, где

$$(K_2 f)(\lambda, \mu) = \int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(s,t)\,ds\,dt.$$

Так как оператор $\widetilde{H}(U)$ имеет невырожденное собственное значение, то вблизи собственного значения $E(U)$ оператора $\widetilde{H}(U)$ оператор $\widetilde{H}(\varepsilon_3)$ вблизи точки $\varepsilon_3 = 0$ имеет в точности одно собственное значение $E(\varepsilon_3) \in \sigma(\widetilde{H}(\varepsilon_3))$ вблизи $E(U)$, которое изолировано и невырождено. Поэтому функция $E(\varepsilon_3)$ аналитична вблизи ε_3.

Обозначим через z_3 и z_4 дополнительные собственные значения оператора $\widetilde{H}_2^s$. Докажем следующие теоремы, описывающие спектр операторов $\widetilde{H}_2^s$ и ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

Теорема 8. *Пусть $\nu = 1$.*

A. *Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z,\ 3A+6B+z] \cup \\ \cup [2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z,\ A+2B+3z] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z,\ 2z+z_3,\ 2z+z_4\big\},$$

где $z = A + \varepsilon_1$, а z_3 и z_4 — дополнительные собственные значение оператора $\widetilde{H}_2^s$.

B. *Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z,\ 3A+6B+z] \cup \\ \cup [2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z,\ A+2B+3z] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z, 2z + z_3,\ 2z + z_4\big\},$$

где $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (*соответственно,* $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$).

C. *Если* $\varepsilon_1 = 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *или* $\varepsilon_1 = 0$ *и* $\varepsilon_2 < -2B$, *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{gathered}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A - 8B,\ 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1,\ 3A + 6B + z_1] \cup \\ \cup [3A - 6B + z_2,\ 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1,\ 2A + 4B + z_1] \cup \\ \cup [2A - 4B + 2z_2,\ 2A + 4B + z_2] \cup [2A - 4B + z_1 + z_2,\ 2A + 4B + z_1 + z_2] \cup \\ \cup [A - 2B + 3z_1,\ A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2,\ A + 2B + 3z_2] \cup \\ \cup [A - 2B + z_1 + 2z_2,\ A + 2B + z_1 + 2z_2] \cup [A - 2B + 2z_1 + z_2,\ A + 2B + 2z_1 + z_2] \cup \\ \cup [2A - 4B + z_3,\ 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4,\ 2A + 4B + z_4] \cup \\ \cup [A - 2B + z_1 + z_3,\ 2A + 4B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_4,\ 2A + 4B + z_1 + z_4] \cup \\ \cup [A - 2B + z_2 + z_3,\ 2A + 4B + z_2 + z_3] \cup [A - 2B + z_2 + z_4,\ 2A + 4B + z_2 + z_4],\end{gathered}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из одиннадцати собственных значений*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{&4z_1,\ 3z_1 + z_2,\ 4z_2,\ 2z_1 + 2z_2,\ z_1 + 3z_2,\ 2z_1 + z_3, \\ &z_1 + z_2 + z_3,\ 2z_2 + z_3,\ 2z_1 + z_4,\ z_1 + z_2 + z_4,\ 2z_2 + z_4\big\},\end{aligned}$$

где

$$z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}, \quad z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}, \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}.$$

D. *Если* $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (*соответственно,* $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{gathered}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A - 8B,\ 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z,\ 3A + 6B + z] \cup \\ \cup [2A - 4B + 2z,\ 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z,\ A + 2B + 3z] \cup \\ \cup [2A - 4B + z_3,\ 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3,\ A + 2B + z + z_3] \cup \\ \cup [2A - 4B + z_4,\ 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4,\ A + 2B + z + z_4],\end{gathered}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z,\ 2z + z_3,\ 2z + z_4\big\},$$

где соответственно

$$z = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1} \quad \text{или} \quad z = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}, \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}.$$

E. *Если* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (*соответственно,* $\varepsilon_2 < -2B$ *и* $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), *то существенный спектр оператор* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{gathered}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A - 8B,\ 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z,\ 3A + 6B + z] \cup \\ \cup [2A - 4B + 2z,\ 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z,\ A + 2B + 3z] \cup \\ \cup [2A - 4B + z_3,\ 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3,\ A + 2B + z + z_3] \cup \\ \cup [2A - 4B + z_4,\ 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4,\ A + 2B + z + z_4],\end{gathered}$$

а дискретный спектр оператор ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{2z,\ z_3,\ z_4\big\},$$

где

$$z = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}, \quad \alpha > 1.$$

F. *Если* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ *(соответственно,* $\varepsilon_2 < -2B$ *и* $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$*), то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = {} & [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z,\ 3A+6B+z] \cup \\ & \cup [2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z,\ A+2B+3z] \cup \\ & \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3] \cup \\ & \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператор ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z,\ 2z+z_3,\ 2z+z_4\big\},$$

где

$$z = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}, \quad \alpha > 1.$$

G. *Если* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ *(сoотв.,* $\varepsilon_2 < -2B$ *и* $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$*), то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = {} & [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1,\ 3A+6B+z_1] \cup \\ & \cup [3A-6B+z_2,\ 3A+6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1,\ 2A+4B+z_1] \cup \\ & \cup [2A-4B+2z_2,\ 2A+4B+z_2] \cup [2A-4B+z_1+z_2,\ 2A+4B+z_1+z_2] \cup \\ & \cup [A-2B+3z_1,\ A+2B+3z_1] \cup [A-2B+3z_2,\ A+2B+3z_2] \cup \\ & \cup [A-2B+z_1+2z_2,\ A+2B+z_1+2z_2] \cup [A-2B+2z_1+z_2,\ A+2B+2z_1+z_2] \cup \\ & \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup \\ & \cup [A-2B+z_1+z_3,\ 2A+4B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_4,\ 2A+4B+z_1+z_4] \cup \\ & \cup [A-2B+z_2+z_3,\ 2A+4B+z_2+z_3] \cup [A-2B+z_2+z_4,\ 2A+4B+z_2+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из одиннадцати собственных значений*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{ & 4z_1,\ 3z_1+z_2,\ 4z_2,\ 2z_1+2z_2,\ z_1+3z_2, \\ & 2z_1+z_3,\ z_1+z_2+z_3,\ 2z_2+z_3,\ 2z_1+z_4,\ z_1+z_2+z_4,\ 2z_2+z_4\big\},\end{aligned}$$

где

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$$

и $0 < \alpha < 1$.

H. *Если* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ *(сoотв.,* $\varepsilon_2 < -2B$ *и* $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$*), то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = {} & [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1,\ 3A+6B+z_1] \cup \\ & \cup [3A-6B+z_2,\ 3A+6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1,\ 2A+4B+z_1] \cup \\ & \cup [2A-4B+2z_2,\ 2A+4B+z_2] \cup [2A-4B+z_1+z_2,\ 2A+4B+z_1+z_2] \cup \\ & \cup [A-2B+3z_1,\ A+2B+3z_1] \cup [A-2B+3z_2,\ A+2B+3z_2] \cup \\ & \cup [A-2B+z_1+2z_2,\ A+2B+z_1+2z_2] \cup [A-2B+2z_1+z_2,\ A+2B+2z_1+z_2] \cup \\ & \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup \\ & \cup [A-2B+z_1+z_3,\ 2A+4B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_4,\ 2A+4B+z_1+z_4] \cup\end{aligned}$$

$$\cup\,[A-2B+z_2+z_3,\ 2A+4B+z_2+z_3]\cup[A-2B+z_2+z_4,\ 2A+4B+z_2+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из одиннадцати собственных значений*:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=\big\{4z_1,\ 3z_1+z_2,\ 4z_2,\ 2z_1+2z_2,\ z_1+3z_2,\\ 2z_1+z_3,\ z_1+z_2+z_3,\ 2z_2+z_3,\ 2z_1+z_4,\ z_1+z_2+z_4,\ 2z_2+z_4\big\},$$

где

$$z_1=A+\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},\quad z_2=A+\frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},\quad E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$$

и $0<\alpha<1$.

I. *Если* $-2B<\varepsilon_2<0$, *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением трех отрезков*:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=[4A-8B,\ 4A+8B]\cup\\ \cup\,[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *пуст*: $\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=\varnothing$.

Доказательство. **A.** Из представлений (7) и (26) и формул (9) и (10) следует, что в одномерном случае непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ состоит из одного отрезка $\sigma_{\mathrm{cont}}(\widetilde{H}_1)=[A-2B,\ A+2B]$, а дискретный спектр состоит из единственного собственного значения $z=A+\varepsilon_1$. Оператор K является двумерным; поэтому существенные спектры операторов $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2^s$ совпадают (см. [19, гл. XIII, § 4]) и состоят из отрезков $[2A-4B,\ 2A+4B]$ и $[A-2B+z,\ A+2B+z]$. При возмущении двумерным оператором K оператор $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ имеет не более двух собственных значений z_3 и z_4.

B. В этом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1, лежащее вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Поэтому существенный спектр оператора $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ является объединением двух отрезков, а дискретный спектр состоит из единственного собственного значения. Остальные утверждения теоремы доказывается аналогично. □

Следующие теоремы описывают структуру существенного спектра и дискретный спектр оператора $\widetilde{H}_2^s$ в трехмерном случае.

Теорема 9. *Пусть* $\nu=3$.

A. 1. *Если* $\varepsilon_2=-B$ *и* $\varepsilon_1<-6B$ (*соответственно,* $\varepsilon_2=-B$ *и* $\varepsilon_1>6B$), *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=[4A-8B,\ 4A+8B]\cup[3A-6B+z,\ 3A+6B+z]\cup\\ \cup\,[2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z,\ A+2B+3z]\cup\\ \cup\,[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3]\cup\\ \cup\,[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=\big\{4z,\ 2z+z_3,\ 2z+z_4\big\},$$

где $z=A+\varepsilon_1$, *а* z_3 *и* z_4 — *дополнительные собственные значение оператора* $\widetilde{H}_2^s$.

2. *Если* $\varepsilon_2=-B$ *и* $-6B\leqslant\varepsilon_1<-2B$ (*соответственно,* $\varepsilon_2=-B$ *и* $2B<\varepsilon_1\leqslant 6B$), *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением трех отрезков*:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=[4A-8B,\ 4A+8B]\cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup\\ \cup\,[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *пуст*: $\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=\varnothing$.

B. *Если* $\varepsilon_2 = -2B$ *или* $\varepsilon_2 = 0$ *и* $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 \leqslant -6B/W$ (*соответственно,* $\varepsilon_2 = -2B$ *или* $\varepsilon_2 = 0$ *и* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \geqslant 6B/W$), *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1,\ 3A+6B+z_1] \cup \\ \cup [2A-4B+2z_1,\ 2A+4B+2z_1] \cup [A-2B+3z_1,\ A+2B+3z_1] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_3,\ A+2B+z_1+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z_1+z_4,\ A+2B+z_1+z_4];\end{aligned}$$

соответственно,

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z_2,\ 3A+6B+z_2] \cup \\ \cup [2A-4B+2z_2,\ 2A+4B+2z_2] \cup [A-2B+3z_2,\ A+2B+3z_2] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z_2+z_3,\ A+2B+z_2+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_4,\ A+2B+z_2+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z_1,\ z_3,\ z_4\big\};$$

соответственно,

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z_2,\ z_3,\ z_4\big\},$$

где z_1 (*соответственно,* z_2) *является собственным значением оператора* $\widetilde{H}_1$.

Если $-6B/W \leqslant \varepsilon_1 < 0$ (*соответственно,* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B/W$), *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением трех отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *пуст*: $\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \varnothing$.

C. *Если* $\varepsilon_1 = 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$, $E < W$ (*соответственно,* $\varepsilon_1 = 0$ *и* $\varepsilon_2 < -2B$, $E < W$), *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z,\ 3A+6B+z] \cup \\ \cup [2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z,\ A+2B+3z] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4];\end{aligned}$$

соответственно,

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+\widetilde{z},\ 3A+6B+\widetilde{z}] \cup \\ \cup [2A-4B+2\widetilde{z},\ 2A+4B+2\widetilde{z}] \cup [A-2B+3\widetilde{z},\ A+2B+3\widetilde{z}] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+\widetilde{z}+z_3,\ A+2B+\widetilde{z}+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+\widetilde{z}+z_4,\ A+2B+\widetilde{z}+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{2z,\ z_3,\ z_4\big\};$$

соответственно,

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{2\widetilde{z},\ z_3,\ z_4\big\},$$

где z (соответственно, $\widetilde{z}$) является собственным значением оператора $\widetilde{H}_1$ и

$$E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}.$$

Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ пуст: $\sigma_{\mathrm{disc}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) = \varnothing$.

D. *Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < 4W/3$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < 4W/3$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков:*

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) &= [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup \\ &\cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup \\ &\cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3] \cup \\ &\cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4];\end{aligned}$$

соответственно,

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) &= [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+\widetilde{z}, 3A+6B+\widetilde{z}] \cup \\ &\cup [2A-4B+2\widetilde{z}, 2A+4B+2\widetilde{z}] \cup [A-2B+3\widetilde{z}, A+2B+3\widetilde{z}] \cup \\ &\cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+\widetilde{z}+z_3, A+2B+\widetilde{z}+z_3] \cup \\ &\cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+\widetilde{z}+z_4, A+2B+\widetilde{z}+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) = \bigl\{2z,\ z_3,\ z_4\bigr\};$$

соответственно,

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) = \bigl\{2\widetilde{z},\ z_3,\ z_4\bigr\},$$

где z (соответственно, $\widetilde{z}$) является собственным значением оператора $\widetilde{H}_1$ и

$$E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}.$$

E. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков:*

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) &= [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1,\ 3A+6B+z_1] \cup \\ &\cup [2A-4B+2z_1,\ 2A+4B+2z_1] \cup [A-2B+3z_1,\ A+2B+3z_1] \cup \\ &\cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_3,\ A+2B+z_1+z_3] \cup \\ &\cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z_1+z_4,\ A+2B+z_1+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\widetilde{H}_2^s) = \bigl\{2z_1,\ z_3,\ z_4\bigr\},$$

где z_1 — собственное значение оператора $\widetilde{H}_1$.

F. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1 + \alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A - 8B,\ 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1,\ 3A + 6B + z_1]\cup\\ \cup [2A - 4B + 2z_1,\ 2A + 4B + 2z_1] \cup [A - 2B + 3z_1,\ A + 2B + 3z_1]\cup\\ \cup [2A - 4B + z_3,\ 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_3,\ A + 2B + z_1 + z_3]\cup\\ \cup [2A - 4B + z_4,\ 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z_1 + z_4,\ A + 2B + z_1 + z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H}_2^s) = \big\{2z_1,\ z_3,\ z_4\big\},$$

где z_1 — собственное значение оператора $\widetilde{H}_1$.

G. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1 - \alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1 - \alpha/3)W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A - 48B, 4A + 48B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1]\cup\\ \cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1]\cup\\ \cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [2A - 12B + z_1 + z_2, 2A + 12B + z_1 + z_2]\cup\\ \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2]\cup\\ \cup [A - 6B + 2z_1 + z_2, A - 6B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 6B + z_1 + 2z_2, A - 6B + z_1 + 2z_2]\cup\\ \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3]\cup\\ \cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4]\cup\\ \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из одиннадцати собственных значений:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z_1,\ 3z_1 + z_2,\ 2z_1 + z_2,\ z_1 + 3z_2,\ 4z_2,\\ 2z_1 + z_3,\ z_1 + z_2 + z_3,\ 2z_2 + z_3,\ 2z_1 + z_4,\ z_1 + z_2 + z_4,\ 2z_2 + z_4\big\},\end{aligned}$$

где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\widetilde{H}_1$.

H. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $E < (1 + \alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $E < (1 + \alpha/3)W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A - 48B, 4A + 48B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1]\cup\\ \cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1]\cup\\ \cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [2A - 12B + z_1 + z_2, 2A + 12B + z_1 + z_2]\cup\\ \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2]\cup\\ \cup [A - 6B + 2z_1 + z_2, A - 6B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 6B + z_1 + 2z_2, A - 6B + z_1 + 2z_2]\cup\\ \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3]\cup\\ \cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4]\cup\\ \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из одиннадцати собственных значений:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z_1,\ 3z_1 + z_2,\ 2z_1 + z_2,\ z_1 + 3z_2,\ 4z_2,\\ 2z_1 + z_3,\ z_1 + z_2 + z_3,\ 2z_2 + z_3,\ 2z_1 + z_4,\ z_1 + z_2 + z_4,\ 2z_2 + z_4\big\},\end{aligned}$$

где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\widetilde{H}_1$.

I. *Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков*:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-48B, 4A+48B] \cup [2A-12B+z_3, 2A+12B+z_3] \cup \\ \cup [2A-12B+z_4, 2A+12B+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ пуст: $\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \varnothing$.

Доказательство.

A.1. Для $\nu = 3$ из теоремы 6 следует, что при $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$) оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее вне области непрерывного спектра. Кроме того, непрерывный спектр является отрезком $[A-6B, A+6B]$, поэтому существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup \\ \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4].$$

Числа $4z$, $2z+z_3$, $2z+z_4$ являются собственными значениями оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

A.2. Из теоремы 6 следует, что при $\varepsilon_2 = -B$ и $-6B \leqslant \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, при $\varepsilon_2 = -B$ и $2B < \varepsilon_1 \leqslant 6B$) оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне области непрерывного спектра, представляющего собой отрезок $[A-6B, A+6B]$. Поэтому существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4],$$

где z_3 и z_4 — дополнительные собственные значения оператора $\widetilde{H}_2^s$, а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ пуст: $\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \varnothing$.

H. Из теоремы 6 следует, что при $\varepsilon_2 > 0$, $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $E < (1+\alpha/3)W$) оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2, лежащих соответственно ниже и выше области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, представляющего собой отрезок $[A-6B, A+6B]$. Поэтому существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением шестнадцати отрезков:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-48B,\ 4A+48B] \cup [3A-18B+z_1,\ 3A+18B+z_1] \cup \\ \cup [3A-18B+z_2,\ 3A+18B+z_2] \cup [2A-12B+2z_1,\ 2A+12B+2z_1] \cup \\ \cup [2A-12B+2z_2,\ 2A+12B+2z_2] \cup [2A-12B+z_1+z_2,\ 2A+12B+z_1+z_2] \cup \\ \cup [A-6B+3z_1,\ A+6B+3z_1] \cup [A-6B+3z_2,\ A+6B+3z_2] \cup \\ \cup [A-6B+2z_1+z_2,\ A-6B+2z_1+z_2] \cup [A-6B+z_1+2z_2,\ A-6B+z_1+2z_2] \cup \\ \cup [2A-12B+z_3,\ 2A+12B+z_3] \cup [A-6B+z_1+z_3,\ A+6B+z_1+z_3] \cup \\ \cup [A-6B+z_2+z_3,\ A+6B+z_2+z_3] \cup [2A-12B+z_4,\ 2A+12B+z_4] \cup \\ \cup [A-6B+z_1+z_4,\ A+6B+z_1+z_4] \cup [A-6B+z_2+z_4,\ A+6B+z_2+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из одиннадцати собственных значений:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z_1,\ 3z_1+z_2,\ 2z_1+z_2,\ z_1+3z_2, \\ 4z_2,\ 2z_1+z_3,\ z_1+z_2+z_3,\ 2z_2+z_3,\ 2z_1+z_4,\ z_1+z_2+z_4,\ 2z_2+z_4\big\},$$

где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\widetilde{H}_1$.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ташпулатов С. М.* О спектральных свойствах трехэлектронных систем в модели Хаббарда// Теор. мат. физ. — 2014. — *179*, № 3. — С. 387–405.
2. *Anderson P. W.* Localized magnetic states in metals// Phys. Rev. — 1961. — *124.* — C. 41–53.
3. *Gutzwiller M. C.* Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals// Phys. Rev. Lett. — 1963. — *10.* — P. 159–162.
4. *Hubbard J.* Electron correlations in narrow energy bands// Proc. Roy. Soc. A. — 1963. — *276.* — P. 238–257.
5. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 1// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *235.* — P. 75–113.
6. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 2. The approximate point spectrum and Kato essential spectrum// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *237.* — P. 223–254.
7. *Ichinose T.* On the spectral properties of tensor products of linear operators in Banach spaces// in: Spectral Theory. — Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, 1982. — *8.* — P. 294–300.
8. *Izyumov Yu. A., Skryabin Yu. N.* Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems. — Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
9. *Kanamori J.* Electron correlation and ferromagnetism of transition metals// Prog. Theor. Phys. — 1963. — *30.* — P. 275–289.
10. *Karpenko B. V., Dyakin V. V., Budrina G. L.* Two electrons in the Hubbard Model// Phys. Met. Metallogr. — 1986. — *61.* — P. 702–706.
11. *Lieb E.* Two theorems on the Hubbard Model// Phys. Rev. Lett. — 1989. — *62.* — P. 1201–1204.
12. *Mattis D.* The few-body problems on a lattice// Rev. Mod. Phys. — 1986. — *58.* — P. 370–379.
13. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis. — New York: Acad. Press, 1972.
14. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4. Operator Analysis. — New York: Academic Press, 1982.
15. *Shubin S. P., Wonsowsky S. V.* On the electron theory of metals// Proc. Roy. Soc. A. — 1934. — *145.* — P. 159–172.
16. *Tashpulatov S. M.* Spectral Properties of three-electron systems in the Hubbard Model// J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — *697*, № 012025. — P. 1–25.
17. *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 3. — P. 530–541.
18. *Tsvelick A. M., Wiegman P. B.* Exact results in the theory of magnetic alloys// Adv. Phys. — 1983. — *32*, № 4. — P. 453–713.
19. *Valkov V. V., Ovchinnikov S. G., Petrakovskii O. P.* The Excitation Spectra of two-magnon systems in easy-axis quasidimensional Ferromagnets// Sov. Phys. Solid State. — 1986. — *30.* — P. 3044–3047.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ташпулатов Садулла Мамаражабович
Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан,
Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru

Парманова Рухсат Тогаймурадовна
Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан,
Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: toshpul@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 83–89
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-83-89

УДК 517.96; 517.984

ОБОБЩЕННАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО ВИДА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2023 г. **А. П. ХРОМОВ**

Аннотация. Приведены результаты по обобщенной смешанной задаче (однородной и неоднородной) для волнового уравнения, основанные на операции интегрирования расходящегося ряда формального решения по методу разделения переменных. Найдено решение обобщенной смешанной задачи для неоднородного уравнения в предположении, что функция, характеризующая неоднородность, локально суммируема. В качестве приложения рассмотрена смешанная задача с ненулевым потенциалом.

***Ключевые слова*:** расходящийся ряд, волновое уравнение, смешанная задача.

GENERALIZED MIXED PROBLEM FOR THE SIMPLEST WAVE EQUATION AND ITS APPLICATIONS

© 2023 **A. P. KHROMOV**

Abstract. In this paper, we present results for generalized homogeneous and inhomogeneous mixed problems for the wave equation based on the operation of integrating a divergent series of a formal solution using the method of separation of variables. A solution to the generalized mixed problem for an inhomogeneous equation is found under the assumption that the function characterizing the inhomogeneity is locally summable. As an application, a mixed problem with nonzero potential is considered.

***Keywords and phrases*:** divergent series, wave equation, mixed problem.

***AMS Subject Classification*:** 35Mxx

Введение Обобщенная смешанная задача для волнового уравнения является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи. Она впервые появилась в [6]. Внешний вид ее такой же, как и у исходной смешанной задачи и характеризуется тем, что в формальном решении ее по методу Фурье потенциал и начальные данные считаются произвольными суммируемыми функциями, а возмущение в случае неоднородной задачи — произвольной локально суммируемой функцией. Ряд формального решения может быть и расходящимся. Расходящийся ряд рассматривается в понимании Л. Эйлера (см. [7, с. 100–101]), основоположника теории суммирования расходящихся рядов. Найти решение обобщенной смешанной задачи — значит найти сумму ряда формального решения.

В настоящей статье основное внимание уделяется следующей обобщенной смешанной задаче простейшего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0 \tag{3}$$

в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$. Ее удается решить, привлекая аксиомы о расходящихся рядах из [3, с. 19], используя следующее правило интегрирования расходящегося ряда:

$$\int \sum = \sum \int, \tag{4}$$

где $\int$ — определенный интеграл, и опираясь на известные результаты, относящиеся к почленному интегрированию тригонометрического ряда Фурье по синусам.

Затем показано, как полученный результат помогает дать решение и обобщенной смешанной задачи для неоднородного уравнения. Наконец, в качестве приложения к вышеприведенным результатам рассмотрена смешанная задача для волнового уравнения с ненулевым потенциалом. Показано, что эта задача приводится к интегральному уравнению, решение которого получается по методу последовательных подстановок.

Кратко содержание статьи представлено в [5].

1. Простейшая однородная обобщенная смешанная задача. Рассмотрим обобщенную смешанную задачу (1)–(3) в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение ее по методу Фурье имеет вид

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t, \tag{5}$$

где

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Имеем

$$u(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-, \quad \text{где} \quad \Sigma_\pm = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t). \tag{6}$$

Отсюда следует, что для вычисления суммы ряда (6) требуется найти сумму тригонометрического ряда Фурье функции $\varphi(x)$, т.е. ряда

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x. \tag{7}$$

Пусть сумма ряда (7) при $x \in [0,1]$ есть какая-либо функция $g(x) \in L[0,1]$ (в запасе имеются только функции из $L[0,1]$). Тогда в соответствии с правилом (4) имеем

$$\int_0^x g(\eta)\,d\eta = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \int_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta. \tag{8}$$

По теореме 3 из [2, с. 320] ряд в (8) сходится при любом $x \in [0,1]$, а его сумма равна

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \int_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta = \int_0^x \varphi(\eta)\,d\eta.$$

Таким образом, получили, что

$$\int_0^x g(\eta)\,d\eta = \int_0^x \varphi(\eta)\,d\eta.$$

Отсюда $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду, т.е. найдена сумма $g(x)$ расходящегося ряда (7). Далее, $\sin n\pi x$ нечетна и 2-периодична. Тогда получаем, что сумма ряда (7) при $x \in (-\infty, \infty)$ равна $\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю ось. В силу (6) получаем, что сумма $u(x,t)$ ряда (5) есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)\big]. \tag{9}$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Решением обобщенной смешанной задачи* (1)–(3) *является функция* $u(x,t)$ *класса* Q*, определенная по формуле* (9).

Функция $u(x,t)$ класса Q означает, что $u(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, где Q_T — множество $[0,1] \times [0,T]$.

2. Приложение. Простейшая неоднородная смешанная задача. Рассмотрим следующую простейшую неоднородную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \tag{12}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q. Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi) \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau)\, d\tau. \tag{13}$$

Так как

$$\frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\, d\eta,$$

то (13) переходит в

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\, d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\, d\eta. \tag{14}$$

Из (14) в силу правила (4) получим

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi) \sin n\pi\eta\, d\eta = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta, \tag{15}$$

поскольку ряд в (15), как это следует из п. 1, имеет сумму $\frac{1}{2}\tilde{f}(\eta,\tau)$, где $\tilde{f}(\eta,\tau)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение по η на всю ось функции $f(\eta,\tau)$ с отрезка $[0,1]$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Решение* $u(x,t)$ *обобщенной смешанной задачи* (10)–(12) *есть функция класса* Q*, определяемая по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta. \tag{16}$$

Отметим, что без привлечения операции интегрирования расходящегося ряда формула (16) приводится в [1].

Тот факт, что $u(x,t)$ есть функция класса Q, дается следующей леммой.

Лемма 1. *Имеет место оценка*

$$\|u(x,t)\|_{L[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}.$$

Доказательство. Из (16) имеем

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta.$$

Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого $T \leqslant m$. Тогда в силу нечетности $\tilde{f}(\eta,\tau)$ по η имеем

$$\int\limits_{-T}^{T+1} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant \int\limits_{-m}^{m+1} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta = \int\limits_{-m}^{0} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta + \int\limits_{0}^{m+1} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta =$$
$$= \int\limits_{-m}^{0} |\tilde{f}(-\eta,\tau)|\,d\eta + \int\limits_{0}^{m+1} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta = \int\limits_{0}^{m} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta + \int\limits_{0}^{m+1} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_{0}^{m+1} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta = 2\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{k}^{k+1} \big|\tilde{f}(\eta,\tau)\big|\,d\eta.$$

Пусть k четно, т.е. $k = 2v$. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_{k}^{k+1} \big|\tilde{f}(\eta,\tau)\big|\,d\eta = \int\limits_{2v}^{2v+1} \big|\tilde{f}(\eta,\tau)\big|\,d\eta = \int\limits_{0}^{1} \big|\tilde{f}(2v+\xi,\tau)\big|\,d\xi = \int\limits_{0}^{1} \big|f(\xi,\tau)\big|\,d\xi.$$

Если k нечетно, т.е. $k = 2v+1$, то

$$\int\limits_{k}^{k+1} \big|\tilde{f}(\eta,\tau)\big|\,d\eta = \int\limits_{2v+1}^{2v+2} \big|\tilde{f}(\eta,\tau)\big|\,d\eta = \int\limits_{0}^{1} \big|\tilde{f}(2v+1+\xi,\tau)\big|\,d\xi = \int\limits_{0}^{1} \big|\tilde{f}(1+\xi,\tau)\big|\,d\xi =$$
$$= \int\limits_{0}^{1} \big|\tilde{f}(-1-\xi,\tau)\big|\,d\xi = \int\limits_{0}^{1} \big|f(1-\xi,\tau)\big|\,d\xi = \int\limits_{0}^{1} \big|f(\xi,\tau)\big|\,d\xi.$$

Таким образом, при всех k (четных и нечетных) получаем один и тот же результат:

$$\int\limits_{k}^{k+1} \big|\tilde{f}(\eta,\tau)\big|\,d\eta = \int\limits_{0}^{1} \big|f(\xi,\tau)\big|\,d\xi.$$

Отсюда

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau 2(m+1)\int\limits_0^1 \big|f(\eta,\tau)\big|d\eta = (m+1)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}.$$

Значит,

$$\int\limits_{Q_T} |u(x,t)|dx\,dt \leqslant T(m+1)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}. \qquad \square$$

3. Приложение. Смешанная задача с ненулевым потенциалом. Сначала рассмотрим следующую обобщенную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{17}$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{18}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{19}$$

Здесь $f(x,t)$ — функция класса Q и $\varphi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где функция $u_0(x,t)$ определена формулой (5), а $u_1(x,t)$ — ряд (13). Поэтому, исходя из пп. 1, 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Обобщенная смешанная задача* (17)–(19) *имеет решение класса Q, определяемое по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta. \tag{20}$$

Теперь приступаем к смешанной задаче с ненулевым потенциалом:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{21}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{22}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t'(x,0) = 0, \tag{23}$$

где $\varphi(x) \in L[0,1]$, $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)u(x,t)$ — функция класса Q.

В этой задаче будем рассматривать $-q(x)u(x,t)$ как возмущение в задаче (17)–(19). Тогда по теореме 3 перейдем от задачи (21)–(23) к интегральному уравнению:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)u}(\eta,\tau)\, d\eta, \tag{24}$$

где $\widetilde{q(\eta)u}(\eta,\tau)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $q(\eta)u(\eta,\tau)$ на всю ось.

Приступаем к решению уравнения (24). Тот факт, что $\tilde{\varphi}(x)$ есть нечетное, 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с $[0,1]$ на всю ось, трактуется следующим образом: сначала нечетно находится $\tilde{\varphi}(x)$ при $x \in [-1,0]$, т.е. $\tilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x)$ при $x \leqslant 0$; затем полученная $\tilde{\varphi}(x)$ на $[-1,1]$ продолжается 2-периодически на всю ось. Отсюда получаются следующие утверждения.

Лемма 2. *Функция $\tilde{\varphi}(x)$ определяется однозначно по $\varphi(x)$.*

Лемма 3. *Операция $\tilde{\varphi}(x)$ линейна, т.е.*

$$\alpha\varphi_1\widetilde{(x) + \beta}\varphi_2(x) = \alpha\tilde{\varphi}_1(x) + \beta\tilde{\varphi}_2(x).$$

Доказательство. Обе операции в формулировке леммы нечетны и 2-периодичны. Но на $[0,1]$ они обе равны $\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)$. Поэтому из леммы 2 следует лемма 3. □

Введем оператор

$$Bf = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)f}(\eta,\tau)\, d\eta, \tag{25}$$

где $f(x,t) \in C[Q_T]$.

Лемма 4. *Оператор B является линейным и ограниченным в $C[Q_T]$, причем*

$$\|Bf\|_{C[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|q\|_1 \cdot \|f(x,t)\|_{C[Q_T]},$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$.

Доказательство. Линейность B следует из леммы 3. Докажем ограниченность. Как и в лемме 1, имеем

$$|Bf| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} \big|\widetilde{q(\eta)f}(\eta,\tau)\big|\, d\eta \leqslant (m+1)\|q(x)f(x,t)\|_{L[Q_T]} \leqslant$$

$$\leqslant (m+1)T\|q\|_1\|f(x,t)\|_{C[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|q\|_1\|f(x,t)\|_{C[Q_T]}. \quad \square$$

Образуем ряд

$$A_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x,t),$$

где $a_n(x,t)=Ba_{n-1}$ $(n\geqslant 1)$ и $a_0(x,t)=\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t)+\tilde{\varphi}(x-t)]$.

Лемма 5 (см. [6, с. 220–221])**.** *Если m — наименьшее натуральное число, для которого $T\leqslant m$, то*

$$\|a_n(x,t)\|_{C[Q_T]}\leqslant M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!},\quad n\geqslant 1, \tag{26}$$

где $M_1=\|a_1(x,t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2=(2m+1)\|q\|_1$. Кроме того, $M_1\leqslant C_T\|\varphi\|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Приведем необходимое для дальнейшего доказательство этой леммы.

Доказательство. Положим $f_n(x,t)=-q(x)a_n(x,t)$. Очевидно, $f_n(x,t)\in L[Q_T]$, $a_n(x,t)\in C[Q_T]$ при $n\geqslant 1$. При $n=1$ оценка (26) справедлива. Предположим, что она выполняется и при некотором n, и докажем ее справедливость при $n+1$. Имеем

$$|a_{n+1}(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}|\tilde{f}_n(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-m}^{m+1}\left|\tilde{f}_n(\eta,\tau)\right|d\eta\leqslant\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^1|q(\eta)||a_n(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^1|q(\eta)|M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\,d\eta=M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^n\frac{t^n}{n!}.$$

Тем самым оценка (26) установлена. Оценим M_1. Имеем

$$|a_1(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}|\tilde{f}_0(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{-m}^{m+1}|\tilde{f}_0(\eta,\tau)|\,d\eta=$$
$$=\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^1|f_0(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^1|q(\eta)|\,d\eta\int\limits_{-T}^{T+1}|\tilde{\varphi}(\tau)|\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^1|q(\eta)|\,d\eta\int\limits_{-m}^{m+1}|\tilde{\varphi}(\tau)|\,d\tau=\frac{(2m+1)^2}{2}\|q\|_1\|\varphi\|_1.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка для M_1. □

Таким образом, ряд $A_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T.

Теорема 4. *Уравнение* (24) *имеет единственное решение $u(x,t)=A(x,t)$, где $A(x,t)=a_0(x,t)+A_1(x,t)$, получаемое по методу последовательных подстановок.*

Доказательство. Положим $v(x,t)=u(x,t)-a_0(x,t)$. Тогда из (24) получаем для $v(x,t)$ интегральное уравнение

$$v(x,t)=a_1(x,t)+Bv. \tag{27}$$

Так как $a_1(x,t)\in C[Q_T]$, то уравнение (27) рассматриваем в $C[Q_T]$. По методу последовательных подстановок из (27) получаем ряд $A_1(x,t)$. Поскольку B — линейный и ограниченный оператор в $C[Q_T]$ и $BA_1(x,t)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n(x,t)$, то $A_1(x,t)$ есть решение (27). Докажем, что уравнение (27) имеет единственное решение. Допустим, что кроме $A_1(x,t)$ есть еще другое решение $w(x,t)$ этого уравнения. Тогда $z(x,t) = A_1(x,t) - w(x,t)$ — решение уравнения $z(x,t) = Bz(x,t)$, а, значит, и $z(x,t) = B^n z(x,t)$ при любом натуральном n. Заметим, что оценка (26) в лемме 5 остается верной, если в качестве $a_1(x,t)$ взять любую функцию из $C[Q_T]$. Возьмем в качестве такой функции функцию $z(x,t)$. Тогда из оценки (26) получаем следующую оценку:

$$\|z(x,t)\|_{C[Q_T]} = \|B^{n-1}z(x,t)\|_{C[Q_T]} \leqslant \|z(x,t)\|_{C[Q_T]} \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \|q\|_1 \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда в силу произвольности n получаем $z(x,t) = 0$, и единственным решением уравнения (27) является ряд $A_1(x,t)$, а уравнение (24) — ряд $A(x,t)$. □

Для сравнения приведем следующие результаты из [6] и [4].

Теорема 5 (см. [4, теорема 6]). *Если функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то сумма ряда $A(x,t)$ представляет собой классическое решение задачи* (21)–(23) *при условии, что $\partial^2 u(x,t)/\partial t^2$ класса Q (уравнение удовлетворяется почти всюду).*

Теорема 6 (см. [6, теорема 5]). *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, $\varphi_h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5, $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то соответствующее $\varphi_h(x)$ классическое решение $u_h(x,t)$ задачи* (21)–(23) *сходится при $h \to 0$ по норме $L[Q_T]$ к $A(x,t)$.*

Утверждение теоремы следует из линейности $A(x,t)$ по $\varphi(x)$ и леммы 5.

Таким образом, классическое решение задачи (21)–(23) и решение ее, приводимое в статье, выражаются одной и той же формулой: $u(x,t) = A(x,t)$, и $A(x,t)$ в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$ играет роль обобщенного решения, понимаемого как предел классических.

Отметим еще, что ряд $A(x,t)$ в [6] получается иным приемом с более активным использованием обобщенной смешанной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Сходимость формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для простейшего неоднородного волнового уравнения// Мат. Мех. — 2017. — *19*. — С. 41–44.
2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной пееменной. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1957.
3. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: ИЛ, 1951.
4. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 5. — С. 717–731.
5. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения// Мат. 21 Междунар. конф. «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января — 4 февраля 2022 г.). — Саратов, 2022. — С. 319–324.
6. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2021. — *27*, № 4. — С. 215–238.
7. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хромов Август Петрович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского

E-mail: khromovap@info.sgu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 90–119
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-90-119

УДК 517.9; 531.01

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ. III. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2023 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе предъявлены тензорные инварианты (первые интегралы, дифференциальные формы) для динамических систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям отдельно при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, а также при любом конечном n. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — *227.* — С. 100–128.

Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — *228.* — С. 92–118.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL AND DISSIPATIVE SYSTEMS. III. SYSTEMS ON TANGENTS BUNDLES OF FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2023 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we present tensor invariants (first integrals and differential forms) for dynamical systems on the tangent bundles of smooth n-dimensional manifolds separately for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, and for any finite n. We demonstrate the connection between the existence of these invariants and the presence of a full set of first integrals that are necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems. The force fields acting in systems considered make them dissipative (with alternating dissipation).

The first part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **227** (2023), pp. 100–128.

The second part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **228** (2023), pp. 92–118.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

СОДЕРЖАНИЕ

3. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия

Введение. В данном разделе представлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Как показано ранее, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, которое можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее пятимерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по четырехмерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего пятимерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Важные частные случаи систем с четырьмя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [53, 55]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем представлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [16]). Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, четырехмерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

3.1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к четырехмерному многообразию.

3.1.1. Координаты на касательном расслоении и коэффициенты связности. Рассмотрим гладкое четырехмерное риманово многообразие $M^4\{\alpha,\beta\}$ с координатами (α,β), $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha,\beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\dot\alpha,\dot\beta_1,\dot\beta_2,\dot\beta_3;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее достаточно общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha=z_4f_4(\alpha),\quad \dot\beta_1=z_3f_1(\alpha),\quad \dot\beta_2=z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1),\quad \dot\beta_3=z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \tag{3.1.1}$$

где $f_1(\alpha)$, ..., $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1,\ldots,z_4$, в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических, например, с тринадцатью ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на расслоении четырехмерных поверхностей вращения, пространства Лобачевского и т. д.):

$$\begin{cases}\ddot\alpha+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2+\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2+\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2=0,\\ \ddot\beta_1+2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1+\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2+\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2=0,\\ \ddot\beta_2+2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2+2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2+\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2=0,\\ \ddot\beta_3+2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3+2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3+2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3=0;\end{cases} \tag{3.1.2}$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае кинематических соотношений (3.1.1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^4\{z_4,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$, примут вид

$$\begin{cases}\dot z_1=-f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4-\\ \qquad -f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3-f_2(\alpha)g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2,\\ \dot z_2=-f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4-\\ \qquad -f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3-\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_3=-f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4-\\ \qquad -\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2-\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\\ \dot z_4=-f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_4^2-\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_3^2-\\ \qquad -\dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2-\dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)z_1^2,\end{cases} \tag{3.1.3}$$

и уравнения геодезических (3.1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (3.1.1) почти всюду эквивалентны составной системе (3.1.1), (3.1.3) на многообразии $TM^4\{z_4,\ldots,z_1;\ \alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ с новой частью координат $z_1,\ldots,z_4$ на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (3.1.2) (к системе (3.1.1), (3.1.3)).

(a) Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного пятимерного твердого тела.

(b) Системы на касательных расслоениях более общих четырехмерных поверхностей вращения.

(c) Системы на касательном расслоении четырехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Отметим, что в [72, 73] рассмотрены примеры систем геодезических на касательном расслоении четырехмерной сферы с различными метриками, а в [7] — примеры систем геодезических на расслоении четырехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского.

3.1.2. О количествах «неизвестных» функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении четырехмерного гладкого многообразия, то количество разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет равно $n^2(n+1)/2$ при $n=4$, т.е. 40 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических очень сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha)$, …, $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ из (3.1.1)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся тринадцатью (т.е. $n(n-1)+1$ при $n=4$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (3.1.2). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их число равно 7 (т.е. $n(n-1)/2+1$ при $n=4$). Таким образом, имеем 20 функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество $B(4)$ накладываемых алгебраических и дифференциальных условий на имеющиеся $A(4)=20$ функций ($A(n)=3n(n-1)/2+2$ при $n=4$)? Данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 20, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(4)$, тем больше разность $A(4)-B(4)$, и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(4)=16$ условий на имеющиеся $A(4)=20$ функций. Число $B(4)$ складывается из трех слагаемых: $B(4)=B_1(4)+B_2(4)+B_3(4)$. Число $B_1(4)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha),\ldots,f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$, а именно,

$$f_1(\alpha)\equiv f_2(\alpha)\equiv f_3(\alpha)=:f(\alpha),\quad g_1(\beta_1)\equiv g_2(\beta_1)=:g(\beta_1), \tag{3.1.4}$$

т.е. $B_1(4)=3$ (в общем случае $B_1(n)=(n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(4)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_1(\alpha),\\ \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_2(\beta_1),\quad\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_3(\beta_2),\end{gathered} \tag{3.1.5}$$

т.е. $B_2(4)=6$ (в общем случае $B_2(n)=n(n-1)/2$). Число $B_3(4)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_1(\alpha),\ldots,f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{3.1.6a}$$

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{3.1.6b}$$

$$f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{3.1.6c}$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{3.1.6d}$$

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{3.1.6e}$$

$$f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{3.1.6f}$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0, \tag{3.1.6g}$$

т.е. $B_3(4)=7$ (в общем случае $B_3(n)=n(n-1)/2+1$). Видно, что в общем случае

$$B(n)=B_1(n)+B_2(n)+B_3(n)=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+1=(n-1)^2+\frac{n(n-1)}{2}+1;$$

при этом

$$A(n)-B(n)=\frac{3n(n-1)}{2}+2-(n-1)^2-\frac{n(n-1)}{2}-1=n,$$

что говорит об увеличении количества «произвольных» функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n — размерность рассматриваемого риманова многообразия. В нашем случае $A(4)-B(4)=4$.

Замечание 3.1. Пусть выполнены условия (3.1.4), (3.1.5), при этом реализуется система дифференциальных равенств (3.1.6). Тогда справедливы следующие семь ($n(n-1)/2+1$ при $n=4$) тождеств:

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{11}^\alpha(\alpha),\quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1),\quad \Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta_1,\beta_2), \tag{3.1.7a}$$

$$\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{22}^1(\beta_1),\quad \Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{33}^1(\beta_1,\beta_2), \tag{3.1.7b}$$

$$\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{33}^2(\beta_2), \tag{3.1.7c}$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha), \tag{3.1.7d}$$

а также три (т.е. $(n-1)(n-2)/2$ при $n=4$) тождества

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha)\equiv g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1)\equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta_1,\beta_2)=:\Gamma_4(\alpha), \tag{3.1.8a}$$

$$\Gamma_{22}^1(\beta_1)\equiv h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1,\beta_2). \tag{3.1.8b}$$

Доказательство. В условиях замечания первая группа из первых трех равенств (3.1.6a)–(3.1.6c) переписывается в виде

$$\begin{gathered}
f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv 0,\\
f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv 0,\\
f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta)\equiv 0.
\end{gathered} \tag{3.1.9}$$

Из (3.1.9) следуют тождества (3.1.7a) и тождества (3.1.8a).

Далее, в условиях замечания вторая группа равенств (3.1.6d)–(3.1.6e)переписывается в виде

$$\begin{gathered}
\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta)\equiv 0,\\
\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta)\equiv 0.
\end{gathered} \tag{3.1.10}$$

Из (3.1.10) следуют тождества (3.1.7b) и тождества (3.1.8b). Наконец, в условиях замечания равенство (3.1.6f) переписывается в виде

$$\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]+h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta)\equiv 0. \tag{3.1.11}$$

Из (3.1.11) следует тождество (3.1.7c). Из (3.1.6g) также следует последнее тождество (3.1.7d). □

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 3.1.

Замечание 3.2. Пусть выполнены условия (3.1.4), (3.1.5), при этом реализуются 10 тождеств (3.1.7) и (3.1.8). Тогда справедлива система дифференциальных равенств (3.1.6), которая примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Gamma^\alpha_{11}(\alpha) \equiv \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)g^2(\beta_1) \equiv \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) =: \Gamma_4(\alpha), \\ \Gamma^1_{22}(\beta_1) \equiv \Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2)h^2(\beta_2), \quad \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2} + h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\beta_2) \equiv 0. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

Таким образом, при выполнении девяти условий (3.1.4), (3.1.5) семь условий (3.1.6) и семь условий (3.1.12) в упомянутом смысле эквивалентны.

3.1.3. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы восьмого порядка достаточно знать, вообще говоря, семь независимых инвариантов. Далее будет показано, для полного интегрирования системы (3.1.1), (3.1.3) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (3.1.2), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{4} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \quad i = 1,\ldots,4, \tag{3.1.13}$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^{4} g_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k, \tag{3.1.14}$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3.1 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha),\ldots,f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ из (3.1.1) и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ из (3.1.2).

Теорема 3.1. *Если выполнены условия* (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12), *то система* (3.1.1), (3.1.3) *обладает полным набором, состоящим из пяти первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 = C_1^2 = \mathrm{const}; \tag{3.1.15}$$

$$\Phi_2(z_3,z_2,z_1;\alpha) = \sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}\;\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.1.16}$$

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta_1) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{3.1.17}$$

$$\Phi_4(z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}, \tag{3.1.18}$$

$$\Phi_5(\beta_2,\beta_3) = \beta_3 \pm \int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b) - C_4^2}}\, db = C_5 = \mathrm{const}, \tag{3.1.19}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}, \tag{3.1.20}$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}, \quad \Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\Gamma_3(b)db\right\}. \tag{3.1.21}$$

Более того, после замен независимой и фазовых переменных

$$\frac{d}{dt} = f_4(\alpha)\frac{d}{d\tau}, \tag{3.1.22}$$

$$\begin{gathered} w_4 = z_4, \quad w_3^* = \ln|w_3|, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}, \\ w_s^* = \ln\left|w_s + \sqrt{1+w_s^2}\right|, \quad s=1,2, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} \end{gathered} \tag{3.1.23}$$

фазовый поток системы (3.1.1), (3.1.3) *сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении* $TM^4\{w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$*, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма*

$$dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3. \tag{3.1.24}$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 3.1, а именно, сделаем замены (3.1.22) независимой переменной и (3.1.23) фазовых переменных. Тогда система (3.1.1), (3.1.3) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_4, \\ \dot w_4 = -\dfrac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)e^{2w_3^*}, \\ \dot w_3^* = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_4; \end{cases} \tag{3.1.25}$$

$$\begin{cases} \dot w_2^* = \pm e^{w_3^*}\dfrac{1}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \dot\beta_2 = \pm\dfrac{W_2(w_2^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.1.26}$$

$$\begin{cases} \dot w_1^* = \pm e^{w_3^*}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot\beta_1 = \pm\dfrac{W_1(w_1^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \end{cases} \tag{3.1.27}$$

$$\dot\beta_3 = \pm\frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2), \tag{3.1.28}$$

где

$$w_s = W_s(w_s^*), \quad s = 1,2,$$

в силу замены (3.1.23); при этом в составной системе (3.1.25)–(3.1.28) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ. Видно, что дивергенция правой части составной системы (3.1.25)–(3.1.28) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании пяти первых интегралов. Дифференцирование функции (3.1.15) в силу системы (3.1.1), (3.1.3) дает

$$
\begin{gathered}
-2f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_4^3-\\
-2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_3^2z_4}{f_4(\alpha)}-\\
-2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_4}{f_4(\alpha)}-\\
-2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha3}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_4}{f_4(\alpha)}-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_3}{f_1(\alpha)}-\\
-2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_3}{f_1(\alpha)}-\\
-2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]+f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)}\equiv 0,
\end{gathered}
$$

если выполнена система дифференциальных равенств (3.1.6). Но, как указано выше, при выполнении девяти условий (3.1.4), (3.1.5) семь условий (3.1.6) и семь условий (3.1.12) в известном смысле эквивалентны.

Далее, дифференцирование функции (3.1.16) в силу системы (3.1.1), (3.1.3) в условиях теоремы дает

$$
-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}.
$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$
\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),
$$

что и доказывает наличие первого интеграла (3.1.16).

Дифференцирование функции (3.1.17) в силу системы (3.1.1), (3.1.3) в условиях теоремы дает

$$
\begin{gathered}
-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Psi_1(\beta_1)-\\
-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_3f(\alpha)\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Phi_0(\alpha).
\end{gathered}
$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$
\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),
$$

что и доказывает наличие первого интеграла (3.1.17).

Дифференцирование функции (3.1.18) в силу системы (3.1.1), (3.1.3) в условиях теоремы дает

$$
\begin{gathered}
-f_4(\alpha)z_1z_4\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+\\
+z_1z_3f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\\
+z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\left[-\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2)+\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right].
\end{gathered}
$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)$$
$$\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2} = \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (3.1.18).

Далее, рассмотрим два уровня C_3 и C_4 первых интегралов (3.1.17) и (3.1.18) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \tag{3.1.29}$$

Будем искать угол β_3 из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{z_1}{z_2}h(\beta_2).$$

Используя в этом уравнении равенство (3.1.29), получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (3.1.19). Теорема доказана. □

Заметим также, что систему равенств (3.1.6) (или (3.1.12)) можно трактовать как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (3.1.15) (или см. ниже (3.2.2)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [7, 9]). Поиск как первого интеграла (3.1.15), так и интегралов (3.1.16)–(3.1.19), опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Пример 3.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, когда метрика на четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства (задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2\right]\sin\alpha\cos\alpha = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\dot\alpha\dot\beta_1\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \left(\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2\right)\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\dot\alpha\dot\beta_2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \dot\beta_3^2\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \\ \ddot\beta_3 + 2\dot\alpha\dot\beta_3\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_3\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot\beta_2\dot\beta_3\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} = 0 \end{cases} \tag{3.1.30}$$

и имеющая первые интегралы (3.1.15)–(3.1.19), примет следующий вид:

$$\dot\alpha = -z_4, \tag{3.1.31a}$$

$$\dot z_4 = -\left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \tag{3.1.31b}$$

$$\dot z_3 = z_3z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + \left(z_1^2 + z_2^2\right)\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{3.1.31c}$$

$$\begin{aligned}\dot z_2 = z_2z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_2z_3\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}} - \\ - z_1^2\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}},\end{aligned} \tag{3.1.31d}$$

$$\dot z_1 = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_1 z_3 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}} + \\ + z_1 z_2 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{3.1.31e}$$

$$\dot\beta_1 = z_3 \frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{3.1.31f}$$

$$\dot\beta_2 = -z_2 \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{3.1.31g}$$

$$\dot\beta_3 = z_1 \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R}, \tag{3.1.31h}$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (3.1.31) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 3.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, но когда метрика на четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2\right]\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \\ \ddot\beta_1 + \dot\alpha\dot\beta_1\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - (\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2)\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \\ \ddot\beta_2 + \dot\alpha\dot\beta_2\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \dot\beta_3^2\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \\ \ddot\beta_3 + \dot\alpha\dot\beta_3\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_3\dfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + 2\dot\beta_2\dot\beta_3\dfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} = 0 \end{cases} \tag{3.1.32}$$

и имеющая первые интегралы (3.1.15)–(3.1.19), примет следующий вид:

$$\dot\alpha = -z_4, \tag{3.1.33a}$$

$$\dot z_4 = -\left(z_1^2+z_2^2+z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \tag{3.1.33b}$$

$$\dot z_3 = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + \left(z_1^2+z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{3.1.33c}$$

$$\dot z_2 = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}} - \\ - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{3.1.33d}$$

$$\dot z_1 = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}} + \\ + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{3.1.33e}$$

$$\dot\beta_1 = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{3.1.33f}$$

$$\dot\beta_2 = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{3.1.33g}$$

$$\dot\beta_3 = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R}, \tag{3.1.33h}$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (3.1.33) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 3.3. В случае четырехмерного пространства Лобачевского (с координатами $x = \beta_1$, $y = \beta_2$, $z = \beta_3$, $w = \alpha$, задача класса (c)) четырехпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}\left(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \dot{\beta}_2^2 - \dot{\beta}_3^2\right) = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - \dfrac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - \dfrac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - \dfrac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 = 0 \end{cases} \tag{3.1.34}$$

и имеющая первые интегралы (3.1.15)–(3.1.19), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_4\nu_1\alpha, & \dot{z}_1 = z_1 z_4 \dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_4}, \\ \dot{z}_4 = -z_3^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2} - z_2^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3} - z_1^2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_4}, & \dot{\beta}_1 = z_3\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}}, \\ \dot{z}_3 = z_3 z_4\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}, & \dot{\beta}_2 = z_2\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_3}}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_4\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_3}, & \dot{\beta}_3 = z_1\dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_4}}, \end{cases} \tag{3.1.35}$$

где $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in \mathbb{R}$, если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (3.1.35) рассматривать как новые кинематические соотношения.

3.2. Инварианты систем на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в потенциальном силовом поле.

3.2.1. Введение внешнего потенциального силового поля. Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (3.1.1), (3.1.3) и получим систему *консервативную*. Именно, внесем с систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле со следующими проекциями на оси $\dot{z}_1, \ldots, \dot{z}_4$:

$$\tilde{F}(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1) f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha) f_4(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\dot{\alpha} = z_4 f_4(\alpha), \tag{3.2.1a}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_3^2 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \end{aligned} \tag{3.2.1b}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = F_3(\beta_1) f_1(\alpha) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \end{aligned} \tag{3.2.1c}$$

$$\dot z_2 = F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \tag{3.2.1d}$$
$$\dot z_1 = F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - f_2(\alpha)g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2, \tag{3.2.1e}$$
$$\dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \tag{3.2.1f}$$
$$\dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{3.2.1g}$$
$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \tag{3.2.1h}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - F_4(\alpha)f_4^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - F_3(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - F_2(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 - F_1(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0 \end{cases}$$

на касательном расслоении $TM^4\{\dot\alpha, \dot\beta_1, \dot\beta_2, \dot\beta_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

3.2.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы восьмого порядка (3.2.1) достаточно знать, вообще говоря, семь независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (3.2.1) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3.2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha)$, …, $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Теорема 3.2. *Если выполнены условия* (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12), *то система* (3.2.1) *обладает полным набором, состоящим из пяти первых интегралов*: *первого интеграла*

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + V(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = C_1 = \text{const}, \tag{3.2.2}$$

где

$$V(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = V_4(\alpha) + \sum_{k=1}^{3} V_{4-k}(\beta_k) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a)da - 2\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\beta_{k,0}}^{\beta_k} F_{4-k}(b)db,$$

а также, для простоты, при $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1,2,3$, *— первых интегралов* (3.1.16)–(3.1.19). *Более того, после замен* (3.1.22) *независимой переменной и* (3.1.23) *фазовых переменных фазовый поток системы* (3.2.1) *сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении* $TM^4\{w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма* (3.1.24).

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 3.2, а именно, сделаем замены (3.1.22) независимой переменной и (3.1.23) фазовых переменных. Тогда система (3.2.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4, \\ \dot{w}_4 = F_4(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)e^{2w_3^*}, \\ \dot{w}_3^* = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_4, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2^* = \pm e^{w_3^*}\dfrac{1}{\sqrt{1+w_1^2}}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm\dfrac{W_2(w_2^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1^* = \pm e^{w_3^*}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm\dfrac{W_1(w_1^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \end{cases} \tag{3.2.5}$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm\frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2), \tag{3.2.6}$$

где $w_s = W_s(w_s^*)$, $s = 1, 2$, в силу замены (3.1.23), при этом в составной системе (3.2.3)–(3.2.6) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ. Видно, что дивергенция правой части составной системы (3.2.3)–(3.2.6) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании пяти первых интегралов, при этом доказательство существования интегралов (3.1.16)–(3.1.19) проводится как в теореме 3.1. Дифференцирование функции (3.2.2) в силу системы (3.2.1) дает

$$\begin{gathered} 2z_4F_4(\alpha)f_4(\alpha) + 2z_3F_3(\beta_1)f_1(\alpha) + 2z_2F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) + \\ + 2z_1F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - 2f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_4^3 - \\ - 2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_3^2z_4}{f_4(\alpha)} - \\ - 2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_4}{f_4(\alpha)} - \\ - 2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_4}{f_4(\alpha)} - \\ - 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2z_3}{f_1(\alpha)} - \\ - 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_3}{f_1(\alpha)} - \\ - 2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)} - \\ - 2z_4F_4(\alpha)f_4(\alpha) - 2z_3F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - 2z_2F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - \\ - 2z_1F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) \equiv 0, \end{gathered}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (3.1.6). Но, как указано выше, при выполнении девяти условий (3.1.4), (3.1.5) семь условий (3.1.6) и семь условий (3.1.12) в известном смысле эквивалентны. Теорема доказана. □

3.3. Инварианты систем на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией.

3.3.1. Введение внешнего силового поля со знакопеременной диссипацией. Теперь несколько модифицируем систему (3.2.1). При этом получим систему *с диссипацией*. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.3.1) (в отличие от системы (3.2.1)), но и следующая линейная зависимость гладкого (внешнего) силового поля от $z_1, \ldots, z_4$:

$$\tilde{F}(z_4, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1) f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha) f_4(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \\ z_3 F_3^1(\alpha) \\ z_4 F_4^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\dot{\alpha} = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \tag{3.3.1a}$$

$$\begin{gathered} \dot{z}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z_3^2 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha), \end{gathered} \tag{3.3.1b}$$

$$\begin{gathered} \dot{z}_3 = F_3(\beta_1) f_1(\alpha) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_2^2 - \\ - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \end{gathered} \tag{3.3.1c}$$

$$\begin{gathered} \dot{z}_2 = F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) - \\ - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \\ - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \end{gathered} \tag{3.3.1d}$$

$$\begin{gathered} \dot{z}_1 = F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) - \\ - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - \\ - f_2(\alpha) g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \end{gathered} \tag{3.3.1e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \tag{3.3.1f}$$

$$\dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \tag{3.3.1g}$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \tag{3.3.1h}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered} \ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_4^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot{\alpha} - \\ - F_4(\beta_1) f_4^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_4^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \\ + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\beta}_1 - \left\{F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot{\beta}_1 - \\
&\qquad - F_3(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_2 - \left\{F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot{\beta}_2 - \\
&\qquad - F_2(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 = 0,\\
&\ddot{\beta}_3 - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot{\beta}_3 - \\
&\qquad - F_1(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \\
&\qquad\qquad + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0
\end{aligned}
$$

на касательном расслоении $TM^4\{\dot{\alpha},\dot{\beta}_1,\dot{\beta}_2,\dot{\beta}_3;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$. Здесь, как и выше, $\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.3.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы восьмого порядка (3.3.1) достаточно знать, вообще говоря, семь независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (3.3.1) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha),\dots,f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.3.1) при выполнении свойств (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12), а также при отсутствии проектирования внешней силы на оси $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$ и $\dot{z}_3$ (т.е. отлична от нуля лишь проекция внешней силы на ось $\dot{z}_4$):

$$
F_1(\beta_3) \equiv F_2(\beta_2) \equiv F_3(\beta_1) \equiv 0. \tag{3.3.2}
$$

Тогда система (3.3.1) допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$
\begin{cases}
\dot{\alpha} = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha),\\
\dot{z}_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha)z_3^2 - \\
\qquad - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2 - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2 + z_4F_4^1(\alpha),\\
\dot{z}_3 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\beta_1)z_2^2 - \\
\qquad - f(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\beta_1,\beta_2)z_1^2 + z_3F_3^1(\alpha),\\
\dot{z}_2 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3 - \\
\qquad - f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\beta_2)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha),\\
\dot{z}_1 = -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4 - f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3 - \\
\qquad - f(\alpha)g(\alpha)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha),\\
\dot{\beta}_1 = z_3 f(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_2 f(\alpha)g(\beta_1),
\end{cases} \tag{3.3.3}
$$

при наличии также восьмого уравнения

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \tag{3.3.4}$$

Далее, наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому предположим, что выполнены следующие равенства:

$$F_1^1(\alpha) \equiv F_2^1(\alpha) \equiv F_3^1(\alpha) =: F^1(\alpha). \tag{3.3.5}$$

Для полного интегрирования (по Якоби) рассматриваемой системы (3.3.3), (3.3.4) при условии (3.3.5) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \tag{3.3.6}$$

система (3.3.3), (3.3.4) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha), \end{cases} \tag{3.3.7}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2 = \pm w_3 \sqrt{\dfrac{1 + w_2^2}{1 + w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm \dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{(1 + w_1^2)(1 + w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.3.8}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_3 \sqrt{1 + w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \dfrac{w_1 w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \tag{3.3.9}$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1 + w_1^2)(1 + w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \tag{3.3.10}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.3.7)–(3.3.10) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (3.3.7), по одному — для систем (3.3.8) и (3.3.9) (после соответствующих замен независимого переменного в них) и дополнительный тензорный инвариант, «привязывающий» уравнение (3.3.10) (т.е. всего *пять*).

Продолжим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \tag{3.3.11}$$

где $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$, $\Delta(\alpha) = \delta(\alpha)/f_4(\alpha)$, а для некоторых $\lambda_4^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, 4$, должны выполняться равенства

$$\begin{gathered} F_4(\alpha) = \lambda_4^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_4^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha); \\ F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_4(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_4(\alpha), \quad k = 1, \ldots, 4. \end{gathered} \tag{3.3.12}$$

Условие (3.3.11) назовем «геометрическим», а условия из группы (3.3.12) — «энергетическими». При этом $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 =: \lambda^1$, в силу (3.3.5). Условие (3.3.11) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (3.3.12) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *(знако)переменную диссипацию.*

Теорема 3.3. *Пусть выполняются условия* (3.3.11) *и* (3.3.12). *Тогда система* (3.3.7)–(3.3.10) *обладает пятью независимыми, вообще говоря, трансцендентными* (см. [24]) (*т.е. имеющими существенно особые точки*) *первыми интегралами.*

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.3 для начала сопоставим системе третьего порядка (3.3.7) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3^2/f_4(\alpha) + w_4F_4^1(\alpha)}{w_4f_4(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3w_4/f_4(\alpha) + w_3F^1(\alpha)}{w_4f_4(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{3.3.13}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_3 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \tag{3.3.14}$$

приводим систему (3.3.13) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4(\alpha) + \Delta(\alpha)F_4^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_4(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \tag{3.3.15}$$

что, учитывая (3.1.12), почти всюду эквивалентно

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Bigg(F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)u_1^2}{f_4(\alpha)} - \\ \qquad\qquad - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + \Big[\Delta(\alpha)F_4^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_2\Bigg), \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Bigg(\Big[f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_1u_2 + \\ \qquad\qquad + \Big[\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_1\Bigg); \end{cases} \tag{3.3.16}$$

напомним, что здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$.

Теперь для интегрирования системы (3.3.16) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (3.3.11) и (3.3.12). Действительно, после их выполнения система (3.3.16) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_4^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_4^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \tag{3.3.17}$$

Уравнение (3.3.17) имеет вид уравнения Абеля (см. [10]), а его общее решение достаточно громоздко. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ данное уравнение обладает первым интегралом

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_4^0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{3.3.18}$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{3.3.19}$$

Замечание 3.3. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (3.3.7) (как часть системы (3.3.7)–(3.3.10)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. Если же α не является периодической координатой, то мы в данном случае говорим о системе со знакопеременной диссипацией. При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (3.1.12), геометрического и энергетических условий (3.3.11), (3.3.12) (но при любой гладкой функции $F_4(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_4^1 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \kappa f_4(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_3^2 - bw_4f_4(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_3 = \kappa f_4(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_3w_4 - bw_3f_4(\alpha)\tilde\Delta(\alpha). \end{cases} \tag{3.3.20}$$

Действительно, система (3.3.20) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = w_3^2 + w_4^2 + 2bw_4\Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{3.3.21}$$

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3\Delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{3.3.22}$$

где

$$V(\alpha) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a)da.$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3 f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} =$$

$$= w_3 f(\alpha)\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_4(b)\frac{f^2(b)}{f_4^2(b)} + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong w_3\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_4(b)\frac{f^2(b)}{f_4^2(b)}db\right\},$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.3.11), (3.3.12) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1 = -b$, перепишется в виде

$$w_3\exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|\Delta(b)|db\right\} \cong w_3\Delta(\alpha) \tag{3.3.23}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.3.21), (3.3.22) также является первым интегралом системы (3.3.20). Но при $\lambda^1 = \lambda_4^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 + (b - \lambda^1)w_4\Delta(\alpha) - \lambda_4^0\Delta^2(\alpha) \tag{3.3.24}$$

и (3.3.22) по отдельности не является первым интегралом системы (3.3.7). Однако отношение функций (3.3.24), (3.3.22) является первым интегралом системы (3.3.7) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_4^1$ и b.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.3.7) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$. Для этого преобразуем инвариантное соотношение (3.3.18) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_4^0. \tag{3.3.25}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_4^0 \geqslant 0, \tag{3.3.26}$$

и фазовое пространство системы (3.3.7) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.3.25). Таким образом, в силу соотношения (3.3.18) первое уравнение системы (3.3.16) при условиях (3.3.11) и (3.3.12) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(-\lambda_4^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b},$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_4^0)}\right\};$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.3.26). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.3.7) примет вид

$$-\int \frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \int \frac{(b + u_2)du_2}{2\big(-\lambda_4^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2\big) + C_1\big\{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_4^0)}\big\}/2}. \tag{3.3.27}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln|\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{\lambda^1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_4^0,$$

то правая часть равенства (3.3.27) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \mp \frac{b}{2}I_1,$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{3.3.28}$$

При вычислении интеграла (3.3.28) возможны три случая.

I: $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_4^0$. В этом случае

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1 - b)^2 + 4\lambda_4^0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}}\right| + \mathrm{const}.$$

II: $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_4^0$. В этом случае

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_4^0 - (\lambda^1 - b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}.$$

III: $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_4^0$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}.$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)} - \frac{\lambda^1 - b}{2},$$

находим окончательный вид для величины I_1:

I. При $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_4^0$:

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_4^0}}\right|+\mathrm{const}\,.$$

II. При $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_4^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}\,.$$

III. При $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_4^0$:

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}\,.$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.3.7) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_4^1$); таким образом, предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [24]).

Замечание 3.4. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.3.18). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4,w_3;\alpha)=G\left(\Delta(\alpha),\frac{w_4}{\Delta(\alpha)},\frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right)=C_2=\mathrm{const}\,. \tag{3.3.29}$$

Выражение первого интеграла (3.3.29) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (3.3.7)–(3.3.10) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.3.7). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу для систем (3.3.8) и (3.3.9) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.3.10).

Первые интегралы для систем (3.3.8) и (3.3.9) имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s;\beta_s)=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)}=C_{s+2}=\mathrm{const},\quad s=1,2; \tag{3.3.30}$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s=1,2$, см. (3.1.21).

В предыдущих переменных z первые интегралы (3.3.30) таковы:

$$\begin{gathered}\Theta_3'(z_3,z_2,z_1;\beta_1)=\frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Psi_1(\beta_1)}=C_3'=\mathrm{const},\\ \Theta_4'(z_2,z_1;\beta_2)=\frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\Psi_2(\beta_2)}=C_4'=\mathrm{const}\,.\end{gathered} \tag{3.3.31}$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.3.10), находится по аналогии с (3.1.19):

$$\Theta_5(\beta_2,\beta_3)=\beta_3\pm\int\limits_{\beta_{2,0}}^{\beta_2}\frac{C_4h(b)}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(b)-C_4^2}}\,db=C_5=\mathrm{const}; \tag{3.3.32}$$

после взятия интеграла (3.3.32) сюда можно формально подставить вместо постоянных C_3 и C_4 левые части равенств (3.3.30) (или (3.3.31)) при $s = 1, 2$ соответственно.

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.3.7)–(3.3.10) имеет пять первых интегралов, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа, имеющих существенно особые точки). Теорема 3.3 доказана. □

3.3.3. Инвариантные дифференциальные формы систем со знакопеременной диссипацией.

Теорема 3.4. *Если для систем вида* (3.3.7)–(3.3.10) *выполняются геометрическое и энергетические свойства* (3.3.11), (3.3.12), *то у нее также существуют функционально независимые между собой пять инвариантных дифференциальных форм с трансцендентными* (*т.е. имеющими существенно особые точки*) *коэффициентами* (ср. [24]). *Эти дифференциальные формы при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ имеют следующий вид*:

$$\begin{aligned}
&\rho_1(w_4, w_3; \alpha) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha,\\
&\rho_2(w_4, w_3; \alpha) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha,\\
&\rho_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1+w_s^2}}\, dw_s \wedge d\beta_s, \quad s = 1, 2;\\
&\rho_5(w_4, w_3; \alpha, \beta_2, \beta_3) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,
\end{aligned}$$

где

$$\rho_1(w_4, w_3; \alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_4}{U_2(C_1, u_4)}\right\} \cdot \frac{u_4^2 + u_3^2 + (b-\lambda^1)u_4 - \lambda_4^0}{u_3}, \quad u_k = \frac{w_k}{\Delta(\alpha)},\ k = 3, 4;$$

$$\rho_2(w_4, w_3; \alpha) = \Delta(\alpha) \cdot \exp\left\{\int \frac{(2b+\lambda^1+u_4)du_4}{U_2(C_1, u_4)}\right\};$$

$$\rho_5(w_4, w_3; \alpha, \beta_2, \beta_3) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_4}{U_2(C_1, u_4)}\right\} \cdot \Theta_5(\beta_2, \beta_3),$$

и они, вообще говоря, зависимы с первыми интегралами (3.3.19), (3.3.29), (3.3.30), (3.3.32).

Доказательство. I. Система (3.3.7) составной рассматриваемой системы (3.3.7)–(3.3.10) при выполнении свойств (3.3.11), (3.3.12) имеет следующий вид:

$$\begin{cases}
\dot\alpha = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha),\\
\dot w_4 = \lambda_4^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) f_4(\alpha) - \kappa f_4(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3^2 + \lambda_4^1 w_4 f_4(\alpha)\tilde\Delta(\alpha),\\
\dot w_3 = \kappa f_4(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 w_4 + \lambda^1 w_3 f_4(\alpha)\tilde\Delta(\alpha).
\end{cases} \tag{3.3.33}$$

После замен независимой и фазовой переменных

$$\frac{d}{dt} = f_4(\alpha)\frac{d}{d\tau}, \quad w_3^* = \ln|w_3| \tag{3.3.34}$$

система (3.3.33) примет вид

$$\begin{cases}
\dot\alpha = X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) = w_4 + b\Delta(\alpha),\\
\dot w_4 = X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) = \lambda_4^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) - \kappa\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}\, e^{2w_3^*} + \lambda_4^1 w_4 \tilde\Delta(\alpha),\\
\dot w_3^* = X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) = \kappa\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_4 + \lambda^1\tilde\Delta(\alpha);
\end{cases} \tag{3.3.35}$$

при этом в системе (3.3.35) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ. В принципе замена фазовой переменной (3.3.34) носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_3^*, так и переменную w_3.

Для системы (3.3.35) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_4, w_3^*; \alpha)$, соответствующие дифференциальным формам объема $\rho(w_4, w_3^*; \alpha) dw_4 \wedge dw_3^* \wedge d\alpha$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\left[\rho(w_4, w_3^*; \alpha) X(w_4, w_3^*; \alpha)\right] = 0, \tag{3.3.36}$$

где

$$X(w_4, w_3^*; \alpha) = \left\{X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha),\ X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha)\right\} \tag{3.3.37}$$

— векторное поле рассматриваемой системы (3.3.35) в координатах $(w_4, w_3^*; \alpha)$.

Уравнение (3.3.36) перепишется в виде

$$X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_{w_4} + X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_{w_3^*} = -\rho \operatorname{div} X(w_4, w_3^*; \alpha); \tag{3.3.38}$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_4, w_3^*; \alpha) = (b + \lambda_4^1)\tilde{\Delta}(\alpha). \tag{3.3.39}$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (3.3.38) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), \\ \dot{w}_4 = X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), \\ \dot{w}_3^* = X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), \\ \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_4^1)\tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \tag{3.3.40}$$

У системы, состоящей из первых трех уравнений системы (3.3.40), уже найдены два первых интеграла (3.3.19) и (3.3.29). Найдем третий независимый первый интеграл системы (3.3.40) уравнений характеристик. Сопоставим системе (3.3.40) следующую неавтономную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\alpha} = \dfrac{\lambda_4^0\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\tilde{\Delta}(\alpha)w_3^2/\Delta(\alpha) + \lambda_4^1 w_4\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_4 + b\Delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_3}{d\alpha} = \dfrac{\kappa\tilde{\Delta}(\alpha)w_3 w_4/\Delta(\alpha) + \lambda^1 w_3\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_4 + b\Delta(\alpha)}, \\ \dfrac{d\rho}{d\alpha} = -\dfrac{(b + \lambda_4^1)\rho\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_4 + b\Delta(\alpha)} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{dw_4}{d\Delta} = \dfrac{\lambda_4^0\Delta - \kappa w_3^2/\Delta + \lambda_4^1 w_4}{w_4 + b\Delta}, \\ \dfrac{dw_3}{d\Delta} = \dfrac{\kappa w_3 w_4/\Delta + \lambda^1 w_3}{w_4 + b\Delta}, \\ \dfrac{d\rho}{d\Delta} = -\dfrac{(b + \lambda_4^1)\rho}{w_4 + b\Delta}. \end{cases} \tag{3.3.41}$$

После введения однородных переменных

$$w_4 = u_2\Delta, \quad w_3 = u_1\Delta, \tag{3.3.42}$$

похожих на соответствующие переменные в замене (3.3.14), система (3.3.41) перепишется в виде

$$\begin{cases} \Delta\dfrac{du_2}{d\Delta} + u_2 = \dfrac{\lambda_4^0 - \kappa u_1^2 + \lambda_4^1 u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{du_1}{d\Delta} + u_1 = \dfrac{\kappa u_1 u_2 + \lambda^1 u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{d\rho}{d\Delta} = -\dfrac{(b + \lambda_4^1)\rho}{u_2 + b} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta\dfrac{du_2}{d\Delta} = \dfrac{\lambda_4^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 - (b - \lambda_4^1)u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{du_1}{d\Delta} = \dfrac{(\kappa - 1)u_1 u_2 - (b - \lambda^1)u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{d\rho}{d\Delta} = -\dfrac{(b + \lambda_4^1)\rho}{u_2 + b}. \end{cases} \tag{3.3.43}$$

Из первых двух уравнений системы (3.3.43) получается первый интеграл (3.3.19).

Из квадратуры

$$\begin{gathered} -\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{(u_2 + b)du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \\ U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)}\right\}, \\ U_1(u_2) = u_2^2 + (b - \lambda^1)u_2 - \lambda_4^0, \quad C_1 \neq 0, \end{gathered} \tag{3.3.44}$$

получается первый интеграл (3.3.29) (здесь учитывается, что $\kappa = -1$ и $\lambda^1 = \lambda^1_4$). Наконец, из квадратуры

$$\frac{d\rho}{(b+\lambda^1)\rho} = \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \tag{3.3.45}$$

получается первый интеграл, содержащий неизвестную функцию ρ.

Вычислим квадратуру (3.3.45). Справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp\left\{-(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} = C_\rho = \mathrm{const}, \tag{3.3.46}$$

которое является третьим, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (3.3.40).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (3.3.38) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \mathcal{F}\left[\Theta_1, \Theta_2\right], \tag{3.3.47}$$

где $\mathcal{F}\left[\Theta_1, \Theta_2\right]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Θ_1, Θ_2 — два первых интеграла (3.3.19), (3.3.29) соответственно.

В частности, в качестве двух функционально независимых решений линейного уравнения (3.3.38) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_4, w_3; \alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_1(w_4, w_3; \alpha), \tag{3.3.48}$$

$$\rho_2(w_4, w_3; \alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_2(w_4, w_3; \alpha), \tag{3.3.49}$$

$$u_2 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}.$$

II. Рассмотрим далее системы (3.3.8), (3.3.9). После замен независимых переменных

$$\frac{d}{dt} = \pm\frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1)\frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d}{dt} = \pm w_3 f(\alpha)\frac{d}{d\tau} \tag{3.3.50}$$

системы (3.3.8), (3.3.9) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{w}_s = X_{w_s}(w_s; \beta_s) = \sqrt{1+w_s^2}\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \dfrac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right], \\ \dot{\beta}_s = X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) = \dfrac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad s = 1, 2, \quad j = h, g; \end{cases} \tag{3.3.51}$$

при этом в системах (3.3.51) точкой обозначена также производная по новым независимым переменным τ.

Для систем (3.3.51) будем искать интегральные инварианты с плотностями $\rho(w_s; \beta_s)$, соответствующие дифференциальным формам площади $\rho(w_s; \beta_s) dw_s \wedge d\beta_s$, $s = 1, 2$, из линейных дифференциальных уравнений

$$\operatorname{div}\left[\rho(w_s; \beta_s) X(w_s; \beta_s)\right] = 0, \tag{3.3.52}$$

где

$$X(w_s; \beta_s) = \left\{X_{w_s}(w_s; \beta_s), X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\right\} \tag{3.3.53}$$

— векторные поля рассматриваемых систем (3.3.51) в координатах $(w_s; \beta_s)$. Уравнения (3.3.52) перепишутся в виде

$$X_{w_s}(w_s; \beta_s)\rho_{w_s} + X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\rho_{\beta_s} = -\rho \operatorname{div} X(w_s; \beta_s); \tag{3.3.54}$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right]. \tag{3.3.55}$$

Тогда системы уравнений характеристик линейных дифференциальных уравнений (3.3.54) в частных производных примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{w}_s = X_{w_s}(w_s;\beta_s), \\ \dot{\beta}_s = X_{\beta_s}(w_s;\beta_s), \\ \dot{\rho} = -\rho\dfrac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \dfrac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right]. \end{cases} \tag{3.3.56}$$

У систем, состоящих из первых двух уравнений систем (3.3.56), уже найдены первые интегралы (3.3.30). Найдем второй независимый первый интеграл для каждой из систем (3.3.56) уравнений характеристик. Сопоставим двум последним уравнениям систем (3.3.56) неавтономные уравнения

$$\frac{d\rho}{d\beta_s} = -\rho\left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d\ln|j(\beta_s)|}{d\beta_s}\right], \quad s=1,2. \tag{3.3.57}$$

Последние уравнения дают следующие инвариантные соотношения:

$$\Theta_{\rho_{s+2}}(\beta_s;\rho) = \rho\cdot\Psi_s(\beta_s) = C_{\rho_{s+2}} = \mathrm{const}, \tag{3.3.58}$$

которые являются вторыми, недостающими, первыми интегралами систем уравнений характеристик (3.3.56). О функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s=1,2$, см. (3.1.21).

Таким образом, общие решения линейных уравнений (3.3.54) в частных производных примут вид

$$\rho = \frac{\mathcal{G}\left[\Theta_{s+2}\right]}{\Psi_s(\beta_s)}, \tag{3.3.59}$$

где $\mathcal{G}\left[\Theta_{s+2}\right]$ — произвольные гладкие функции одного аргумента, при этом Θ_{s+2} — два первых интеграла (3.3.30), $s=1,2$. В частности, если положить

$$\mathcal{G}\left[\Theta_{s+2}\right] = \frac{1}{\Theta_{s+2}} = \frac{\Psi_s(\beta_s)}{\sqrt{1+w_s^2}}, \tag{3.3.60}$$

то в качестве решений линейных уравнений (3.3.54) можно взять функции

$$\rho_{2+s}(w_s;\beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad s=1,2. \tag{3.3.61}$$

III. Итак, инвариантные дифференциальные формы с функциями $\rho_p(w_4,w_3;\alpha)$, $p=1,2$, а также $\rho_{2+s}(w_s;\beta_s)$, $s=1,2$, были получены выше через исследования отдельных систем (3.3.7), (3.3.8) и (3.3.9), которые сами составляют общую рассматриваемую составную систему (3.3.7)–(3.3.10). Возникает естественный вопрос: как связано нахождение инвариантных форм для отдельных систем с нахождением инвариантных форм для общей составной системы? Ответ на этот вопрос позволит, в частности, ответить и на вопрос о нахождении инвариантной формы, «привязывающей» уравнение (3.3.10).

Составная система (3.3.7)–(3.3.10) при выполнении свойств (3.3.11), (3.3.12) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = \lambda_4^0\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)f_4(\alpha) - \kappa f_4(\alpha)\dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_3^2 + \lambda_4^1 w_4 f_4(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \kappa f_4(\alpha)\dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_3 w_4 + \lambda^1 w_3 f_4(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \tag{3.3.62}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2 = \pm w_3\sqrt{\dfrac{1+w_2^2}{1+w_1^2}}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm\dfrac{w_2 w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}f(\alpha)g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.3.63}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_3\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm\dfrac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha), \end{cases} \tag{3.3.64}$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm\frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \tag{3.3.65}$$

После замен независимой и фазовых переменных

$$\frac{d}{dt} = f_4(\alpha)\frac{d}{d\tau}, \quad w_3^* = \ln|w_3|, \quad w_s^* = \ln\left|w_s + \sqrt{1+w_s^2}\right|, \quad s = 1,2, \tag{3.3.66}$$

составная система (3.3.62)–(3.3.65) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) = w_4 + b\Delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) = \lambda_4^0\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}\,e^{2w_3^*} + \lambda_4^1 w_4\tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3^* = X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) = \kappa\dfrac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_4 + \lambda^1\tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \tag{3.3.67}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2^* = X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm\dfrac{e^{w_3^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \\ \dot{\beta}_2 = X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) = \pm\dfrac{W_2(w_2^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1), \end{cases} \tag{3.3.68}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1) = \pm e^{w_3^*}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \\ \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha) = \pm\dfrac{W_1(w_1^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}\dfrac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \end{cases} \tag{3.3.69}$$

$$\dot{\beta}_3 = X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm\frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2); \tag{3.3.70}$$

при этом в составной системе (3.3.67)–(3.3.70) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ, а также $w_s = W_s(w_s^*)$, $s = 1, 2,$ — функции в силу замен (3.3.66). В принципе, замена фазовых переменных (3.3.66) носит технический характер, и при этом можно использовать как группу переменных w_3^*, w_2^*, w_1^*, так и группу переменных w_3, w_2, w_1.

Для составной системы (3.3.67)–(3.3.70) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho\big(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\big)dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\Big[\rho\big(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\big)\; X\big(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\big)\Big] = 0, \tag{3.3.71}$$

где

$$\begin{gathered} X\big(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\big) = \Big\{X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha),\ X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), \\ X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha),\ X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2),\ X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), \\ X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1),\ X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha),\ X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)\Big\} \end{gathered} \tag{3.3.72}$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (3.3.67)–(3.3.70) в координатах $(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*;$ $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Уравнение (3.3.71) перепишется в виде

$$\begin{gathered} X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_{w_4} + \\ + X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_{w_3^*} + X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)\rho_{w_2^*} + X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1)\rho_{\beta_2} + \end{gathered}$$

$$+ X_{w_1^*}(w_3^*;\alpha,\beta_1)\rho_{w_1^*} + X_{\beta_1}(w_3^*,w_1^*;\alpha)\rho_{\beta_1} + X_{\beta_3}(w_3^*,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2)\rho_{\beta_3} = \\ = -\rho\operatorname{div} X(w_4,w_3^*,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3); \quad (3.3.73)$$

при этом

$$\operatorname{div} X\big(w_4,w_3^*,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\big) = (b+\lambda_4^1)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad (3.3.74)$$

как и в случае (3.3.39) для «отдельной» системы (3.3.35)! Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (3.3.73) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot\alpha = X_\alpha(w_4,w_3^*;\alpha), & \dot w_1^* = X_{w_1^*}(w_3^*;\alpha,\beta_1), \\ \dot w_4 = X_{w_4}(w_4,w_3^*;\alpha), & \dot\beta_1 = X_{\beta_1}(w_3^*,w_1^*;\alpha), \\ \dot w_3^* = X_{w_3^*}(w_4,w_3^*;\alpha), & \dot\beta_3 = X_{\beta_3}(w_3^*,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2), \\ \dot w_2^* = X_{w_2^*}(w_3^*,w_1^*;\alpha,\beta_1,\beta_2), & \dot\rho = -\rho(b+\lambda_4^1)\tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot\beta_2 = X_{\beta_2}(w_3^*,w_2^*,w_1^*;\alpha,\beta_1), \end{cases} \quad (3.3.75)$$

и она включает систему уравнений характеристик (3.3.40) для уравнения в частных производных (3.3.38).

У системы, состоящей из первых восьми уравнений системы (3.3.75), уже найдены пять первых интегралов (3.3.19), (3.3.29), (3.3.30) и (3.3.32) (полный набор). Более того, найден и дополнительный первый интеграл (3.3.46), «привязывающий» уравнение (последнее уравнение системы (3.3.75)) на функцию ρ. Таким образом, общее решение линейного уравнения (3.3.73) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\cdot\mathcal{H}\left[\Theta_1,\ldots,\Theta_5\right], \quad (3.3.76)$$

где $\mathcal{H}\left[\Theta_1,\ldots,\Theta_5\right]$ — произвольная гладкая функция пяти аргументов, при этом $\Theta_1,\ldots,\Theta_5$ — пять первых интегралов (3.3.19), (3.3.29), (3.3.30), (3.3.32) соответственно. В частности, в качестве пяти функционально независимых решений линейного уравнения (3.3.73) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_4,w_3;\alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\cdot\Theta_1(w_4,w_3;\alpha), \quad (3.3.77)$$

$$\rho_2(w_4,w_3;\alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\cdot\Theta_2(w_4,w_3;\alpha), \quad (3.3.78)$$

$$\rho_3(w_4,w_3,w_1;\alpha,\beta_1) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\cdot\Theta_3(w_1;\beta_1), \quad (3.3.79)$$

$$\rho_4(w_4,w_3,w_2;\alpha,\beta_2) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\cdot\Theta_4(w_2;\beta_2), \quad (3.3.80)$$

$$\rho_5(w_4,w_3;\alpha,\beta_2,\beta_3) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\cdot\Theta_5(\beta_2,\beta_3). \quad (3.3.81)$$

где $u_2 = w_4/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_3/\Delta(\alpha)$.

В разделе III данного доказательства рассмотрен наиболее общий случай поиска инвариантных форм для составной системы (3.3.67)–(3.3.70). Также ясно, что найденные дифференциальные формы $\rho_1(w_4,w_3;\alpha)dw_4\wedge dw_3\wedge d\alpha$ и $\rho_2(w_4,w_3;\alpha)dw_4\wedge dw_3\wedge d\alpha$ будут инвариантными формами не только для системы (3.3.7), но и для составной системы (3.3.7)–(3.3.10). При этом для интегрирования составной системы (3.3.7)–(3.3.10) можно использовать как более громоздкие формы с функциями (3.3.79), (3.3.80), так и формы с функциями (3.3.61), имеющие более простой наглядный вид, поскольку составная система (3.3.7)–(3.3.10) распалась известным образом. Теорема 3.3 считать доказана. □

Итак, для полной интегрируемости системы (3.3.7)–(3.3.10) можно использовать или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством пять.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [75]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

В заключение упомянем многочисленные приложения (см. [59]), касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к четырехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении четырехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского. При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим работы [3, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
11. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
13. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
14. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
15. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
16. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
17. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
18. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
21. *Трофимов В В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.

25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
28. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4)\times\mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
36. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
38. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
39. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
40. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
41. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
43. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
49. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.

50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
60. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
61. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — *507*, № 1. — С. 86–92.
62. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *205*. — С. 22–54.
63. *Шамолин М. В.* Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *205*. — С. 55–94.
64. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *208*. — С. 91–121.
65. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *209*. — С. 88–107.
66. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *209*. — С. 108–116.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *210*. — С. 77–95.
68. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *210*. — С. 96–105.
69. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211*. — С. 29–40.
70. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211*. — С. 41–74.

71. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *212.* — С. 120–138.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *212.* — С. 139–148.
73. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n-мерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *213.* — С. 96–109.
74. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n-мерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *214.* — С. 82–106.
75. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n-мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *216.* — С. 133–152.
76. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — *509*, № 1. — С. 69–76.
77. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем. I. Системы на касательных расслоениях двумерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *227.* — С. 100–128.
78. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем. II. Системы на касательных расслоениях трехмерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *228.* — С. 92–118.
79. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier–Villars, 1912.
80. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
81. *Shamolin M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Proc. Int. Conf. "Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms" (DEMMCA 2021). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.
82. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 120–130
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-120-130

УДК 517.977.5

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ФУНКЦИЕЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ УСЛОВИИ

© 2023 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Г. К. АБДУРАХМАНОВА**

Аннотация. Изучены вопросы слабой обобщенной разрешимости в обратной задаче оптимизации для уравнения теплопроводности с нелокальным краевым условием и нелинейным функционалом качества. Сформулированы необходимые условия оптимальности, а нахождение функции управления сведено к функционально-интегральному уравнению.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелинейная обратная задача, оптимальное управление, нелинейное управление, минимизация функционала.

OPTIMIZATION OF THERMAL PROCESSES IN A NONLOCAL PROBLEM WITH A REDEFINITION FUNCTION UNDER AN INTEGRAL CONDITION

© 2023 **T. K. YULDASHEV, G. K. ABDURAKHMANOVA**

Abstract. In this paper, we examine the weak generalized solvability of an inverse optimization problem for the heat equation with a nonlocal boundary condition and a nonlinear target performance. We formulate necessary optimality conditions and reduce the search for a control function to a functional integral equation.

Keywords and phrases: heat equation, nonlinear inverse problem, optimal control, nonlinear control, minimization of a functional.

AMS Subject Classification: 49J20, 49K20, 49N45

1. Введение. Некоторые задачи математического моделирования тепловых процессов часто приводят к рассмотрению нелокальных обратных задач для параболических уравнений. Теория обратных задач — один из современных и важнейших разделов дифференциальных уравнений математической физики. Нелокальные задачи с условиями интегрального вида встречаются при математическом моделировании явлений различной природы, когда граница области протекания процесса недоступна для прямых измерений. Примером могут служить некоторые задачи изучения процессов распространения тепла. Теория оптимального управления динамическими системами широко используется при решении различных задач науки, техники и экономики. В теории оптимального управления разработаны и эффективно используются различные аналитические и приближенные методы (см., например, [2–5, 7, 9, 10, 15–17]). В [6] рассматривается широкий класс нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В [1] рассматриваются линейные эллиптические уравнения с коэффициентами, зависящими от функции управления и ее градиента, и изучается задача оптимального управления.

В данной работе рассматриваются вопросы обобщенного решения нелокальной обратной задачи оптимизации процессом распространения тепла по стержню конечной длины с квадратичным критерием оптимальности. При помощи принципа максимума формулируются необходимые условия оптимальности и вычисляется управляющая функция. Рассмотрим следующее уравнение распространения тепла по стержню конечной длины:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(x, p(t)), \quad (t,x) \in \Omega, \tag{1}$$

с интегральным условием

$$\int_0^T u(t,x) dt = \varphi(x), \quad x \in \Omega_l, \tag{2}$$

и граничными условиями Дирихле

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in \Omega_T, \tag{3}$$

где $f(x,p) \in C(\Omega_l \times \Upsilon)$ — функция внешнего источника, $p(t) \in C(\Omega_T)$ — функция управления, $u(t,x) \in C(\Omega)$ — функция состояния, $\varphi(x)$ — функция переопределения распределения тепла вдоль стержня, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\nu > 0$ — действительный параметр, $\varphi(x) \in L_2(\Omega_l)$, $\Upsilon \equiv [0, M^*]$, $0 < M^* < \infty$, $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $\Omega_l \equiv [0,l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$.

Для определения функции переопределения $\varphi(x)$ задано следующее промежуточное условие:

$$u(t_1, x) = \psi(x), \quad x \in \Omega_l, \tag{4}$$

где $0 < t_1 < T$, $\psi(x) \in L_2(\Omega_l)$.

В данной работе рассматривается нелокальная задача нелинейного оптимального управления, где интегральное условие (2) моделирует ситуации, когда либо объект исследования в обратной задаче принципиально недоступен для измерения, либо проведение такого измерения дорого. Функция $\varphi(x)$ в условии (2) также неизвестна. Исходя из практического применения, возникает необходимость использования дополнительного условия (4) с промежуточным значением по времени. Сформулированы необходимые условия оптимальности на основе принципа максимума, вычислены функция управления и функция состояния.

В обратной задаче оптимального управления (1)–(4) требуется найти тройку неизвестных функций:

$$\Big\{ u(t,x) \in \bar{H}_u(\Omega),\ \varphi(x) \in L_2(\Omega_l),\ p(t) \in C\left(\Omega_T\right) \Big\}.$$

Для решения уравнения (1) применяем метод рядов Фурье

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, b_n(x), \tag{5}$$

где функции $b_n(x)$ являются собственными функциями спектральной задачи

$$b''(x) + \lambda^2\, b(x) = 0, \quad b(0) = b(l) = 0, \quad 0 < \lambda,$$

и образуют полную систему ортонормированных функций $\big\{b_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(\Omega_l)$, а λ_n — соответствующие собственные числа, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Предположим, что и следующие функции тоже разлагаются в ряд Фурье по функциям $b_n(x)$:

$$f(x, p(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)\, b_n(x),\ \ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\, b_n(x), \tag{6}$$

где

$$f_n(p) = \int_0^l f(y, p(t))\, b_n(y)\, dy, \quad \varphi_n = \int_0^l \varphi(y)\, b_n(y)\, dy.$$

Задача. Найти функцию переопределения $\varphi(x)$, функцию управления

$$p(t) \in \Big\{ p : |p(t)| \leqslant M^*, \ t \in \Omega_T \Big\}$$

и функцию состояния $u(t,x)$, которые доставляют минимум функционалу

$$J[p] = \int\limits_0^l \big[u(T,y) - \xi(y) \big]^2 dy + \alpha \int\limits_0^T p^2(t)\, dt, \tag{7}$$

где $\xi(x)$ — такая непрерывная функция, что

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\, b_n(x), \quad \xi_n = \int\limits_0^l \xi(y)\, b_n(y)\, dy,$$

$$\xi(0) = \xi(l) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty, \quad 0 < \alpha = \mathrm{const}\,.$$

2. Обратная задача (1)–(4). Рассмотрим пространства

$$\bar{C}_u^{1,2}(\Omega) = \Big\{ u : u(t,x) \in C^{1,2}(\Omega), \ u(t,0) = u(t,l) = 0 \Big\},$$
$$\bar{C}_\Phi^{1,2}(\Omega) = \Big\{ \Phi : \Phi(t,x) \in C^{1,2}(\Omega), \ \Phi(0,x) = 0 \Big\}$$

(см. [8]) и их замыкания $\bar{H}_u(\Omega)$, $\bar{H}_\Phi(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{\bar{H}(\Omega)} = \sqrt{\int\limits_0^T \int\limits_0^l |u(t,y)|^2\, dy\, dt} < \infty.$$

Определение. Функция $u(t,x) \in \bar{H}_u(\Omega)$ называется обобщенным решением нелокальной задачи (1)–(3), если эта функция почти всюду удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и условиям (2) и (3).

Рассмотрим также следующие известные банаховы пространства (см., например, [12–14]):

(a) пространство $B_2(T)$ с нормой

$$\|a(t)\|_{B_2(\Omega_T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in \Omega_T} |a_n(t)| \right)^2};$$

(b) пространство ℓ_2 с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2} < \infty;$$

(c) пространство $L_2(\Omega_l)$ с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l)} = \sqrt{\int\limits_0^l |\vartheta(x)|^2 dx} < \infty.$$

Используя определение обобщенного решения и ряды Фурье (5), (6) и учитывая, что функции $b_n(x)$ образуют полную систему ортонормированных функций в $L_2(\Omega_l)$, из уравнения (1) приходим к следующей счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$u_n'(t) + \lambda_n^2 \nu\, u_n(t) = f_n(p(t)), \quad \text{где} \quad \lambda_n^2 = \left[\frac{n\pi}{l} \right]^2. \tag{8}$$

Интегрируя счетную систему диффефренциальных уравнений (8) на интервале $(0,t)$, получим

$$u_n(t) = A_n e^{-\lambda_n^2 \nu t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda_n^2 \nu (t-s)} \int\limits_0^l f(y,p(s))\, b_n(y)\, dy\, ds, \tag{9}$$

где A_n — неизвестный коэффициент интегрирования. Используя ряды Фурье (5) и (6), из интегрального условия (2) имеем

$$\varphi_n = \int\limits_0^l \varphi(y)\, b_n(y)\, dy = \int\limits_0^l \int\limits_0^T u(t,y)dt\, b_n(y)\, dy = \int\limits_0^T \int\limits_0^l u(t,y)\, b_n(y)\, dy\, dt = \int\limits_0^T u_n(t)dt. \tag{10}$$

Для нахождения неизвестного коэффициента интегрирования A_n воспользуемся условием (10):

$$\varphi_n = A_n \int\limits_0^T e^{-\lambda_n^2 \nu t} dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^t e^{-\lambda_n^2 \nu (t-s)} \int\limits_0^l f(y,p(s))\, b_n(y)\, dy\, ds\, dt =$$

$$= \frac{A_n}{\lambda_n^2 \nu}\, G_n(0) + \frac{1}{\lambda_n^2 \nu} \int\limits_0^T G_n(t) \int\limits_0^l f(y,p(t))\, b_n(y)\, dy\, dt,$$

где $G_n(t) = 1 - e^{-\lambda_n^2 \nu (T-t)}$. Отсюда находим, что

$$A_n = \frac{\lambda_n^2 \nu}{G_n(0)}\, \varphi_n - \frac{1}{G_n(0)} \int\limits_0^T G_n(t) \int\limits_0^l f(y,p(t))\, b_n(y)\, dy\, dt. \tag{11}$$

Подставляя (11) в представление (9), получаем

$$\begin{gathered} u_n(t) = \frac{\varphi_n}{G_n(0)}\, \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu t}} + \int\limits_0^T K_n(t,s) \int\limits_0^l f(y,p(s))\, b_n(y)\, dy\, ds, \\ u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{ \frac{\varphi_n}{G_n(0)}\, \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu t}} + \int\limits_0^T K_n(t,s) \int\limits_0^l f(y,p(s))\, b_n(y)\, dy\, ds \right\}, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$K_n(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{G_n(0)}\, G_n(s)\, e^{-\lambda_n^2 \nu t}, & t < s \leqslant T, \\ -\dfrac{1}{G_n(0)}\, G_n(s)\, e^{-\lambda_n^2 \nu t} + e^{-\lambda_n^2 \nu (t-s)}, & 0 \leqslant s < t. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $\varphi(x) \in L_2(\Omega_l)$ и $\|f(x,p)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$. Тогда для функции (12) имеет место включение $u(t,x) \in \bar{H}(\Omega)$.*

Доказательство. При фиксированных значениях функции переопределения и функции управления, подставляя формулу (12) в интеграл

$$\mathfrak{I} = \int\limits_0^T \int\limits_0^l u^2(t,y)\, dy\, dt,$$

получим

$$\Im=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}b_n(y)\left[\frac{\varphi_n}{G_n(0)}\,\frac{\lambda_n^2\nu}{e^{\lambda_n^2\nu\,t}}+\int\limits_0^T K_n(t,s)\int\limits_0^l f(z,p(s))\,b_n(z)\,dz\,ds\right]\right\}^2 dy\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n}{G_n(0)}\,\frac{\lambda_n^2\nu}{e^{\lambda_n^2\nu\,t}}\,b_n(y)\right\}^2 dy\,dt+$$

$$+2\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n}{G_n(0)}\,\frac{\lambda_n^2\nu}{e^{\lambda_n^2\nu\,t}}\,b_n(y)\right\}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^T K_n(t,s)\int\limits_0^l f(z,p(s))\,b_n(z)\,dz\,ds\right\}b_i(y)\,dy\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^T K_n(t,s)\int\limits_0^l f(z,p(s))\,b_n(z)\,dz\,ds\,b_n(y)\right\}^2 dy\,dt.$$

Учитывая, что $b_n(x)=\sqrt{2/l}\sin\pi\,n/l$, и применяя неравенства Коши—Шварца и Бесселя, получаем следующую оценку:

$$\Im\leqslant 2\int\limits_0^T\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_n}{G_n(0)}\,\frac{\lambda_n^2\nu}{e^{\lambda_n^2\nu\,t}}\right|\right]^2 dt+$$

$$+4\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_n}{G_n(0)}\,\frac{\lambda_n^2\nu}{e^{\lambda_n^2\nu\,t}}\right|\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left|K_n(t,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\right|ds\,dt+$$

$$+2\int\limits_0^T\left\{\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left|K_n(t,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\right|ds\right\}^2 dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_n}{G_n(0)}\right|^2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n^2\nu}{e^{\lambda_n^2\nu\,t}}\right|^2 dt+4\int\limits_0^T\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_n}{G_n(0)}\right|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_n^2\nu}{e^{\lambda_n^2\nu\,t}}\right|^2\right]^{1/2}\times$$

$$\times\int\limits_0^T\left[\sum_{n=1}^{\infty}|K_n(t,s)|^2\right]^{1/2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\right|^2\right]^{\frac12} ds\,dt+$$

$$+2\int\limits_0^T\left\{\int\limits_0^T\left[\sum_{n=1}^{\infty}|K_n(t,s)|^2\right]^{\frac12}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\right|^2\right]^{\frac12} ds\right\}^2 dt\leqslant$$

$$\leqslant 2\,[\chi_0]^2\,\chi_2+4\chi_0\,\chi_1\,\chi_3\,\chi_4+2[\chi_3\chi_4]^2T<\infty,$$

где

$$\chi_0=\left\|\frac{\varphi}{G(0)}\right\|_{\ell_2},\quad \chi_1=\int\limits_0^T\left\|\frac{\lambda^2\nu}{e^{\lambda^2\nu t}}\right\|_{\ell_2}dt,\quad \chi_2=\int\limits_0^T\left\|\frac{\lambda^2\nu}{e^{\lambda^2\nu t}}\right\|_{\ell_2}^2 dt,\quad \chi_3=\left\|\int\limits_0^T K(t,s)\,ds\right\|_{B_2(T)},$$

$$\chi_4=\max_{t\in[0,T]}\left\|f(x,p(t))\right\|_{L_2(\Omega_l)},$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Теперь рассмотрим функцию переопределения. По условию задачи предполагается, что

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n b_n(x),\quad \psi_n=\int_0^l \psi(y)\,b_n(y)\,dy.$$

Применим промежуточное условие (4) к представлению (12):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t_1)\,b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_n^2\nu}{G_n(0)}\,\frac{\varphi_n}{e^{\lambda_n^2\nu\,t_1}}+\int_0^T K_n(t_1,s)\int_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds\right]b_n(x). \tag{13}$$

Умножая скалярно каждый член (13) на $b_m(x)$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\big(b_n(x),b_m(x)\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2\nu}{G_n(0)}\,\frac{\varphi_n}{e^{\lambda_n^2\nu\,t_1}}\big(b_n(x),b_m(x)\big)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T K_n(t_1,s)\int_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds\,\big(b_n(x),b_m(x)\big).$$

Отсюда, учитывая, что функции $b_n(x)$ образуют полную систему ортонормированных функций в $L_2\,(\Omega_l)$, имеем

$$\psi_n=\varphi_n\omega_n+\int_0^T K_n(t_1,s)\int_0^l f\,(y,p(s))\;b_n(y)\,dy\,ds,\quad \text{где}\quad \omega_n=\frac{\lambda_n^2\nu}{G_n(0)}e^{-\lambda_n^2\nu\,t_1}. \tag{14}$$

Из (14) однозначно определяем коэффициенты Фурье φ_n для функции переопределения $\varphi(x)$:

$$\varphi_n=\psi_n\omega_n^{-1}-\omega_n^{-1}\int_0^T K_n(t_1,s)\int_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds, \tag{15}$$

если функция управления $p(s)$ существует и единственна. Подставляя (15) в представление (12), получаем

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\Bigg\{\psi_n\,\gamma_n(t)-\gamma_n(t)\int_0^T K_n(t_1,s)\int_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds+$$
$$+\int_0^T K_n(t,s)\int_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds\Bigg\}, \tag{16}$$

где $\gamma_n(t)=e^{\lambda_n^2\nu\,(t_1-t)}$. Аналогично, подставляя (15) в ряды Фурье (6), имеем

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\left\{\psi_n\omega_n^{-1}-\omega_n^{-1}\int_0^T K_n(t_1,s)f_n(p(s))\,ds\right\}. \tag{17}$$

3. Функция управления. Пусть $p(t)$ — функция оптимального управления:

$$\Delta J\big[p(t)\big]=J\big[p(t)+\Delta p(t)\big]-J\big[p(t)\big]\geqslant 0,$$

где $p(t)+\Delta p(t)\in C\,(\Omega_T)$. Применение принципа максимума приводит нашу задачу к следующим необходимым условиям оптимальности (см., например, [3, 17]):

$$q(t,x)\,f_p\big(x,p(t)\big)-2\alpha\,p(t)=0, \tag{18}$$

$$q(t,x)\,f_{pp}\big(x,p(t)\big)-2\alpha<0, \tag{19}$$

в котором $q(t,x)$ является обобщенным решением следующей задачи:

$$q_t(t,x)+\nu\, q_{x\,x}(t,x)=0, \quad (t,x)\in\Omega,$$
$$q(T,x)=-2\big[u(T,x)-\xi(x)\big], \quad q(t,0)=q(t,l)=0,$$

и определяется формулой

$$q(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\psi_n\,\gamma_n(T)-\gamma_n(T)\int\limits_0^T K_n(t_1,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))b_n(y)\,dy\,ds+ \\ +\int\limits_0^T K_n(T,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds-\xi_n\Bigg\}e^{-\lambda_n^2\nu\,(T-t)}b_n(x). \quad (20)$$

С учетом условия $f_p(x,p(t))\neq 0$ условия оптимальности (18) можно переписать следующим образом:

$$2\alpha p(t)f_p^{-1}(x,p(t))=q(t,x). \quad (21)$$

Подставляя (21) в условие (19), получаем

$$f_p(x,p(t))\left(\frac{p(t)}{f_p(x,p(t))}\right)_p>0. \quad (22)$$

В силу (22), подставляя (20) в (21), получаем

$$\frac{\alpha\,p(t)}{f_{np}(p(t))}-\gamma_n(T)\int\limits_0^T K_n(t_1,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))b_n(y)\,dy\,ds+ \\ +\int\limits_0^T K_n(T,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds=\left(\frac{\psi_n}{\gamma_n(T)}+\xi_n\right)e^{-\lambda_n^2\nu\,(T-t)}. \quad (23)$$

Перепишем (23) как следующее сложное интегральное уравнение относительно управляющей функции $p(t)$:

$$\alpha p(t)\Big/\int\limits_0^l f_p(y,p(t))\,b_n(y)\,dy+\int\limits_0^T R_n(s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds=F_n(t), \quad (24)$$

где

$$R_n(s)=K_n(T,s)-\gamma_n(T)\,K_n(t_1,s), \quad F_n(t)=\left(\frac{\psi_n}{\gamma_n(T)}+\xi_n\right)e^{-\lambda_n^2\nu\,(T-t)}.$$

Для того чтобы решить уравнение (24), мы используем следующие методы (см. [18]). В уравнении (24) положим

$$\alpha p(t)\Big/\int\limits_0^l f_p(y,p(t))\,b_n(y)\,dy=g(t), \quad (25)$$

где $g(t)\in C(\Omega_T)$ — пока неизвестная функция. Однако мы предполагаем, что она задана, т.е. функция $g(t)$ известна. Поэтому из уравнения (25) относительно функции управления $p(t)$ получаем следующее нелинейное функциональное уравнение:

$$p(t)=\frac{g(t)}{\alpha}\int\limits_0^l f_p(y,p(t))\,b_n(y)\,dy. \quad (26)$$

В действительности функция $p(t)$ зависит от n, так как функция

$$\int_0^l f_p(y, p(t))\, b_n(y)\, dy$$

— коэффициент Фурье на $[0, l]$. Для произвольной функции $p(t) \in C(\Omega_T)$ рассмотрим следующую непрерывную норму:

$$\|p(t)\|_C = \max_{t \in \Omega_T} |p(t)|.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) $0 < \|f_p(x, p(t))\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant M_1$, $0 < M_1 = \mathrm{const}$;

(ii) $\bigl|f_p(x, p_1(t)) - f_p(x, p_2(t))\bigr| \leqslant M_2(x)\, \bigl|p_1(t) - p_2(t)\bigr|$, $0 < \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$;

(iii) $\rho = \sqrt{l/2}\, \alpha^{-1} \max\limits_{t \in \Omega_T} |g(t)| \cdot \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} < 1$.

Тогда нелинейное функциональное уравнение (26) *имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций* $C(\Omega_T)$. *Это решение может быть найдено из следующего итерационного процесса*:

$$p_{0,n}(t) = 0, \quad p_{k+1,n}(t) = \frac{g(t)}{\alpha} \int_0^l f_p(y, p_{k,n}(t))\, b_n(y)\, dy, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

Доказательство. Из (27) получаем, что справедливы следующие оценки:

$$\bigl|p_{k+1,n}(t) - p_{0,n}(t)\bigr| \leqslant \left|\frac{g(t)}{\alpha}\right| \int_0^l \bigl|f_p(y, p_{k,n}(t))\, b_n(y)\bigr| dy \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, \frac{|g(t)|}{\alpha} \bigl\|f_p(y, p_{k,n}(t))\bigr\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, \frac{|g(t)|}{\alpha}\, M_1 < \infty;$$

$$\bigl|p_{k+1,n}(t) - p_{k,n}(t)\bigr| \leqslant \left|\frac{g(t)}{\alpha}\right| \left| \int_0^l \bigl|f_p(y, p_{k,n}(t)) - f_p(y, p_{k-1,n}(t))\bigr| \cdot b_n(y)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{g(t)}{\alpha}\right| \left| \int_0^l M_2(y) \bigl|p_{k,n}(t) - p_{k-1,n}(t)\bigr| \cdot b_n(y)\, dy \right| \leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, \frac{|g(t)|}{\alpha} \bigl|p_{k,n}(t) - p_{k-1,n}(t)\bigr| \cdot \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)}.$$

Тогда нетрудно проверить, что

$$\bigl\|p_{k+1,n}(t) - p_{k,n}(t)\bigr\|_C \leqslant \rho \cdot \bigl\|p_{k,n}(t) - p_{k-1,n}(t)\bigr\|_C.$$

Из справедливости этих оценок следует, что оператор в правой части (26) является сжимающим, так что он имеет единственную неподвижную точку в пространстве непрерывных функций $C(\Omega)$. Поскольку $C(\Omega)$ — банахово пространство, функциональное уравнение (26) имеет единственное решение в данном пространстве. Теорема 2 доказана. □

Обозначим указанное это решение функционального уравнения (26) через $p_n(t) = h(t, g_n(t))$. Подставляя его в (24) и учитывая (25), получаем следующее нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$g_n(t) = \Im(t; g_n) \equiv F_n(t) - \int_0^T R_n(s) \int_0^l f\bigl(y, h(s, g_n(s))\bigr)\, b_n(y)\, dy\, ds. \tag{28}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия*:

(i) $\xi(x) \in L_2(\Omega_l)$;

(ii) $\bigl|h(t, g_{1,n}(t)) - h(t, g_{2,n}(t))\bigr| \leqslant M_3 \bigl|g_{1,n}(t) - g_{2,n}(t)\bigr|$, $0 < M_3 = \mathrm{const}$;

(iii) $\tau = \sqrt{l/2}\, M_3 \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \int\limits_0^T |R_n(s)|\, ds < 1.$

Тогда нелинейное интегральное уравнение Фредгольма (28) *имеет единственное решение в классе непрерывных функций* $g_n(t) \in C(\Omega_T)$, *которое можно найти из следующего итерационного процесса*:

$$g_{0,n}(t) = F_n(t), \quad g_{k+1,n}(t) = \Im(t; g_{k,n}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Доказательство. Из последовательных приближений (29) получаем следующие оценки:

$$\left\| g_{k+1,n}(t) - g_{0,n}(t) \right\|_C \leqslant \int\limits_0^T |R_n(s)| \int\limits_0^l \left| f_p(y, h(s, g_{k,n}(s)))\, b_n(y) \right| dy\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{l}{2}} \int\limits_0^T |R_n(s)| \left\| f_p(x, h(s, g_{k,n}(s))) \right\|_{L_2(\Omega_l)} ds \leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, M_1 \int\limits_0^T |R_n(s)|\, ds < \infty;$$

$$\left\| g_{k+1,n}(t) - g_{k,n}(t) \right\|_C \leqslant \int\limits_0^T |R_n(s)| \left\| f_p(x, h(s, g_{k,n}(s))) - f_p(x, h(s, g_{k-1,n}(s))) \right\|_{L_2(\Omega_l)} ds \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, M_3 \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \int\limits_0^T |R_n(s)| \left\| g_{k,n}(s) - g_{k-1,n}(s) \right\|_C ds =$$

$$= \tau \cdot \left\| g_{k,n}(t) - g_{k-1,n}(t) \right\|_C < \left\| g_{k,n}(t) - g_{k-1,n}(t) \right\|_C.$$

Из этих оценок следует, что оператор в правой части (24) является сжимающим, так что он имеет единственную неподвижную точку в пространстве непрерывных функций $C(\Omega)$. Следовательно, нелинейное интегральное уравнение (28) имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций $g_n(t) \in C(\Omega_T)$. Теорема 3 доказана. □

Подставляя решение уравнения (28) в (24), определим управляющую функцию $p_n(t)$.

Согласно (16), оптимальный процесс находится по формуле

$$\bar{u}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \int\limits_0^T R_n(t, s) \int\limits_0^l f(y, \bar{p}(s))\, b_n(y)\, dy\, ds, \tag{30}$$

где $R_n(t, s) = K_n(t, s) - \gamma_n(t)\, K_n(t_1, s)$. Согласно (17), функция переопределения имеет вид

$$\bar{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{ \psi_n \omega_n^{-1} - \omega_n^{-1} \int\limits_0^T K_n(t, s) \int\limits_0^l f\left(y, \bar{p}(s)\right)\, b_n(y)\, dy\, ds \right\}. \tag{31}$$

Согласно формулам (7) и (24), минимальное значение функционала вычисляется по следующей формуле:

$$J[\bar{p}] = \int\limits_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\psi_n\, \gamma_n(T) + \int\limits_0^T R_n(s) \int\limits_0^l f(z, \bar{p}(s))\, b_n(z)\, dz\, ds - \xi_n \right] \right\} dy + \alpha \int\limits_0^T \left[\bar{p}(t)\right]^2 dt. \tag{32}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Если функция* $\psi(x) \in L_2(\Omega_l)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \psi_n\, \gamma_n(T) \right| < \infty,$$

то функционал (32) *принимает конечное значение.*

Доказательство. Достаточно показать абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T R_n(s) \int_0^l f(z, \bar{p}(s))\, b_n(z)\, dz\, ds. \tag{33}$$

Применим к (33) неравенство Коши—Шварца и неравенство Бесселя:

$$B \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T |R_n(s)| \left| \int_0^l f(z, \bar{p}(s))\, b_n(z)\, dz \right| ds = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} |R_n(s)| \left| \int_0^l f(z, \bar{p}(s))\, b_n(z)\, dz \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant T} |R_n(t)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \int_0^l f(z, \bar{p}(t))\, b_n(z)\, dz \right|^2 \right\}^{1/2} ds \leqslant$$

$$\leqslant T \|R(t)\|_{B_2(T)} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \big\| f(x, \bar{p}(t)) \big\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty.$$

□

Приближенное значение функционала вычисляется из следующего итерационного процесса:

$$J[\bar{p}^k] = \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\psi_n\, \gamma_n(T) + \int_0^T R_n(s) \int_0^l f\big(z, \bar{p}^k(s)\big)\, b_n(z)\, dz\, ds - \xi_n \right] \right\} dy + \alpha \int_0^T \big[\bar{p}^k(t)\big]^2 dt. \tag{34}$$

4. Заключение. При помощи метода разделения переменных Фурье исследована нелокальная задача для уравнения теплопроводности с интегральным условием, условиями Дирихле и условием с промежуточным значением. На основе принципа максимума сформулированы необходимые условия оптимальности функции управления по квадратичным критериям. Функция оптимального управления однозначно определяется из интегрального уравнения (24) методом последовательных приближений. Получены уравнения для определения функции переопределения, функции оптимального управления и функции состояния. Приведены представления для расчета оптимального процесса, функции переопределения и минимального значения функционала — формулы (27), (29), (30), (31) и (34). Полученные результаты могут найти дальнейшее применение при развитии математической и прикладной теории нелинейного оптимального управления в обратных задачах для некоторых систем с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Искендеров А. Д., Гамидов Р. А.* Задачи оптимизации с градиентом управления в коэффициентах эллиптических уравнений// Автомат. телемех. — 2020. — *81*, № 9. — С. 1627–1636.
2. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление термическими и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
4. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.
5. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
6. *Квитко А. Н.* Об одном методе решения локальной краевой задачи для нелинейной управляемой системы// Автомат. телемех. — 2020. — *81*, № 2. — С. 236–246.
7. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований// Автомат. телемех. — 2013. — *74*, № 12. — С. 56–103.
8. *Пулькина Л. С.* Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 3. — С. 435–445.
9. *Рапопорт Е. Я.* Оптимальное управление системами с распределенным параметром. — М.: Высшая школа, 2009.

10. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
11. *Юлдашев Т. К.* Оптимальное управление обратными тепловыми процессами в параболическом уравнении с нелинейными отклонениями по времени// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *210*. — С. 117–135.
12. *Юлдашев Т. К.* Определение коэффициента и классическая разрешимость нелокальной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Бенни—Люка с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *156*. — С. 89–102.
13. *Юлдашев Т. К.* Обратная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения с многомерным оператором Бенни—Люка и нелинейными максимумами// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *201*. — С. 3–15.
14. *Юлдашев Т. К., Рахмонов Ф. Д., Исмоилов А. С.* Интегро-дифференциальное уравнение Буссинеска с интегральными условиями и с малым параметром при смешанных производных// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211*. — С. 114–130.
15. *Girsanov I. V.* Lectures on the Mathematical Theory of Extremum Problems. — New York: Springer-Verlag, 1972.
16. *Lions J. L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1971.
17. *Kerimbekov A. K.* On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semilinear parabolic equations// Proc. World Congress Engineering, Vol. I (London, July 6-8, 2011), 2011. — P. 270–275.
18. *Yuldashev T. K.* Nonlinear optimal control of thermal processes in a nonlinear inverse problem// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 1. — P. 124–136.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Абдурахманова Гулнора Каландаровна
Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: g.abdurakhmanova@tsue.uz

CONTENTS

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.