

ISSN 2782-4438



# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ  
МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические  
обзоры

Том 233



Москва 2024

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

## Современная математика и ее приложения

### Тематические обзоры

### Том 233 (2024)

Дата публикации 11 марта 2024 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска

А. С. Бондарев

М. В. Шамолин

Научный редактор выпуска

А. В. Овчинников

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

[math@viniti.ru](mailto:math@viniti.ru)

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

[http://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=9534](http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534)

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ  
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ  
(ВИНИТИ РАН)

**ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

**СЕРИЯ  
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ**

**Том 233**

**МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ  
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ  
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.  
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXIV».**

**ВОРОНЕЖ, 3–9 МАЯ 2023 г.**

**Часть 4**



**Москва 2024**

## СОДЕРЖАНИЕ

Регулярная циклическая матрица изолированной особой точки уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида ( <i>А. А. Голубков</i> ) . . . . .	3
Двухкомпонентная оконная система на основе когерентных состояний и тета-функций ( <i>М. Л. Жаданова, С. Н. Ушаков, Е. А. Киселев</i> ) . . . . .	14
О разрешимости интегрального уравнения, связанного с дробно-нагруженной задачей теплопроводности ( <i>М. Т. Космакова, А. Н. Хамзеева</i> ) . . . . .	27
О разрешимости периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородной нелинейностью ( <i>А. Н. Наимов, М. В. Быстрецкий</i> ) . . . . .	37
Уравнения для ковариационных функций вектора состояния линейной системы стохастических дифференциальных уравнений с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями ( <i>И. Е. Полосков</i> ) . . . . .	46
След, детерминант и собственные числа ядерных операторов ( <i>О. И. Рейнов</i> ) . . . . .	56
Логарифмические спирали в задачах оптимального управления с управлением из круга ( <i>М. И. Ронжина, Л. А. Манита</i> ) . . . . .	75
О возможности использования проекционного метода Галёркина для решения нестационарного уравнения диффузии с переменным коэффициентом ( <i>Е. В. Серегина, М. А. Степович, М. Н. Филиппов</i> ) . . . . .	89
Уравнение ветвления для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве с квадратичными возмущениями малого параметра ( <i>В. И. Усков</i> ) . . . . .	99
Полнота экспоненциальных систем в пространствах функций в терминах площади ( <i>Б. Н. Хабибуллин, Е. Г. Кудашева</i> ) . . . . .	107
О некоторых свойствах стационарных случайных процессов с нечеткими состояниями ( <i>В. Л. Хацкевич</i> ) . . . . .	118
Краткий англо-русский словарь по теории графов ( <i>В. А. Воблый, Н. А. Архипова</i> ) . . . . .	127



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 3–13  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-3-13

УДК 517.927.2

## РЕГУЛЯРНАЯ ЦИКЛИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ СТАНДАРТНОГО ВИДА

© 2024 г. А. А. ГОЛУБКОВ

**Аннотация.** Изучены свойства передаточной матрицы  $\hat{C}$  уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида вдоль замкнутого пути, начинающегося в точке  $z_0$  и обходящего против часовой стрелки границу выпуклой области, в которой имеется ровно одна особая точка  $z_s$  потенциала (граница области особых точек не содержит). Основное внимание уделено исследованию особых точек однозначного характера; доказано, что в этом случае, если след матрицы  $\hat{C}$  не равен тождественно двум, то все её элементы являются целыми функциями спектрального параметра порядка  $1/2$  и типа  $2|z_0 - z_s|$  с тригонометрическим индикатором.

**Ключевые слова:** уравнения Штурма—Лиувилля на комплексной плоскости, особые точки, передаточная матрица.

## THE REGULAR CYCLIC MATRIX OF AN ISOLATED SINGULAR POINT OF THE STURM—LIOUVILLE EQUATION OF THE STANDARD FORM

© 2024 A. A. GOLUBKOV

**ABSTRACT.** For the Sturm–Liouville equation of the standard form, we examine properties of the transfer matrix  $\hat{C}$  along a closed path starting at a point  $z_0$  and going counterclockwise around the boundary of a convex domain containing exactly one singular point  $z_s$  of the potential (the boundary of the domain does not contain singular points). The main attention is paid to the study of singular points that are not branching points; we prove that in this case, if the trace of the matrix  $\hat{C}$  is not equal to two, then all its elements are entire functions of the spectral parameter of order  $1/2$  and type  $2|z_0 - z_s|$  with a trigonometric indicator.

**Keywords and phrases:** Sturm–Liouville equations on the complex plane, singular points, transfer matrix.

**AMS Subject Classification:** 34B24, 34L20, 34M45

**1. Введение. Постановка задачи и основные результаты.** Асимптотика решений уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \quad (1.1)$$

с голоморфным потенциалом  $Q$  в произвольной выпуклой области  $G$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  полностью изучена (см. [2, 13]). В частности, известно, что, если  $z_f - z_0 = |z_f - z_0| \exp(i\varphi_z) \neq 0$ ,  $\rho := \lambda^2 = |\rho| \exp(i\varphi_\rho)$ , то в точке  $z_f \in G$  непрерывно дифференцируемые решения  $u_1$  и  $u_2$

уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям

$$u_1(z_0) = 1, \quad u_1'(z_0) = 0, \quad u_2(z_0) = 0, \quad u_2'(z_0) = 1 \quad (z_0 \in G) \quad (1.2)$$

являются целыми функциями спектрального параметра  $\rho$  регулярного роста порядка  $1/2$  и типа  $|z_f - z_0| \cos(\varphi_\rho + \varphi_z)/2|$  (о целых функциях и характеристиках их роста см. [15, гл. 1]). Этот же результат справедлив, если область  $G$  является звездной относительно точки  $z_0$ .

Однако если потенциал имеет особые точки и уравнение (1.1) рассматривается в невыпуклой области его аналитичности, то в самом общем случае известно лишь, что решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2), являются целыми функциями  $\rho$  порядка не выше  $1/2$ , а более точные результаты для их порядка, типа и индикатора получены только при наличии дополнительных ограничений на взаимное расположение точек  $z_0, z_f$ , форму связывающего их пути интегрирования уравнения (1.1) и положение сектора на комплексной плоскости, в котором спектральный параметр стремится к бесконечности (см. [10–12, 16, 19]).

В настоящей работе с целью более полной характеристики свойств решений уравнения (1.1) как целых функций параметра  $\rho$  в случае неодносвязной области аналитичности потенциала исследована регулярная циклическая матрица  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  уравнения (1.1) для изолированной особой точки  $z_s$  потенциала  $Q(z)$  (см. определение 1.2).

**Определение 1.1.** Пусть потенциал  $Q(z)$  голоморфен в области  $G \subset \mathbb{C}$  и  $u_1(z), u_2(z)$  — непрерывно дифференцируемые решения уравнения (1.1) вдоль спрямляемого пути  $\gamma \subset G$ , удовлетворяющие условиям (1.2). Назовём передаточной матрицей уравнения (1.1) между точками  $z_0$  и  $z$  пути  $\gamma$  матрицу

$$\hat{P}(\gamma, z, z_0) \equiv \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix}.$$

В силу вида уравнения (1.1) и выбора начальных условий (1.2) определитель передаточной матрицы не зависит от  $z$  и равен единице.

**Определение 1.2.** Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — ограниченная выпуклая область с границей  $\delta G$ , содержащая ровно одну особую точку  $z_s$  потенциала  $Q(z)$ , и во всех точках  $\delta G$  потенциал голоморфен. Тогда передаточную матрицу уравнения (1.1) вдоль начинающегося и кончающегося в точке  $z_0 \in \delta G$  пути  $\gamma$ , обходящего границу области  $G$  против часовой стрелки, будем называть регулярной циклической матрицей  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  изолированной особой точки  $z_s$  уравнения (1.1) относительно точки  $z_0$ .

Подчернем, что граница ограниченной выпуклой области всегда спрямляема (см. [18, § 1]), а регулярная циклическая матрица является одной из матриц монодромии этой точки (см. [16, гл. 1, § 2, п. 3]).

В разделе 2 доказано, что регулярная циклическая матрица особой точки  $z_s$  относительно точки  $z_0$  аналитичности потенциала  $Q(z)$  может быть определена тогда и только тогда, когда  $z_s$  является изолированной особой точкой, и отрезок  $z_s z_0$  не содержит особых точек потенциала, отличных от  $z_s$ . При этом для фиксированных точек  $z_0$  и  $z_s$  матрица  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  не зависит от выбора области  $G$ , удовлетворяющей условиям определения 1.2. В разделе 3 получены критерии безмонодромности особой точки потенциала по элементам её регулярной циклической матрицы. Заметим, что потенциалы с безмонодромными особыми точками (соответствующая ей регулярная циклическая матрица и любая другая матрица монодромии равна единичной матрице при любых значениях спектрального параметра) были подробно исследованы в [9].

В разделе 4 доказана следующая теорема, содержащая основной результат данной работы.

**Теорема 1.1.** Пусть  $z_s$  — изолированная особая точка однозначного характера потенциала  $Q(z)$ ,  $z_0 \neq z_s$ , отрезок, соединяющий точки  $z_0$  и  $z_s$ , не содержит особых точек  $Q(z)$ , отличных от точки  $z_s$ ,  $\rho := \lambda^2 = |\rho| \exp(i\varphi_\rho)$ ,  $z_0 - z_s = |z_0 - z_s| \exp(i\varphi_{s0})$ ,  $\varphi_\rho, \varphi_{s0} \in (-\pi; \pi]$ , и  $c_0$  — след регулярной циклической матрицы  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  уравнения Штурма–Лиувилля (1.1) относительно точки  $z_0$ . Тогда  $c_0$  не зависит от положения точки  $z_0$  и либо также не зависит от  $\rho$ , либо

является целой функцией  $\rho$  порядка  $1/2$  минимального типа. При этом, если след  $c_0$  тождественно не равен двум, то все элементы матрицы  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  являются целыми функциями  $\rho$  порядка  $1/2$  с одинаковыми индикаторами

$$h_{lj}(\varphi_\rho, z_0, z_s) = 2|z_s - z_0| \left| \cos \left( \frac{1}{2} \varphi_\rho + \varphi_{s0} \right) \right|. \quad (1.3)$$

Заметим, что, если сделать замену  $\rho = \varrho \exp(2i\varphi_{s0})$ , то элементы матрицы  $\hat{C}(z_0, z_s, \varrho)$  будут целыми функциями нового параметра  $\varrho = |\varrho| \exp(i\varphi_\varrho)$ ,  $\varphi_\varrho \in (-\pi; \pi]$ , с тригонометрическим индикатором  $2|z_s - z_0| \cos(\varphi_\varrho/2)$ .

Регулярная циклическая матрица особой точки является одной из матриц монодромии этой точки, и поскольку все матрицы монодромии определенной особой точки подобны друг другу (см. [7, 16]), то они имеют одинаковый след (см. [14, п. 13.4.1]). Примеры потенциалов, для которых след матрицы монодромии уравнения (1.1) не зависит от спектрального параметра, приведены в [7]. К сожалению, остается открытым вопрос является ли условие  $c_0 \equiv 2$  признаком безмонодромности особой точки, и, если *не* является, то как быстро растут с ростом  $|\rho|$  элементы регулярных циклических матриц, имеющих при всех значениях спектрального параметра след равный двум, но отличных от тождественно единичной матрицы.

**2. Базовые свойства регулярной циклической матрицы произвольной особой точки.** Прежде чем формулировать базовые свойства регулярной циклической матрицы (теорема 2.1), докажем несколько вспомогательных лемм.

**Лемма 2.1.** Пусть  $z_s$  — произвольная внутренняя точка некоторой ограниченной выпуклой области  $G$ . Тогда для любого луча  $\alpha$ , исходящего из точки  $z_s$ , существует такая точка  $z_\alpha \in \alpha$ , что множество  $G_\alpha := \alpha \cap G$  совпадает с отрезком, соединяющим точки  $z_s$  и  $z_\alpha$  с открытым концом в точке  $z_\alpha$ . При этом точка  $z_\alpha$  является единственной лежащей на луче  $\alpha$  граничной точкой области  $G$ .

*Доказательство.* Поскольку точка  $z_s$  — внутренняя точка ограниченной области  $G$ , то множество неотрицательных действительных чисел  $R_\alpha := \{|z - z_s|, z \in G_\alpha\}$  обязательно включает положительные числа и ограничено сверху. Следовательно, существует число  $L_\alpha := \sup R_\alpha > 0$ , которое в силу открытости множества точек области  $G$  не достигается на множестве точек  $G_\alpha$ . Рассмотрим лежащую на луче  $\alpha$  точку  $z_\alpha$ , для которой  $|z_\alpha - z_s| = L_\alpha$ . По её построению (и в силу определения верхней грани) все точки  $z$  луча  $\alpha$ , лежащие вне отрезка, соединяющего точки  $z_s$  и  $z_\alpha$  не принадлежат множеству  $G_\alpha$ , и для любого  $\varepsilon > 0$  на этом отрезке найдется такая точка  $z_\varepsilon$  из множества  $G_\alpha$ , что  $|z_\alpha - z_\varepsilon| < \varepsilon$ . Учитывая выпуклость области  $G$  отсюда сразу следует первая часть утверждения, а также тот факт, что выбранная точка  $z_\alpha$  является граничной точкой области  $G$ . Предположим, что на луче  $\alpha$  лежит еще одна граничная точка области  $G$  — точка  $z_1$ . В силу только что доказанной первой части утверждения леммы  $|z_1 - z_s| > L_\alpha$ . При этом по определению граничной точки в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $z_1$  существует точка  $z_2 \in G$ . Поскольку точка  $z_s$  — внутренняя точка области  $G$ , то для некоторого  $\delta > 0$  существует  $\delta$ -окрестность точки  $z_s$ , полностью лежащая в области  $G$ . Проведем луч с началом в точке  $z_2$ , проходящий через точку  $z_\alpha$ . Если величина  $\varepsilon$  достаточно мала, то, поскольку  $|z_1 - z_s| > L_\alpha$ , этот луч обязательно пересечет описанную выше  $\delta$ -окрестность точки  $z_s$ . Следовательно, в силу выпуклости области  $G$  имеем  $z_\alpha \in G$ . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.  $\square$

**Лемма 2.2.** Для фиксированных точки  $z_0$  аналитичности потенциала  $Q(z)$  уравнения Штурма—Лиувилля (1.1) и его изолированной особой точки  $z_s$  регулярная циклическая матрица  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  не зависит от выбора области  $G$ , удовлетворяющей условиям определения 1.2.

*Доказательство.* Рассмотрим две области  $G_1$  и  $G_2$  с границами  $\delta G_1$  и  $\delta G_2$  соответственно, удовлетворяющие условиям определения 1.2. Поскольку у этих областей есть минимум одна общая точка  $z_s$ , то их объединение  $G_3 = G_1 \cup G_2$  является связным открытым множеством точек, т.е. областью. Так как все граничные точки областей  $G_1$  и  $G_2$  регулярны, то и граница области  $G_3$

не содержит особых точек потенциала  $Q(z)$ . Значит, существует область  $G_0 \supset \overline{G_3} := G_3 \cup \delta G_3$ , в которой потенциал  $Q(z)$  имеет единственную особую точку  $z_s$ . Поскольку  $z_s$  — общая внутренняя точка областей  $G_1$  и  $G_2$ , то существует такая  $\delta$ -окрестность  $G_s$  точки  $z_s$ , которая полностью лежит в областях  $G_1$  и  $G_2$ . По лемме 2.1 любой луч  $\alpha$  с началом в особой точке  $z_s$  имеет ровно по одной общей точке  $z_{1\alpha}$  и  $z_{2\alpha}$  соответственно с путями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , которые в силу определения 1.2 однозначно определяют выбором точки  $z_0$  и областей  $G_1$  и  $G_2$ . При этом для всех лучей  $\alpha$  отрезки, соединяющие точки  $z_{1\alpha}$  и  $z_{2\alpha}$ , лежат в двусвязной области  $G_0/\overline{G_s}$  аналитичности потенциала  $Q(z)$ . Поэтому пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  можно непрерывно деформировать внутри области  $G_0/\overline{G_s}$ , например, с помощью отображения

$$z(t, \varphi) = \left( L_{1\alpha}(\varphi) + t(L_{2\alpha}(\varphi) - L_{1\alpha}(\varphi)) \right) \exp(2\pi i \varphi),$$

где  $L_{n\alpha} := |z_{n\alpha} - z_s|$ ,  $n = 1, 2$ ,  $t, \varphi \in [0; 1]$ ,  $\varphi = \beta/(2\pi)$ , а  $\beta$  — угол между произвольным лучом  $\alpha$  и лучом  $\alpha_0$ , проходящим через точку  $z_0$ , отсчитываемый от луча  $\alpha_0$  против часовой стрелки. Таким образом, пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  с общей начальной и конечной точкой  $z_0$  гомотопны друг другу (см. [17]) в области аналитичности потенциала  $Q(z)$ , поэтому передаточные матрицы уравнения (1.1) вдоль этих путей совпадают. Последнее следует из теоремы об инвариантности аналитического продолжения функции вдоль пути относительно гомотопных преобразований этого пути (см. [17]) и того, что решения уравнения (1.1) аналитичны в области аналитичности потенциала  $Q(z)$  (см. [1, 8]).  $\square$

Заметим, что для справедливости леммы 2.2 требование выпуклости области  $G$  в определении 1.2 существенно. Контрпримером является случай, когда на отрезке, соединяющем точки  $z_s$  и  $z_0$ , лежит еще одна особая точка  $z_{s1}$  потенциала  $Q(z)$ , а невыпуклые области  $G_1$  и  $G_2$  выбраны так, что их объединение образует кольцеобразную область, внутренняя граница которой совпадает с границей некоторой выпуклой области  $G_{s1}$ , содержащей единственную особую точку  $z_{s1}$  потенциала  $Q(z)$ . Пусть границы областей  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_{s1}$  имеют общую точку  $z_0$ , и  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_{s1}$  — пути, начинающиеся и кончающиеся в точке  $z_0$  и обходящие против часовой стрелки границы областей  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_{s1}$  соответственно. Тогда передаточные матрицы  $\hat{P}_1(\gamma_1, z_0, z_0)$ ,  $\hat{P}_2(\gamma_2, z_0, z_0)$  и  $\hat{P}_{s1}(\gamma_{s1}, z_0, z_0)$  будут связаны одним из соотношений:

$$\hat{P}_1 = \hat{P}_{s1} \hat{P}_2 (\hat{P}_{s1})^{-1} \quad \text{или} \quad \hat{P}_2 = \hat{P}_{s1} \hat{P}_1 (\hat{P}_{s1})^{-1}$$

в зависимости от нумерации областей  $G_1$ ,  $G_2$ . Таким образом, матрицы  $\hat{P}_1$  и  $\hat{P}_2$  будут подобны, как и любые другие матрицы монодромии одной и той же особой точки, но совпадать они будут тогда и только тогда, когда матрицы  $\hat{P}_{s1}$  и  $\hat{P}_1$  (или  $\hat{P}_2$ ) перестановочны. Это будет иметь место, например, если  $z_s$  или (и)  $z_{s1}$  является безмонодромной особой точкой потенциала.

**Лемма 2.3.** *Регулярная циклическая матрица изолированной особой точки  $z_s$  не может быть определена для точки  $z_0$  аналитичности потенциала  $Q(z)$ , если отрезок, соединяющий точки  $z_s$  и  $z_0$ , содержит хотя бы одну особую точку потенциала  $z_{s1}$ , отличную от точки  $z_s$ .*

*Доказательство.* Предположим что в описанном в лемме случае существует область  $G$ , удовлетворяющая условиям определения 1.2. Известно, что замыкание выпуклой области (множества) есть выпуклое множество. Поэтому отрезок  $z_s z_0$  принадлежит замыканию  $G \cup \delta G$  области  $G$ . При этом по определению 1.2 граница области  $G$  не содержит особых точек, т.е.  $z_{s1} \in G$ , и, следовательно, область  $G$  содержит более одной особой точки, что противоречит определению 1.2. Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 2.4.** *Пусть  $z_s$  — изолированная особая точка потенциала  $Q(z)$  и отрезок  $L_0$ , соединяющий точки  $z_s$  и  $z_0$ , не содержит особых точек  $Q(z)$ , отличных от точки  $z_s$ . Тогда существует такое  $\delta > 0$ , что для любых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0; \delta]$  в определении 1.2 можно взять область  $G$ , ограниченную замкнутой ломаной  $z_0 z_A z_B z_C z_0$ , где точка  $z_B$  лежит на луче, выходящем из точки  $z_0$  и проходящем через точку  $z_s$ , причем  $|z_B - z_0| = |z_s - z_0| + \varepsilon_1$ ; отрезок  $z_A z_C$  перпендикулярен отрезку  $L_0$ , проходит через точку  $z_s$ , и  $|z_A - z_s| = |z_C - z_s| = \varepsilon_2$ .*



*Доказательство.* Поскольку предельная точка особых точек аналитической функции также является особой точкой, что непосредственно следует из определения голоморфной в точке функции (см., например, [17]), то множество  $A_s$  всех особых точек голоморфной функции замкнуто. По условию леммы  $z_s$  — изолированная особая точка, поэтому множество точек  $A_s/z_s$  также замкнуто. Множество точек любого отрезка также замкнуто и по условию леммы  $L_0 \cap A_s/z_s = \emptyset$ . Следовательно, по известной теореме о расстоянии между двумя замкнутыми множествами, не имеющими общих точек (см. [17]) расстояние  $\delta_0$  между этими множествами положительно. Положим  $\delta = \delta_0/2$ . Тогда описанная в лемме выпуклая область  $G$  будет содержать единственную особую точку  $z_s$  потенциала  $Q(z)$ , и во всех точках её границы потенциал  $Q(z)$  будет голоморфен. Лемма доказана.  $\square$

Заметим, что выбирая  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ , углы между лучами  $z_A z_0$  и  $z_A z_B$ , а также  $z_C z_B$  и  $z_C z_0$  можно сделать сколь угодно близкими к  $180^\circ$ . Именно это обстоятельство лежит в основе доказательства следующей леммы.

**Лемма 2.5.** *Пусть  $z_s$  — изолированная особая точка потенциала  $Q(z)$ , отрезок, соединяющий точки  $z_s$  и  $z_0$ , не содержит особых точек  $Q(z)$ , отличных от точки  $z_s$ ,  $\lambda \neq 0$  и  $\beta_\lambda := \operatorname{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\}/|\lambda| \neq 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует область  $G$  описанного в лемме 2.4 вида, удовлетворяющая определению 1.2 и такая, что  $0 < |z_B - z_0| - |z_s - z_0| < \varepsilon$  и  $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$  изменяется монотонно как на ломаной  $z_0 z_A z_B$ , так и на ломаной  $z_0 z_C z_B$ .*

*Доказательство.* Пусть  $L = |z_s - z_0|$ . Положим в лемме 2.4

$$\varepsilon_1 \in \left(0; \min\{\delta, \varepsilon/2\}\right), \quad \varepsilon_2 \in \left(0; \min\{\delta, |\beta_\lambda|/2, \varepsilon_1|\beta_\lambda|/(2L)\}\right)$$

и рассмотрим соответствующие область  $G$  и точки  $z_A$ ,  $z_B$  и  $z_C$ , описанные в лемме 2.4. Очевидно, что

$$0 < |z_B - z_0| - |z_s - z_0| < \varepsilon$$

в силу леммы 2.4 и выбора значения  $\varepsilon_1$ . Ломаную  $z_0 z_A z_B$  можно задать параметрически следующим образом:

$$z = \begin{cases} z_0 + t(z_A - z_0), & t \in [0, 1], \\ z_0 + (z_A - z_0) + (t - 1)(z_B - z_A), & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

Отсюда сразу следует, что при  $\lambda \neq 0$  для монотонности изменения  $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$  на ломаной  $z_0 z_A z_B$  необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$I_\lambda := \operatorname{Re}\{\lambda(z_A - z_0)\} \operatorname{Re}\{\lambda(z_B - z_A)\} > 0.$$

Но в силу леммы 2.4

$$|z_A - z_s| = \varepsilon_2, \quad z_B - z_s = (z_s - z_0)\varepsilon_1/L.$$

Поэтому

$$I_\lambda := \operatorname{Re}\{\lambda(z_A - z_s + z_s - z_0)\} \operatorname{Re}\{\lambda(z_B - z_s + z_s - z_A)\} = |\lambda|^2 (\delta_A \varepsilon_2 + \beta_\lambda) (\beta_\lambda \varepsilon_1/L - \delta_A \varepsilon_2) > 0,$$

где  $\delta_A := \operatorname{Re}\{\lambda(z_A - z_s)\}/(|\lambda||z_A - z_s|)$ , и положительность  $I_\lambda$  обусловлена указанным выше выбором значений параметров  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и очевидным неравенством  $|\delta_A| \leq 1$ . Монотонность изменения величины  $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$  на ломаной  $z_B z_C z_0$  доказывается аналогично. Лемма доказана.  $\square$

**Предложение 2.1.** *Монотонность изменения  $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$  на ломаных  $z_0 z_A z_B$  и  $z_0 z_C z_B$  обеспечивает для элементов передаточных матриц вдоль этих ломаных асимптотики такого же вида, как для передаточных матриц вдоль отрезков, при всех достаточно больших по модулю значениях спектрального параметра, кроме тех, которые лежат на луче  $\operatorname{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\} = 0$ .*

*Доказательство.* Данное утверждение следует из результатов монографий [2, 13]. Его доказательство полностью аналогично, например, доказательству леммы 8 в [5], в котором достаточно заменить слово «отрезок» на слово «кривая» или «ломаная».  $\square$

Предложение (2.1) позволяет дать оценку сверху для индикаторов элементов регулярной циклической матрицы.

**Теорема 2.1.** Пусть  $z_s$  — изолированная особая точка потенциала  $Q(z)$ , отрезок, соединяющий точки  $z_s$  и  $z_0$ , не содержит особых точек  $Q(z)$ , отличных от точки  $z_s$ ,

$$\rho := \lambda^2 = |\rho| \exp(i\varphi_\rho) \neq 0, \quad z_0 - z_s = |z_0 - z_s| \exp(i\varphi_{s0}).$$

Тогда все элементы  $c_{lj}$ ,  $l, j \in \{1, 2\}$ , регулярной циклической матрицы  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (1.1) являются целыми функциями  $\rho$  порядка не выше  $1/2$ , и их индикаторы  $h_{lj}(\varphi_\rho, z_0, z_s)$  (относительно порядка  $1/2$ ) удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq h_{lj}(\varphi_\rho, z_0, z_s) \leq 2|z_s - z_0| \left| \cos \frac{\varphi_\rho + \varphi_{s0}}{2} \right|. \quad (2.1)$$

*Доказательство.* Из леммы 2.4 настоящей работы и леммы 1 статьи [3] следует, что регулярную циклическую матрицу можно представить в виде

$$\hat{C}(z_0, z_s, \rho) = \hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B) \hat{P}(\gamma_A, z_B, z_0) = \hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B) \hat{P}^{-1}(\gamma_A, z_0, z_B), \quad (2.2)$$

где  $\gamma_C$  и  $\gamma_A$  — описанные в лемме 2.4 ломаные  $z_B z_C z_0$  и  $z_0 z_A z_B$  соответственно. При записи соотношений (2.2) предполагается, что точки  $z_A$  и  $z_C$  выбраны таким образом, что обход особой точки  $z_s$  по ломаной  $z_0 z_A z_B z_C z_0$  в соответствии с определением 1.2 происходит против часовой стрелки. При  $\operatorname{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\} \neq 0$  (т.е.  $\cos(\varphi_\rho + \varphi_{s0})/2 \neq 0$ ) в силу леммы 2.5 и предложения 2.1 все элементы матриц  $\hat{P}(\gamma_A, z_B, z_0)$  и  $\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)$  являются целыми функциями спектрального параметра  $\rho$  регулярного роста порядка  $1/2$  и типа  $|z_B - z_0|$  с индикатором

$$h_0(\varphi_\rho, \varphi_{s0}) = |z_B - z_0| \left| \cos \frac{\varphi_\rho + \varphi_{s0}}{2} \right|. \quad (2.3)$$

В силу (2.2) элементы  $c_{lj}$ ,  $l, j \in \{1, 2\}$ , регулярной циклической матрицы связаны с элементами матриц  $\hat{P}(\gamma_A, z_B, z_0)$  и  $\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)$  следующим образом:

$$c_{lj} = p_{l1}(\gamma_C, z_0, z_B) p_{1j}(\gamma_A, z_B, z_0) + p_{l2}(\gamma_C, z_0, z_B) p_{2j}(\gamma_A, z_B, z_0). \quad (2.4)$$

По теореме об индикаторе произведения двух целых функций одного порядка, хотя бы одна из которых является функцией регулярного роста (см. [15, гл. 3, § 4]) получаем, что оба слагаемых в последней формуле имеют порядок  $1/2$ , тип  $2|z_B - z_0|$  и общий индикатор  $2h_0(\varphi_\rho, \varphi_{s0})$ . С другой стороны, порядок суммы любых двух целых функций одного порядка не больше порядка каждого из слагаемых (см. [15, гл. 1, § 15]), и целые функции порядка не больше  $1/2$  могут иметь только неотрицательные индикаторы (см. [15, гл. 1, § 14, теорема 21; § 16 свойство (з) индикатора]), что доказывает левое неравенство в (2.1). Правая часть неравенства в (2.1) следует из лемм 2.2, 2.5, формул (2.3), (2.4) и того факта, что индикатор суммы любых двух целых функций одного порядка (относительно этого порядка) не больше наибольшего (при данном  $\varphi_\rho$ ) из индикаторов слагаемых (см. [15, гл. 1, § 15]): в силу леммы 2.2 для фиксированных точки  $z_0$  аналитичности потенциала  $Q(z)$  уравнения Штурма—Лиувилля (1.1) и его изолированной особой точки  $z_s$  регулярная циклическая матрица  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  не зависит от выбора области  $G$ , удовлетворяющей условиям определения 1.2, а по лемме 2.5 для любого  $\varepsilon > 0$  существует подходящая область  $G$ , для которой  $0 < |z_B - z_0| - |z_s - z_0| < \varepsilon$ . Таким образом, при  $\operatorname{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\} \neq 0$  все утверждения теоремы доказаны. В силу непрерывности индикатора любой целой функции (см. [15, гл. 1, § 16, свойство (а) индикатора]) утверждения теоремы справедливы и при  $\operatorname{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\} = 0$ , причем в этом случае  $\cos(\varphi_\rho + \varphi_{s0})/2 = 0$ , и значит,  $h_{lj} = 0$ .  $\square$

### 3. Признаки безмонодромности особой точки.

**Лемма 3.1.** Пусть  $z_s$  — изолированная особая точка потенциала  $Q(z)$ , и для некоторой точки  $z_0$  регулярная циклическая матрица  $\hat{C}_0 := \hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (1.1) не зависит от спектрального параметра  $\rho$ . Тогда  $z_s$  — особая точка однозначного характера и  $\hat{C}_0 \equiv \hat{I}$ , где  $\hat{I}$  — единичная матрица.

*Доказательство.* Поскольку любая регулярная циклическая матрицы является передаточной матрицей, то её определитель в силу вида уравнения (1.1) и начальных условий (1.2) равен единице. Кроме того, случай  $\hat{C}_0 \equiv -\hat{I}$  невозможен, так как при этом из формулы (2.2) имеем  $\hat{P}(\gamma_A, z_0, z_B) = -\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)$ , что противоречит известной асимптотике элементов передаточной матрицы уравнения (1.1) при больших значениях  $|\lambda|$  на любых кривых  $\gamma$  с монотонным изменением  $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_B)\}$ . Так, например, из леммы (2.5) и предложения 2.1 следует, что если  $\operatorname{Re}\{\lambda(z_0 - z_B)\} > 0$ , то для нахождения асимптотик элементов матриц  $\hat{P}(\gamma_A, z_0, z_B)$  и  $\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)$  можно использовать формулу (11) работы [4], положив в ней  $N = 0$ . В результате получим, что

$$\begin{aligned} p_{11}(\gamma, z_0, z_B) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{O(1)}{|\lambda|} \right) \exp(\lambda(z_0 - z_B)), \\ p_{12}(\gamma, z_0, z_B) &= \frac{1}{2\lambda} \left( 1 + \frac{O(1)}{|\lambda|} \right) \exp(\lambda(z_0 - z_B)), \\ p_{21}(\gamma, z_0, z_B) &= \frac{\lambda}{2} \left( 1 + \frac{O(1)}{|\lambda|} \right) \exp(\lambda(z_0 - z_B)), \\ p_{22}(\gamma, z_0, z_B) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{O(1)}{|\lambda|} \right) \exp(\lambda(z_0 - z_B)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где кривая  $\gamma$  совпадает с кривой  $\gamma_A$  или  $\gamma_C$ , а символ  $O(1)$  обозначает функцию параметра  $\lambda$ , конкретный вид которой для нас не важен, ограниченную при  $|\lambda| > \lambda_{cr}$ , где  $\lambda_{cr}$  — конечная величина, которая может быть разной для разных кривых  $\gamma$ .

Рассмотрим точку  $z_1$ , которая делит отрезок, соединяющий точки  $z_s$  и  $z_0$ , в отношении  $1 : 2$ , т.е.

$$|z_1 - z_s| = \frac{|z_0 - z_s|}{3} = \frac{|z_0 - z_1|}{2}. \quad (3.2)$$

Тогда по лемме 2.4 определена регулярная циклическая матрица  $\hat{C}(z_1, z_s, \rho)$  уравнения (1.1), которую в силу [3, лемма 1] можно представить в виде

$$\hat{C}(z_1, z_s, \rho) = \hat{P}(L_1, z_1, z_0) \hat{C}_0 \hat{P}(L_1, z_0, z_1), \quad (3.3)$$

где  $L_1$  — отрезок, соединяющий точки  $z_1$  и  $z_0$ . Значит, в силу [3, лемма 1] матрица  $\hat{C}(z_1, z_s, \rho)$  равна передаточной матрице  $\hat{P}_0$  уравнения (1.1) вдоль замкнутой вырожденной ломаной  $L$ , соединяющей точки  $z_1, z_0$  и  $z_1$ , с условиями разрыва решений в этих точках, задаваемых не зависящими от  $\rho$  матрицами  $\hat{\eta}_0 = \hat{I}$ ,  $\hat{\eta}_1 := \hat{C}_0$  и  $\hat{\eta}_2 = \hat{I}$  соответственно. Кроме того, в случае, если  $z_s$  является особой точкой неоднозначного характера, то потенциал  $Q$  в уравнении (1.1) будет кусочно аналитическим на ломаной  $L$ : он будет совпадать с некоторыми аналитическими функциями  $Q_0$  и  $Q_1$  соответственно на путях от точки  $z_1$  к точке  $z_0$  и обратно.

Рассмотрим три случая.

**Случай 1.** Пусть  $\hat{C}_0 \equiv \hat{I}$  и точка  $z_s$  — особая точка однозначного характера, т.е. функции  $Q_0$  и  $Q_1$  совпадают. Тогда  $\hat{P}(L_1, z_1, z_0) = \hat{P}^{-1}(L_1, z_0, z_1)$ , и  $\hat{C}(z_1, z_s, \rho) \equiv \hat{I}$  в силу формулы (3.3).

**Случай 2.** Пусть  $\hat{C}_0 \equiv \pm i \hat{\sigma}_3$ , где  $\hat{\sigma}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Тогда в силу [3, лемма 6] матрица  $\hat{P}_0 = \pm i \hat{\sigma}_3 \hat{P}_1$ , где  $\hat{P}_1$  — передаточная матрица уравнения (1.1) вдоль отрезка, соединяющего точки  $z_1$  и  $2z_0 - z_1$ , с кусочно аналитическим потенциалом  $Q$ , совпадающим с функциями  $Q_0(z)$  и  $Q_1(2z_0 - z)$  на отрезках, соединяющих соответственно точки  $z_1, z_0$  и  $z_0, 2z_0 - z_1$ . В этом случае все элементы матрицы  $\hat{P}_0$  являются целыми функциями порядка  $1/2$  и типа  $|(2z_0 - z_1) - z_1| = 2|z_0 - z_1| = 4|z_1 - z_s|$  (см. [3]), где последнее равенство следует из соотношения (3.2), задающего положение точки  $z_1$ , и противоречит ограничению (2.1) на тип элементов регулярной циклической матрицы  $\hat{C}(z_1, z_s, \rho)$ . Значит, случай 2 невозможен.

**Случай 3.** Пусть  $\hat{C}_0 \equiv \hat{I}$  и  $Q_0(z) \neq Q_1(z)$  ( $z_s$  является особой точкой неоднозначного характера) или  $\hat{C}_0 \notin \{\pm \hat{I}, \pm i\hat{\sigma}_3\}$  (при этом особая точка может быть любой). Тогда, поскольку  $\det \hat{C}_0 = 1$ , то в терминологии работы [3] ломаная  $L$  является простой кривой и следовательно, в силу [3, лемма 15] все элементы матрицы  $\hat{P}_0$  являются целыми функциями порядка  $1/2$  и типа  $2|z_0 - z_1| = 4|z_1 - z_s|$ , т.е. случай 3 невозможен по той же причине, что и случай 2.

Заметим, что, хотя потенциал на ломаной  $L$  не является кусочно целым, а только кусочно аналитическим, в случаях 2 и 3 для матрицы  $\hat{P}_0$  применимы все результаты работы [3] с  $N = 1$ ,  $\hat{\eta}_1 := \hat{C}_0$  и  $\hat{\eta}_0 = \hat{\eta}_2 = \hat{I}$ . Дело в том, что кусочная целостность потенциала в [3] используется только для деформации исходной кривой в ломаную с простым набором характеристических данных (в терминологии указанной работы) без изменения передаточной матрицы вдоль нее. Для применения же результатов [3] к рассматриваемой геометрии достаточно кусочной аналитичности потенциала на ломаной  $L$ .

Поскольку, как было указано в самом начале доказательства, случай  $\hat{C}_0 \equiv -\hat{I}$  невозможен, то мы рассмотрели все возможные случаи и не получили противоречия только в случае 1. Лемма доказана.  $\square$

**Предложение 3.1.** *Рассуждая полностью аналогично и пользуясь результатами работы [6], можно доказать, что утверждения леммы 3.1 сохраняются, если все элементы матрицы  $\hat{C}_0$  являются полиномами спектрального параметра  $\rho$  некоторых конечных степеней.*

**Лемма 3.2.** *Пусть  $z_s$  — изолированная особая точка потенциала  $Q(z)$ , и для некоторой точки  $z_0$  элемент  $c_{12}$  или  $c_{21}$  регулярной циклической матрицы  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (1.1) равен нулю при всех значениях спектрального параметра  $\rho$ . Тогда  $z_s$  — особая точка однозначного характера и  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho) \equiv \hat{I}$ .*

*Доказательство.* Как указывалось выше,  $\det \hat{C} \equiv 1$ . Поэтому, если  $c_{12}c_{21} \equiv 0$ , то  $c_{11}c_{22} \equiv 1$ , т.е.  $c_{11}$ ,  $c_{22}$  не имеют нулей и, значит, не зависят от  $\rho$ , поскольку по теореме 2.1 являются целыми функциями  $\rho$  порядка не выше  $1/2$ , а такие функции определяются своими нулями с точностью до постоянного множителя (см. [15, гл. 1, § 10]). Таким образом,  $c_{11} = f$ ,  $c_{22} = 1/f$ , где  $f \neq 0$  и не зависит от  $\rho$ . Записывая формулу (2.2) в виде

$$\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B) = \hat{C}(z_0, z_s, \rho)\hat{P}(\gamma_A, z_0, z_B),$$

получим, что

$$\begin{aligned} p_{C,11} &\equiv f p_{A,11}, & p_{C,21} &\equiv c_{21} p_{A,11} + p_{A,21}/f && \text{при } c_{12} \equiv 0; \\ p_{C,22} &\equiv p_{A,22}/f, & p_{C,11} &\equiv f p_{A,11} + c_{12} p_{A,21} && \text{при } c_{21} \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь асимптотическими формулами (3.1), получаем, что в обоих случаях  $f = 1$ , и, кроме того,  $c_{21} = O(1)$  или  $c_{12} = O(1)/\lambda^2$  при  $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\} > 0$  и  $|\lambda| > \lambda_{cr}$ . Но по теореме 2.1 заключаем, что  $c_{12}$  и  $c_{21}$  — целые функции  $\rho$  порядка не выше  $1/2$ , а такие функции могут быть ограничены в некотором угле на комплексной плоскости  $\rho$  только если они не зависят от  $\rho$  (см. [15, гл. 1, § 14, теорема 21]). Таким образом, доказано, что если  $c_{12}c_{21} \equiv 0$ , то матрица  $\hat{C}$  не зависит от  $\rho$ , и значит все утверждения леммы следуют из леммы 3.1.  $\square$

Заметим, что, если для особой точки  $z_s$  потенциала  $Q(z)$  существует точка  $z_0$ , для которой  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho) \equiv \hat{I}$ , то точка  $z_s$  является безмонодромной особой точкой уравнения (1.1) (см. [9]).

**4. Доказательство теоремы об индикаторе роста элементов матрицы  $\hat{C}$  особой точки однозначного характера.** Для начала докажем утверждение теоремы 1.1 о следе регулярной циклической матрицы особой точки потенциала  $Q(z)$  однозначного характера.

**Лемма 4.1.** *Пусть  $z_s$  — изолированная особая точка потенциала  $Q(z)$  однозначного характера, а отрезок, соединяющий точки  $z_s$  и  $z_0$ , не содержит особых точек  $Q(z)$ , отличных от  $z_s$ . Тогда след  $c_0 := c_{11} + c_{22}$  регулярной циклической матрицы  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (1.1) является целой функцией  $\rho$  порядка не выше  $1/2$ , и минимального типа (относительно порядка  $1/2$ ), которая не зависит от положения точки  $z_0$ .*

*Доказательство.* Поскольку по условию  $z_s$  — изолированная особая точка потенциала  $Q(z)$ , то существует такое  $\delta > 0$ , что круг радиуса  $\delta$  с центром в точке  $z_s$  не содержит других особых точек. Значит, для любого  $0 < \varepsilon < \delta$  существует такая точка  $z_\varepsilon$ , что отрезок, соединяющий точки  $z_s$  и  $z_\varepsilon$ , не содержит особых точек  $Q(z)$ , отличных от  $z_s$ . Пусть  $\gamma$  — произвольная кривая, соединяющая точки  $z_0, z_\varepsilon$  и не содержащая особых точек потенциала  $Q(z)$ . Тогда в силу [3, лемма 1] регулярную циклическую матрицу  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  можно представить в виде

$$\hat{C}(z_0, z_s, \rho) = \hat{P}(\gamma, z_0, z_\varepsilon) \hat{C}(z_\varepsilon, z_s, \rho) \hat{P}(\gamma, z_\varepsilon, z_0).$$

Поскольку  $z_s$  — особая точка потенциала  $Q(z)$  однозначного характера, то значения потенциала  $Q(z)$  в каждой точке кривой  $\gamma$  до и после обхода точки  $z_s$  будут совпадать, и, следовательно,  $\hat{P}(\gamma, z_\varepsilon, z_0) = \hat{P}^{-1}(\gamma, z_0, z_\varepsilon)$ . Поэтому матрица  $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$  подобна матрице  $\hat{C}(z_\varepsilon, z_s, \rho)$ . Но  $\hat{C}(z_\varepsilon, z_s, \rho)$  не зависит от положения точки  $z_0$  и в силу теоремы 2.1 её элементы являются целыми функциями порядка не выше  $1/2$  с неотрицательным индикатором (относительно порядка  $1/2$ ), не превышающим  $2\varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Поскольку следы подобных матрицы совпадают (см. [14, п. 13.4.1]), то лемма доказана.  $\square$

Для последующего нам понадобится следующая алгебраическая лемма.

**Лемма 4.2.** Пусть

$$\begin{aligned} \hat{A} &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, & \hat{M}_1 &:= \hat{A} \hat{B}^{-1} := \begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \hat{B} &:= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, & \hat{M}_2 &:= \hat{B}^{-1} \hat{A} := \begin{pmatrix} m_{11}^{(2)} & m_{12}^{(2)} \\ m_{21}^{(2)} & m_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\det \hat{A} = \det \hat{B} = 1$ . Тогда

$$\begin{cases} m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \equiv a_{12}^2 + b_{12}^2 - m_0 a_{12} b_{12}, \\ m_{21}^{(1)} m_{21}^{(2)} \equiv a_{21}^2 + b_{21}^2 - m_0 a_{21} b_{21}, \\ 1 - m_{11}^{(1)} m_{11}^{(2)} \equiv a_{11} a_{22} + b_{11} b_{22} - m_0 a_{11} b_{22}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $m_0$  — совпадающие между собой следы матриц  $\hat{M}_1$  и  $\hat{M}_2$ .

*Доказательство.* По условию леммы  $\hat{M}_1 = \hat{A} \hat{M}_2 \hat{A}^{-1}$ , т.е. матрицы  $\hat{M}_1$  и  $\hat{M}_2$  подобны, что и обеспечивает совпадение их следов (см. [14, п. 13.4.1]). Тожждества (4.1) проверяются непосредственно.  $\square$

Пользуясь леммой 4.2, докажем формулу (1.3) для индикаторов элементов регулярной циклической матрицы. Рассмотрим точки  $z_{01}$  и  $z_{02}$ , лежащие на одной прямой с особой точкой  $z_s$  по разные стороны от нее. Пусть  $z_{01} - z_s := |z_{01} - z_s| \exp(i\varphi_{s1})$ . Тогда в силу выбора взаимного расположения точек  $z_{01}, z_{02}$  и  $z_s$  имеем:

$$z_{01} - z_{02} = (|z_{01} - z_s| + |z_{02} - z_s|) \exp(i\varphi_{s1}), \quad z_{02} - z_s := |z_{02} - z_s| \exp(i\varphi_{s1} + i\pi). \quad (4.2)$$

В силу изолированности особой точки  $z_s$  точки  $z_{01}$  и  $z_{02}$  можно выбрать так, чтобы отрезок  $z_{01} z_{02}$  не содержал особых точек потенциала  $Q$ , отличных от точки  $z_s$ . В этом случае определены регулярные циклические матрицы  $C^{(1)} := \hat{C}(z_{01}, z_s, \rho)$  и  $C^{(2)} := \hat{C}(z_{02}, z_s, \rho)$  особой точки  $z_s$  уравнения (1.1) относительно точек  $z_{01}$  и  $z_{02}$  соответственно. При этом в силу формулы (2.2)

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \hat{P}(\gamma_C, z_{01}, z_{02}) \hat{P}^{-1}(\gamma_A, z_{01}, z_{02}), \\ C^{(2)} &= \hat{P}^{-1}(\gamma_A, z_{01}, z_{02}) \hat{P}(\gamma_C, z_{01}, z_{02}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

При записи соотношений (4.3) (как и соотношений (2.2)) предполагается, что ломаные  $\gamma_A$  и  $\gamma_C$ , соединяющие точки  $z_{01}$  и  $z_{02}$ , выбраны так, что обход особой точки  $z_s$  в соответствии с определением 1.2 происходит против часовой стрелки. Положим

$$\hat{P}^{(A)} := \hat{P}(\gamma_A, z_{01}, z_{02}), \quad \hat{P}^{(C)} := \hat{P}(\gamma_C, z_{01}, z_{02})$$

и применим к матрицам  $C^{(1)}$  и  $C^{(2)}$  первую формулу (4.1). В результате получим (верхние индексы у матриц и их элементов совпадают):

$$c_{12}^{(1)} c_{12}^{(2)} \equiv \left(p_{12}^{(A)}\right)^2 + \left(p_{12}^{(C)}\right)^2 - c_0 p_{12}^{(A)} p_{12}^{(C)}. \quad (4.4)$$

В силу леммы 4.1 заключаем, что  $c_0$  является целой функцией  $\rho$  порядка не выше  $1/2$  и минимального типа (относительно порядка  $1/2$ ). Иными словами,  $c_0(\rho)$  либо не зависит от  $\rho$ , либо неограниченно возрастает при увеличении  $|\rho|$  вдоль любого луча, кроме, возможно, одного (см. [15, гл. 1, § 14, теорема 21]). Учитывая также одинаковую асимптотику (3.1) для элементов матриц  $\hat{P}^{(A)}$  и  $\hat{P}^{(C)}$ , получаем, что во всех случаях, кроме  $c_0(\rho) \equiv 2$  индикатор роста правой, а значит и левой части соотношения (4.4) равен

$$h(\varphi_\rho, \varphi_{s12}) = 2|z_{01} - z_{02}| \left| \cos \frac{\varphi_\rho + \varphi_{s12}}{2} \right| \quad (4.5)$$

при всех значениях  $\varphi_\rho$ , кроме, возможно, одного. Следовательно, в силу непрерывности индикатора любой целой функции (см. [15, гл. 1, § 16, свойство (а) индикатора]), если след  $c_0(\rho)$  не равен тождественно 2, то соотношение (4.5) выполняется для всех значений  $\varphi_\rho$ . Сопоставляя формулы (2.1), (4.2), (4.4) и (4.5), получаем, что последняя формула может выполняться тогда и только тогда, когда для  $h_{12}$  выполняется (1.3). Рассуждая аналогично с помощью второй и третьей формул (4.1), получим, что формула (1.3) справедлива также для  $h_{21}$ ,  $h_{11}$  и, следовательно, в силу леммы 4.1, для  $h_{22}$ . Теорема 1.1 полностью доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков: ГНТИУ, 1939.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
3. Голубков А. А. Краевая задача для уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой и условиями разрыва решений// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — 16. — С. 1005–1027.
4. Голубков А. А. Асимптотика передаточной матрицы уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2019. — № 2. — С. 37–41.
5. Голубков А. А. Обратная задача для уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно-целым потенциалом и кусочно-постоянным весом на кривой// Сиб. электрон. мат. изв. — 2021. — 18, № 2. — С. 951–974.
6. Голубков А. А. Спектр оператора Штурма—Лиувилля на кривой с параметром в краевых условиях и условиях разрывов решений// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 193. — С. 45–68.
7. Голубков А. А. Квазибезмонодромные особые точки уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида на комплексной плоскости// Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 4. — С. 1032–1038.
8. Гурса Э. Курс математического анализа. Дифференциальные уравнения. — М.-Л.: ГТТИ, 1933.
9. Ишкин Х. К. О критерии безмонодромности уравнения Штурма—Лиувилля// Мат. заметки. — 2013. — 94, № 4. — С. 552–568.
10. Ишкин Х. К. Критерий локализации спектра оператора Штурма—Лиувилля на кривой// Алгебра анал. — 2016. — 28, № 1. — С. 52–88.
11. Ишкин Х. К., Набиуллина А. А. Асимптотика решений уравнения Штурма—Лиувилля с мероморфным потенциалом// J. Math. Mech. Comp. Sci. — 2019. — 104, № 4. — С. 24–31.
12. Ишкин Х. К., Резбаев А. В. К формуле Дэвиса о распределении собственных чисел несамосопряженного дифференциального оператора// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 153. — С. 84–93.
13. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1981.
15. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
16. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.

17. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969.
18. *Яглом И. М., Болтянский В. Г.* Выпуклые фигуры. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
19. *Langer R. E.* The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain// Trans. Am. Math. Soc. — 1939. — 46. — P. 151–190.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Голубков Андрей Александрович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: [andrej2501@yandex.ru](mailto:andrej2501@yandex.ru)



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 14–26  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-14-26

УДК 517.518.8, 517.988.8

## ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ ОКОННАЯ СИСТЕМА НА ОСНОВЕ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ И ТЕТА-ФУНКЦИЙ

© 2024 г. М. Л. ЖАДАНОВА, С. Н. УШАКОВ, Е. А. КИСЕЛЕВ

**Аннотация.** Построена двухкомпонентная оконная система функций, обладающая хорошей частотно-временной локализацией. Система составлена из двух ортогональных друг другу оконных подсемейств. Обсуждается процедура ортогонализации полученных подсемейств, приводятся явные формулы для расчёта констант неопределённости, рассмотрена проблема полноты всей предложенной двухкомпонентной системы. Вопросы об ортогонализации и полноте сведены к проверке одной гипотезы о нулях преобразования Зака.

**Ключевые слова:** оконная система, когерентные состояния, тета-функция, частотно-временная локализация, константа неопределённости, преобразование Зака.

## TWO-COMPONENT WINDOW SYSTEM BASED ON COHERENT STATES AND THETA FUNCTIONS

© 2024 M. L. ZHADANOVA, S. N. USHAKOV, E. A. KISELEV

**ABSTRACT.** In this paper, we construct a two-component window system of functions with good time-frequency localization. The system consists of two window subfamilies orthogonal to each other. The procedure for orthogonalizing the resulting subfamilies is discussed, explicit formulas for calculating the uncertainty constants are given, and the problem of completeness of the whole two-component system is considered. Questions about orthogonalization and completeness are reduced to testing a certain hypothesis about the zeros of the Zak transform.

**Keywords and phrases:** window system, coherent states, theta function, time-frequency localization, uncertainty constant, Zak transform.

**AMS Subject Classification:** 42C30, 42C40

### 1. Введение. Системы функций вида

$$g_{k,m}(x) = \exp\left(-\frac{(x + \omega_1 k)^2}{2}\right) e^{i\omega_2 m x}, \quad k, m \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где  $\omega_1, \omega_2 > 0$  — некоторые фиксированные параметры, нашли широкое применение в различных областях математики и физики. В квантовой теории они носят название когерентных состояний, а при условии  $\omega_1 \omega_2 < 2\pi$  образуют фрейм, называемый также фреймом Габора (см. [1, гл. 3], [10, гл. 11]). Одна из первых прикладных задач, решаемых Дж. фон Нейманом, была связана с построением квантовой энтропии. Трудность состояла в получении ортонормированного базиса пространства  $L_2(\mathbb{R})$  с равномерно ограниченной константой неопределённости из семейства функций (1) при условии  $\omega_1 \omega_2 = 2\pi$  (см. [5]). Позднее возник вопрос о полноте данной системы функций, разрешённый в работах А. М. Переломова. Под полнотой понимается равенство нулю ортогонального дополнения. Оказалось, что при предложенном условии на  $\omega_1, \omega_2$



система содержит ровно одну лишнюю функцию (см. [7, 8]), а в силу теоремы Бальяна—Лоу получилось невозможным построить базис оконного типа с равномерно ограниченной константой неопределённости (см. [1, гл. 4]). Мы предлагаем обойти указанную проблему, используя многокомпонентные оконные системы, порождённые не одной, а несколькими функциями.

Рассмотрим семейство функций (1) при  $\omega_1\omega_2 = 4\pi$ . Из него можно получить ортонормированную систему с равномерно ограниченной константой неопределённости, которая, однако, не является полной в пространстве  $L_2(\mathbb{R})$  (см. [11]). Действительно, как следует из результатов [3], набор функций

$$u_\alpha(x) = \exp\left(-(\alpha - 1)\frac{x^2}{2}\right)\theta_3\left(-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{\alpha x}{\omega_2} - \frac{i}{2}\right), q\right), \quad (2)$$

с параметрами

$$q = \exp\left(-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\left(1 - \frac{2\pi}{S}\alpha\right)\right), \quad 1 < \alpha < \frac{S}{2\pi}, \quad S = \omega_1\omega_2 > 2\pi,$$

ортогонален всем  $g_{k,m}(x)$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ , если  $\omega_1\omega_2 > 2\pi$ . Здесь  $\theta_3(x, q)$  — третья тета-функция Якоби (см. [13, 20.2.3]):

$$\theta_3(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikx}, \quad |q| < 1.$$

Мы предлагаем рассмотреть неполную оконную систему (1) с параметрами  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 4\pi$ , дополнив её с помощью (2) с применением операции сдвига к самой функции  $u_\alpha(x)$  и к её образу Фурье. В результате получается двухкомпонентная оконная система, причём для построения ортонормированного семейства достаточно будет только ортогонализировать отдельно вторую компоненту, образованную функциями  $u_\alpha(x + k)e^{i4\pi mx}$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ .

**2. Построение двухкомпонентной ортогональной оконной системы функций.** Пусть  $\omega_1\omega_2 = 4\pi$ . Рассматривается случай  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 4\pi$ . Заметим, что при других соотношениях параметров выкладки полностью аналогичны, но формулы получаются более громоздкими. Зафиксируем в (2) некоторое значение  $\alpha \in (1, 2)$  и рассмотрим сдвиги полученной функции  $u_\alpha(x)$  по переменной  $x$  с шагом  $\omega_1 = 1$  и по частоте с шагом  $\omega_2 = 4\pi$ . В результате получим двухкомпонентную оконную систему следующего вида:

$$g_{k,m}(x) = \exp\left(-\frac{(x+k)^2}{2}\right)e^{i4\pi mx}, \quad k, m \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

$$u_{k,m}(x) = u(x+k)e^{i4\pi mx}, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Здесь функция окна второй компоненты задаётся равенством

$$u(x) = u_\alpha(x) = \exp\left(-(\alpha - 1)\frac{x^2}{2}\right)\theta_3(-\alpha\pi x + i2\pi^2, q), \quad q = \exp(-2\pi^2(2 - \alpha)).$$

Подсемейства  $g_{k,m}(x)$  и  $u_{k,m}(x)$  взаимно ортогональны. Таким образом, чтобы получить ортонормированную систему, достаточно ортогонализировать отдельно  $g_{k,m}(x)$  и  $u_{k,m}(x)$ . Для  $g_{k,m}(x)$ , как уже упоминалось, это было сделано ранее (см. [3]). Ортогонализация  $u_{k,m}(x)$  выполняется в рамках данной работы.

Нам понадобится преобразование Зака (см. [1, гл. 4])

$$Z[f](x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(x-p)e^{i2\pi py}, \quad x, y \in [0, 1].$$

Оно является линейным отображением  $L_2(\mathbb{R}) \rightarrow S$ , где  $S = L_2([0, 1]^2)$ . Укажем два его свойства.

1. Для любых  $f, g \in L_2(\mathbb{R})$  справедливо соотношение

$$(f, g)_{L_2} = (Z[f], Z[g])_S = \int_0^1 \int_0^1 Z[f](x, y)\overline{Z[g](x, y)} dx dy. \quad (5)$$

2. Пусть

$$f_{k,m}(x) = f(x+k)e^{i2\pi mx}, \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$Z[f_{k,m}](x, y) = Z[f](x, y)e^{i2\pi(mx+ky)}. \quad (6)$$

Перейдём непосредственно к ортогонализации  $u_{k,m}(x)$ . Требуется построить такую функцию

$$v(x) = \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} c_{p,r}^{\perp} u_{p,r}(x), \quad (7)$$

что

$$(v, v_{k,m}) = \delta_{0,k} \delta_{0,m}, \quad k, m \in \mathbb{Z},$$

где

$$v_{k,m}(x) = v(x+k)e^{i4\pi mx}, \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

При этом предполагается, что  $\{c_{p,r}^{\perp}\} \in \ell_2$ , т.е.

$$\sum_{p,r=-\infty}^{\infty} |c_{p,r}^{\perp}|^2 < \infty.$$

Применим к  $v(x)$  преобразование Зака:

$$Z[v](x, y) = \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} c_{p,r}^{\perp} Z[u](x, y)e^{i2\pi(2rx+py)} = Z[u](x, y) \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} c_{p,r}^{\perp} e^{i2\pi(2rx+py)}. \quad (8)$$

Если использовать вспомогательный тригонометрический ряд

$$C^{\perp}(x, y) = \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} c_{p,r}^{\perp} e^{i2\pi(rx+py)},$$

который называют символом или маской последовательности  $\{c_{p,r}^{\perp}\}$  (см. [6, гл. 1], [9, гл. 3]), то равенство (8) можно представить в кратком виде:

$$Z[v](x, y) = Z[u](x, y)C^{\perp}(2x, y). \quad (9)$$

С помощью свойства (5) условие ортогональности также можно записать в терминах  $Z[v]$ :

$$(Z[v], Z[v_{k,m}]) = \delta_{0,k} \delta_{0,m}, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Сформулируем одно вспомогательное утверждение, которое понадобится в дальнейшем. Оно в той или иной форме встречается в [1, гл. 4] и [12]. Также приведём и его доказательство, поскольку некоторые идеи сыграют важную роль в последующих рассуждениях. Для простоты при этом будем полагать, что функция  $v(x)$  всюду определена и является гладкой, поскольку в конечном счёте именно с такими нам и приходится иметь дело в рамках данной работы.

**Утверждение 1.** *Условие ортогональности (10) выполняется тогда и только тогда, когда почти всюду при  $x, y \in [0, 1]$  имеет место соотношение*

$$\left| Z[v]\left(\frac{x}{2}, y\right) \right|^2 + \left| Z[v]\left(\frac{x+1}{2}, y\right) \right|^2 = 1. \quad (11)$$

*Доказательство.* Воспользуемся свойством (6):

$$(Z[v], Z[v_{k,m}]) = \int_0^1 \int_0^1 |Z[v](x, y)|^2 e^{i2\pi(2mx+ky)} dx dy.$$

Разобьём интеграл по  $x$  на две части, обозначив его для краткости  $I(y)$ :

$$I(y) = \int_0^{1/2} |Z[v](x, y)|^2 e^{i2\pi(2mx+ky)} dx + \int_{1/2}^1 |Z[v](x, y)|^2 e^{i2\pi(2mx+ky)} dx.$$

Во втором интеграле сделаем замену переменной  $t = x - 1/2$ :

$$I(y) = \int_0^{1/2} |Z[v](x, y)|^2 e^{i2\pi(2mx+ky)} dx + \int_0^{1/2} \left| Z[v] \left( t + \frac{1}{2}, y \right) \right|^2 e^{i2\pi(2mt+ky)} dx.$$

Здесь учтено, что  $e^{i2\pi m} = 1$ . После этого снова объединим интегралы:

$$I(y) = \int_0^{1/2} \left( |Z[v](t, y)|^2 + \left| Z[v] \left( t + \frac{1}{2}, y \right) \right|^2 \right) e^{i2\pi(2mt+ky)} dt.$$

Для удобства сделаем ещё одну замену  $x = 2t$ . В результате имеем:

$$(Z[v], Z[v_{k,m}]) = \int_0^1 \int_0^1 \left( \left| Z[v] \left( \frac{x}{2}, y \right) \right|^2 + \left| Z[v] \left( \frac{x+1}{2}, y \right) \right|^2 \right) e^{i2\pi(mx+ky)} dx dy.$$

Из полученной формулы вытекает, что в случае, когда  $(Z[v], Z[v_{k,m}]) = \delta_{0,k}\delta_{0,m}$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ , подынтегральное выражение почти всюду при  $x, y \in [0, 1]$  должно быть равно единице, поскольку экспоненты  $e^{i2\pi(mx+ky)}$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$  образуют в пространстве  $S$  ортонормированный базис.

Пусть теперь, наоборот, имеет место равенство (11). Тогда

$$(Z[v], Z[v_{k,m}]) = \int_0^1 \int_0^1 e^{i2\pi(mx+ky)} dx dy = \delta_{0,k}\delta_{0,m}, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Подставив (9) в (11), получим соотношение

$$\left| Z[u] \left( \frac{x}{2}, y \right) \right|^2 |C^\perp(x, y)|^2 + \left| Z[u] \left( \frac{x+1}{2}, y \right) \right|^2 |C^\perp(x+1, y)|^2 = 1.$$

Поскольку  $C^\perp(x+1, y) = C^\perp(x, y)$ , в результате приходим к следующему функциональному уравнению:

$$\left| C^\perp(x, y) \right|^2 = \frac{1}{F(x, y)}, \quad (12)$$

где

$$F(x, y) = \left| Z[u] \left( \frac{x}{2}, y \right) \right|^2 + \left| Z[u] \left( \frac{x+1}{2}, y \right) \right|^2. \quad (13)$$

Если извлечь квадратный корень из правой части (12) и разложить полученную функцию в двумерный ряд Фурье, можно найти коэффициенты ортогонализации  $c_{p,r}^\perp$ , которые нам необходимы.

Начнём с того, что исследуем преобразование Зака функции  $u(x)$ :

$$Z[u](x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp \left( -(\alpha - 1) \frac{(x-p)^2}{2} \right) \theta_3(-\alpha\pi(x-p) + i2\pi^2, q) e^{i2\pi py}. \quad (14)$$

В данной работе мы не ставим себе целью провести исчерпывающий обзор всевозможных случаев, а стремимся получить хотя бы один пример двухкомпонентной ортогональной оконной системы функций. По этой причине положим далее  $\alpha = 3/2$ , так как при этом значении параметра многие формулы заметно упрощаются.

В дальнейшем для краткой записи соотношений нам понадобятся ещё две тета-функции Якоби (см. [13, (20.2.2), (20.2.4)]):

$$\theta_2(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{(k+\frac{1}{2})^2} e^{i(2k+1)x}, \quad \theta_4(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} e^{2ikx}, \quad |q| < 1.$$

Итак, подставим  $\alpha = 3/2$  в формулу (14):

$$Z[u](x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-p)^2}{4}\right) \theta_3\left(-\frac{3\pi(x-p)}{2} + i2\pi^2, q\right) e^{i2\pi py}, \quad q = \exp(-\pi^2).$$

Воспользуемся квазипериодичностью тета-функции (см. [13, (20.2.8)]):

$$\theta_3(z + (m + n\tau)\pi, q) = q^{-n^2} e^{-i2nz} \theta_3(z, q), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

В нашем случае  $\tau = i\pi$ ,  $q = \exp(i\pi\tau) = \exp(-\pi^2)$ . Это даёт

$$\theta_3\left(-\frac{3\pi x}{2} + i2\pi^2, q\right) = e^{4\pi^2} e^{i6\pi x} \theta_3\left(-\frac{3\pi x}{2}, q\right).$$

С учётом того, что  $\theta_3(x, q)$  — чётная функция, получим следующую формулу:

$$Z[u](x, y) = e^{4\pi^2} e^{i6\pi x} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-p)^2}{4}\right) \theta_3\left(\frac{3\pi(x-p)}{2}, q\right) e^{i2\pi py}. \quad (15)$$

Поскольку

$$\theta_3(x + \pi, q) = \theta_3(x, q), \quad \theta_3(x + \pi/2, q) = \theta_4(x, q)$$

(см. [13, (20.2.8), (20.2.14)]), имеем:

$$\theta_3\left(\frac{3\pi(x-2p)}{2}, q\right) = \theta_3\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right), \quad \theta_3\left(\frac{3\pi(x-2p+1)}{2}, q\right) = \theta_4\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right).$$

Благодаря этому удобно сумму разбить на две части: по чётным значениям индекса  $p = 2r$  и по нечётным  $p = 2r - 1$ . Это даёт:

$$\begin{aligned} Z[u](x, y) &= e^{4\pi^2} e^{i6\pi x} \left( \theta_3\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{i4\pi r y} \exp\left(-\frac{(x-2r)^2}{4}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \theta_4\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(2r-1)y} \exp\left(-\frac{(x-2r+1)^2}{4}\right) \right) = \\ &= e^{4\pi^2} e^{i6\pi x} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \left( \theta_3\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp(-r^2) e^{ir(4\pi y - ix)} + \right. \\ &\quad \left. + \theta_4\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2r-1)^2}{4}\right) e^{i(2r-1)(2\pi y - ix/2)} \right). \end{aligned}$$

Оставшиеся суммы тоже представляют собой некоторые тета-функции. Пользуясь этим, окончательно приходим к следующей формуле:

$$Z[u](x, y) = e^{4\pi^2} e^{i6\pi x} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \Omega(x, y),$$

где

$$\Omega(x, y) = \theta_3\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right) \theta_3\left(2\pi y - \frac{ix}{2}, q_u\right) + \theta_4\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right) \theta_2\left(2\pi y - \frac{ix}{2}, q_u\right), \quad q_u = \exp(-1/2).$$

Важную роль в дальнейшем играют точки, в которых преобразование Зака  $Z[u](x, y)$  обращается в нуль. Докажем, что  $Z[u](x, y) = 0$  при  $x = y = 1/2$ . Для этого удобнее всего воспользоваться формулой (15):

$$Z[u]\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -e^{4\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(1/2-p)^2}{4}\right) \theta_3\left(\frac{3\pi(1/2-p)}{2}, q\right) (-1)^p.$$

В силу чётности функции Гаусса и  $\theta_3(x, q)$ , эта сумма разбивается на пары слагаемых, которые одинаковы по модулю, но противоположны по знаку. Это будут слагаемые с номерами  $p = 0$  и  $p = -1$ ,  $p = 1$  и  $p = -2$  и т. д. Следовательно, вся правая часть равна нулю.

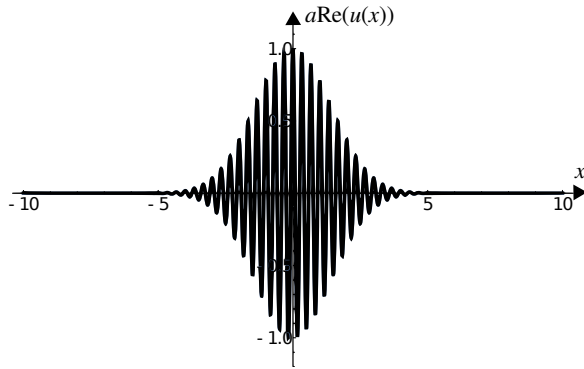


Рис. 1. График  $a \operatorname{Re} u(x)$ .

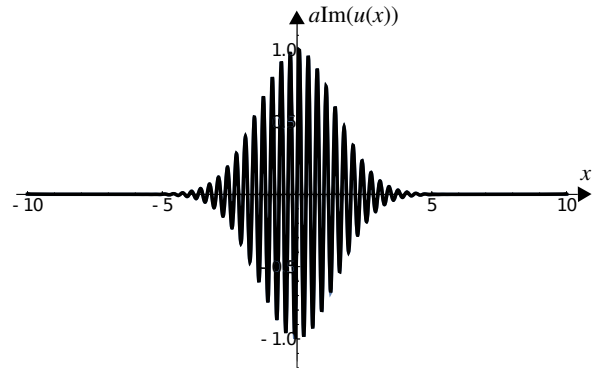


Рис. 2. График  $a \operatorname{Im} u(x)$ .

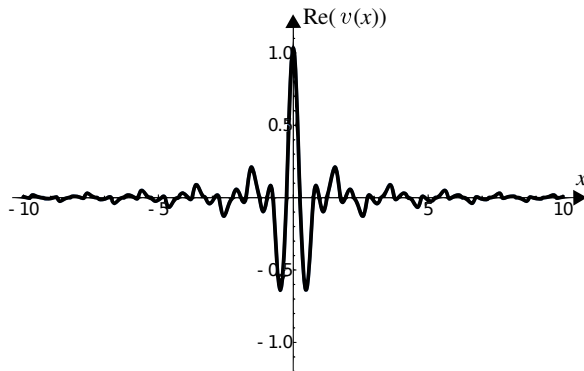


Рис. 3. График  $\operatorname{Re} v(x)$ .

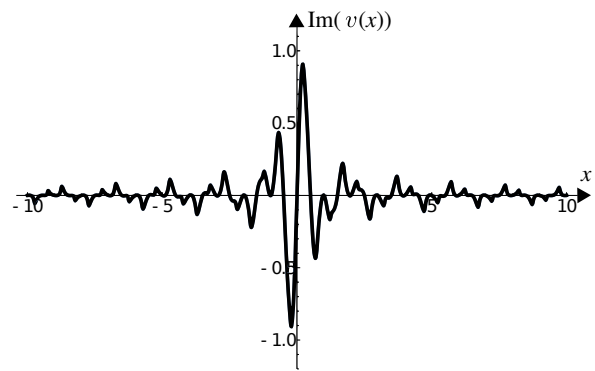


Рис. 4. График  $\operatorname{Im} v(x)$ .

Доказать, что  $Z[u](x, y) \neq 0$  во всех остальных точках квадрата  $x, y \in [0, 1]$  оказывается существенно сложнее. К сожалению, строго аналитически это обосновать не удалось, но результаты численных расчётов позволяют выдвинуть следующее предположение.

**Гипотеза 1.**  $Z[u](x, y) \neq 0$  при всех  $x, y \in [0, 1]$ , кроме точки  $x = y = 1/2$ .

Если данная гипотеза верна, то функция  $F(x, y)$  из формулы (13) будет строго положительной, так как оба слагаемых в (13) не смогут одновременно обратиться в нуль.

Далее необходимо воспользоваться уравнением (12): требуется извлечь квадратный корень из (13) и разложить функцию  $1/\sqrt{F(x, y)}$  в двумерный ряд Фурье. К сожалению, найти  $c_{p,r}^\perp$  после этого удаётся только численно.

На рис. 1 и 2 представлены графики действительной и мнимой части функции  $u(x)$ . Чтобы избежать слишком больших чисел, все значения умножены на величину  $a = e^{-4\pi^2}$ .

На рис. 3 и 4 представлены графики действительной и мнимой части функции  $v(x)$  из формулы (7), которая порождает ортонормированную оконную подсистему.

**3. Константа неопределённости.** Обозначим через  $\widehat{g}(\xi)$  преобразование Фурье функции  $g(x)$ :

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx,$$

являющееся линейным унитарным оператором, действующим в  $L_2(\mathbb{R})$ .

Пусть  $g(x), xg(x) \in L_2(\mathbb{R})$ , причём  $\|g\|_{L_2} \neq 0$ . Тогда среднее значение  $\langle g \rangle$  и радиус  $\Delta(g)$  функции  $g$  задаются формулами

$$\langle g \rangle = \frac{1}{\|g\|_{L_2}^2} \int_{-\infty}^{\infty} x|g(x)|^2 dx, \quad \Delta(g) = \left( \frac{1}{\|g\|_{L_2}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle g \rangle)^2 |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Аналогично определяются среднее значение  $\langle \hat{g} \rangle$  и радиус  $\Delta(\hat{g})$  для преобразования Фурье  $\hat{g}$  в случае  $\xi \hat{g}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$ :

$$\langle \hat{g} \rangle = \frac{1}{\|\hat{g}\|_{L_2}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi, \quad \Delta(\hat{g}) = \left( \frac{1}{\|\hat{g}\|_{L_2}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \langle \hat{g} \rangle)^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Константой неопределённости называется произведение (см. [6, гл. 1], [9, гл. 1])

$$u(g) = \Delta(g)\Delta(\hat{g}).$$

В тех случаях, когда один из интегралов  $\Delta(g)$  или  $\Delta(\hat{g})$  расходится, значение константы неопределённости принято брать равным  $\infty$ . В случае унитарного преобразования Фурье минимальное значение константы неопределённости равно  $1/2$ .

В нашем конкретном случае при вычислении константы неопределённости возникают интегралы, значения которых выпишем заранее:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2(x-r)^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{i\alpha r} e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}, \quad (16)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\beta^2(x-r)^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{i\alpha r} e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}} \left( r + \frac{i\alpha}{2\beta^2} \right), \quad (17)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta^2(x-r)^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^3} e^{i\alpha r} e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}} \left( 2\beta^2 - (\alpha - 2ir\beta^2)^2 \right), \quad (18)$$

где  $\alpha, \beta, r \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ .

Будем рассматривать специальный случай  $S = \omega_1\omega_2 = 4\pi$ ,  $\frac{\pi\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_2^2}{4}$ . Тогда параметры и функции примут следующий вид:

$$-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1} \left( \frac{\alpha x}{\omega_2} - \frac{i}{2} \right) = -\frac{\omega_2\alpha x}{4} + i\frac{\omega_2^2}{4}, \quad q = \exp \left( -\frac{\omega_2^2}{4} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right),$$

$$\begin{aligned} u_\alpha(x) &= \exp \left( -(\alpha - 1) \frac{x^2}{2} \right) \theta_3 \left( -\frac{\omega_2\alpha x}{4} + i\frac{\omega_2^2}{4}, q \right) = \\ &= \exp \left( -(\alpha - 1) \frac{x^2}{2} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{\omega_2^2}{4} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) k^2 \right) \exp \left( \frac{-k\omega_2^2}{4} \right) \exp \left( \frac{i\omega_2\alpha kx}{4} \right). \end{aligned}$$

Константу неопределённости будем искать для следующей линейной комбинации:

$$\varphi(x, \sigma, \gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) e^{i\gamma kx}$$

**Теорема 1.** Для функции окна

$$\varphi(x, \sigma, \gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) e^{i\gamma kx}$$

где  $c_k = O(k^{-2-\varepsilon})$ ,  $\varepsilon > 0$ , верны формулы

$$\Delta^2(\varphi(x, \sigma, \gamma)) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^4 \gamma^2 B}{4A}, \quad \Delta^2(\widehat{\varphi}(\xi, \sigma, \gamma)) = \frac{1}{2\sigma^2} + \gamma^2 \left( \frac{E}{4A} - \frac{D^2}{A^2} \right),$$

где

$$A = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell} \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right), \quad E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{\ell} \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right), \quad D = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_{\ell} \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right),$$

$$a_{\ell} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell}, \quad b_{\ell} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k c_{k-\ell}, \quad d_{\ell} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell} (2k - \ell)^2.$$

*Доказательство.* Выпишем квадрат модуля  $\varphi(x, \sigma, \gamma)$ :

$$|\varphi(x, \sigma, \gamma)|^2 = \sum_{k, k'=-\infty}^{\infty} c_k c_{k'} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2} + i\gamma(k - k')x\right).$$

Сделаем замену индекса  $\ell = k - k'$ ,  $k' = k - \ell$ :

$$|\varphi(x, \sigma, \gamma)|^2 = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{i\ell\gamma x}.$$

Введём обозначение

$$a_{\ell} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell};$$

тогда

$$|\varphi(x, \sigma, \gamma)|^2 = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{i\ell\gamma x}. \quad (19)$$

Выпишем норму функции  $\varphi(x, \sigma, \gamma)$ , используя (16):

$$\|\varphi(x, \sigma, \gamma)\|^2 = \sqrt{\pi} \sigma \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell} \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right).$$

Заметим, что  $a_{\ell}$  — вещественные числа, поэтому  $|\varphi(x, \sigma, \gamma)|^2$  — чётная функция. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x |\varphi(x, \sigma, \gamma)|^2 dx = 0.$$

Применяя (18) и (19), мы получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi(x, \sigma, \gamma)|^2 dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sigma^5 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell} \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right) \left(\frac{2}{\sigma^2} - \ell^2 \gamma^2\right) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \|\varphi(x, \sigma, \gamma)\|^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sigma^5 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell} \ell^2 \gamma^2 \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right). \end{aligned}$$

В итоге получим первую формулу теоремы:

$$\Delta^2(\varphi(x, \sigma, \gamma)) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^4 \gamma^2 B}{4A},$$

где

$$A = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell} \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right), \quad B = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell} \ell^2 \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right).$$

Перейдём к радиусу образа Фурье  $\widehat{\varphi}(\xi, \sigma, \gamma)$ . Его удобно получить с помощью (16):

$$\widehat{\varphi}(\xi, \sigma, \gamma) = \sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-\frac{(\xi - k\gamma)^2 \sigma^2}{2}\right).$$

Отсюда

$$|\widehat{\varphi}(\xi, \sigma, \gamma)|^2 = \sigma^2 \sum_{k, k'=-\infty}^{\infty} c_k c_{k'} \exp\left(-\sigma^2 \left(\xi - \frac{(k+k')\gamma}{2}\right)^2 - \frac{(k-k')^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right).$$

Сделаем замену индекса  $\ell = k - k'$ ,  $k' = k - \ell$ :

$$|\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 = \sigma^2 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell} \exp\left(-\sigma^2 \left(\xi - \frac{(2k-\ell)\gamma}{2}\right)^2 - \frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right).$$

Норма  $\widehat{\varphi}(\xi, \sigma, \gamma)$  находится при помощи формулы выше и (16):

$$\|\varphi(x, \sigma, \gamma)\|^2 = \sqrt{\pi} \sigma \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right).$$

Найдём вспомогательный для среднего значения образа Фурье интеграл при помощи (17):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi \exp\left(-\sigma^2 \left(\xi - \frac{(k+k')\gamma}{2}\right)^2\right) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} \frac{(k+k')\gamma}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 dx &= \sqrt{\pi} \sigma \gamma \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_k c_{k'} \frac{(k+k')}{2} \exp\left(-\frac{(k-k')^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right) = \\ &= \sqrt{\pi} \sigma \gamma \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_k c_{k'} k \exp\left(-\frac{(k-k')^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Сделаем замену индекса  $\ell = k - k'$ ,  $k' = k - \ell$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi |\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 dx = \sqrt{\pi} \sigma \gamma \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k c_{k-\ell} \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right).$$

Введём обозначение

$$b_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k c_{k-\ell};$$

тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi |\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 dx = \sqrt{\pi} \sigma \gamma \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right).$$

Теперь выпишем значение  $\langle \varphi(\xi, \sigma, \gamma) \rangle$ :

$$\frac{1}{\|\varphi(x, \sigma, \gamma)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 dx = \frac{\gamma}{A} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right).$$

Введём обозначение

$$D = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2 \gamma^2 \sigma^2}{4}\right).$$



В результате получим

$$\frac{1}{\|\varphi(x, \sigma, \gamma)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi |\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 dx = \frac{\gamma D}{A}.$$

При помощи формулы (18) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \exp\left(-\sigma^2 \left(\xi - \frac{(k+k')\gamma}{2}\right)^2\right) d\xi &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sigma^5} (2\sigma^2 + \sigma^4(k+k')^2\gamma^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma^3} + \frac{\sqrt{\pi}(k+k')^2\gamma^2}{4\sigma}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 d\xi &= \sigma^2 \sum_{k, k'=-\infty}^{\infty} c_k c_{k'} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma^3} + \frac{\sqrt{\pi}(k+k')^2\gamma^2}{4\sigma}\right) \exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right) = \\ &= \sigma^2 \sum_{k, k'=-\infty}^{\infty} c_k c_{k'} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma^3} + \frac{(k+k')^2\gamma^2}{4\sigma}\right) \exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma} \sum_{k, k'=-\infty}^{\infty} c_k c_{k'} \exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}\sigma\gamma^2}{4} \sum_{k, k'=-\infty}^{\infty} c_k c_{k'} (k+k')^2 \exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Сделаем замену индекса  $\ell = k - k'$ ,  $k' = k - \ell$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma} A + \frac{\sqrt{\pi}\sigma\gamma^2}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell} (2k-\ell)^2 \right) \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Введём обозначения

$$d_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell} (2k-\ell)^2, \quad E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 d\xi &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma} A + \frac{\sigma\gamma^2\sqrt{\pi}}{4} E, \\ \frac{1}{\|\varphi(x, \sigma, \gamma)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\varphi(\xi, \sigma, \gamma)|^2 dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma A} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma} A + \frac{\sigma\gamma^2\sqrt{\pi}}{4} E \right) = \frac{1}{2\sigma^2} + \frac{\gamma^2 E}{4A}. \end{aligned}$$

Получаем вторую формулу утверждения теоремы:

$$\Delta^2(\widehat{\varphi}(\xi, \sigma, \gamma)) = \frac{1}{2\sigma^2} + \gamma^2 \left( \frac{E}{4A} - \frac{D^2}{A^2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right), \quad E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right), \quad D = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right), \\ a_\ell &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell}, \quad b_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k c_{k-\ell}, \quad d_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell} (2k-\ell)^2. \quad \square \end{aligned}$$

В данной работе мы рассматриваем неполную оконную систему (1) с параметрами  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 4\pi$ , дополнив её с помощью (2) при  $\alpha = 3/2$  с применением операции сдвига к самой

функции  $u_\alpha(x)$  и к её образу Фурье. В результате получается двухкомпонентная оконная система вида (3), (4). Для первой ортогонализованной компоненты на основе формул статей [2] и [4] (формула для первой компоненты верна с точностью до замены коэффициентов) в частном описанном выше случае численно получено значение константы неопределённости 0,746.

В случае второй компоненты мы найдём радиусы для функции  $u(x) \cdot e^{-4\pi^2}$ . Радиусы  $u(x) \cdot e^{-4\pi^2}$  и  $u(x)$  совпадают, но процедура нахождения коэффициентов для  $u(x) \cdot e^{-4\pi^2}$  более устойчива в плане точности, так как мы избежим слишком большого разрыва между числами. В этом случае

$$c_k = e^{-\pi^2(k-2)^2}, \quad \gamma = 6\pi, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\alpha-1}} = \sqrt{2}.$$

В итоге

$$\Delta^2(u(\cdot)) = 1 - 36\pi^2 \frac{B}{A}, \quad \Delta^2(\widehat{u(\cdot)}) = \frac{1}{4} + 36\pi^2 \left( \frac{E}{4A} - \frac{D^2}{A^2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \exp(-18\pi^2 \ell^2), & E &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_\ell \exp(-18\pi^2 \ell^2), \\ B &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \ell^2 \exp(-18\pi^2 \ell^2), & D &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_\ell \exp(-18\pi^2 \ell^2), \\ a_\ell &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell}, & b_\ell &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k c_k c_{k-\ell}, & d_\ell &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell} (2k - \ell)^2. \end{aligned}$$

Численно значение выходит близким к оптимальному, а именно

$$\Delta(u(\cdot)) = 1,000000, \quad \Delta(\widehat{u(\cdot)}) = 0,500002.$$

**4. Исследование полноты.** Предположим, что двухкомпонентная система (3), (4) не является полной. Тогда существует такая функция  $f \in L_2(\mathbb{R})$ ,  $f \neq 0$ , что

$$(g_{k,m}, f) = (u_{k,m}, f) = 0, \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим первое условие ортогональности. Запишем его через преобразование Зака:

$$(Z[g_{k,m}], Z[f]) = \int_0^1 \int_0^1 Z[g](x, y) \overline{Z[f](x, y)} e^{i2\pi(2mx+ky)} dx dy = 0, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

**Утверждение 2.** Условие ортогональности (20) выполняется тогда и только тогда, когда почти всюду при  $x, y \in [0, 1]$  имеет место соотношение

$$Z[g] \left( \frac{x}{2}, y \right) \overline{Z[f] \left( \frac{x}{2}, y \right)} + Z[g] \left( \frac{x+1}{2}, y \right) \overline{Z[f] \left( \frac{x+1}{2}, y \right)} = 0. \quad (21)$$

Данный факт доказывается аналогично утверждению 1.

Если подставить в (21) вместо  $g$  функцию  $u$ , то получим

$$Z[u] \left( \frac{x}{2}, y \right) \overline{Z[f] \left( \frac{x}{2}, y \right)} + Z[u] \left( \frac{x+1}{2}, y \right) \overline{Z[f] \left( \frac{x+1}{2}, y \right)} = 0. \quad (22)$$

Если же вместо  $f$  подставить  $u$ , то, поскольку  $g_{k,m}$  и  $u_{k,m}$  взаимно ортогональны, придём к равенству

$$Z[g] \left( \frac{x}{2}, y \right) \overline{Z[u] \left( \frac{x}{2}, y \right)} + Z[g] \left( \frac{x+1}{2}, y \right) \overline{Z[u] \left( \frac{x+1}{2}, y \right)} = 0. \quad (23)$$

Введём обозначения:

$$F_1(x, y) = \overline{Z[f] \left( \frac{x}{2}, y \right)}, \quad F_2(x, y) = \overline{Z[f] \left( \frac{x+1}{2}, y \right)}. \quad (24)$$

Фактически функция  $F_1(x, y)$  описывает преобразование Зака в прямоугольнике  $x \in [0, 1/2]$ ,  $y \in [0, 1]$ , а  $F_2(x, y)$  задаёт его в прямоугольнике  $x \in [1/2, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$ . Поэтому  $F_1(x, y)$  и  $F_2(x, y)$  можно считать независимыми друг от друга величинами. Важным обстоятельством является то, что если почти всюду  $F_1(x, y) = F_2(x, y) = 0$ , то  $Z[f](x, y) = 0$ . В этом случае  $f(x) = 0$ , и двухкомпонентная система (3), (4), которую мы рассматриваем, является полной в  $L_2(\mathbb{R})$ .

Подставим (24) в формулы (21) и (22). В результате получим следующую систему линейных однородных уравнений относительно  $F_1(x, y)$  и  $F_2(x, y)$ :

$$\begin{cases} Z[g]\left(\frac{x}{2}, y\right) F_1(x, y) + Z[g]\left(\frac{x+1}{2}, y\right) F_2(x, y) = 0, \\ Z[u]\left(\frac{x}{2}, y\right) F_1(x, y) + Z[u]\left(\frac{x+1}{2}, y\right) F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Исследуем её определитель, который мы обозначим как  $M(x, y)$ :

$$M(x, y) = Z[g]\left(\frac{x}{2}, y\right) Z[u]\left(\frac{x+1}{2}, y\right) - Z[u]\left(\frac{x}{2}, y\right) Z[g]\left(\frac{x+1}{2}, y\right). \quad (25)$$

Из результатов статьи [3] следует, что  $Z[g](x, y) = 0$  при  $x = y = 1/2$ , а во всех остальных точках квадрата  $[0, 1]^2$  величина  $Z[g](x, y)$  не обращается в нуль. Мы доказали выше, что и  $Z[u](x, y) = 0$  при  $x = y = 1/2$ . Кроме того, согласно гипотезе 1, при всех прочих  $x, y \in [0, 1]$  величина  $Z[u](x, y)$  отлична от нуля. Посмотрим, что из этого следует.

Положим в формуле (25)  $x = 0$ ,  $y = 1/2$ :

$$M(x, y) = Z[g]\left(0, \frac{1}{2}\right) Z[u]\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - Z[u]\left(0, \frac{1}{2}\right) Z[g]\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Если же  $x \neq 0$  или  $y \neq 1/2$ , то  $Z[g]((x+1)/2, y) \neq 0$ . Тогда, выразив  $Z[u]((x+1)/2, y)$  из (23), формулу (25) можно привести к следующему виду:

$$M(x, y) = -\frac{Z[u]\left(\frac{x}{2}, y\right)}{Z[g]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)} \left( \left| Z[g]\left(\frac{x}{2}, y\right) \right|^2 + \left| Z[g]\left(\frac{x+1}{2}, y\right) \right|^2 \right).$$

Из результатов статьи [3] следует, что величина в скобках не обращается в нуль. Согласно гипотезе (1) множитель  $Z[u](x/2, y)$  равен нулю только при  $x = 1$ ,  $y = 1/2$ . Следовательно, почти всюду при  $x, y \in [0, 1]$  определитель  $M(x, y)$  отличен от нуля. Таким образом, если гипотеза 1 справедлива, двухкомпонентная система функций (3), (4) является полной.

**5. Заключение.** Конечной целью настоящего исследования являлось построение хорошо локализованного ортонормированного базиса, удобного для физических приложений. На данный момент эта цель была достигнута частично, поскольку остались несколько открытых вопросов.

В данной работе построена двухкомпонентная оконная система функций (3), (4). Путём расчёта констант неопределённости было показано, что она обладает хорошей частотно-временной локализацией, близкой к оптимальной. Проблемой осталось строго обосновать возможность ортогонализации с сохранением структуры второй компоненты (4), а также доказать полноту всей полученной системы функций. Решение обеих проблем удалось свести к проверке гипотезы 1 о том, что преобразование Зака  $Z[u](x, y)$  обращается в нуль при  $x, y \in [0, 1]$  только в точке  $x = y = 1/2$ . Отметим, что на самом деле для доказательства полноты было бы достаточно и того, чтобы  $Z[u](x, y)$  имело счётное число нулей в квадрате  $[0, 1]^2$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: РХД, 2004.
2. Журавлев М. В. О константах неопределённости для линейных комбинаций некоторых подсистем когерентных состояний // Вестн. Самар. гос. ун-та. — 2014. — № 7 (118). — С. 17–31.
3. Киселев Е. А. Вычисление констант Рисса и ортогонализация для неполных систем когерентных состояний с помощью тета-функций // Мат. сб. — 2016. — 207, № 8. — С. 101–116.

4. Минин Л. А. О разложении по фреймам Габора, порожденным функцией Гаусса// Мат. заметки. — 2016. — 100, № 6. — С. 951–953.
5. Нейман И. Математические основы квантовой механики. — Новокузнецк, 2000.
6. Новиков И. Я. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005.
7. Переломов А. М. Замечание о полноте системы когерентных состояний// Теор. мат. физ. — 1971. — 6, № 2. — С. 213–224.
8. Переломов А. М. 1972// Функц. анал. прилож.. — 6, № 4. — С. 47–57.
9. Чуи Ч. Введение в вейвлеты: учебное пособие для студентов вузов. — М.: Мир, 2001.
10. Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2016.
11. Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M. Jacobi Theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions J. Math. Sci. — 2011. — 173, № 2. — P. 231–242.
12. Lyubarskii Yu. I. Entire and subharmonic functions// in: Frames in the Bargmann Space of Entire Functions (Levin B. Ya., eds.). — Providence: Am. Math. Soc., 1992. — 11. — P. 167–180.
13. Olver F. W., Lozier D. W., Boisvert R., Clark C. W. The NIST Handbook of Mathematical Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 2010.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Жаданова Мария Леонидовна  
Воронежский государственный университет  
E-mail: masha.minina97@mail.ru

Ушаков Сергей Николаевич  
Воронежский государственный университет  
E-mail: ushakowww@ya.ru

Киселев Евгений Александрович  
Воронежский государственный университет  
E-mail: evg-kisel2006@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 27–36  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-27-36

УДК 517.958, 517.968.23

## О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО С ДРОБНО-НАГРУЖЕННОЙ ЗАДАЧЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2024 г. М. Т. КОСМАКОВА, А. Н. ХАМЗЕЕВА

**Аннотация.** В работе исследуется одномерная краевая задача для уравнения теплопроводности с нагруженным слагаемым в виде дробной производной Капуто по пространственной переменной. Задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра с ядром, содержащим функцию типа Райта, для которого получены условия разрешимости.

**Ключевые слова:** нагруженное уравнение теплопроводности, дробная производная, интегральное уравнение Вольтерра, функция типа Райта.

## ON THE SOLVABILITY OF AN INTEGRAL EQUATION ASSOCIATED WITH THE FRACTIONAL LOADED HEAT CONDUCTION PROBLEM

© 2024 M. T. KOSMAKOVA, A. N. KHAMZEYEVA

**ABSTRACT.** In this paper, we examine a one-dimensional boundary-value problem for the heat equation with a loaded term in the form of the Caputo fractional derivative with respect to a spatial variable. The problem is reduced to the Volterra integral equation with a kernel containing a Wright-type function, for which solvability conditions are obtained.

**Keywords and phrases:** loaded heat equation, fractional derivative, Volterra integral equation, Wright-type function.

**AMS Subject Classification:** 45D05, 35K20, 26A33

**1. Введение.** Важным разделом в теории дифференциальных уравнений являются нагруженные уравнения, в котором нагруженное слагаемое содержит дифференциальный или интегродифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомой функции на многообразиях размерности, меньшей размерности области определения искомой функции. На сегодняшний день нагруженные уравнения теплопроводности имеют широкое практическое применение. Кроме того, нагруженные уравнения составляют особый класс уравнений со специфическими задачами. Необходимость изучения нагруженных уравнений возникает также при исследовании некоторых обратных задач, в линеаризация нелинейных уравнений, при исследовании некоторых задач оптимального управления и др. Известно [6], что математические модели нелокальных физических и биологических фрактальных процессов, как правило, строятся на основе нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. В монографии [5] приведена подробная библиография по нагруженным уравнениям, в том числе по различным применениям нагруженных уравнений как метода исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью.

---

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проекты № AP19677684, 2023-2025, № AP09259780, 2021-2023).

В монографии [2] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как слабые или сильные возмущения дифференциальных уравнений в зависимости от порядка производной, входящей в нагруженное слагаемое. Если порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения (авторы называют такие уравнения «существенно» нагруженными), нагруженное слагаемое в уравнении не является слабым возмущением его дифференциальной части. Отметим, что в [2] нагруженное слагаемое является производной целого порядка от искомой функции.

В [3] нагруженное слагаемое является следом производной нецелого, т.е. дробного порядка на многообразии  $x = t$ , а именно, оно представлено в виде дробной производной Римана—Лиувилля. Полученное сингулярное интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при некоторых значениях порядка дробной производной.

В [22, 23] нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной и нагрузка движется вдоль линии  $x = t^\omega$ ,  $\omega > 0$ . Показано, что существование и единственность решений полученного интегрального уравнения зависит как от порядка дробной производной в нагруженном члене начально-краевой задачи, так и от характера поведения нагрузки. Получены условия, при которых ядро интегрального уравнения имеет слабую особенность. Эти условия зависят от типа производной в нагруженном слагаемом граничной задачи и от факта, по какой переменной берется производная. В [20–23] рассмотрены предельные случаи порядка дробной производной. Полученные результаты для предельных случаев совпадают с результатами монографии [2]. Подобного рода интегральные уравнения Вольтерра с сингулярностями в ядре также возникают при исследовании граничных задач в вырождающихся областях [16–21]. В силу свойства несжимаемости интегрального оператора [12, 13] возникают ненулевые решения однородного уравнения [17].

В [15, 16] краевые задачи теплопроводности рассматриваются в конусе с вершиной в начале координат, но уравнение не содержит нагрузки. Из-за вырождаемости области определения функции в точку в начальный момент времени полученное интегральное уравнение имеет особенности, и классические методы решения не применимы. В [16] задача исследуется в пространстве существенной ограниченных функций. Решение исследуемой задачи представлено в виде суммы построенных потенциалов, и задача сведена к сингулярному интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, а именно, к вырождающемуся уравнению Абеля, которое можно рассматривать как интегральное уравнение третьего рода. Для редуцированного интегрального уравнения построена резольвента. В [15] задача исследуется в соболевских пространствах, применяется метод априорных оценок, и показывается существование и единственность слабого решения поставленной задачи.

Следует отметить, что в [3–21] рассматривается первая краевая задача. В [19] исследована вторая краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности, нагруженное слагаемое содержит дробную производную порядка больше, чем порядок уравнения. Показано, что решение соответствующей однородной краевой задачи неединственно, т.е. нагрузка выступает как сильное возмущение краевой задачи.

Отметим, что интерес к нагруженным уравнениям возник давно. В сельскохозяйственном секторе экономики любой страны проблемой является заболачивание и засоление поливных земель в связи с подъемом грунтовых вод при орошении. Известно, что задачи регулирования уровня грунтовых вод при орошении (см. [4]) приводят к необходимости исследования краевых задач для нагруженных параболических уравнений. Неустановившееся плоскопараллельное движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью и с непроницаемым горизонтальным водоупором описывается уравнением Буссинеска, которое линеаризацией тоже сводится к нагруженному параболическому уравнению (см. [7]).

Структура статьи следующая. В разделе 2 вводятся некоторые необходимые определения и предварительные сведения из теорий дробного исчисления, специальных функций и краевых задач, которые потребуются в следующем разделе. В разделе 3 дается постановка дробно-нагруженной граничной задачи теплопроводности. Нагруженное слагаемое в уравнении представлено в виде дробной производной Капуто по пространственной переменной. Задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядром, содержащим функцию типа Райта.

Поскольку непосредственное решение такого рода интегральных уравнений затруднительно, мы далее исследуем полученное интегральное уравнение на разрешимость, проводя оценку ядра. Наконец, в разделе 4 представлены основные результаты статьи, а именно, теоремы о разрешимости интегрального уравнения и краевой задачи, поставленной в разделе 3.

**2. Вводные сведения.** Приведем некоторые известные понятия и результаты.

*2.1. Дробный интеграл и производная.* Первое из необходимых определений – это определение дробного интеграла Римана–Лиувилля (см. [10]).

**Определение 1.** Пусть  $f(t) \in L_1[a, b]$ . Выражение вида

$$D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

называется дробным интегралом Римана–Лиувилля порядка  $\alpha$  с началом в точке  $a$  и с концом в точке  $x$ .

Дробная производная Римана–Лиувилля является одним из способов обобщения понятия производной на функции, определенные на интервале вещественных чисел. Она позволяет рассматривать производные нецелого порядка, т.е. дробные производные.

**Определение 2.** Пусть  $f(t) \in L_1[a, b]$ . Производная Римана–Лиувилля порядка  $\beta$  определяется следующим равенством при  $n - 1 < \beta \leq n$ :

$${}_R L D_{a,t}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau, \quad \beta, a \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что

$${}_R L D_{a,t}^0 f(t) = f(t), \quad {}_R L D_{a,t}^n f(t) = f^{(n)}(t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Производную Римана–Лиувилля (2) можно переписать, используя определение дробного интеграла Римана–Лиувилля (1):

$${}_R L D_{a,t}^{\beta} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} D_{a,t}^{\beta-n} f(t), \quad \beta \in (n-1; n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определение дробной производной Капуто получается переменной операций дифференцирования и интегрирования в (2). Производная Капуто также является способом обобщения понятия производной на дробные порядки. Она была предложена математиком Марио Ди Капуто и широко используется в теории дробных уравнений и физических моделях. Важность производной Капуто заключается в том, что она позволяет учитывать начальные условия при решении дробных дифференциальных уравнений.

**Определение 3** (см. [14]). Пусть  $f(t) \in AC^n[a, b]$  (т.е.  $f^{(n-1)}(t)$  – абсолютно непрерывная функция). Тогда производная Капуто порядка  $\beta$  определяется следующим равенством при  $n - 1 < \beta \leq n$ :

$$\partial_{at}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau; \quad \beta, a \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Производную Капуто (4) можно переписать, используя определение дробного интеграла Римана–Лиувилля (1):

$$\partial_{at}^{\beta} f(t) = D_{a,t}^{\beta-n} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad \beta \in (n-1; n], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Оператор (5) также известен под названием оператора Герасимова–Капуто.

Производные, определенные формулами (2) и (4), связаны соотношением

$$\partial_{at}^\beta f(t) = {}_{RL}D_{a,t}^\beta \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right]. \quad (6)$$

Дробное исчисление можно рассматривать как «лабораторию» для специальных функций.

*2.2. Некоторые специальные функции.* Приведем определения и некоторые свойства специальных функций, которые нам понадобятся на протяжении всей работы.

Интеграл ошибок и дополнительный интеграл ошибок имеют вид:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\zeta^2) d\zeta, \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-\zeta^2) d\zeta = 1 - \operatorname{erf}(z).$$

**Определение 4** (см. [9]). Целая функция вида

$$\phi(a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(ak + b)}, \quad a > -1, \quad b \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

называется функцией Райта.

Также будем использовать функцию типа Райта в виде ряда

$$e_{a,b}^{\nu,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + \nu) \Gamma(\delta - bk)}, \quad \nu, \delta \in \mathbb{C}, \quad a > b, \quad a > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

При  $\nu = a = 1$  она совпадает с функцией Райта (7):

$$e_{1,b}^{1,\delta}(z) = \phi(-b, \delta; z).$$

Для функции типа Райта справедлива формула автотрансформации

$$e_{a,b}^{\nu-a,\delta+b}(z) = z e_{a,b}^{\nu,\delta} + \frac{1}{\Gamma(\nu-a) \Gamma(\delta+b)}, \quad \nu, \delta \in \mathbb{C}, \quad a > b, \quad a > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Имеет место оценка:

$$\left| x^{\nu-1} y^{\delta-1} e_{a,b}^{\nu,\delta} \left( -\frac{x^a}{y^b} \right) \right| \leq C x^{\nu-a,\theta-1} y^{\delta+b,\theta-1}, \quad \theta \in [0; 1]. \quad (10)$$

Справедлива формула дробного интегрирования и дифференцирования функции типа Райта:

$$D_{0,x}^\beta \left\{ x^{\nu-1} e_{a,b}^{\nu,\delta}(cx^a) \right\} = x^{\nu-\beta-1} e_{a,b}^{\nu-\beta,\delta}(cx^a); \quad c \in \mathbb{C}, \quad \nu > 0. \quad (11)$$

*2.3. Решение краевой задачи теплопроводности.* Исследуемая краевая задача находится на стыке теорий дробного исчисления и теории нагруженных уравнений. На первом этапе исследования мы применяем метод интегральных уравнений, который позволяет свести краевую задачу к решению соответствующего интегрального уравнения путем преобразования или оценки ядра этого уравнения. Такие методы позволяют более компактно исследовать краевые задачи, учитывая все условия задачи.

В данном случае рассматриваемая задача сводится к интегральному уравнению путем обращения дифференциальной части уравнения.

Известно (см. [8, с. 57]) что в области  $Q = \{(x, t) \mid x > 0, t > 0\}$  решение краевой задачи теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x, t), \quad u|_{t=0} = f(x), \quad u|_{x=0} = g(x),$$

описывается формулой

$$u(x, t) = \int_0^\infty G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi + \int_0^t H(x, t-\tau) g(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (12)$$



где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right) \right\}, \quad H(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

Функция Грина  $G(x, \xi, t - \tau)$  удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) d\xi = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t - \tau}}\right). \quad (13)$$

### 3. Дробно-нагруженная краевая задача теплопроводности.

3.1. *Некоторые предположения.* Следуя [11], везде ниже будем считать, что правая часть  $f(x, t)$  уравнения обращается в нуль при  $t < 0$  и

$$f(x, t) \in L_\infty(A) \cap C(B), \quad (14)$$

где  $A = \{(x, t) \mid x > 0, t \in [0, T]\}$ ,  $B = \{(x, t) \mid x > 0, t \geq 0\}$ ,  $T = \operatorname{const} > 0$ . Тогда, учитывая свойство (13) для функции  $G(x, \xi, t)$ , можно показать, что

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \in L_\infty(A) \cap C(B), \quad (15)$$

причем

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} f_1(x, t) = 0. \quad (16)$$

Тогда решение  $u(x, t) \in L_\infty(A) \cap C(B)$  краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad ub|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0,$$

существует, единственно и, согласно (12), имеет вид:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Из определений 2 и 3 следует, что для существования производной в смысле Римана—Лиувилля (2) достаточно, чтобы  $f(t) \in L_1[a, b]$ , для существования производной в смысле Капуто (4) достаточно, чтобы  $f(t) \in AC^n[a, b]$ , причем имеет место формула их связи (6). В исследуемой задаче нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной порядка  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , по пространственной переменной  $x$ . Поэтому для простоты будем считать, что

$$u(x, t) \in AC(x \geq 0), \quad (17)$$

так как  $n = 1$  и по условию краевой задачи  $u|_{x=0} = 0$ . Также будем предполагать, что

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \in AC(x \geq 0). \quad (18)$$

3.2. *Постановка задачи.* В области  $Q = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$  рассмотрим граничную задачу для уравнения теплопроводности с нагруженным слагаемым в виде дробной производной Капуто (4) порядка  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ :

$$u_t - u_{xx} + \lambda \partial_{0x}^\beta u(x, t)|_{x=\gamma(t)} = f(x, t), \quad (19)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad (20)$$

где  $\lambda$  — комплексный параметр,  $\gamma(t)$  — непрерывная возрастающая функция,  $\gamma(0) = 0$ , правая часть  $f(x, t)$  уравнения обращается в нуль при  $t < 0$  и принадлежит классу (14). Решение  $u(x, t)$  принадлежит классу (17) в силу предположений выше.

3.3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Введем обозначение

$$\mu(t) = \partial_{0x}^\beta u(x, t) \Big|_{x=\gamma(t)} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{u_\xi(\xi, t)}{(x-\xi)^\beta} d\xi \Big|_{x=\gamma(t)}. \quad (21)$$

Обратим дифференциальную часть задачи (19)–(20) по формуле (12):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t-\tau) \mu(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (22)$$

Учитывая соотношение (13) и вводя обозначение (15), перепишем представление (22) в виде

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^x \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\xi d\tau + f_1(x, t). \quad (23)$$

Следуя процедуре из [22], от (23) придем к представлению

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t K \left( \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t), \quad (24)$$

где

$$K \left( \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) = 1 - \phi \left( -\frac{1}{2}, 1; -\frac{x}{\sqrt{t-\tau}} \right), \quad (25)$$

$\phi(a, b; z)$  — функция Райта (7).

К (24) применим операцию дробного дифференцирования (4) порядка  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , в смысле Капуто, что является правомерным в силу предположений (17) и (18). Затем подставим  $x = \gamma(t)$ . Слева получим функцию  $\mu(t)$  в силу обозначения (21). Учитывая связь с производной в смысле Римана—Лиувилля по формуле (6), имеем

$$\partial_{0x}^\beta \left( K \left( \frac{x}{\sqrt{t-\tau}} \right) \right) = {}_r D_{0x}^\beta \left( K \left( \frac{x}{\sqrt{t-\tau}} \right) - K(0) \right).$$

В силу (25) имеем  $K(0) = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \partial_{0x}^\beta \left( K \left( \frac{x}{\sqrt{t-\tau}} \right) \right) &= {}_{RL} D_{0x}^\beta \left( K \left( \frac{x}{\sqrt{t-\tau}} \right) \right) = {}_r D_{0x}^\beta \left( 1 - \Phi \left( -\frac{1}{2}, 1; -\frac{x}{\sqrt{t-\tau}} \right) \right) = \\ &= x^{-\beta} \left( \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} - e_{1,1/2}^{1-\beta,1} \left( \frac{-x}{\sqrt{t-\tau}} \right) \right) = \frac{x^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}} e_{1,1/2}^{2-\beta,1/2} \left( \frac{-x}{\sqrt{t-\tau}} \right). \end{aligned}$$

При вычислении последовательно использовали формулу дифференцирования функции типа Райта (11) и формулу автотрансформации (9). Получили интегральное уравнение:

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t K_\beta(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t), \quad (26)$$

где

$$f_2(t) = \partial_{0x}^\beta (f_1(x, t)) \Big|_{x=\gamma(t)}, \quad (27)$$

$$K_\beta(t, \tau) = \frac{(\gamma(t))^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}} e_{1,1/2}^{2-\beta,1/2} \left( -\frac{\gamma(t)}{\sqrt{t-\tau}} \right). \quad (28)$$

**Лемма 1.** Краевая задача (19)–(20) сводится к интегральному уравнению Вольтерра (26) с правой частью и ядром, определяемыми формулами (27) и (28) соответственно.

3.4. *Оценка ядра интегрального уравнения.* Пусть  $\gamma(t) \sim t^\omega$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $\omega > 0$ . Тогда

- (a)  $|z| = t^\omega / \sqrt{t - \tau} \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow 0$  и  $\omega < 1/2$ , так как  $0 < \tau < t \Rightarrow t - \tau \rightarrow 0$ ;
- (b)  $|z| = t^\omega / \sqrt{t - \tau} \rightarrow 0 + 0$  при  $t \rightarrow 0$  и  $\omega > 1/2$ .

Рассмотрим поведение ядра (28) в этих случаях.

(a) Пусть  $0 < \omega < 1/2$ ,  $\gamma(t) \sim t^\omega$  при  $t \rightarrow 0$  и  $0 < \beta < 1$ . Тогда  $|z| = \gamma(t) / \sqrt{t - \tau} \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow 0$ . Поскольку  $\sqrt{t - \tau} = -\gamma(t)/z$ , то из (28) имеем

$$K_\beta(t, \tau) \Big|_{\tau=t-(\gamma(t)/z)^2} = -(\gamma(t))^{-\beta} z e_{1,1/2}^{2-\beta,1/2}(z). \quad (29)$$

Известно (см. [9]), что

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left( -z e_{a,b}^{\nu,\delta}(z) \right) = \frac{1}{\Gamma(\nu - a)\Gamma(\delta + b)}.$$

Тогда при  $\nu = 2 - \beta$ ,  $\delta = 1/2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1/2$  из (29) имеем

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} K_\beta(t, \tau) \Big|_{\tau=t-(\gamma(t)/z)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)t^{\beta\omega}}.$$

Итак, доказано следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть  $\gamma(t) \sim t^\omega$  при  $t \rightarrow 0$  и  $0 < \omega < 1/2$ ,  $0 < \beta < 1$ . Тогда ядро (28) интегрального уравнения (26) является неограниченной функцией при  $t \rightarrow 0$  и  $0 < \tau < t$ .

(b) Пусть  $\omega > 1/2$ ,  $\gamma(t) \sim t^\omega$  при  $t \rightarrow 0$  и  $0 < \beta < 1$ . Тогда  $|z| = \gamma(t) / \sqrt{t - \tau} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ ,

$$K_\beta(t, \tau) \Big|_{\tau=t-(\gamma(t)/z)^2} = -(\gamma(t))^{-\beta} z e_{1,1/2}^{2-\beta,1/2}(z).$$

Используя формулу автотрансформации (9), получим

$$K_\beta(t, \tau) \Big|_{\tau=t-(\gamma(t)/z)^2} = -(\gamma(t))^{-\beta} \left( e_{1,1/2}^{1-\beta,1}(z) - \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \right).$$

Полагая  $\gamma(t) \sim t^\omega$  при  $t \rightarrow 0$ , имеем неопределенность при  $\omega > 1/2$  и  $0 < \beta < 1$ :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} K_\beta(t, \tau) \Big|_{\tau=t-(t^\omega/z)^2} = \left( \frac{0}{0} \right),$$

так как по определению  $e_{a,b}^{\nu,\delta}(0) = 1/(\Gamma(\nu)\Gamma(\delta))$ . Применив правило Лопиталю, получим:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} K_\beta(t, \tau) \Big|_{\tau=t-(t^\omega/z)^2} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} - \frac{e_{1,1/2}^{-\beta,1/2}(z)}{\beta\omega t^{\beta\omega-1}} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\beta\omega\Gamma(-\beta)\Gamma(1/2)t^{\beta\omega-1}}.$$

Тогда для ограниченности функции  $K_\beta(t, \tau)$  необходимо выполнение условия  $\beta\omega - 1 \leq 0$ . Итак, доказано следующее утверждение.

**Лемма 3.** Пусть  $\gamma(t) \sim t^\omega$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $\omega > 1/2$ ,  $0 < \beta < 1$ . Тогда ядро (28) интегрального уравнения (26) является ограниченной функцией при выполнении условия  $\beta\omega - 1 \geq 0$ .

(c) Пусть  $\omega = 1/2$ . Тогда  $|z| = \sqrt{t} / \sqrt{t - \tau} \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow 0$ . Тогда функция Райта как ряд сходится абсолютно. Поэтому в случае  $\omega = 1/2$  при  $t \rightarrow 0$  функция типа Райта в ядре (28) ограничена, но само ядро будет неограничено, так как при  $0 < \beta < 1$  имеем  $0 < (1 - \beta)/2 < 1/2$ . Поэтому при  $0 < \tau < t$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{(1-\beta)/2}}{\sqrt{t - \tau}} = +\infty.$$

Итак, справедлива следующая лемма.

**Лемма 4.** Пусть  $\gamma(t) \sim t^\omega$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $\omega = 1/2$ ,  $0 < \beta < 1$ . Тогда ядро (28) интегрального уравнения (26) является неограниченной функцией при  $t \rightarrow 0$  и  $0 < \tau < t$ .

**4. Основные результаты.** В силу оценки (10) для функции типа Райта при

$$x = \gamma(t), \quad y = t - \tau, \quad \nu = 2 - \beta, \quad \delta = \frac{1}{2}, \quad a = 1, \quad b = \frac{1}{2}$$

имеем

$$|K_\beta(t, \tau)| \leq C(\gamma(t))^{1-\beta-\theta}(t-\tau)^{(\theta-1)/2}, \quad \theta \in [0; 1].$$

Пусть  $\mu(t), f_2(t) \in C[0, T]$  в уравнении (26), где  $T$  — положительная константа. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t K_\beta(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right| &\leq \|\mu(t)\|_{C[0, T]} \int_0^t |K_\beta(t, \tau)| d\tau \leq C \|\mu(t)\|_{C[0, T]} t^{\omega(1-\beta-\theta)} \int_0^t (t-\tau)^{(\theta-1)/2} d\tau = \\ &= C \|\mu(t)\|_{C[0, T]} t^{\omega(1-\beta-\theta)} \frac{2}{\theta+1} t^{(\theta+1)/2} = C_1 t^{\omega(1-\beta-\theta)+(\theta+1)/2} \|\mu(t)\|_{C[0, T]} \end{aligned}$$

при  $\theta \in [0; 1]$  и  $t \in [0, T]$ . Итак,

$$\left| \int_0^t K_\beta(t, \tau) \mu(\tau) d\tau \right| \leq C_1 \|\mu(t)\|_{C[0, T]} t^r,$$

где

$$r = \omega(1 - \beta - \theta) + \frac{\theta + 1}{2}, \quad \theta \in [0; 1], \quad \omega \geq 0, \quad 0 < \beta < 1.$$

Для ограниченности интегрального оператора в уравнении (26) потребуем выполнение условия  $r \geq 0$ . Имеем

$$r(\omega; \beta; \theta) = \omega(1 - \beta) + \frac{1}{2} + \theta \left( \frac{1}{2} - \omega \right).$$

I. Рассмотрим  $0 \leq \omega \leq 1/2$ . Тогда при  $0 \leq \theta \leq 1$  получим

$$\frac{1}{2} \leq \omega(1 - \beta) + \frac{1}{2} \leq r(\omega; \beta; \theta) \leq 1 - \omega\beta,$$

т.е.  $r \geq 1/2 > 0$  при  $0 \leq \omega \leq 1/2$  и  $0 < \beta < 1$ .

II. Пусть  $\omega > 1/2$ . Тогда при  $0 \leq \theta \leq 1$  имеем

$$1 - \omega\beta \leq r(\omega; \beta; \theta) \leq \omega(1 - \beta) + \frac{1}{2}.$$

Тогда при  $1 - \omega\beta \geq 0, \omega > 1/2$  получим ограниченность интегрального оператора. Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Интегральное уравнение (26) с ядром (28),  $0 < \beta < 1$ , при  $\gamma(t) \sim t^\omega, t \rightarrow 0$ , однозначно разрешимо в классе функций  $C[0, T]$  для любой правой части  $f_2(t) \in C[0, T]$ , если  $\omega \leq 1/\beta$ .*

Далее, решение задачи (19)–(20) имеет вид

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (30)$$

где  $f(x, t)$  принадлежит классу (14), и решение интегрального уравнения (26)  $\mu(t)$  — непрерывная и ограниченная функция в условиях теоремы 1. Учитывая неотрицательность функций  $G(x, \xi, t-\tau)$  и  $\operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right)$ , принимая во внимание равенство (его можно получить после введения замены  $\xi = \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}$  интегрированием по частям и применением [1, с. 351, формула 3.461(5)])

$$\int_0^t \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) d\tau = t \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + \frac{x\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{x^2}{4t} \right) - \frac{x^2}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right),$$

непосредственно из (30) получаем следующую оценку:

$$|u(x, t)| \leq C(\lambda) x \sqrt{t}, \quad (31)$$

где  $C(\lambda) = C_1|\lambda| + C_2$ .

Для производных решения  $u(x, t)$  (см. (30)) справедливо включение

$$u_t - u_{xx} = -\lambda\mu(t) + f(x, t) \in L_\infty(A) \cap C(B), \quad T = \text{const} > 0, \quad (32)$$

где  $A = \{(x, t) \mid x > 0, t \in [0, T]\}$ ,  $B = \{(x, t) \mid x > 0, t \geq 0\}$ ,  $T = \text{const} > 0$  (следует из уравнения (19) и обозначения (21)).

Итак, функция (30) удовлетворяет уравнению (19) в смысле соотношения (32). Очевидно, что решение (30) удовлетворяет начальным и граничным условиям (20). Таким образом, функция (30) согласно (31) и (32) удовлетворяет граничной задаче (19) – (20) и принадлежит классу

$$\mathfrak{U} = \left\{ u \mid \begin{aligned} &(x \sqrt{t})^{-1}u \in L_\infty(A) \cap C(B); \quad u_t - u_{xx} \in L_\infty(A) \cap C(B); \\ &\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \frac{u_\xi(\xi, t)}{(x-\xi)^\beta} d\xi \Big|_{x=\gamma(t)} \in C([0; T]), \quad T = \text{const} > 0, \quad 0 < \beta < 1 \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

где  $A = \{(x, t) \mid x > 0, t \in [0, T]\}$ ,  $B = \{(x, t) \mid x > 0, t \geq 0\}$ ,  $T = \text{const} > 0$ .

**Теорема 2.** Пусть для функции  $f(x, t)$  выполняются условия (14) и (18), функция  $\mu(t) \in C([0; T])$  – решение интегрального уравнения (26) при правой части  $f_2(t) \in C([0; T])$ , определяемой формулой (27). Тогда граничная задача (19)–(20) с законом движения нагрузки  $\gamma(t) \sim t^\omega$  (в окрестности точки  $t = 0$ ) имеет единственное решение (30) в классе (33), если  $0 < \omega \leq 1/\beta$  при  $0 < \beta < 1$ .

**5. Заключение.** В условиях теоремы 1 ядро (28) интегрального уравнения (26) обладает слабой особенностью. Следовательно, можно применить метод последовательных приближений для нахождения единственного решения уравнения (26). Тогда соответствующие краевые задачи корректны в естественных классах функций, т.е. нагруженное слагаемое поставленной граничной задачи является слабым возмущением дифференциального уравнения.

В остальных случаях значений параметров  $\beta$  и  $\omega$  интегральное уравнение (26) не решается методом последовательных приближений. Можно показать, что соответствующее однородное уравнение при некоторых значениях параметра  $\lambda$  будет иметь ненулевые решения, т.е. возникает спектр задачи. Если нарушена единственность решения первой краевой задачи, то в этом случае нагрузку можно интерпретировать как сильное возмущение. Итак, существование и единственность решений интегрального уравнения зависит от порядка дробной производной в нагруженном слагаемом уравнения в поставленной граничной задаче.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
2. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Гылым, 2010.
3. Искаков С. А., Рамазанов М. И., Иванов И. А. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Мат. — 2015. — № 2 (78). — С. 25–30.
4. Кочина Н. Н. Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах // Докл. АН СССР. — 1973. — 213, № 1. — С. 51–54.
5. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
6. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их приложения. — Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000.
7. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Диффер. уравн. — 1977. — 13, № 1. — С. 105–110.

8. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001.
9. Псыу А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
10. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
12. Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I. On the spectrum of Volterra integral equation with the incompressible kernel// AIP Conf. Proc. — 2014. — 1611, № 1. — P. 127–132.
13. Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I. Uniqueness and non-uniqueness of solutions of the boundary value problems of the heat equation// AIP Conf. Proc. — 2015. — 1676, № 1. — 020028.
14. Caputo M. Lineal model of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent, II// Geophys. J. Astron. Soc. — 1967. — 13. — P. 529–539.
15. Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Tuleutaeva Zh. M. On the Solvability of Heat Boundary Value Problems in Sobolev Spaces// Lobachevskii J. Math. — 2022. — 43, № 8. — P. 2133–2144.
16. Jenaliyev M. T., Ramazanov M. I., Kosmakova M. T., Tuleutaeva Z. M. On the solution to a two-dimensional heat conduction problem in a degenerate domain// Eurasian Math. J. — 2020. — 11 (3). — P. 89–94.
17. Kosmakova M. T. On an integral equation of the Dirichlet problem for the heat equation in the degenerating domain// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2016. — 81 (1). — P. 62–67.
18. Kosmakova M. T., Iskakov S. A., Kasymova L. Zh. To solving the fractionally loaded heat equation// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2021. — 101 (1). — P. 65–77.
19. Kosmakova M. T., Izhanova K. A., Khamzeyeva A. N. On the non-uniqueness of the solution to a boundary value problem of heat conduction with a load in the form of a fractional derivative// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2022. — 108 (4). — P. 98–106.
20. Kosmakova M. T., Ramazanov M. I., Kasymova L. Zh. To Solving the heat equation with fractional load// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 12. — P. 2854–2866.
21. Kosmakova M. T., Ramazanov M. I., Tokesheva A. S., Khairkulova A. A. On the non-uniqueness of solution to the homogeneous boundary-value problem for the heat conduction equation in an angular domain// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2016. — 84 (4). — P. 80–87.
22. Pskhu A. V., Kosmakova M. T., Akhmanova D. M., Kassymova L. Zh., Assetov A. A. Boundary-value problem for the heat equation with a load as the Riemann–Liouville fractional derivative// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2022. — 105 (1). — P. 74–87.
23. Ramazanov M. I., Kosmakova M. T., Kasymova L. Zh. Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 9. — P. 1873–1885.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проекты № AP19677684, 2023-2025, № AP09259780, 2021-2023).

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Космакова Минзиля Тимербаевна

Карагандинский университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан

E-mail: svetlanamir578@gmail.com

Хамзеева Айым Нурлановна

Карагандинский университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан

E-mail: aiymkhamzeyeva@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 37–45  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-37-45

УДК 517.927.4; 517.988.63

## О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2024 г. А. Н. НАИМОВ, М. В. БЫСТРЕЦКИЙ

**Аннотация.** Исследована разрешимость периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой выделена главная нелинейная часть, являющаяся квазиоднородным отображением. Доказано, что если невозмущенная система уравнений с квазиоднородной нелинейностью не имеет ненулевых ограниченных решений, то периодическая задача допускает априорную оценку. Полученные результаты представляют интерес с точки зрения применения и развития методов нелинейного анализа в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

**Ключевые слова:** периодическая задача, квазиоднородная нелинейность, априорная оценка, векторное поле, вращение векторного поля, гомотопные векторные поля.

## ON THE SOLVABILITY OF A PERIODIC PROBLEM FOR A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH QUASI-HOMOGENEOUS NONLINEARITY

© 2024 А. N. NAIMOV, M. V. BYSTRETSKII

**ABSTRACT.** In this paper, we examine the solvability of a periodic problem for a system of ordinary differential equations whose principal nonlinear part is a quasi-homogeneous mapping. We prove that if an unperturbed system with quasi-homogeneous nonlinearity has no nonzero bounded solutions, then the periodic problem admits an a priori estimate. The results obtained are of interest from the point of view of the application and development of methods of nonlinear analysis in the theory of differential and integral equations.

**Keywords and phrases:** periodic problem, quasi-homogeneous nonlinearity, a priori estimate, vector field, rotation of a vector field, homotopic vector fields.

**AMS Subject Classification:** 34C25, 47H11, 55M25

**1. Введение.** Статья посвящена исследованию периодической задачи вида

$$x'(t) = P(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, \omega), \quad (1)$$

$$x(0) = x(\omega). \quad (2)$$

Здесь  $n \geq 2$ ,  $\omega > 0$ ,  $P = (P_1, \dots, P_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию квазиоднородности

$$P_i(\lambda^{\alpha_1} y_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} y_n) \equiv \lambda^{\alpha_i + \nu} P_i(y_1, \dots, y_n) \quad \forall \lambda > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

---

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

где числа  $\alpha_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и  $\nu > 0$  фиксированы. Отображение  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывно,  $\omega$ -периодично по  $t$  и удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho^{-(\alpha_i + \nu)} \max_{\substack{0 \leq t \leq \omega, \\ |y| \leq 1}} |f_i(t, \rho^{\alpha_1} y_1, \dots, \rho^{\alpha_n} y_n)| = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Множество таких отображений  $f$  обозначим через  $\mathfrak{R}_{n, \omega}(\alpha, \nu)$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Отображение  $P$  называем главной квазиоднородной нелинейностью, а  $f$  называем возмущением.

Решением периодической задачи (1), (2) называем вектор-функцию  $x \in C^1([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ , которая удовлетворяет системе уравнений (1) и условию периодичности (2). Такое решение  $\omega$ -периодично и гладко продолжимо на  $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$ .

Разрешимость задачи (1), (2) исследована в следующей постановке: каким условиям должно удовлетворять отображение  $P$ , чтобы при любом  $f \in \mathfrak{R}_{n, \omega}(\alpha, \nu)$  существовало хотя бы одно решение задачи (1), (2).

В [5, 6] задача (1), (2) исследована в случае положительно однородного отображения  $P$ , т.е.  $\alpha_i = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ , с использованием методов априорной оценки и методов вычисления вращения векторных полей. Суть метода априорной оценки состоит в доказательстве ограниченности множества решений задачи (1), (2) по норме пространства  $C([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$  при предположении, что невозмущенная система уравнений

$$z'(t) = P(z(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

не имеет ненулевых ограниченных решений. В этом случае вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t (P(x(s)) + f(s, x(s))) ds, \quad x \in C([0, \omega]; \mathbb{R}^n), \quad (6)$$

не обращается в ноль вне шара  $\|x\| < r$  большого радиуса  $r$  пространства  $C([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ . Поэтому, согласно теории векторных полей (см. [3, с. 135]), определена целочисленная характеристика  $\gamma_\infty(\Phi)$  — вращение векторного поля  $\Phi$  на сфере  $\|x\| = r$  большого радиуса  $r$  пространства  $C([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ . Если  $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$ , то согласно принципу ненулевого вращения (см. [3, с. 141]) имеет место равенство  $\Phi(x_0) = 0$  при некоторой вектор-функции  $x_0 \in C([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ ; этим доказывается разрешимость периодической задачи. В [5] вычислено  $\gamma_\infty(\Phi) = (-1)^n \gamma(P)$ , где  $\gamma(P)$  — вращение (степень отображения) конечномерного векторного поля  $P$  на единичной сфере  $|x| = 1$  пространства  $\mathbb{R}^n$ . Отсюда следует достаточность условия  $\gamma(P) \neq 0$  для разрешимости периодической задачи (1), (2) при любом возмущении  $f$ , если отображение  $P$  положительно однородно (порядка больше 1) и невозмущенная система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений. В [6] с использованием теоремы Хопфа о невырожденном продолжении непрерывного конечномерного векторного поля (см. [3, с. 24, теорема 5.2]) доказана необходимость условия  $\gamma(P) \neq 0$  для разрешимости периодической задачи при любом возмущении  $f$ . В настоящей работе доказан аналогичный результат в предположении, что отображение  $P$  квазиоднородно с показателями  $\alpha$ ,  $\nu$  и  $f \in \mathfrak{R}_{n, \omega}(\alpha, \nu)$ .

Рассмотрение квазиоднородного отображения  $P$  позволяет не только обобщить результаты работ [5, 6], но и уточнить их следующим образом. Именно, если для положительно однородного отображения  $P$  ни при всех возмущениях  $f$  имеет место априорная оценка решений задачи (1), (2), то класс возмущений можно сужать так, что главная нелинейная часть системы уравнений (1) окажется квазиоднородным отображением. Например, система двух скалярных уравнений

$$x_1'(t) = |x_1(t)|^{m-1} x_1(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \quad x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t)),$$

где  $m > 1$ , ни при всех возмущениях  $f(t, y_1, y_2) = (f_1(t, y_1, y_2), f_2(t, y_1, y_2))$ , удовлетворяющих условию

$$\lim_{|y_1| + |y_2| \rightarrow \infty} (|y_1| + |y_2|)^{-m} \max_{0 \leq t \leq \omega} |f(t, y_1, y_2)| = 0,$$



допускает априорную оценку  $\omega$ -периодических решений. Если сужать класс возмущений с дополнительным условием

$$f_2(t, y_1, y_2) = |y_2|^{q-1}y_2 + \tilde{f}_2(t, y_1, y_2), \quad 1 < q < m,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{-q(m-1)/(q-1)} \max_{\substack{0 \leq t \leq \omega, \\ |y_1| + |y_2| \leq 1}} |\tilde{f}_2(t, \rho y_1, \rho^{(m-1)/(q-1)} y_2)| = 0,$$

то в результате получаем систему уравнений вида (1) с квазиоднородным отображением  $P(y_1, y_2) = (|y_1|^{m-1}y_1, |y_2|^{q-1}y_2)$ , где  $\alpha = (1, (m-1)/(q-1))$ ,  $\nu = m-1$ .

Кроме того, к системе уравнений вида (1) с квазиоднородной нелинейностью  $P$  приводятся многие системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с производными высших порядков. Такие системы уравнений представляют интерес при исследовании нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с применением схемы Фаэдо—Галеркина (см. [4, с. 118-132]).

**2. Основные результаты.** Сначала исследуем априорную оценку решений задачи (1), (2). Априорной оценкой называем ограниченность множества решений задачи (1), (2) по норме пространства  $C([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ , т.е. либо множество решений задачи (1), (2) пусто, либо существует такое  $M > 0$ , зависящее лишь от  $P, f$ , что для любого решения  $x(t)$  задачи (1), (2) имеет место неравенство

$$\|x\| := \max_{0 \leq t \leq \omega} |x(t)| < M. \quad (7)$$

Аналогично [5], априорная оценка решений задачи (1), (2) связана с невозмущенной системой уравнений (5). Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть непрерывное отображение  $P = (P_1, \dots, P_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет условию квазиоднородности (3) и пусть невозмущенная система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда при любом отображении  $f \in \mathfrak{A}_{n, \omega}(\alpha, \nu)$  имеет место априорная оценка решений задачи (1), (2).

Выясним, при каких условиях на  $P$  система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений. Применяя метод направляющей функции (см. [3, с. 87]), получаем следующее утверждение.

**Лемма 1.** Система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений, если непрерывное отображение  $P = (P_1, \dots, P_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  квазиоднородно и выполнено условие

$$\langle P(y), \nabla V(y) \rangle > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (8)$$

где  $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\nabla V(y) = (\partial V/\partial y_1, \dots, \partial V/\partial y_n)$  — градиент функции  $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1)$ .

Условие (8) является лишь достаточным для отсутствия ненулевых ограниченных решений у системы уравнений (5). При  $n = 2$  можно привести необходимые и достаточные условия. Пусть непрерывное отображение  $P = (P_1, P_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  квазиоднородно с показателями  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\nu$  и пусть  $P(y) \neq 0$  при всех  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Тогда определена угловая функция  $\theta_P(s)$ ,  $s \in [0, 2\pi]$  — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} P_1(\cos s, \sin s) &= |P(\cos s, \sin s)| \cos(\theta_P(s)), \\ P_2(\cos s, \sin s) &= |P(\cos s, \sin s)| \sin(\theta_P(s)), \end{aligned} \quad s \in [0, 2\pi], \quad \theta_P(0) \in [0, 2\pi).$$

Наряду с  $\theta_P(s)$  определим другую угловую функцию  $\theta_\alpha(s)$  из условий

$$\cos(\theta_\alpha(s)) = \frac{\alpha_1 \cos s}{A_\alpha(s)}, \quad \sin(\theta_\alpha(s)) = \frac{\alpha_2 \sin s}{A_\alpha(s)}, \quad s \in [0, 2\pi], \quad \theta_\alpha(0) \in [0, 2\pi),$$

где  $A_\alpha(s) = ((\alpha_1 \cos s)^2 + (\alpha_2 \sin s)^2)^{1/2}$ .

**Теорема 2.** Система уравнений (5) при  $n = 2$  не имеет ненулевых ограниченных решений тогда и только тогда, когда  $P(y) \neq 0$  для всех  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  и либо выполнены условия

$$\sin(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s)) \neq 0 \quad \forall s \in [0, 2\pi], \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} g_{P,\alpha}(s) ds \neq 0, \quad (10)$$

где

$$g_{P,\alpha}(s) = \frac{\cos(\theta_P(s) - s)}{A_\alpha(s) \sin(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s))},$$

либо выполнено условие

$$\begin{aligned} \text{если } \theta_P(s_0) - \theta_\alpha(s_0) = \pi j_0 \text{ при некоторых } s_0 \in [0, 2\pi) \text{ и целом } j_0, \\ \text{то } \theta_P(s) - \theta_\alpha(s) < \pi(j_0 + 1) \text{ при всех } s \in (s_0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема 2 в случае положительно однородного отображения  $P$  доказана в [1].

Разрешимость периодической задачи (1), (2) устанавливается следующей теоремой, обобщающей результат работы [6].

**Теорема 3.** Пусть для заданного непрерывного и квазиоднородного (с показателями  $\alpha$  и  $\nu$ ) отображения  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда для разрешимости задачи (1), (2) при любом  $f \in \mathfrak{X}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$  необходимо и достаточно, чтобы не обращалось в ноль вращение  $\gamma(P)$  векторного поля  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  на единичной сфере  $|y| = 1$ .

В доказательстве теоремы 3 применяются определения и свойства вращения конечномерных и бесконечномерных векторных полей из монографии [3]. Необходимость условия  $\gamma(P) \neq 0$  можно доказать следующим образом: предполагая  $\gamma(P) = 0$  и используя теорему Хопфа о невырожденном продолжении непрерывного конечномерного векторного поля (см. [3, с. 24, теорема 5.2]), построим отображение  $f \in \mathfrak{X}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$  при котором задача (1), (2) неразрешима. Достаточность условия  $\gamma(P) \neq 0$  доказана на основе принципа ненулевого вращения (см. [3, с. 141]) посредством установления равенства  $\gamma_\infty(\Phi) = (-1)^n \gamma(P)$ , где  $\gamma_\infty(\Phi)$  — вращение вполне непрерывного векторного поля  $\Phi$ , определяемого формулой (6), на сфере  $\|x\| = r$  большого радиуса  $r$  пространства  $C([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ . В [7] выведена формула эффективного вычисления  $\gamma(P)$  для одного класса градиентных векторных полей.

Полученные результаты представляют интерес с точки зрения применения и развития методов нелинейного анализа в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Существование периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследовано в многочисленных работах других авторов. Можно отметить работы [2, 8], где применяются идеи и методы, близкие к настоящей работе. Например, в [8] получены достаточные условия, которым должна удовлетворять асимптотически устойчивая в целом автономная система дифференциальных уравнений, заданная в  $\mathbb{R}^n$ , чтобы при любом  $\omega$ -периодическом её возмущении она имела  $\omega$ -периодическое решение.

### 3. Априорная оценка.

*Доказательство теоремы 1.* Предположим, что оценка (7) не верна. Тогда заведомо существует неограниченная последовательность  $\omega$ -периодических решений  $x_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , системы уравнений (1). Рассмотрим вектор-функции  $y_k(t) = (y_{k1}(t), \dots, y_{kn}(t))$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где

$$y_{ki}(t) := r_k^{-\alpha_i} x_{ki}(t_k + tr_k^{-\nu}), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

$$r_k := \max_{0 \leq t \leq \omega} |x_k(t)|_\alpha = |x_k(t_k)|_\alpha, \quad |u|_\alpha := \left( (u_1^2)^{1/\alpha_1} + \dots + (u_n^2)^{1/\alpha_n} \right)^{1/2}.$$

Для вектор-функций  $y_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  имеем:

$$y'_k(t) = P(y_k(t)) + h_k(t), \quad |y_k(t)|_\alpha \leq |y_k(0)|_\alpha = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$h_{ki}(t) \equiv r_k^{-(\alpha_i+\nu)} f_i\left(t_k + tr_k^{-\nu}, r_k^{\alpha_1} y_{k1}(t), \dots, r_k^{\alpha_n} y_{kn}(t)\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда, переходя к пределу вдоль некоторой подпоследовательности  $y_{k_j}(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , на расширяющихся отрезках числовой прямой и учитывая условие (4), получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений (5):

$$y'_0(t) = P(y_0(t)), \quad |y_0(t)|_\alpha \leq |y_0(0)|_\alpha = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Полученное противоречит условию теоремы 1.  $\square$

*Доказательство леммы 1.* Пусть  $z(t)$  — произвольное ненулевое решение системы уравнений (5), определенное при  $t \in (\tau_1, \tau_2)$ . Проверим, что

$$z(t) \neq 0 \quad \forall t \in (\tau_1, \tau_2). \quad (12)$$

Для функции  $z(t)$  как решения системы уравнений (5) имеет место равенство

$$(|z(t)|_\alpha^2)' = \sum_{i=1}^n 2\alpha_i^{-1} (z_i^2(t))^{1/\alpha_i-1} z_i(t) P_i(z(t)),$$

где  $|u|_\alpha^2 := (u_1^2)^{1/\alpha_1} + \dots + (u_n^2)^{1/\alpha_n}$ . Отсюда, учитывая неравенства

$$|z_i(t)| \leq |z(t)|_\alpha^{\alpha_i}, \quad |P_i(z(t))| \leq |z(t)|_\alpha^{\alpha_i+\nu} \max_{|u|_\alpha \leq 1} |P_i(u)|,$$

выводим оценку

$$(|z(t)|_\alpha^2)' \leq C_0 (|z(t)|_\alpha^2)^{1+\nu/2},$$

где положительное число  $C_0$  зависит лишь от отображения  $P$ . Из полученной оценки вытекает, что (12) верно.

Предположим, что ненулевое решение  $z(t)$  системы уравнений (5) определено и ограничено на промежутке  $(-\infty, +\infty)$ . Тогда функция  $\varphi(t) := V(z(t))$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$  ограничена; в силу (12) и условия (8) имеем:

$$\varphi'(t) = \langle \nabla V(z(t)), z'(t) \rangle = \langle \nabla V(z(t)), P(z(t)) \rangle > 0, \quad \text{quadt} \in (-\infty, +\infty). \quad (13)$$

Следовательно, существуют конечные пределы  $\varphi_{\pm\infty}$  функции  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  и  $\varphi_{-\infty} < \varphi_{+\infty}$ . Кроме того, вдоль некоторых последовательностей  $t_k^\pm \rightarrow \pm\infty$  имеем  $\varphi'(t_k^\pm) \rightarrow 0$ . В силу (8) и (13) отсюда вытекает, что  $z(t_k^\pm) \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Тогда  $\varphi_{\pm\infty} = 0$ ; противоречие.  $\square$

*Доказательство теоремы 2.* Пусть  $P(y) \neq 0$  для всех  $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  и  $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$ ,  $t \in (\tau_1, \tau_2)$ , — произвольное ненулевое решение системы уравнений (5) при  $n = 2$ . Произведем замену

$$z_1(t) = r^{\alpha_1}(t) \cos \psi(t), \quad z_2(t) = r^{\alpha_2}(t) \sin \psi(t).$$

Тогда относительно  $r(t)$  и  $\psi(t)$  получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (\alpha_1 \cos^2 \psi(t) + \alpha_2 \sin^2 \psi(t)) r'(t) = r^{1+\nu}(t) |P(\cos \psi(t), \sin \psi(t))| \cos(\theta_P(\psi(t)) - \psi(t)), \\ (\alpha_1 \cos^2 \psi(t) + \alpha_2 \sin^2 \psi(t)) \psi'(t) = r^\nu(t) |P(\cos \psi(t), \sin \psi(t))| A_\alpha(\psi(t)) \sin(\theta_P(\psi(t)) - \theta_\alpha(\psi(t))). \end{cases}$$

Отсюда, в частности следует, что  $r(t) > 0$  при всех  $t \in (\tau_1, \tau_2)$ . Произведем замену  $\rho(t) = r(\xi(t))$ ,  $\varphi(t) = \psi(\xi(t))$ , где

$$\xi(t) = \int_0^t \frac{\alpha_1 \cos^2 \psi(s) + \alpha_2 \sin^2 \psi(s)}{r^\nu(s) |P(\cos \psi(s), \sin \psi(s))|} ds.$$

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \rho'(t) = \rho(t) \cos(\theta_P(\varphi(t)) - \varphi(t)), \\ \varphi'(t) = A_\alpha(\varphi(t)) \sin(\theta_P(\varphi(t)) - \theta_\alpha(\varphi(t))). \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, установлено, что система уравнений (5) при  $n = 2$  не имеет ненулевых ограниченных решений тогда и только тогда, когда таких решений не имеет система уравнений (14).

Если выполнено условие (9), то в системе уравнений (14) функция  $\varphi(t)$  строго монотонна и для любого целого  $l$  существует такое  $t_l$ , что  $\varphi(t_l) = \varphi(0) + 2\pi l$ . Отсюда, в силу первого уравнения системы (14), выводим:

$$\rho(t_l) = \rho(0) \exp \left( l \int_0^{2\pi} g_{P,\alpha}(s) ds \right).$$

Следовательно, при выполнении условия (9) система уравнений (14) не имеет ненулевых ограниченных решений лишь при дополнительном условии (10).

Пусть условие (9) не выполнено. Тогда система уравнений (14) не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда на любом интервале  $(s_1, s_2)$ , где

$$\sin(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s)) \neq 0, \quad s \in (s_1, s_2), \quad \sin(\theta_P(s_j) - \theta_\alpha(s_j)) = 0, \quad j = 1, 2,$$

выполняется одно из трех условий: либо

$$\cos(\theta_P(s_1) - s_1) \cos(\theta_P(s_2) - s_2) > 0,$$

либо

$$\sin(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s)) > 0, \quad s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_P(s_1) - s_1) < 0, \quad \cos(\theta_P(s_2) - s_2) > 0,$$

либо

$$\sin(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s)) < 0, \quad s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_P(s_1) - s_1) > 0, \quad \cos(\theta_P(s_2) - s_2) < 0.$$

Можно непосредственно проверить, что одно из этих условий выполняется, если выполнено условие (11), и обратно. Теорема 2 доказана.  $\square$

#### 4. Доказательство теоремы 3.

*Необходимость.* Пусть  $\gamma(P) = 0$ . Используя теорему Хопфа о невырожденном продолжении непрерывного конечномерного векторного поля см [3, с. 24, теорема 5.2]), построим  $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$  при котором задача (1), (2) неразрешима.

Согласно теореме Хопфа из равенства  $\gamma(P) = 0$  вытекает, что векторное поле  $P(y)$  можно непрерывно продолжить без нулей внутри шара  $|y| < 1$  некоторой формулой  $Q(y)$ :  $P(y) = Q(y)$  при  $|y| = 1$  и  $Q(y) \neq 0$  при  $|y| < 1$ . Рассмотрим систему уравнений

$$x'(t) = P(x(t)) + g(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (15)$$

где отображение  $g$  определено формулой

$$g(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geq 1, \\ Q(y) - P(y), & |y| < 1. \end{cases}$$

Очевидно,  $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$  и

$$P(y) + g(y) \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (16)$$

**Лемма 2.** Система уравнений (15) при некотором  $\omega_0 > 0$  не имеет  $\omega_0$ -периодических решений.

*Доказательство.* Предположим, что такого  $\omega_0 > 0$  не существует. Тогда существует последовательность периодических решений  $x_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , системы уравнений (15) с периодами  $\omega_k = 1/k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . В силу периодичности решений имеем:

$$\frac{1}{\omega_k} \int_0^{\omega_k} \langle P(x_k(t)) + g(x_k(t)), y \rangle dt = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ . Если вектор-функции  $x_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , равномерно ограничены,

$$\sup_{k=1,2,\dots} \max_{t \in \mathbb{R}^1} |x_k(t)| < \infty, \quad (18)$$

то они как решения системы уравнений (15) равномерно непрерывны. Без ограничения общности можно считать, что последовательность функций  $x_k(t)$  равномерно сходится к функции  $x_0(t)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в (17), получим

$$\langle P(x_0(0)) + g(x_0(0)), y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

что противоречит (16). Таким образом, для завершения доказательства леммы остается показать оценку (18).

Оценку (18) докажем аналогично теореме 1. Предположим, что неравенство (18) не верно и

$$r_k := \max_{0 \leq t \leq \omega} |x_k(t)|_\alpha = |x_k(t_k)|_\alpha \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим вектор-функции  $z_k(t) = (z_{k1}(t), \dots, z_{kn}(t))$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где

$$z_{ki}(t) := r_k^{-\alpha_i} x_{ki}(t_k + tr_k^{-\nu}), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Для вектор-функций  $z_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  имеем:

$$z'_k(t) = P(z_k(t)) + h_k(t), \quad |z_k(t)|_\alpha \leq |z_k(0)|_\alpha = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$h_{ki}(t) \equiv r_k^{-(\alpha_i + \nu)} g_i(r_k^{\alpha_1} z_{k1}(t), \dots, r_k^{\alpha_n} z_{kn}(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$z'_0(t) = P(z_0(t)), \quad |z_0(t)| \leq |z_0(0)| = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Это противоречит тому, что система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений. Следовательно, оценка (18) верна. Лемма 2 доказана.  $\square$

В системе уравнений (15) произведем замену  $z_i(t) = \lambda_0^{\alpha_i} x_i(\lambda_0^\nu t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $\lambda_0 = (\omega_0/\omega)^{1/\nu}$ . Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$z'(t) = P(z(t)) + (\lambda_0^{\alpha_1 + \nu} g_1(\lambda_0^{-\alpha_1} z_1(t)), \dots, \lambda_0^{\alpha_n + \nu} g_n(\lambda_0^{-\alpha_n} z_n(t))), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (19)$$

Очевидно, всякому  $\omega$ -периодическому решению системы уравнений (19) соответствует  $\omega_0$ -периодическое решение системы уравнений (15). Поэтому в силу леммы 2 система уравнений (19) не имеет  $\omega$ -периодических решений. Таким образом, при

$$f(y) = (\lambda_0^{\alpha_1 + \nu} g_1(\lambda_0^{-\alpha_1} y_1), \dots, \lambda_0^{\alpha_n + \nu} g_n(\lambda_0^{-\alpha_n} y_n))$$

задача (1), (2) неразрешима.

*Достаточность.* Пусть  $\gamma(P) \neq 0$  и  $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ . Покажем разрешимость задачи (1), (2), применяя схему доказательства из [3, с. 331-338]. Разрешимость задачи (1), (2) равносильна существованию нуля вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t (P(x(s)) + f(s, x(s))) ds,$$

действующего в пространстве  $C([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ . Рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\tilde{\Phi}_\lambda(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t (P(x(s)) + \lambda f(s, x(s))) ds, \quad \lambda \in [0, 1].$$

В силу априорной оценки (7) имеем  $\tilde{\Phi}_\lambda(x) \neq 0$  для всех  $\lambda \in [0, 1]$  на сфере  $\|x\| = r$  большого радиуса  $r$  пространства  $C([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$ . Отсюда следует, что вращения вполне непрерывных векторных полей  $\Phi$  и  $\tilde{\Phi}_0$  на бесконечности определены и равны

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\tilde{\Phi}_0). \quad (20)$$

Вычислим  $\gamma_\infty(\tilde{\Phi}_0)$ , гомотопируя векторное поле  $\tilde{\Phi}_0$  к другому векторному полю посредством следующего семейства вполне непрерывных векторных полей:

$$\Psi_\lambda(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t P(x(s))ds - \lambda \int_t^\omega P(x(s))ds, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Проверим, что

$$\Psi_\lambda(x) \neq 0 \quad \forall x \in C([0, \omega]; \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (21)$$

Предположим, что  $\Psi_{\lambda_*}(x_0) = 0$  при некоторых  $x_* \in C([0, \omega]; \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ ,  $\lambda_* \in [0, 1]$ . Если  $\lambda_* = 1$ , имеем:

$$x_*(t) \equiv x_*(\omega), \quad \int_0^\omega P(x_*(s))ds = 0.$$

Эти равенства противоречат предположению  $x_*(t) \neq 0$ . Если  $\lambda_* < 1$ , то имеем

$$x'_*(t) = (1 - \lambda_*)P(x_*(t)), \quad t \in (0, \omega), \quad x_*(0) = x_*(\omega), \quad x_*(t) \neq 0.$$

Тогда  $y_*(t) = x_*(t)/(1 - \lambda_*)$  является ненулевым ограниченным решением системы уравнений (5), приходим к противоречию. Таким образом, (21) верно.

Из (21) следует, что

$$\gamma_\infty(\tilde{\Phi}_0) = \gamma_\infty(\Psi_1). \quad (22)$$

Вполне непрерывное векторное поле  $\Psi_1$  представляет собой разность единичного и конечномерного операторов. Поэтому, согласно определению вращения вполне непрерывного векторного поля [3, с. 135], имеем:

$$\gamma_\infty(\Psi_1) = \gamma_\infty(F_1), \quad (23)$$

где  $F_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — конечномерное векторное поле, которое получается из вполне непрерывного векторного поля  $\Psi_1$  заменой функции  $x(t)$  вектором  $\xi \in \mathbb{R}^n$ :

$$F_1(\xi) = -\omega P(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Учитывая, что для векторного поля  $-\omega P$  вращение на бесконечности  $\gamma_\infty(-\omega P)$  равно вращению на единичной сфере  $\gamma(-\omega P)$ , а также используя формулу произведения вращений (см. [3, с. 32]), находим

$$\gamma_\infty(F_1) = \gamma(-\omega P) = (-1)^n \gamma(P). \quad (24)$$

Таким образом, из (20)–(24) выводим:

$$\gamma_\infty(\Phi) = (-1)^n \gamma(P).$$

Отсюда, в силу условия  $\gamma(P) \neq 0$  и согласно принципу ненулевого вращения (см. [3, с. 138]), существует решение уравнения  $\Phi(x) = 0$ , которое будет решением задачи (1), (2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобылев Н. А.* О построении правильных направляющих функций // Докл. АН СССР. — 1968. — 183, № 2. — С. 265–266.
2. *Звягин В. Г., Корнев С. В.* Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений // Совр. мат. Фундам. напр. — 2015. — 58, № 1. — С. 59–81.
3. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
4. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
5. *Мухамадиев Э.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1970. — 194, № 3. — С. 510–513.
6. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н.* О разрешимости периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью // Диффер. уравн. — 2023. — 59, № 2. — С. 280–282.

7. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н.* Об априорной оценке и существовании периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2022. — № 4. — С. 37–48.
8. *Перов А. И., Каверина В. К.* Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова// Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 2. — С. 269–272.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Наимов Алижон Набиджанович  
Вологодский государственный университет  
E-mail: [naimovan@vogu35.ru](mailto:naimovan@vogu35.ru)

Быстрецкий Михаил Васильевич  
Вологодский государственный университет  
E-mail: [pmbmv@bk.ru](mailto:pmbmv@bk.ru)



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 46–55  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-46-55

УДК 519.21, 519.6

## УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2024 г. И. Е. ПОЛОСКОВ

**Аннотация.** В работе представлен пошаговый метод приближенного аналитического расчета матрицы ковариационных функций системы линейных стохастических обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с конечными сосредоточенным и распределенным запаздываниями, возмущаемой аддитивными флуктуациями в форме векторного стандартного винеровского процесса с независимыми компонентами. Предлагаемый метод представляет собой сочетание классического метода шагов и расширения пространства состояний и состоит из нескольких этапов, позволяющих перейти сначала от немарковской системы стохастических уравнений к цепочке марковских систем без запаздывания. На основе систем строятся соответствующие последовательности систем вспомогательных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для элементов векторов математических ожиданий и матриц ковариаций расширенных векторов состояния, а затем искомые уравнения для ковариационных функций.

**Ключевые слова:** вектор состояния, ковариационная функция, стохастическое интегро-дифференциальное уравнение, сосредоточенное запаздывание, распределенное запаздывание, пошаговый метод.

## EQUATIONS FOR COVARIANCE FUNCTIONS OF THE STATE VECTOR OF A LINEAR SYSTEM OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FINITE CONCENTRATED AND DISTRIBUTED DELAYS

© 2024 I. E. POLOSKOV

**ABSTRACT.** In this paper, we present a step-by-step method for the approximate analytical calculation of the matrix of covariance functions for a system of linear stochastic ordinary integro-differential equations with finite concentrated and distributed delays perturbed by additive fluctuations in the form of a vector standard Wiener process with independent components. The method proposed is a combination of the classical method of steps and the expansion of the state space and consists of several stages that make it possible to pass from a non-Markov system of stochastic equations to a chain of Markov systems without delay. Based on these systems, we construct sequences of systems of auxiliary linear ordinary differential equations for elements of vectors of mathematical expectations and covariance matrices of extended state vectors, and then obtain the required equations for covariance functions.

**Keywords and phrases:** state vector, covariance function, stochastic integro-differential equation, concentrated delay, distributed delay, step-by-step method.

**AMS Subject Classification:** 60H35, 65C30



**1. Введение.** Динамические системы с наличием запаздывания (или последствия) используются для описания поведения широкого круга объектов и явлений в технике, природе и обществе. Одним из основных математических инструментов описания поведения таких объектов и явлений являются системы дифференциальных уравнений, которые в зависимости от типов уравнений, форм последствия и наличия возмущений могут быть линейными или нелинейными, детерминированными или стохастическими, обыкновенными или в частных производных, дифференциальными (сосредоточенные запаздывания) или интегро-дифференциальными (распределенные запаздывания) уравнениями, в том числе нейтрального типа, или смешанными.

Можно заметить, что в последние десятилетия интерес к изучению поведения и созданию удобных инструментов количественного анализа таких систем неуклонно растет. Современный этап развития теории дифференциальных уравнений с запаздыванием — учет влияния случайных возмущений, а как следствие, более широкое обращение к соответствующим моделям (см. [9, 14, 15]). К их числу относится семейство стохастических обыкновенных (интегро-)дифференциальных уравнений (СОИДУ, СОДУ) с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями и случайными возмущениями.

Методы приближенного решения детерминированных аналогов систем уравнений рассматриваемого типа включают:

$\theta$ -метод (см. [12]) для модели

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(t) + \mu x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t x(s) ds;$$

метод спектральных элементов [13] для

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t), \int_0^{\tau} K(t, s) x(t - s) ds\right);$$

метод Рунге—Кутты [18] для системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) \left[ \epsilon_1 - \gamma_1 x_2(t) - \int_{t-\tau}^t F_1(t - s) x_2(s) ds \right], \\ x_2'(t) &= x_2(t) \left[ -\epsilon_2 + \gamma_1 x_1(t) + \int_{t-\tau}^t F_2(t - s) x_1(s) ds \right]; \end{aligned}$$

метод Рунге—Кутты—Пуазе (см. [19]) для уравнения

$$\frac{d}{dt} \left[ x(t) - \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s)) ds \right] = f(t, x(t), x(t - \tau));$$

метод коллокаций со сплайнами [8] для модели

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t), x(t - \tau), \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s)) ds\right)$$

и др.

Для анализа систем уравнений рассматриваемого типа применяются стохастические аналоги перечисленных методов, а также методы Эйлера—Маруямы [11],  $\theta$ -Маруямы [5], Мильштейна [4], полунявный метод Эйлера [7] и др., причем, как правило, эти схемы предназначены для расчета отдельных приближенных траекторий соответствующих случайных процессов.

Целью представленного в данной работе метода является вычисление статистических характеристик решений линейных СОИДУ. Для построения необходимых для этого обыкновенных

дифференциальных уравнений (ОДУ) без запаздывания, как и в ряде наших предыдущих работ [2, 16, 17], используется схема, сочетающая расширение пространства состояний и идеологию классического метода шагов. При этом для получения искомых характеристик в модификацию схемы определения последовательности пространств состояний увеличивающейся размерности и соответствующих векторов состояния, кроме распространения на новый класс моделей, включена процедура построения объединенной системы ОДУ без запаздывания для компонент последовательности векторов функций математического ожидания  $\mathbf{m}_X(\underline{t})$ , матриц функций ковариации  $\mathcal{K}_{XX}(\underline{t})$  и матриц ковариационных функций  $\mathcal{C}_{XX}(\underline{t}, \underline{s})$  расширенных векторов состояния.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим линейную систему СОИДУ с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями и случайными возмущениями следующего вида:

$$d\mathbf{X}(t) = \left[ \mathcal{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathcal{R}(t) \mathbf{X}(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \mathcal{Q}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \mathbf{c}(t) \right] dt + \mathcal{H}(t) d\mathbf{W}(t), \quad (1)$$

$$t_1 < t \leq T < \infty,$$

где  $t$  — время;  $0 < \tau < \infty$  — постоянное запаздывание;  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^\top \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния;  $\mathbf{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_m\}^\top \in \mathbb{R}^m$  — вектор независимых случайных стандартных винеровских процессов;  $n, m \in \mathbb{N}$ ;  $\top$  — символ транспонирования векторов и матриц.

Предположим, что на полуинтервале  $(t_0, t_1]$  случайный вектор состояния  $\mathbf{X}(t)$  удовлетворяет системе стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) Ито без запаздывания:

$$d\mathbf{X}(t) = [\mathcal{A}_0(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{c}_0(t)] dt + \mathcal{H}_0(t) d\mathbf{W}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0, \quad (2)$$

причем в системах уравнений (1) и (2)  $\mathcal{A}(t)$ ,  $\mathcal{R}(t)$ ,  $\mathcal{Q}(t)$ ,  $\mathcal{H}(t)$ ,  $\mathcal{A}_0(t)$ ,  $\mathcal{H}_0(t)$  и  $\mathbf{c}(t)$ ,  $\mathbf{c}_0(t)$  — известные непрерывные матричные и векторные функции. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора  $\mathbf{X}^0$ . В частности, пусть в начальный момент времени  $t_0$  для вектора  $\mathbf{X}(t)$  заданы вектор математических ожиданий  $\mathbf{m}_X^0$  и матрица ковариаций  $\mathcal{K}_{XX}^0$ .

Уравнения в форме (1) применяются при анализе динамики управляемых объектов (см. [1, 6]), плюрипотентных гемопоэтических стволовых клеток (см. [3]), рекламной деятельности (см. [10]) и др.

Основная задача состоит в построении системы ОДУ без запаздывания для компонент матрицы ковариационных функций  $\mathcal{C}_{XX}(\underline{t}, \underline{s})$  стохастического вектора состояния  $\mathbf{X}(t)$  при любом  $t > t_0$ .

Отметим, что входящие в системы (1) и (2) шумы аддитивные, а следовательно, СОДУ Ито и Стратоновича имеют одну и ту же форму.

**3. Построение расширенной системы СОДУ без запаздывания.** Прежде, чем представить детали схемы, для компактности изложения перепишем уравнения (1) и (2) в менее строгой, но более удобной следующей форме:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathcal{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathcal{R}(t) \mathbf{X}(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \mathcal{Q}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \mathbf{c}(t) + \mathcal{H}(t) \mathbf{V}(t), \quad t > t_1, \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathcal{A}_0(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{c}_0(t) + \mathcal{H}_0(t) \mathbf{V}(t), \quad t \in (t_0, t_1], \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}^\top \in \mathbb{R}^m$  — вектор независимых стандартных белых шумов:  $\mathbb{E}[V_k(\underline{t})] = 0$ ,  $\mathbb{E}[V_k(\underline{t}) V_\ell(\underline{s})] = 2\pi \delta_{k\ell} \delta(\underline{t} - \underline{s})$ ;  $\mathbb{E}[\cdot]$  — оператор математического ожидания;  $\delta_{k\ell}$  — символ Кронекера;  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака.

Введем равномерную временную сетку  $t_q = t_0 + q \cdot \tau$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $N + 1$  ( $t_{N+1} \geq T$ ); новую временную переменную  $s \in [0, \tau]$ . Введем также следующие обозначения:

$$s_q = s + t_q, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \mathbf{X}_q(s) = \mathbf{X}(s_q), \quad \mathbf{X}_q(0) = \mathbf{X}_{q-1}(\tau),$$

$$\begin{aligned}
 V_q(s) &= V(s_q), \quad V_q(0) = V_{q-1}(\tau), \quad U_q(s) = \int_0^s \mathcal{Q}(\theta_q) X_q(\theta) d\theta, \\
 \theta_q &= \theta + t_q, \quad Y_q(s) \equiv Y_q = U_{q-1}(\tau), \quad q > 0, \quad Y(s) \equiv Y = X^0, \\
 \mathcal{A}_0(s_0) &= \mathcal{A}_0(s + t_0), \quad \mathcal{H}_0(s_0) = \mathcal{H}_0(s + t_0), \quad c_0(s_0) = c_0(s + t_0), \\
 \mathcal{A}(s_q) &= \mathcal{A}(s + t_q), \quad \mathcal{R}(s_q) = \mathcal{R}(s + t_q), \quad \mathcal{Q}(s_q) = \mathcal{Q}(s + t_q), \\
 \mathcal{H}(s_q) &= \mathcal{H}(s + t_q), \quad c(s_q) = c(s + t_q), \\
 \text{col}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k) &= (b_{11}, \dots, b_{1n}, b_{21}, \dots, b_{2n}, \dots, b_{k1}, \dots, b_{kn})^\top,
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{b}_\ell \in \mathbb{R}^n$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, k$ , а равенства случайных векторов почти наверное на границах отрезков  $\Delta_q$  следуют из стохастической непрерывности рассматриваемых случайных процессов.

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов)  $\Delta_q$ .

0°. На сегменте  $\Delta_0$  систему СОДУ для векторного случайного процесса  $Z_0^+(s) \equiv Z_0(s) = \text{col}(Y(s), X_0(s), U_0(s))$  и начальные условия представим так:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}(s) &= O_n, & Y(0) &= X^0, \\
 \dot{X}_0(s) &= \mathcal{A}_0(s_0) X_0(s) + c_0(s_0) + \mathcal{H}_0(s_0) V_0(s), & X_0(0) &= X^0, \\
 \dot{U}_0(s) &= \mathcal{Q}(s_0) X_0(s), & U_0(0) &= O_n,
 \end{aligned}$$

где  $O_n$  — нулевой вектор размерности  $n$ .

1°. Построим расширенный вектор  $Z_1^+(s) = \text{col}(Z_0(s), Z_1(s))$ , где  $Z_1(s) = \text{col}(Y_1(s), X_1(s), U_1(s))$ . Этот вектор, определенный на полуинтервалах  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$ , будет удовлетворять системе СОДУ (5), к которой добавлены уравнения

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_1(s) &= O_n, & Y_1(0) &= U_0(\tau), \\
 \dot{X}_1(s) &= \mathcal{A}(s_1) X_1(s) + \mathcal{R}(s_1) X_0(s) + Y_1(s) - U_0(s) + \\
 & \quad + U_1(s) + c(s_1) + \mathcal{H}(s_1) V_1(s), & X_1(0) &= X_0(\tau), \\
 \dot{U}_1(s) &= \mathcal{Q}(s_1) X_1(s), & U_1(0) &= O_n.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В этих уравнениях учтено, что для  $t \in (t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
 \int_{t-\tau}^t \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta &= \int_{t-\tau}^{t_1} \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta + \int_{t_1}^t \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta = \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta - \int_{t_0}^{t-\tau} \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta + \int_{t_1}^t \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta = \\
 &= U_0(\tau) - \int_0^s \mathcal{Q}(\theta_0) X_0(\theta) d\theta + \int_0^s \mathcal{Q}(\theta_1) X_1(\theta) d\theta = Y_1(s) - U_0(s) + U_1(s).
 \end{aligned}$$

N°. Продолжая подобным образом, заключаем, что вектор  $Z_N^+(s) = \text{col}(Z_0(s), Z_1(s), \dots, Z_N(s))$ , включающий вектор  $Z_N(s) = \text{col}(Y_N(s), X_N(s), U_N(s))$  и представляющий поведение вектора состояния  $X(t)$  на сегментах  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$ , будет единственным решением системы СОДУ, которую можно получить добавлением к уравнениям для вектора  $Z_{N-1}^+(s)$  уравнений следующего

вида:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Y}}_N(s) &= \mathbf{O}_n, & \mathbf{Y}_N(0) &= \mathbf{U}_{N-1}(\tau), \\
\dot{\mathbf{X}}_N(s) &= \mathcal{A}(s_N) \mathbf{X}_N(s) + \mathcal{R}(s_N) \mathbf{X}_{N-1}(s) + \mathbf{Y}_N(s) - \\
&\quad - \mathbf{U}_{N-1}(s) + \mathbf{U}_N(s) + \mathbf{c}(s_N) + \mathcal{H}(s_N) \mathbf{V}_N(s), & \mathbf{X}_N(0) &= \mathbf{X}_{N-1}(\tau), \\
\dot{\mathbf{U}}_N(s) &= \mathcal{Q}(s_N) \mathbf{X}_N(s), & \mathbf{U}_N(0) &= \mathbf{O}_n.
\end{aligned} \tag{6}$$

В результате первого этапа получена искомая цепочка систем линейных СОДУ (5)–(6) для расширенных векторов состояния  $\mathbf{Z}_0^+, \mathbf{Z}_1^+, \dots, \mathbf{Z}_N^+$  увеличивающейся размерности и подобной структуры без запаздывания, которая используется на следующем этапе для построения моментных уравнений.

#### 4. Построение систем ОДУ для функций математического ожидания и ковариации.

Воспользуемся построенной последовательностью для получения ОДУ для первых моментов векторов  $\mathbf{Z}_0^+, \mathbf{Z}_1^+, \dots, \mathbf{Z}_N^+$ . Рассмотрим  $k$ -й шаг ( $0 \leq k \leq N$ ) и введем расширенные матрицы  $\mathcal{A}_k^+(s)$ ,  $\mathcal{H}_k^+(s)$  и векторы  $\mathbf{c}_k^+(s)$ , которые имеют блочную структуру и формируются следующим образом ( $\ell = 1, 2, \dots, k$ ):

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{A}}_0(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathcal{A}_0(s_0) & \mathbf{O}_{n \times n} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathcal{Q}(s_0) & \mathbf{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; & \underline{\mathcal{A}}_\ell(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} \\ \mathcal{I}_n & \mathcal{A}(s_\ell) & \mathcal{I}_n \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathcal{Q}(s_\ell) & \mathbf{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; & \underline{\mathbf{c}}_0(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{c}_0(s_0) \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix}; \\
\underline{\mathbf{c}}_\ell(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{c}(s_\ell) \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix}; & \underline{\mathcal{H}}_0(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times m} \\ \mathcal{H}_0(s_0) \\ \mathbf{O}_{n \times m} \end{bmatrix}; & \underline{\mathcal{H}}_\ell(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times m} \\ \mathcal{H}(s_\ell) \\ \mathbf{O}_{n \times m} \end{bmatrix}; & \underline{\mathcal{B}}_\ell(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathcal{R}(s_\ell) & -\mathcal{I}_n \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \\
\mathcal{A}_0^+(s) &= \underline{\mathcal{A}}_0(s); & \mathcal{A}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{A}}_0(s) & \mathbf{O}_{3n \times 3n} \\ \underline{\mathcal{B}}_1(s) & \underline{\mathcal{A}}_1(s) \end{bmatrix}; & \mathcal{A}_\ell^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{\ell-1}^+(s) & \mathbf{O}_{3n\ell \times 3n} \\ \underline{\mathcal{B}}_\ell^+(s) & \underline{\mathcal{A}}_\ell(s) \end{bmatrix}; & \mathbf{c}_0^+(s) &= \underline{\mathbf{c}}_0(s); \\
\mathbf{c}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{c}}_0(s) \\ \underline{\mathbf{c}}_1(s) \end{bmatrix}; & \mathbf{c}_\ell^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\ell-1}^+(s) \\ \underline{\mathbf{c}}_\ell(s) \end{bmatrix}; & \mathcal{B}_1^+(s) &= \underline{\mathcal{B}}_1(s); & \mathcal{B}_\ell^+(s) &= [\mathbf{O}_{3n \times 3n(\ell-1)} \quad \underline{\mathcal{B}}_\ell(s)]; \\
\mathcal{H}_0^+(s) &= \underline{\mathcal{H}}_0(s); & \mathcal{H}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{H}}_0(s) & \mathbf{O}_{3n \times m} \\ \mathbf{O}_{3n \times m} & \underline{\mathcal{H}}_1(s) \end{bmatrix}; & \dots & \mathcal{H}_\ell^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\ell-1}^+(s) & \mathbf{O}_{3n\ell \times m} \\ \mathbf{O}_{3n \times m\ell} & \underline{\mathcal{H}}_\ell(s) \end{bmatrix}; \\
\mathbf{V}_0^+(s) &= \mathbf{V}_0(s); & \mathbf{V}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{V}_1(s) \end{bmatrix}; & \dots & \mathbf{V}_\ell^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\ell-1}^+(s) \\ \mathbf{V}_\ell(s) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{O}_{n \times m}$  — нулевая  $n \times m$ -матрица,  $\mathcal{I}_n$  — единичная матрица  $n$ -го порядка. Тогда система СОДУ для вектора  $\mathbf{Z}_k$  будет иметь вид:

$$\dot{\mathbf{Z}}_k^+(s) = \mathcal{A}_k^+(s) \mathbf{Z}_k^+(s) + \mathbf{c}_k^+(s) + \mathcal{H}_k^+(s) \mathbf{V}_k^+(s), \quad \mathbf{Z}_k^+(0) = \mathbf{Z}_k^{+0}. \tag{7}$$

Несложно увидеть, что вследствие линейности уравнений (7) для любого  $\mathbf{Z}_k^+$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , структуры ОДУ для последовательности векторов функций математического ожидания  $\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s)$  и матриц функций ковариации  $\mathcal{K}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s)$  будут иметь вид:

$$\dot{\mathbf{m}}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) = \mathcal{A}_k^+(s) \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) + \mathbf{c}_k^+(s), \tag{8}$$

$$\dot{\mathcal{K}}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s) = \mathcal{A}_k^+(s) \mathcal{K}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s) + \left[ \mathcal{A}_k^+(s) \mathcal{K}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s) \right]^\top + 2\pi \mathcal{H}_k^+(s) \mathcal{H}_k^{+\top}(s), \tag{9}$$

где

$$\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) = \mathbb{E} [\mathbf{Z}_k^+(s)], \quad \mathcal{K}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s) = \mathbb{E} \left[ \{ \mathbf{Z}_k^+(s) - \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) \} \{ \mathbf{Z}_k^+(s) - \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) \}^\top \right].$$

Теперь определим вид начальных условий для построенных ОДУ:

$$\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_0}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_1}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{U_0}(\tau) \\ \mathbf{m}_{X_0}(\tau) \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix}, \quad \dots \quad \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{U_{k-1}}(\tau) \\ \mathbf{m}_{X_{k-1}}(\tau) \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{Z_0 Z_0}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{K}_{Z_0 Z_1}(0) = \mathcal{K}_{Z_1 Z_0}^\top(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{YU_0}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{YU_0}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \\
\mathcal{K}_{Z_1 Z_1}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{U_0 U_0}(\tau) & \mathcal{K}_{U_0 X_0}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{X_0 U_0}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0 X_0}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \\
&\dots\dots\dots \\
\mathcal{K}_{Z_0 Z_k}(0) = \mathcal{K}_{Z_k Z_0}^\top(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{YU_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{YU_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \\
\mathcal{K}_{Z_\ell Z_k}(0) = \mathcal{K}_{Z_k Z_\ell}^\top(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{U_{\ell-1} U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{U_{\ell-1} X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{X_{\ell-1} U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-1} X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq \ell \leq k-1; \\
\mathcal{K}_{Z_k Z_k}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{U_{k-1} U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{U_{k-1} X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{X_{k-1} U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{k-1} X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Вследствие того, что вектор функций математического ожидания  $\mathbf{m}_X(t)$  и матрицу функций ковариации  $\mathcal{K}_{XX}(t)$  на промежутке  $t_0 \leq t \leq t_{N+1}$  можно собрать из соответствующих блоков векторной функции  $\mathbf{m}_{Z_N}(s)$  и матричной функции  $\mathcal{K}_{Z_N Z_N}(s)$ , достаточно вычислить последние, а затем выбрать из них необходимые элементы.

**5. Формирование систем ОДУ для ковариационных функций.** Обратимся к главной цели исследования — построению системы ОДУ для расчета компонент матрицы ковариационных функций

$$\mathcal{C}_{XX}(\bar{t}, \bar{s}) = \mathbb{E} [\{ \mathbf{X}(\bar{t}) - \mathbf{m}(\bar{t}) \} \{ \mathbf{X}(\bar{s}) - \mathbf{m}(\bar{s}) \}^\top]$$

случайного вектора состояния  $\mathbf{X}(\cdot)$  ( $t_0 \leq \bar{s} \leq \bar{t} \leq T$ ). В процессе этого построения будут использоваться те же системы СОДУ (5)–(6), (7)–(9).

**0-0°.** Рассмотрим нижнюю правую часть области  $\mathbb{D}_{00}$  (рис. 1):  $t_0 \leq \bar{s} \leq \bar{t} \leq t_1$  ( $\bar{t} = \underline{t} + t_0$ ,  $\bar{s} = \underline{s} + t_0$ ,  $0 \leq \underline{s} \leq \underline{t} \leq \tau$ ). В этой части  $\mathbf{X}(\bar{t})$  — подвектор вектора  $\mathbf{Z}_0(\bar{t})$ , а следовательно, с учетом уравнений (7), (8) будем иметь:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} &\equiv \frac{\partial \mathbb{E} [\{ \mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top]}{\partial \underline{t}} = \\
&= \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \{ \mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t}) \}}{\partial \underline{t}} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top \right] = \\
&= \mathbb{E} [\{ \mathbf{A}_0(\underline{t}) [\mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t})] + \mathbf{H}_0(\underline{t}) \mathbf{V}_0(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top],
\end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \mathbf{A}_0(\underline{t}) \mathcal{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}), \quad \underline{s} < \underline{t}, \quad (10)$$

с начальными условиями  $\mathcal{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{s}, \underline{s}) = \mathcal{K}_{Z_0 Z_0}(\underline{s})$ .

**1-0°.** Теперь рассмотрим область  $\mathbb{D}_{10}$  (рис. 1):  $t_1 < \bar{t} \leq t_2$ ,  $t_0 \leq \bar{s} \leq t_1$ . В этой области получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{C}_{Z_1 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} &\equiv \frac{\partial \mathbb{E} [\{ \mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top]}{\partial \underline{t}} = \\
&= \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \{ \mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t}) \}}{\partial \underline{t}} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top \right] = \\
&= \mathbb{E} [\{ \mathbf{B}_1(\underline{t}) [\mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t})] + \mathbf{A}_1(\underline{t}) [\mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t})] + \mathbf{H}_1(\underline{t}) \mathbf{V}_1(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top],
\end{aligned}$$

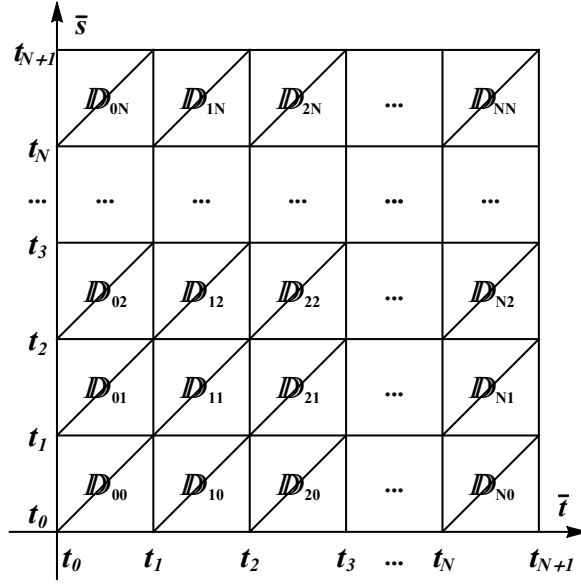


Рис. 1

или

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_1 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{B}}_1(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}) + \underline{\mathbf{A}}_1(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_1 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}), \quad \mathbf{C}_{Z_1 Z_0}(0, \underline{s}) = \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\tau, \underline{s}). \quad (11)$$

Для полноты расчетных соотношений к этим уравнениям нужно добавить по очереди системы ОДУ

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{A}}_0(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}), \quad 0 < \underline{t} < \underline{s} \leq \tau, \quad \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(0, \underline{s}) = \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}^\top(\underline{s}, 0) \quad (12)$$

(верхняя левая часть области  $\mathbb{D}_{00}$ ) и

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{A}}_0(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}), \quad 0 < \underline{s} < \underline{t} \leq \tau, \quad \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{s}, \underline{s}) = \underline{\mathbf{K}}_{Z_0 Z_0}(\underline{s}) \quad (13)$$

(нижняя правая часть области  $\mathbb{D}_{00}$ ).

**к-0°.** Продолжая подобным образом, для области  $\mathbb{D}_{k0}$ :  $t_k \leq \bar{t} \leq t_{k+1}$  ( $k > 1$ ),  $t_0 \leq \bar{s} \leq t_1$  можно построить уравнения вида

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_k Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{B}}_k(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_{k-1} Z_0}(\underline{t}, \underline{s}) + \underline{\mathbf{A}}_k(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_k Z_0}(\underline{t}, \underline{s}) \quad (14)$$

с начальными условиями  $\mathbf{C}_{Z_k Z_0}(0, \underline{s}) = \mathbf{C}_{Z_{k-1} Z_0}(\tau, \underline{s})$ . Эта система уравнений должна быть дополнена системами ОДУ, построенными для областей  $\mathbb{D}_{00}, \mathbb{D}_{10}, \dots, \mathbb{D}_{k-1,0}$ .

**1-1°.** Передвинемся на следующий временной слой и рассмотрим нижнюю правую часть области  $\mathbb{D}_{11}$ :  $t_1 \leq \bar{s} \leq \bar{t} \leq t_2$  ( $\bar{t} = \underline{t} + t_1$ ,  $\bar{s} = \underline{s} + t_1$ ,  $0 \leq \underline{s} \leq \underline{t} \leq \tau$ ). В этой части  $\mathbf{X}(\bar{t})$  — подвектор вектора  $\mathbf{Z}_1(\bar{t})$ , а следовательно, для матрицы ковариационных функций будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}_{Z_1 Z_1}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} &\equiv \frac{\partial \mathbb{E} [\{ \mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_1(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{s}) \}^\top]}{\partial \underline{t}} = \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \{ \mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t}) \}}{\partial \underline{t}} \{ \mathbf{Z}_1(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{s}) \}^\top \right] = \\ &= \mathbb{E} [ \{ \underline{\mathbf{B}}_1(\underline{t}) [\mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t})] + \underline{\mathbf{A}}_1(\underline{t}) [\mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t})] + \underline{\mathbf{H}}_1(\underline{t}) \mathbf{V}_1(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_1(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{s}) \}^\top ], \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_1 Z_1}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{B}}_1(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_0 Z_1}(\underline{t}, \underline{s}) + \underline{\mathbf{A}}_1(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_1 Z_1}(\underline{t}, \underline{s}), \quad \underline{s} < \underline{t}, \quad (15)$$

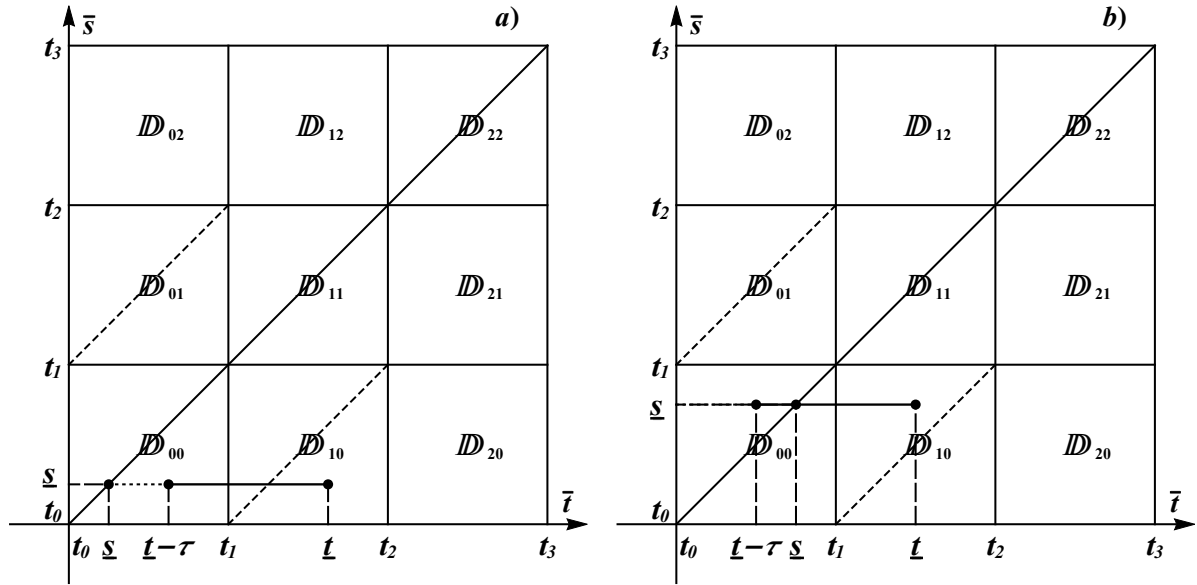


Рис. 2

с начальными условиями  $\mathbf{C}_{Z_1 Z_1}(\underline{s}, \underline{s}) = \mathbf{K}_{Z_1 Z_1}(\underline{s})$ . К этим уравнениям и условиям нужно добавить необходимые инструменты расчета  $\mathbf{C}_{Z_0 Z_1}(\underline{t}, \underline{s})$  в нижней правой части области  $\mathbb{D}_{10}$  с учетом свойств ковариационных функций.

**Замечание.** Последовательное численное решение ОДУ для функций математического ожидания и ковариации не вызывает проблем, причем группы уравнений для этих функций являются независимыми. Расчет же поведения ковариационных функций более сложен. Алгоритм такого расчета включает следующие шаги:

- (1) дробление запаздывания на целое число частей;
- (2) построение сетки на плоскости переменных  $(\underline{t}, \underline{s})$ , в узлах которой и будут вычисляться значения ковариационных функций (это необходимо для их расчета на участках  $[t_0, \bar{s}]$  при различных  $\bar{s}$  на основе формирования начальных условий в точках  $\{\bar{s}, t_0\}$  с помощью уже найденных значений в точках  $\{\bar{s}, t_0\}$ );
- (3) движение через узлы по прямым, параллельным оси  $\underline{t}$ .

На рис. 2 показаны промежутки интегрирования этих уравнений на отрезке  $[\underline{s}, \underline{t}]$  для случаев  $\underline{t} - \tau \geq \underline{s}$  (рис. 2a) и  $\underline{t} - \tau < \underline{s}$  (рис. 2b).

**6. Модельный пример.** Воспользуемся изложенной схемой для анализа переходного процесса, описываемого модельным уравнением вида

$$\dot{X}(t) + \alpha X(t) = \beta [X(t) - X(t - \tau)] + \int_{t-\tau}^t q(\theta) X(\theta) d\theta + \sigma_0 V(t), \quad t > 0,$$

$$\dot{X}(t) + \alpha_0 X(t) = \sigma_0 V(t), \quad -\tau < t \leq 0, \quad X(-\tau) = X^0 \sim \mathcal{N}(m_0, D_0),$$

где  $X^0$  — неслучайная величина;  $\alpha > 0, \beta, \sigma_0, \alpha_0 > 0, m_0, D^0 > 0$  — постоянные;  $q(\theta) \geq 0$ .

Ниже на рисунках показаны графики функций математического ожидания и среднеквадратичного отклонения  $\sigma_X(t) = \sqrt{\mathcal{D}_X(t)}$  (рис. 3) и ковариационной функции в областях  $\mathbb{D}_{00}, \mathbb{D}_{10}, \dots, \mathbb{D}_{10,0}$  (рис. 4), построенные на основе результатов расчетов при следующих значениях параметров задачи:

$$\tau = 1; \quad \alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{10}; \quad \sigma_0 = \frac{1}{10}; \quad m_0 = 1; \quad D_0 = \frac{1}{16}; \quad q = \frac{1}{20\tau},$$

где  $\mathcal{D}$  — дисперсия.

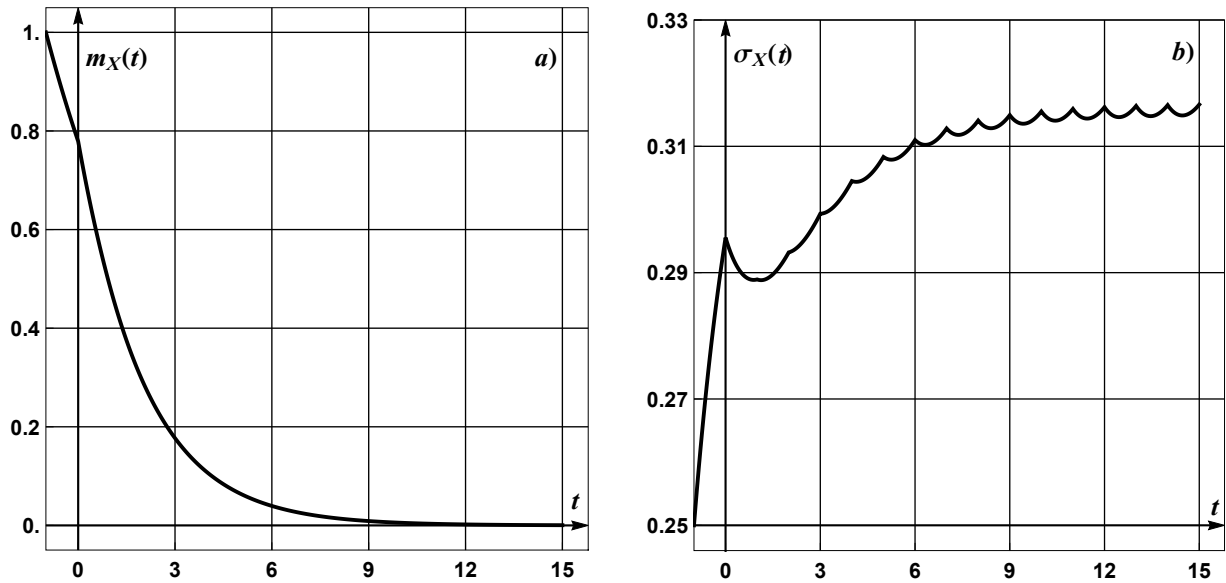


Рис. 3

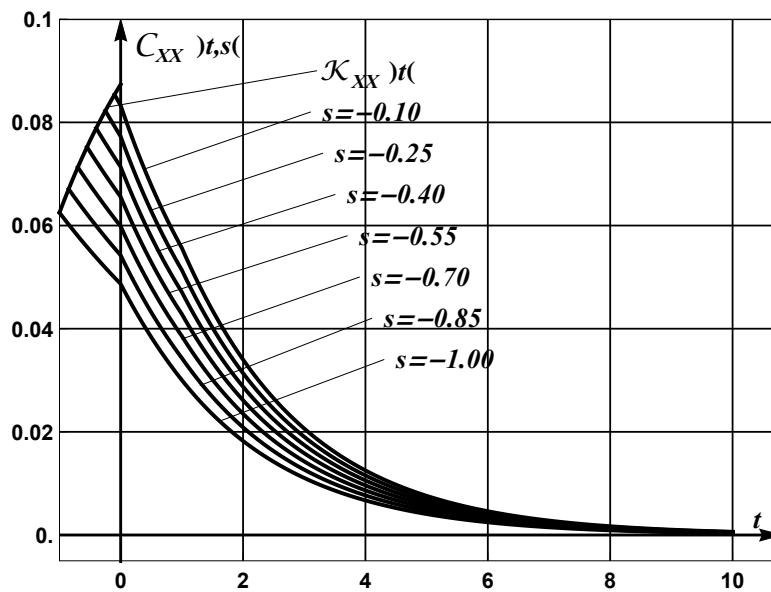


Рис. 4

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмановский В. Б., Майзенберг Т. Л. Оптимальное управление стохастическими системами с последствием// Автомат. телемех. — 1973. — № 1. — С. 47–61.
2. Полосков И. Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом// Автомат. телемех. — 2002. — № 9. — С. 58–73.
3. Adimy M., Crauste F., Halanay A. et al. Stability of limit cycles in a pluripotent stem cell dynamics model// Chaos Solit. Fract. — 2006. — 27, № 4. — P. 1091–1107.
4. Buckwar E. Euler–Maruyama and Milstein approximations for stochastic functional differential equations with distributed memory term// in: Discussion Papers of Interdisciplinary Research Project 373: Quantification and Simulation of Economic Processes. — Berlin: Humboldt University, 2003.



5. *Buckwar E.* The  $\theta$ -Maruyama scheme for stochastic functional differential equations with distributed memory term// Monte Carlo Meth. Appl. — 2004. — 10, № 3. — P. 235–244.
6. *Chang M. H., Pang T., Pemy M.* Optimal control of stochastic functional differential equations with a bounded memory// Int. J. Probab. Stochast. Processes. — 2008. — 80, № 1. — С. 69–96.
7. *Ding X., Wu K., Liu M.* Convergence and stability of the semi-implicit Euler method for linear stochastic delay integro-differential equations// Int. J. Comput. Math. — 2006. — 83, № 10. — С. 753–763.
8. *El-Hawary H. M., El-Shami K. A.* Numerical solution of Volterra delay-integro-differential equations via spline/spectral methods// Int. J. Differ. Equations Appl. — 2013. — 12, № 3. — P. 149–157.
9. *Geffert P. M.* Stochastic Non-Excitable Systems with Time Delay: Modulation of Noise Effects by Time-Delayed Feedback. — Wiesbaden: Springer, 2015.
10. *Gozzi F., Marinelli C., Savin S.* On controlled linear diffusions with delay in a model of optimal advertising under uncertainty with memory effects// J. Optim. Theory Appl. — 2009. — 142, № 2. — P. 291–321.
11. *Hu P., Huang Ch.* Stability of Euler–Maruyama method for linear stochastic delay integro-differential equations// Math. Num. Sinica. — 2010. — 32, № 1. — P. 105–112.
12. *Koto T.* Stability of  $\theta$ -methods for delay integro-differential equations// J. Comput. Appl. Math. — 2003. — 161, № 2. — P. 393–404.
13. *Khasawneh F. A., Mann B. P.* Stability of delay integro-differential equations using a spectral element method// Math. Comput. Model. — 2011. — 54, № 9–10. — P. 2493–2503.
14. *Kushner H. J.* Numerical Methods for Controlled Stochastic Delay Systems. — Boston: Birkhäuser, 2008.
15. *Mao X.* Stochastic Differential Equations and Applications. — Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011.
16. *Poloskov I. E.* Numerical and analytical methods of study of stochastic systems with delay// J. Math. Sci. — 2018. — 230, № 5. — P. 746–750.
17. *Poloskov I. E.* New scheme for estimation of the first and senior moment functions for the response of linear delay differential system excited by additive and multiplicative noises// J. Math. Sci. — 2020. — 246, № 4. — P. 525–539.
18. *Shakourifar M., Enright W. H.* Reliable approximate solution of systems of Volterra integro-differential equations with time-dependent delays// SIAM J. Sci. Comput. — 2011. — 33, № 3. — P. 1134–1158.
19. *Zhang Ch.* A class of new Pouzet–Runge–Kutta type methods for nonlinear functional integrodifferential equations// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — P. 21.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Полосков Игорь Егорович

Пермский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: poloskov@psu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 56–74  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-56-74

УДК 517.984.3, 517.983.26

## СЛЕД, ДЕТЕРМИНАНТ И СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ЯДЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2024 г. О. И. РЕЙНОВ

**Аннотация.** Показано, как новые результаты в теории детерминантов и следов, а также в теории квазинормированных тензорных произведений могут быть применены для получения новых теорем о распределении собственных чисел ядерных операторов в банаховых пространствах и о совпадении спектральных и ядерных следов таких операторов. В качестве примеров рассматриваются новые классы операторов — обобщенные ядерные операторы Лоренца—Лапестре  $N_{(r,s),p}$ .

**Ключевые слова:** ядерный оператор, след, детерминант, собственное число, квазинорма, тензорное произведение.

## TRACE, DETERMINANT AND EIGENVALUES OF KERNEL OPERATORS

© 2024 O. I. REINOV

**ABSTRACT.** In this paper, we show how new results in the theory of determinants and traces and in the theory of quasi-normed tensor products can be applied for obtaining new theorems on the distribution of eigenvalues of nuclear operators in Banach spaces and on the coincidence of the spectral and nuclear traces of such operators. As examples, we consider new classes of operators — generalized nuclear Lorentz–LaPreste operators  $N_{(r,s),p}$ .

**Keywords and phrases:** kernel operator, trace, determinant, eigenvalue, quasinorm, tensor product.

**AMS Subject Classification:** 47B10, 47A75

**1. Введение.** В 1950-х В. Б. Лидский [2] и А. Гротендик [5] независимо получили знаменитые формулы следа для некоторых классов ядерных операторов (В. Б. Лидский — в гильбертовых пространствах  $H$ , А. Гротендик — в общих банаховых пространствах  $X$ ): *ядерный след соответствующего оператора равен его спектральному следу*. Напомним, что к классу ядерных операторов в  $X$  принадлежат операторы  $T : X \rightarrow X$ , которые допускают представления вида

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k(x) x_k, \quad x \in X,$$

где числа  $\lambda_k$ , функционалы  $x'_k \in X^*$  и элементы  $x \in X$  удовлетворяют некоторым условиям суммируемости (при этом  $\sum |\lambda_k| < \infty$ ).

Напомним некоторые факты конечномерной теории. Для всякого конечномерного оператора

$$T : X \rightarrow X, \quad Tx = \sum_{k=1}^N x'_k \otimes x_k$$

ядерный след  $\text{tr } T := \sum_{k=1}^N x'_k(x_k)$  вполне определен и не зависит от представления  $T$ . Также вполне определен детерминант оператора  $1 - T$ :

$$\det(1 - T) = \prod_j (1 - \mu_j),$$

где  $(\mu_j)$  — полный набор собственных чисел оператора  $T$ . В этом случае, естественно, имеем формулу следа

$$\text{tr } T = \sum_j \mu_j.$$

Для получения формулы в случае ядерных операторов надо научиться продолжать функционалы «след» и «детерминант» с множества конечномерных операторов на соответствующие пространства ядерных операторов. Такое продолжение, в частности, — цель работы. Доказательства основных теорем о спектральных свойствах ядерных операторов основано как раз на возможности этих продолжений.

**2. Предварительные сведения.** Вся терминология и факты (в настоящее время классические), приводимые здесь без каких-либо объяснений, могут быть найдены в [4, 5, 13, 14].

Пусть  $X, Y$  — банаховы пространства. Для банахова пространства, сопряженного к  $X$ , используем обозначение  $X^*$ . Если  $x \in X$  и  $x' \in X^*$ , то используем обозначение  $\langle x', x \rangle$  для  $x'(x)$ .

Обозначим через  $X^* \widehat{\otimes} Y$  пополнение тензорного произведения  $X^* \otimes Y$  (рассматриваемого как линейное пространство всех конечномерных операторов из  $X$  в  $Y$ ) по норме

$$\|w\| := \inf \left\{ \left( \sum_{k=1}^N \|x'_k\| \|y_k\| \right) : w = \sum_{k=1}^N x'_k \otimes y_k \right\}$$

(см., например, [5, 14]). Для  $X = Y$ , естественный непрерывный линейный функционал «trace» на  $X^* \otimes X$  имеет единственное непрерывное продолжение на пространство  $X^* \widehat{\otimes} X$ , которое также будем обозначать «trace».

Обозначим через  $N(X, Y)$  образ тензорного произведения  $X^* \widehat{\otimes} Y$  в пространстве  $L(X, Y)$  всех ограниченных линейных отображений при каноническом фактор-отображении  $X^* \widehat{\otimes} Y \rightarrow N(X, Y) \subset L(X, Y)$ . Рассмотрим (гротендииковское) пространство  $N(X, Y)$  всех ядерных операторов из  $X$  в  $Y$  с естественной нормой, индуцированной из  $X^* \widehat{\otimes} Y$ . Для тензорного элемента  $u \in X^* \widehat{\otimes} Y$  обозначим через  $\tilde{u}$  соответствующий ядерный оператор из  $X$  в  $Y$ . Иногда норму проективного тензорного произведения обозначают через  $\pi$ , а инъективную норму (т.е. норму, индуцированную обычной операторной нормой) — через  $\varepsilon$ . Поэтому, например,  $X^* \widehat{\otimes}_\pi Y = X^* \widehat{\otimes} Y$  и  $X^* \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$  — замыкание множества конечномерных операторов в  $L(X, Y)$ .

Примеры ядерных операторов (о квазинормах см. информацию ниже). Напомним их общий вид:

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k(x) x_k, \quad x \in X,$$

Например, если  $0 < s \leq 1$ ,  $\sum |\lambda_k|^s < \infty$  и  $\{x'_k\}, \{x_k\}$  ограничены, то  $T \in N_s(X)$  ( $s$ -ядерный оператор с естественной квазинормой).

Более общо, если  $(\lambda_k) \in l_{s,u}$ ,  $0 < u \leq 1$  (пространство Лоренца), то  $T \in N_{s,u}(X)$  ( $l_{s,u}$ -ядерный оператор с естественной квазинормой).

Если  $0 < r \leq 1$ ,  $1 \leq p \leq 2$ ,  $(\lambda_k) \in l_r$ , т.е.  $\sum |\lambda_k|^r < \infty$ ,  $\{x'_k\}$  ограничена и  $(x_k) \in l_p^w(X)$  (см. ниже), т.е. для всякого  $x' \in X^*$  ряд  $\sum |x'(x_k)|^p$  сходится, то  $T \in N_{r,p}(X)$  ( $(r, p)$ -ядерный с естественной квазинормой).

*Ядерный след* оператора  $T$  определяется как сумма ряда:

$$\text{tr } T := \sum \lambda_k x'_k(x_k),$$

*спектральный след* оператора  $T$  — как сумма  $\sum \mu_n$ , где  $\{\mu_n\}$  — последовательность всех собственных чисел  $T$ .

Ядерный след определен не для каждого ядерного оператора. В условиях теоремы Лидского он определен всегда, а в условиях теоремы Гротендика — для случая, когда  $\sum |\lambda_k|^{2/3} < \infty$ .

Напомним общий вид проективного тензорного элемента:

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y'_k \otimes x_k \in Y^* \widehat{\otimes} X$$

Сопряженное к  $Y^* \widehat{\otimes} X$  пространство есть  $L(X, Y^{**})$ . Двойственность задается следом.

Рассмотрим функционал  $\tilde{T} \in (Y^* \widehat{\otimes} X)^*$ , определяемый оператором  $T \in L(X, Y^{**})$ . Имеем:

$$\langle \tilde{T}, z \rangle := \text{tr } T \circ z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T x_k(y'_k), \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y'_k \otimes x_k \in Y^* \widehat{\otimes} X.$$

Для  $q \in (0, +\infty]$  обозначим через  $l_q^w(X)$  пространство всех слабо  $q$ -суммируемых последовательностей  $(x_i) \subset X$  (см., например, [13, 14]) с квазинормой

$$\varepsilon_q((x_i)) := \sup \left\{ \left( \sum_i |\langle x', x_i \rangle|^q \right)^{1/q} : x' \in X^*, \|x'\| \leq 1 \right\}$$

(в случае, когда  $q = \infty$ , предполагаем, что  $(x_i)$  — просто ограниченная, т.е.  $\varepsilon_\infty((x_i)) = \sup_i \|x_i\|$ ).

Пространство Лоренца  $l_{p,q}$  ( $0 < p < \infty$ ,  $0 \leq \infty$ ) состоит из последовательностей  $\alpha := (\alpha_n) \in c_0$ , для которых

$$\|\alpha\|_{p,q} := \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^* n^{q/p-1} \right)^{1/q} < +\infty \text{ при } q < \infty; \quad \|\alpha\|_{p,\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^* n^{1/p} < +\infty,$$

где  $(\alpha_n^*)$  — неубывающая перестановка последовательности  $\alpha$ ,  $n$ -й элемент  $\alpha_n^*$  которой определяется так:

$$\alpha_n^* := \inf_{|J| < n} \sup_{j \notin J} |\alpha_j|.$$

С указанными квазинормами пространства  $l_{p,q}$  являются полными квазинормированными пространствами. При  $p = q < \infty$  получаем пространство  $l_p$ .

Введем еще несколько стандартных обозначений:  $l_p(X)$  — пространство абсолютно суммируемых последовательностей из  $X$ ,  $L(X) := L(X, X)$ ,  $\Pi_p$  — идеалы абсолютно  $p$ -суммирующих операторов,  $N_s$  (для  $s \in (0, 1]$ ) — квазинормированный идеал  $s$ -ядерных операторов (см. ниже более общее определение операторов из квазинормированного идеала  $N_{r,p}$ ). Норма в банаховом пространстве  $X$  обозначается обычно просто  $\|\cdot\|$ , но если необходимо подчеркнуть, в каком пространстве берется норма, то мы пишем  $\|\cdot\|_X$ . Для последовательностей элементов некоторого множества используются обозначения типа  $(x_k)$ ,  $(x_k)_k$ ,  $(x_k)_{k=1}^\infty$ ,  $\{x_k\}$  и т. д.

Понятие детерминанта (Фредгольма) появится в своем месте. Отметим только, что для элемента  $u \in X^* \widehat{\otimes} X$  его детерминант Фредгольма есть целая функция

$$\det(1 - zu) = 1 - \text{tr } uz + \dots$$

с нулями, равными  $1/\mu_k(\tilde{u})$ , — обратным к ненулевым собственным значениям (каждое взятое с учетом кратности) оператора  $\tilde{u}$  (см. [5]).

### 3. Основные определения и факты.

3.1. *Квазинормы и операторные идеалы.* Наше определение квазинормы несколько нестандартно. Пусть  $\alpha$  — функция на некотором векторном пространстве  $E$ ,  $\alpha : E \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ . Будем говорить, что  $\alpha$  — *квазинорма* на  $E$ , если выполнены следующие условия:

- (i)  $\alpha(E) \subset [0, +\infty]$  и  $\alpha(x) = 0$  влечет  $x = 0$ ;
- (ii) существует такая постоянная  $C > 0$ , что  $\alpha(x + y) \leq C[\alpha(x) + \alpha(y)]$  для  $x, y \in E$ ;
- (iii)  $\alpha(ax) = |a|\alpha(x)$  для  $a \in \mathbb{K}$ ,  $x \in E$ .

**Определение 3.1.** Пусть дана пара  $(E, \alpha)$ , где  $\alpha$  — квазинорма на векторном пространстве  $E$ .

(i) *Квазинормированным пространством, ассоциированным с парой  $(E, \alpha)$* , называется квазинормированное векторное пространство

$$E_\alpha := \{x \in E : \alpha(x) < \infty\}.$$

(ii) Квазинормированное пространство  $E_\alpha$  называется *полным* (или квазибанаховым пространством), если каждая последовательность Коши в  $E_\alpha$   $\alpha$ -сходится к некоторому элементу из  $E_\alpha$ .

Отметим, что  $E_\alpha$  является квазинормированным пространством в смысле книги [10, с. 159]; мы можем рассматривать соответствующую топологию (см. [10, с. 159-160], [3, с. 445]).

**Замечание 3.1.**

1. Вполне может быть, что выполняется равенство  $E_\alpha = E$ .
2. Хорошо известно (см. [3, с. 445]), что если  $E_\alpha$  — квазинормированное пространство, то существует число  $\beta \in (0, 1]$  и  $\beta$ -норма  $\|\cdot\|$  на  $E_\alpha$ , эквивалентная квазинорме  $\alpha$ . Напомним, что  $\beta$ -норма на векторном пространстве  $F$  это квазинорма  $\|\cdot\| : F \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой при всех  $x, y \in F$  выполняется следующее  $\beta$ -неравенство треугольника  $\|x + y\|^\beta \leq \|x\|^\beta + \|y\|^\beta$ .

Напомним, что операторный идеал  $\mathbb{A} := (A(X, Y) : X, Y \text{ — банаховы пространства})$  есть подкласс класса всех линейных ограниченных операторов, компоненты  $A(X, Y) \subset L(X, Y)$  которого удовлетворяют следующим условиям:

- (O<sub>i</sub>)  $1_K \in \mathbb{A}$ , где  $K$  обозначает одномерное банахово пространство;
- (O<sub>ii</sub>) если  $U, V \in A(X, Y)$ , то  $a_1 U + a_2 V \in A(X, Y)$  для всех скалярных  $a_1, a_2$ ;
- (O<sub>iii</sub>) если  $S \in L(Z, X)$ ,  $U \in A(X, Y)$  и  $T \in L(Y, W)$ , то  $TUS \in A(Z, W)$ .

Операторный идеал  $\mathbb{A}$  называется квазинормированным, если на нем определен класс  $a$  квазинорм (обозначим их снова  $a$ ), которые на компонентах являются квазинормами, обладающими следующими свойствами:

- (O<sub>iv</sub>)  $a(1_K) = 1$ ;
- (O<sub>v</sub>) если  $S \in L(Z, X)$ ,  $U \in A(X, Y)$  и  $T \in L(Y, W)$ , то  $a(TUS) \leq \|T\| a(U) \|S\|$ .

**3.2. Проективные квазинормы и свойства аппроксимации.** Пусть  $\alpha$  — такая квазинорма на проективном тензорном произведении  $X \widehat{\otimes} Y$ , что  $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$  для  $x \in X, y \in Y$ . Ассоциированное квазинормированное тензорное произведение (которое мы будем обозначать через  $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$  и называть  $\alpha$ -проективным тензорным произведением) является  $\alpha$ -замыканием алгебраического тензорного произведения  $X \otimes Y$  в  $(X \widehat{\otimes} Y)_\alpha$  (в конкретных случаях будем использовать некоторые специфические обозначения). Таким образом,

$$X \widehat{\otimes}_\alpha Y := \left\{ u \in X \widehat{\otimes} Y : \alpha(u) < \infty, \exists (u_n) \subset X \otimes Y : \alpha(u - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

**Определение 3.2.**

- I. Пусть  $\widehat{\otimes}$  обозначает класс всех тензорных элементов проективных тензорных произведений произвольных банаховых пространств. Проективная тензорная квазинорма  $\alpha$  — такое отображение из  $\widehat{\otimes}$  в  $\mathbb{R}$ , что  $\alpha$  является квазинормой на каждой компоненте  $X \widehat{\otimes} Y$ , обладающей следующими свойствами:
  - (Q<sub>1</sub>)  $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$  для  $x \in X, y \in Y$ ;
  - (Q<sub>2</sub>) существует такая постоянная  $C > 0$ , что  $\alpha(u_1 + u_2) \leq C[\alpha(u_1) + \alpha(u_2)]$  для всех  $X, Y$  и  $u_1, u_2 \in X \widehat{\otimes} Y$ ;
  - (Q<sub>3</sub>) если  $u \in X \widehat{\otimes} Y$ ,  $A \in L(X, E)$  и  $B \in L(Y, F)$ , то  $\alpha(A \otimes B(u)) \leq \|A\| \alpha(u) \|B\|$ .
  - (Q<sub>4</sub>) для всех  $X, Y$  тензорное произведение  $X \otimes Y$  плотно в  $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ .
- II. Проективная тензорная норма  $\alpha$  называется *полной*, если каждое  $\alpha$ -проективное тензорное произведение  $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$  является полным, т.е. квази-банаховым.

Для каждой проективной тензорной квазинормы  $\alpha$  существуют такие  $\beta \in (0, 1]$  и эквивалентная  $\beta$ -норма  $\|\cdot\|_\beta$  на  $\widehat{\otimes}$ , что  $X \widehat{\otimes}_\alpha Y = X \widehat{\otimes}_{\|\cdot\|_\beta} Y$  (т.е. существует такая квазинорма  $\|\cdot\|_\beta$  с  $\beta$ -неравенством треугольника, что для некоторых положительных постоянных  $C_1, C_2$  и для всех проективных тензорных элементов  $u$  выполняются неравенства  $C_1\alpha(u) \leq \|u\|_\beta \leq C_2\alpha(u)$ ). Таким образом, можем предполагать, если нужно, что а priori  $\alpha$  есть  $\beta$ -норма.

Мы не будем здесь рассматривать детально свойства введенных объектов. Однако нам понадобится ниже тот факт, что отображение включения  $X \widehat{\otimes}_\alpha Y \hookrightarrow X \widehat{\otimes} Y$  непрерывно для всех банаховых пространств  $X, Y$  (в основных примерах 3.1 ниже это будет автоматически выполнено). Доказательство можно найти в работе автора [19, Proposition 4.1].

Так как  $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$  — линейное подпространство в  $X \widehat{\otimes} Y$ , то пространство  $L(Y, X^*)$  разделяет точки  $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ . Если  $u \in X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ , то  $u = 0$  тогда и только тогда, когда  $\text{trase } U \circ u = 0$  для каждого  $U \in L(Y, X^*)$ . В частности, сопряженное пространство к  $(X \widehat{\otimes}_\alpha Y)^*$  разделяет точки  $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ .

Ясно, что каждый тензорный элемент  $u \in X \widehat{\otimes}_\alpha Y$  порождает ядерный оператор  $\tilde{u} : X^* \rightarrow Y$ . Если  $X$  является сопряженным пространством, скажем  $E^*$ , то получаем каноническое отображение  $j_\alpha : E^* \widehat{\otimes}_\alpha Y \rightarrow L(E, Y)$ . Обозначим через  $N_\alpha(E, Y)$  образ отображения  $j_\alpha$  и снабдим его « $\alpha$ -ядерной» квазинормой  $\nu_\alpha$ : это квазинорма, индуцированная из  $E^* \widehat{\otimes}_\alpha Y$  фактор-отображением  $E^* \widehat{\otimes}_\alpha Y \rightarrow N_\alpha(E, Y)$ . Если проективная тензорная квазинорма  $\alpha$  полна, то  $N_\alpha(E, Y)$  является квази-банаховым пространством, а  $N_\alpha$  — квази-банахов операторный идеал.

**Определение 3.3.** Пусть  $\alpha$  — полная проективная тензорная квазинорма. Говорят, что банахово пространство  $X$  обладает свойством аппроксимации  $AP_\alpha$ , если для любого банахова пространства  $E$  каноническое отображение  $E^* \widehat{\otimes}_\alpha X \rightarrow N_\alpha(E, X)$  взаимно однозначно (другими словами, если  $E^* \widehat{\otimes}_\alpha X = N_\alpha(E, X)$ ).

Заметим, что если  $\alpha = \|\cdot\|_\wedge$ , то получаем классическое свойство аппроксимации  $AP$  А. Гротендика (см. [5]). Должно быть понятно, что  $AP$  влечет  $AP_\alpha$  для любой проективной тензорной квазинормы.

Ниже нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 3.1.** *Банахово пространство  $X$  имеет свойство  $AP_\alpha$  тогда и только тогда, когда каноническое отображение  $X^* \widehat{\otimes}_\alpha X \rightarrow L(X)$  взаимно однозначно.*

Доказательство леммы 3.1 дословно повторяет доказательство предложения 6.1 из [19].

**Пример 3.1.** Пусть  $0 < r, s \leq 1, 0 < p, q \leq \infty$  и  $1/r + 1/p + 1/q = 1/\beta \geq 1$ . Определим тензорное произведение  $X \widehat{\otimes}_{r,p,q} Y$  как линейное подпространство проективного тензорного произведения  $X \widehat{\otimes} Y$ , состоящее из всех тензорных элементов  $z$ , которые допускают представления вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \otimes y_k, \quad (\alpha_k) \in l_r, \quad (x_k) \in l_{w,p}(X), \quad (y_k) \in l_{w,q}(Y);$$

мы снабжаем его квазинормой

$$\|z\|_{r,p,q} := \inf \|(\alpha_k)\|_r \| (x_k) \|_{w,p} \| (y_k) \|_{w,q},$$

где инфимум берется по всем представлениям  $z$  в указанной выше форме. Отметим, что это тензорное произведение  $\beta$ -нормировано (см. [11], где рассмотрена версия рассматриваемого тензорного произведения как пополнение алгебраического тензорного произведения по соответствующей «конечной»  $\|\cdot\|_{r,p,q}$ -квазинорме). Оно квази-банахово (о его полноте см. [15]). Соответствующий квазинормированный операторный идеал  $N_{r,p,q}$  есть квази-банахов идеал  $(r, p, q)$ -ядерных операторов (см. [11, 13]). В частных случаях, когда один или два из показателей  $p, q$  равны  $\infty$ , мы используем обозначения, близкие к аналогичным обозначениям из [17, 19] (с заменой  $p', q'$  на  $p, q$ ):  $N_{r,\infty,\infty}$  через  $N_r$ ,  $N_{r,\infty,q}$  через  $N_{[r,q]}$ ,  $N_{r,p,\infty}$  через  $N^{[r,p]}$ ,  $\widehat{\otimes}_{r,\infty,\infty}$  через  $\widehat{\otimes}_r$ ,  $\widehat{\otimes}_{r,\infty,q}$  через  $\widehat{\otimes}_{[r,q]}$ ,  $\widehat{\otimes}_{r,p,\infty}$  через  $\widehat{\otimes}^{[r,p]}$ . Соответствующие обозначения используем также для свойств  $AP_{r,p,q}$ :

- (i) для  $p = q = \infty$  получаем  $AP_r$  из [19];
- (ii) для  $p = \infty$  получаем  $AP_{[r,q]}$  из [17, 19];

(iii) для  $q = \infty$  получаем  $AP^{[r,p]}$  из [17, 19].

Нам понадобятся некоторые факты о свойствах аппроксимации из примера 3.1. Соберем их в следующей лемме.

**Лемма 3.2.**

- (1) [см. [18, Corollary 10]]. Пусть  $s \in (0, 1]$ ,  $p \in [1, \infty]$  и  $1/s = 1 + |1/p - 1/2|$ . Если банахово пространство изоморфно подпространству фактор-пространства (или фактор-пространству подпространства) некоторого  $L_p$ -пространства, то оно имеет свойство  $AP_s$ .
- (2) [см. [17, Corollary 4.1], [19, Theorem 7.1]]. Пусть  $1/r - 1/p = 1/2$ . Каждое банахово пространство обладает свойствами  $AP_{[r,p]}$  и  $AP^{[r,p]}$ .

Доказательство утверждения 2 см. ниже (пример 3.3; см. также [19] для других результатов в этом направлении).

**Замечание 3.2.** По существу доказательство того, что каждое банахово пространство имеет свойство  $AP^{[1,2]}$  явно содержится в [13]. Там получено, что это утверждение (после применения некоторых фактов из комплексного анализа) влечет формулы типа формул Гротендика—Лидского для операторов из  $N^{[1,2]}$  (см. [13, 27.4.11]; это влечет формулу Лидского для  $\text{trase}$ -класса операторов в гильбертовых пространствах и также формулу следа Гротендика для  $N_{2/3}$ ). С другой стороны, существует весьма простой способ получить эти результаты о свойствах  $AP^{[1,2]}$  и  $N^{[1,2]}$  из теоремы Лидского (см. доказательства теорем [19, Theorems 7.1-7.3] для  $p = 2$ ).

*3.3. Факторизация через прямые суммы.* Ниже  $X, Y$  — произвольные банаховы пространства.

Напомним, что последовательность  $(x_k)$  элементов из  $X$  называется безусловным базисом, если каждый  $x \in X$  единственным образом разлагается в ряд  $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$  и этот ряд безусловно сходится (сходится при любой перестановке ряда). Это эквивалентно тому, что существует такая постоянная  $K \geq 1$ , что для любого выбора знаков  $(t_k) = (\pm 1)$  выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k a_k x_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\|.$$

Безусловная константа базиса  $(x_k)$  есть  $ub(x_k) := \inf K$ . Таким образом, 1-безусловный базис — это базис, для которого  $\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k a_k x_k \right\|$  для всякого  $x \in X$  при любом выборе знаков  $(t_k)$ .

Базис нормирован, если все его элементы имеют единичную норму.

Если  $(x_k)$  — безусловный базис и  $\sigma$  — подмножество множества натуральных чисел, то естественный проектор  $P_\sigma : X \rightarrow X$ , определяемый формулой

$$P_\sigma(x) := \sum_{k \in \sigma} a_k x_k,$$

ограничен и  $\|p_\sigma\| \leq ub(x_k)$  (см., например, [12, с. 18]).

Напомним определение прямой суммы банаховых пространств. Пусть  $E$  — банахово пространство с 1-безусловным нормированным базисом  $(e_k)$  и  $(X_i)$  — последовательность банаховых пространств. *Прямой суммой* этих пространств по типу  $E$  называется банахово пространство  $\left( \sum X_i \right)_E$ , состоящее из последовательностей  $(x_i)$ ,  $x_i \in X_i$ , для которых конечна норма

$$\|(x_i)\| := \left\| \sum_i \|x_i\| e_i \right\|_E.$$

Пространство  $\left( \sum X_i \right)_E$  обладает следующими важными свойствами:

- ( $u_1$ ) Каждое пространство  $X_n$  естественным образом изометрически вкладывается в  $\left( \sum X_i \right)_E$  и его образ 1-дополняем там, т.е. существует (естественный) непрерывный проектор из

$\left(\sum X_i\right)_E$  на образ  $X_n$  и норма этого проектора равна 1. Более того, то же верно, если вместо одного пространства  $X_n$  рассмотреть конечную прямую сумму  $\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)_E$  и соответствующий проектор  $P_n$ .<sup>1</sup>

( $u_2$ ) Если в каждой из изометрических копий пространств  $X_i$  взять по элементу  $x_i$  единичной нормы, то полученная последовательность  $(x_i)$  будет образовывать последовательность, эквивалентную базису  $(e_i)$ .

Заметим, что определить понятие прямой суммы («по базису») с теми же хорошими свойствами для пространств в базисах более слабых типов (например, условного) затруднительно (цитата из [1]: как ни определяй понятие прямой суммы бесконечномерных пространств  $X_i$  по последовательности  $(e_i)$ , не являющейся безусловной базисной последовательностью, свойство ( $u_2$ ) прямой суммы не будет выполнено ни в каком смысле).

Ниже, говоря о прямых суммах пространств, будем подразумевать (если не задан явно тип суммы), что рассматриваемая сумма берется по типу  $E$  для некоторого пространства  $E$  с 1-безусловным базисом.

Пусть  $\mathbb{Z} := (Z_\alpha)$  — семейство банаховых пространств, которое с каждой парой пространств  $Z_1, Z_2$  содержит и их прямую сумму  $Z_1 \oplus Z_2$ . Обозначим через  $\Gamma_{\mathbb{Z}}$  совокупность всех операторов, которые факторизуются через пространство из  $\mathbb{Z}$ :  $T \in \Gamma_{\mathbb{Z}}(X, Y)$  тогда и только тогда, когда существуют пространство  $Z \in \mathbb{Z}$  и такие операторы  $A \in L(X, Z)$  и  $B \in L(Z, Y)$ , что  $T = BA$ :  $X \xrightarrow{A} Z \xrightarrow{B} Y$ . Пространство  $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X, Y)$  нормировано с нормой

$$\gamma_{\mathbb{Z}}(T) := \inf \left\{ \|A\| \|B\| : \exists Z \in \mathbb{Z}, A \in L(X, Z), B \in L(Z, Y); T = BA \right\},$$

а  $(\Gamma_{\mathbb{Z}}, \gamma_{\mathbb{Z}})$  — нормированный операторный идеал. Действительно, пусть  $1_K$  — тождественный оператор в одномерном пространстве  $K$  и  $Z \in \mathbb{Z}$ . Далее, пусть  $j : K \rightarrow Z$  — какое-либо изометрическое вложение. Продолжим отображение (линейный функционал)  $1_K j^{-1} : j(K) \rightarrow K$  с подпространства  $j(K) \subset Z$  на все  $Z$  до отображения  $J : Z \rightarrow K$  с сохранением нормы. Ясно, что  $1_K = Jj : K \rightarrow Z \rightarrow K$ ,  $\gamma_{\mathbb{Z}}(1_K) = 1$ . Таким образом, выполнены условия ( $O_i$ ) и ( $O_{iv}$ ).

Проверим линейность (условие ( $O_{ii}$ )). Для  $U, V \in \Gamma_{\mathbb{Z}}(X, Y)$  пусть  $U = B_1 A_1$  и  $V = B_2 A_2$  — факторизации этих операторов через пространства  $Z_1$  и через  $Z_2$  из  $\mathbb{Z}$  соответственно. Рассмотрим прямую сумму  $Z := Z_1 \oplus Z_2$ , обозначив через  $j_k$  и  $P_k$  естественные изометрические вложения  $Z_k \rightarrow Z$  и проекторы  $Z \rightarrow Z_k$ ,  $k = 1, 2$ , соответственно (так что  $P_k j_k = 1_{Z_k}$  и  $P_1 j_2 = P_2 j_1 = 0$ ). Положим

$$A(\cdot) := (j_1 A_1(\cdot), j_2 A_2(\cdot)) : X \rightarrow Z = Z_1 \oplus Z_2, \quad B(\cdot) := B_1 P_1(\cdot) + B_2 P_2(\cdot) : Z = Z_1 \oplus Z_2 \rightarrow Y.$$

Для  $x \in X$  имеем:

$$BAx = B(j_1 A_1 x, j_2 A_2 x) = (B_1 P_1 + B_2 P_2)(j_1 A_1 x, j_2 A_2 x) = B_1 A_1 x + B_2 A_2 x = Ux + Vx,$$

т.е.  $U + V \in \Gamma_{\mathbb{Z}}(X, Y)$ , причем ясно, что

$$\gamma_{\mathbb{Z}}(U + V) \leq \gamma_{\mathbb{Z}}(U) + \gamma_{\mathbb{Z}}(V).$$

Мультипликативность из условия ( $O_{ii}$ ) очевидна, так же как и ясно выполнение условий ( $O_{iii}$ ) и ( $O_v$ ).

Для полноты операторного идеала нужна сходимостъ соответствующих рядов. Поэтому обратимся к частному случаю рассмотренного только что идеала («подидеалу»).

Пусть теперь  $\mathbb{Z} := (Z_\alpha)$  — семейство банаховых пространств, замкнутое относительно взятия не более чем счетных прямых сумм (напомним, что надо фиксировать банахово пространство с

<sup>1</sup> Действительно,

$$\left\| P_n(x_i)_{i=1}^\infty \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \|x_i\| e_i \right\|_E \leq \left\| \sum_{i=1}^\infty \|x_i\| e_i \right\|_E$$

согласно замечаниям выше.



1-безусловным базисом  $E$  и говорить о прямых  $E$ -суммах). Рассмотрим снова идеал  $\Gamma_{\mathbb{Z}}$  операторов, которые факторизуются через пространство из  $\mathbb{Z}$  с нормой, описанной выше. Пространство  $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X, Y)$  банахово, а  $(\Gamma_{\mathbb{Z}}, \gamma_{\mathbb{Z}})$  — банахов нормированный операторный идеал. Действительно, надо лишь установить полноту идеала. Для этого мы фиксируем  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{\mathbb{Z}}(T_k) < \infty,$$

где  $T_k := B_k A_k \in \Gamma_{\mathbb{Z}}(X, Y)$ ,  $A_k : X \rightarrow Z_k$  и  $B_k : Z_k \rightarrow Y$  для некоторых пространств  $Z_k \in \mathbb{Z}$ . Будем считать, что

$$\|A_k\| \leq (1 + \varepsilon) \gamma_{\mathbb{Z}}(T_k)^{1/2}, \quad \|B_k\| \leq (1 + \varepsilon) \gamma_{\mathbb{Z}}(T_k)^{1/2}.$$

Покажем, что ряд  $\sum T_k$  сходится в  $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X, Y)$ .

Положим  $Z := \left( \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \right)_E \in \mathbb{Z}$ . Для каждого  $k$  пусть  $j_k$  и  $P_k$  — такие изометрическое вложение  $Z_k \rightarrow Z$  и проектор  $Z \rightarrow Z_k$ , что  $1_{Z_k} = P_k j_k$ ,  $\|P_k\| = 1$  (ср. с тем, как подобное было проделано выше). Определим операторы  $A : X \rightarrow Z$  и  $B : Z \rightarrow Y$  равенствами

$$A := \sum_{k=1}^{\infty} j_k A_k, \quad B := \sum_{k=1}^{\infty} B_k P_k.$$

Так как

$$\sum \|j_k A_k\| \leq \sum (1 + \varepsilon) \gamma_{\mathbb{Z}}(T_k)^{1/2}, \quad \sum \|B_k P_k\| \leq \sum (1 + \varepsilon) \gamma_{\mathbb{Z}}(T_k)^{1/2},$$

то эти операторы вполне определены, причем

$$\|BA\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} B_k P_k j_k A_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} B_k A_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|B_k\| \|A_k\| \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{\mathbb{Z}}(T_k).$$

Отсюда заключаем, что  $T = BA = \sum T_k$ , т.е. наш ряд сходится в  $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X, Y)$  и, следовательно, пространство  $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X, Y)$  полно.

**3.4. Спектральный тип.** Пусть  $T$  — оператор в  $X$ , все ненулевые собственные значения которого суть собственные числа конечной (алгебраической) кратности и которые не имеют предельных точек, кроме, быть может, нуля. Положим

$$\lambda(T) = \{\lambda - \text{собственное значение } T\} \setminus \{0\}$$

(собственные числа  $T$  берутся в соответствии с их алгебраической кратностью). Будем говорить, что оператор  $T \in L(X, X)$  имеет *спектральный тип*  $l_{p,q}$ , если последовательность собственных чисел  $\lambda(T) := (\lambda_k(T))$  лежит в пространстве Лоренца  $l_{p,q}$ . Если  $T$  — спектрального типа  $l_1$ , то мы можем определить *спектральный след* оператора  $T$ :

$$\text{sp tr}(T) := \sum \lambda_k(T).$$

Говорим, что подпространство  $L_1(X, X) \subset L(X, X)$  имеет *спектральный тип*  $l_{p,q}$ , если каждый оператор  $T \in L_1(X, X)$  имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ . Напомним, что операторный идеал  $\mathfrak{A}$  имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ , если каждая его компонента  $\mathfrak{A}(X, X)$  имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ .

**Определение 3.4.** Пусть  $\alpha$  — проективная квазинорма. Тензорное произведение  $X \widehat{\otimes}_{\alpha} X$  имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ , если пространство  $N_{\alpha}(X, Y)$  есть пространство спектрального типа  $l_{p,q}$ . Проективная тензорная квазинорма  $\alpha$  (или тензорное произведение  $\widehat{\otimes}_{\alpha}$ ) имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ , если соответствующий операторный идеал  $N_{\alpha}$  имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ .

- Пример 3.2.** (i) Пространство  $N_1(H)$  ( $= N_{[1,2]}(H) = N^{[1,2]}(H) = S_1(H)$ ) (trace-класс операторов в гильбертовом пространстве) имеет спектральный тип  $l_1$  (см. [20]).  
(ii) Пространства  $\widehat{\otimes}_{2/3}$  и  $N_1 \circ N_1$  имеют спектральный тип  $l_1$  (см. [5]).  
(iii) Пространство  $N^{[1,2]}$  имеет спектральный тип  $l_1$  (см. [13, 27.4.9]).

- (iv) Пространство  $N_{[1,2]}$  имеет спектральный тип  $l_1$  (см. [19, Theorem 7.2,  $p = 2$ ]; это следует из предыдущего утверждения.
- (v) Более общо, если  $1/r - 1/p = 1/2$ , то  $\widehat{\otimes}_{[r,p]} = N_{[r,p]}$ ,  $\widehat{\otimes}^{[r,p]} = N^{[r,p]}$  и они имеют спектральный тип  $l_1$  (см. [19, Theorems 7.1-7.3]; простое доказательство будет дано ниже в примере 3.3).

Отметим, что во всех случаях примера 3.2 для соответствующих операторов (скажем,  $T$ ) верна формула следа:

$$\text{trace } T = \text{sp tr } T.$$

Общий результат в этом направлении — предложение 5.2. Следующее предложение — результат для частного случая, когда рассматривается семейство всех банаховых пространств; он является частным случаем предложения 5.2.

**Предложение 3.1.** Пусть  $\alpha$  — полная проективная квазинорма спектрального типа  $l_1$ . Для каждого банахова пространства  $X$  со свойством  $AP_\alpha$  и для любого  $T \in N_\alpha(X)$ , имеем  $\text{trace } T = \text{sp tr } T$ .

Иногда полезно следующее обращение предыдущего предложения (для произвольной квазинормы).

**Предложение 3.2.** Пусть  $\alpha$  — полная проективная квазинорма. Если для банахова пространства  $X$  и для всякого  $z \in X^* \widehat{\otimes}_\alpha X$  выполняется равенство  $\text{trace } z = \text{sp tr } \tilde{z}$ , то  $X$  обладает свойством  $AP_\alpha$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $X$  не обладает свойством  $AP_\alpha$ . Согласно лемме 3.1 найдется такой элемент  $z \in X^* \widehat{\otimes}_\alpha X$ , что  $\text{trace } z = 1$  и  $\tilde{z} = 0$ . По предположению  $\text{sp tr } \tilde{z} = \text{trace } z = 1$ ; противоречие.  $\square$

**Пример 3.3.** Пусть  $0 < r \leq 1$ ,  $1 \leq p \leq 2$ ,  $1/r = 1/2 + 1/p$ .

1. Если  $T \in N_{[r,p']}(X)$  (см. пример 3.1), то  $T$  допускает факторизацию

$$T = BA : X \xrightarrow{A} l_p \xrightarrow{B} X, \quad A \in N_r(X, l_p), \quad B \in L(l_p, X).$$

Полные системы собственных чисел операторов  $T = BA$  and  $AB$  совпадают. Но  $AB \in N_r(l_p, l_p)$ . Следовательно,  $AB$  (и, значит,  $T$ ) имеют спектральный тип  $l_1$ , как и всякий  $r$ -ядерный оператор в  $l_p$  (см. [8, Theorem 7]). Отсюда вытекает, что  $N_{[r,p']}$  имеет спектральный тип  $l_1$ . Легко видеть, что если  $z \in X^* \widehat{\otimes}_{[r,p']} X$  таков, что  $\tilde{z} = T$ , то  $\text{trace } z = \text{trace } AB$  (напомним, что  $l_p$  имеет свойство  $AP$ ). Но  $\text{trace } AB = \text{sp tr } AB$  (это установлено, например, в [16, 19], а также следует из предложения 3.1). Следовательно, для каждого  $z \in X^* \widehat{\otimes}_{[r,p']} X$  имеем  $\text{trace } z = \text{sp tr } \tilde{z}$ . Согласно предложению 3.2 каждое банахово пространство обладает свойством  $AP_{[r,p']}$  ( $= AP_{r,\infty,p'}$ ; см. пример 3.1). Таким образом утверждение 2 леммы 3.2 для случая  $AP_{[r,p']}$  доказано.

2. Если  $T \in N^{[r,p']}(X)$  (см. пример 3.1), то  $T$  допускает факторизацию

$$T = BA : X \xrightarrow{A} l_p \xrightarrow{B} X, \quad A \in L(X, l_p), \quad B \in N_r(l_p, X).$$

Как и в п. 1, видим, что для любого  $z \in X^* \widehat{\otimes}^{[r,p']} X$  имеем  $\text{trace } z = \text{sp tr } \tilde{z}$ . Далее, согласно предложению 3.2 каждое банахово пространство имеет свойство  $AP^{[r,p']}$  ( $= AP^{r,\infty,p'}$ ; см. пример 3.1). Таким образом, утверждение 2 леммы 3.2 для случая  $AP^{[r,p']}$  доказано.

Ниже нам понадобится следующий основной результат из [21]:

(W) Если  $J$  — квази-банахов операторный идеал спектрального типа  $l_1$ , то спектральная сумма является следом на этом идеале  $J$ .

Напомним (см. [21, определение 2.1]), что след на операторном идеале  $J$  — это класс комплекснозначных функций  $\tau$ , каждая из которых задана на компоненте  $J(E, E)$ , где  $E$  — произвольное банахово пространство, причем

- (i)  $\tau(e' \otimes e) = \langle e', e \rangle$  для всех  $e' \in E^*$ ,  $e \in E$ ;

- (ii)  $\tau(AU) = \tau(UA)$  для всех банаховых пространств  $E, F$  и операторов  $U \in J(E, F)$ ,  $A \in L(F, E)$ ;
- (iii)  $\tau(S + U) = \tau(S) + \tau(U)$  для всех  $S, U \in J(E, E)$ ;
- (iv)  $\tau(\lambda U) = \lambda\tau(U)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $U \in J(E, E)$ .

3.5. *Свойства  $\alpha$ -продолжения и  $\alpha$ -лифтинга.* Следующие определения и предложения понадобятся ниже. Впрочем, они представляют и самостоятельный интерес.

**Определение 3.5.** Пусть  $\alpha$  — полная проективная тензорная квазинорма. Банахово пространство  $X$  имеет свойство  $\alpha$ -продолжения, если для любого подпространства  $X_0 \subset X$  и для всякого тензорного элемента  $z_0 \in X_0^* \widehat{\otimes}_\alpha X_0$  существует продолжение  $z \in X^* \widehat{\otimes}_\alpha X_0$  (так что  $z \circ i = z_0$  и  $\text{trase } i \circ z = \text{trase } z_0$ , где  $i : X_0 \rightarrow X$  — естественное вложение). Банахово пространство  $X$  имеет свойство  $\alpha$ -лифтинга, если для всякого подпространства  $X_0 \subset X$  и для каждого тензорного элемента  $z_0 \in (X/X_0)^* \widehat{\otimes}_\alpha X/X_0$  существует лифтинг  $z \in (X/X_0)^* \widehat{\otimes}_\alpha X$  (так что  $Q \circ z = z_0$ , где  $Q$  — фактор-отображение из  $X$  на  $X/X_0$ , и  $\text{trase } z \circ Q = \text{trase } z_0$ ).

**Замечание 3.3.** Если  $X$  имеет свойство  $\alpha$ -продолжения, то и каждое его подпространство имеет свойство  $\alpha$ -продолжения. Если пространство  $X$  имеет свойство  $\alpha$ -лифтинга, то и каждое его фактор-пространство имеет свойство  $\alpha$ -лифтинга.

**Пример 3.4.** Каждое банахово пространство обладает свойствами  $\|\cdot\|_{r,\infty,q}$ -продолжения и  $\|\cdot\|_{r,p,\infty}$ -лифтинга (см. пример 3.1). Для тензорных произведений  $(\widehat{\otimes}_s, \|\cdot\|_{s,\infty,\infty})$ ,  $s \in (0, 1]$ , все банаховы пространства имеют как свойство  $\|\cdot\|_{s,\infty,\infty}$ -продолжения, так и свойство  $\|\cdot\|_{s,\infty,\infty}$ -лифтинга. Это следует из теорема Хана—Банаха и из определения банаховых фактор-пространств.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\alpha$  — полная проективная тензорная квазинорма и банахово пространство  $X$  имеет свойство  $\alpha$ -продолжения. Если  $N_\alpha(X)$  имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ , то всякое его подпространство также имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ .

*Доказательство.* Пусть  $X_0$  — подпространство в  $X$  и  $T \in N_\alpha(X_0, X_0)$ . Найдется элемент  $z_0 \in X_0^* \widehat{\otimes}_\alpha X_0$ , для которого  $\tilde{z}_0 = T$ . Согласно предположению существует продолжение  $z \in X^* \widehat{\otimes}_\alpha X_0$  (так что  $z \circ i = z_0$  и  $\text{trase } i \circ z = \text{trase } z_0$ , где  $i : X_0 \rightarrow X$  — естественное вложение). Рассмотрим диаграмму

$$i\tilde{z}i : X_0 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\tilde{z}} X_0 \xrightarrow{i} X.$$

Так как  $T = \tilde{z}_0 = \tilde{z}i$  и  $\tilde{z} \in N_\alpha(X, X_0)$ , то  $i\tilde{z} \in N_\alpha(X)$  и спектр  $\text{sp } i\tilde{z} \setminus \{0\} \in l_{p,q}$ . Но собственные числа оператора  $T$  (с учетом кратностей) те же, что и собственные числа оператора  $i\tilde{z}$ . Следовательно,  $T$  имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ .  $\square$

**Теорема 3.2.** Пусть  $\alpha$  — полная проективная тензорная квазинорма и банахово пространство  $X$  имеет свойство  $\alpha$ -лифтинга. Если  $N_\alpha(X)$  имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ , то всякое его фактор-пространство также имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ .

*Доказательство.* Возьмем подпространство  $X_0 \subset X$  и рассмотрим фактор-пространство  $X/X_0$ . Если  $T \in N_\alpha(X/X_0, X/X_0)$ , то найдется такой элемент  $z_0 \in (X/X_0)^* \widehat{\otimes}_\alpha X/X_0$ , что  $\tilde{z}_0 = T$ . Согласно предположению существует тензорный элемент  $z \in (X/X_0)^* \widehat{\otimes}_\alpha X$ , для которого  $Q \circ z = z_0$ , где  $Q$  — фактор-отображение из  $X$  на  $X/X_0$ . Рассмотрим диаграмму

$$Q\tilde{z}Q : X \xrightarrow{Q} X/X_0 \xrightarrow{\tilde{z}} X \xrightarrow{Q} X/X_0.$$

Так как  $T = \tilde{z}_0 = Q\tilde{z}$  и  $\tilde{z} \in N_\alpha(X, X_0)$ , то  $\tilde{z}Q \in N_\alpha(X)$  и спектр  $\text{sp } \tilde{z}Q \setminus \{0\} \in l_{p,q}$ . Но собственные числа оператора  $T$  (с учетом кратностей) те же, что и собственные числа оператора  $\tilde{z}Q$ . Следовательно,  $T$  имеет спектральный тип  $l_{p,q}$ .  $\square$

**4. Детерминант и след.** Нам понадобятся некоторые вспомогательные факты из теории следов и детерминантов. Ниже мы доказываем два из них; нам не удалось найти в литературе доказательства этих утверждений именно в том виде, в котором мы их применяем. Итак два предложения о непрерывности следа и о непрерывности детерминанта.

Напомним еще раз, что для всякого конечномерного оператора

$$T : X \rightarrow X, \quad Tx = \sum_{k=1}^N x'_k \otimes x_k$$

ядерный след  $\text{tr} T := \sum_{k=1}^N x'_k(x_k)$  вполне определен и не зависит от представления  $T$ . Также вполне определен детерминант оператора  $1 - T$ :

$$\det(1 - T) = \prod_j (1 - \mu_j),$$

где  $(\mu_j)$  — полный набор собственных чисел оператора  $T$ . В этом случае, естественно, имеем формулу следа

$$\text{tr} T = \sum_j \mu_j.$$

**Предложение 4.1.** Пусть  $A$  — квазинормированный операторный идеал,  $X$  — банахово пространство, для которого множество конечномерных операторов плотно в пространстве  $A(X)$ . Предположим, что стандартный функционал  $\text{tr}$  ограничен на подпространстве всех конечномерных операторов из  $A(X)$  ( $u$ , таким образом, может быть продолжен до непрерывного следа на все пространство  $A(X)$ ). Тогда соответствующий детерминант Фредгольма равномерно непрерывен (по  $A$ -квазинорме) на некотором  $A$ -шаре подпространства всех конечномерных операторов из  $A(X)$ . Более того, существуют такие постоянные  $r_0 \in (0, 1)$  и  $c_0 > 0$ , что для конечномерных  $u, v \in A(X)$  условия  $\|u\|_A \leq r_0$  и  $\|v\|_A \leq r_0$  влекут

$$|\det(1 - u) - \det(1 - v)| \leq c_0 \|u - v\|_A.$$

*Доказательство.* Без ограничения общности можем предполагать, что данная квазинорма в  $A$  является  $s$ -нормой, т.е. существует такое число  $s \in (0, 1]$ , что для любых  $x, y \in A$  выполняется неравенство  $\|x + y\|_A^s \leq \|x\|_A^s + \|y\|_A^s$  (см. [7, с. 1102]).

Обозначим через  $b$  такую постоянную, что  $|\text{tr} R| \leq b \|R\|_A$  для любого конечномерного оператора  $R$  из  $A$ . Пусть  $u, v$  — два конечномерных оператора из  $A$ , удовлетворяющие условиям  $\|u\|_A^s \leq r$  и  $\|v\|_A^s \leq r$ , где  $r > 0$  мало. Тогда (см., например, [4, теорема I.3.3] или [5]) для  $|z| \leq 1$

$$\det(1 - zu) = \exp \left( - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{tr}(u^n) z^n \right),$$

откуда

$$\begin{aligned} |\det(1 - u) - \det(1 - v)| &= \left| \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n} \right) \text{tr}(u^n) \right) - \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n} \right) \text{tr}(v^n) \right) \right| \leq \\ &\leq c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\text{tr}(u^n) - \text{tr}(v^n)| \leq c_1 b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \|u^n - v^n\|_A, \end{aligned}$$

для малых  $r > 0$ , где  $c_1$  — некоторая постоянная. Если  $q := \max\{\|u\|_A; \|v\|_A\}$ , то

$$\begin{aligned} \|u^n - v^n\|_A^s &\leq \|(u^{n-1} - v^{n-1})u\|_A^s + \|v^{n-1}(u - v)\|_A^s \leq \\ &\leq \|u\|_A^s \left[ \|(u^{n-2} - v^{n-2})u\|_A^s + \|v^{n-2}(u - v)\|_A^s \right] + \|v^{n-1}\|_A^s \|u - v\|_A^s \leq \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что в  $A$  имеет место соотношение  $\|HK\|_A \leq \|H\|_A \|K\|_A$  для любых  $H, K$ , так как  $\|K\|_L \leq \|K\|_A$ ); продолжаем неравенства:

$$\begin{aligned}
&\leq \left( q^{(n-1)s} \|u - v\|_A^s + q^s \cdot q^{s(n-2)} \|u - v\|_A^s \right) + q^{2s} \|u^{n-2} - v^{n-2}\| \leq \\
&\leq 2q^{s(n-1)} \|u - v\|_A^s + q^{2s} \left[ \|(u(n-3) - v^{n-3})u\|_A^s + \|v^{n-3}(u-v)\|_A^s \right] \leq \\
&\leq 3q^{s(n-1)} \|u - v\|_A^s + q^{3s} \|u^{n-3} - v^{n-3}\|_A^s \leq \dots \leq \\
&\leq (n-1)q^{s(n-1)} \|u - v\|_A^s + q^{s(n-1)} \|u - v\|_A^s = nq^{s(n-1)} \|u - v\|_A^s.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|u^n - v^n\|_A \leq n^{1/s} q^{s(n-1)} \|u - v\|_A.$$

Поэтому, если  $r \in (0, 1)$  достаточно мало и если  $\|u\|_A^s \leq r$  и  $\|v\|_A^s \leq r$ , то

$$|\det(1-u) - \det(1-v)| \leq c_1 b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \|u^n - v^n\|_A \leq c_1 b \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/s-1} r^{n-1} \|u - v\|_A = c_0 \|u - v\|_A. \quad \square$$

**Следствие 4.1.** В условиях предложения 3.1 функция  $\det(1-u)$  допускает непрерывное продолжение (по  $A$ -квазинорме) с подпространства всех конечномерных операторов из  $A(X)$  на все пространство  $A(X)$ .

*Доказательство.* Утверждение вытекает из равномерной непрерывности (по  $A$ -квазинорме) на некотором  $A$ -шаре подпространства всех конечномерных операторов из  $A(X)$ . Соответствующее доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения (см. [4, с. 28]).  $\square$

**Предложение 4.2.** Пусть  $A$  — квазинормированный операторный идеал,  $X$  — банахово пространство, для которого множество конечномерных операторов плотно в пространстве  $A(X)$ . Предположим, что стандартный функционал  $\det(1+u)$  допускает непрерывное продолжение с подпространства всех конечномерных операторов из  $A(X)$  на все  $A(X)$  (по квазинорме из  $A(X)$ ). Тогда соответствующий функционал  $\text{trace}$ , ограничен (по  $A$ -квазинорме) на подпространстве всех конечномерных операторов из  $A(X)$  и, таким образом, продолжается по непрерывности (единственным способом) на все  $A(X)$ .

*Доказательство.* Для конечномерного оператора  $u \in A(X)$  детерминант  $\det(1+zu)$  имеет вид

$$\det(1+zu) = 1 + z \text{trace } u + \sum_{n=1}^m a_n z^n.$$

Следовательно, по теореме о вычетах

$$\text{trace } u = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\det(1+zu) - 1}{z^2} dz.$$

Так как  $\det(1+zu)$  непрерывен в точке  $u=0$  (по квазинорме из  $A$ ), то существует такое  $\delta > 0$ , что  $|\det(1+zu) - 1| < 1$  для  $\|u\|_A < \delta$  и  $|z| \leq 1$ ; поэтому для таких конечномерных  $u$  имеем

$$|\text{trace } u| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|z|=1} \left\| \frac{\det(1+zu) - 1}{z^2} \right\| |dz| \leq 1. \quad \square$$

Для доказательства предложения достаточно непрерывности детерминанта в нуле.

**5. Спектральный тип и формула следа.** Доказательство следующего факта проводится по аналогии с принципом равномерной ограниченности (см. [14, 3.4.6]). В отличие от теоремы из [14] мы рассматриваем выделенное семейство банаховых пространств, а не все банаховы пространства. Это дает возможность, например, применять подобный принцип к семействам всех  $L_p(\mu)$ -пространств (в качестве пространства с 1-безусловным базисом берется тогда пространство  $l_p$ ).

**Предложение 5.1.** Пусть  $t, u > 0$ ,  $\alpha$  — проективная тензорная квазинорма,  $\mathcal{F}$  — некоторое семейство банаховых пространств, замкнутое относительно взятия не более чем счетных прямых сумм. Если для любого пространства  $X \in \mathcal{F}$  пространство  $N_\alpha(X)$  имеет спектральный тип  $l_{t,u}$ , то существует такая постоянная  $C > 0$ , что для всякого  $X \in \mathcal{F}$  и для любого оператора  $T \in N_\alpha(X)$

$$\|\{\mu_k(T)\}\|_{l_{t,u}} \leq C\|T\|_{N_\alpha}$$

(здесь  $\{\mu_k(T)\}$  — полный набор собственных значений оператора  $T$ ).

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда для каждого  $n$  можно найти такие банахово пространство  $X_n \in \mathcal{F}$  и оператор  $T_n \in N_\alpha(X_n)$ , что (см. [14])

$$\|\{\mu_k(T_n)\}\|_{l_{t,u}} \geq n, \quad \|T_n\|_{N_\alpha} \leq (2\nu_\alpha)^{-n},$$

где  $\nu_\alpha$  — постоянная из «неравенства треугольника» для квазинормы из  $N_\alpha$ . Положим  $X := \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_E$ , и пусть  $j_n : X \rightarrow X_n$ ,  $i_n : X_n \rightarrow X$  — естественные фактор-отображения и вложения (с единичными нормами). Тогда

$$\left\| \sum_{n=m+1}^{m+l} j_n T_n i_n \right\|_{N_\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu_\alpha^k \|T_{m+k}\|_{N_\alpha} \leq (2\nu_\alpha)^{-m}, \quad l > 0.$$

Поэтому

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} j_n T_n i_n \in N_\alpha(X).$$

Поскольку  $T_n = j_n T i_n$ , то совокупность всех собственных чисел оператора  $T_n$  есть часть семейства  $\{\mu_k(T)\}$ . Из этого вытекает, что

$$\infty > \|\{\mu_k(T)\}\|_{l_{t,u}} \geq \|\{\mu_k(T_n)\}\|_{l_{t,u}} \geq n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Полученное противоречие доказывает предложение.  $\square$

**Предложение 5.2.** Пусть  $r \in (0, 1]$ ,  $\alpha$  — проективная тензорная квазинорма,  $\mathcal{F}$  — некоторое семейство банаховых пространств, обладающих свойством  $AP_\alpha$ , замкнутое относительно взятия не более чем счетных прямых сумм. Если для любого пространства  $X \in \mathcal{F}$  пространство  $N_\alpha(X)$  имеет спектральный тип  $l_r$ , то для всякого  $X \in \mathcal{F}$  и для любого оператора  $T \in N_\alpha(X)$  его ядерный след  $\text{trace } T$  вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.

$$\text{trace } T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T)$$

(здесь  $\{\mu_k(T)\}$  — полный набор, с учетом кратностей, собственных значений оператора  $T$ ). При этом детерминант Фредгольма оператора  $T$  имеет вид

$$\det(1 - zT) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \mu_k(T)z)$$

и является целой функцией порядка  $r$  ( $u$ , следовательно, минимального рода, если  $r < 1$ ).

*Доказательство.* Пусть  $T \in N_\alpha(X)$ , где  $X \in \mathcal{F}$ . Так как  $X \in AP_\alpha$ , то  $N_\alpha(X) = X^* \widehat{\otimes}_\alpha X$ , что гарантирует существование единственного непрерывного следа на  $N(X)$ , который есть просто непрерывное продолжение с подпространства всех конечномерных операторов в  $X$  обычного функционала «след». По следствию 4.1 из предложения 4.1, на  $N_\alpha(X)$  вполне определен единственный непрерывный детерминант (Фредгольма), —  $\det(1 - zT)$ . Возьмем последовательность  $\{T_n\}$  конечномерных операторов из  $N_\alpha(X)$ , сходящуюся в пространстве  $N_\alpha(X)$  к  $T$ .

Пространство  $N_\alpha(X)$  имеет спектральный тип  $l_r$ , так что, по предложению 5.1, существует такая постоянная  $C > 0$ , что для любого оператора  $T \in N_\alpha(X)$

$$\|\{\mu_k(T)\}\|_{l_1} \leq C\|T\|_{N_\alpha};$$

в частности, это неравенство верно для всех рассматриваемых операторов. Для конечномерного  $U \in N_\alpha(X)$  детерминант имеет вид

$$\det(1 - zU) = \prod_{i=1}^M (1 - \mu_i(U)z).$$

Следовательно, для всякого  $T_n$

$$|\det(1 - zT_n)| \leq \exp\left\{\sum_k |\mu_k(T_n)| |z|\right\} \leq e^{C\|T_n\|_{N_\alpha} |z|}.$$

Используя непрерывность детерминанта, мы приходим к неравенству

$$|\det(1 - zT)| \leq e^{C\|T\|_{N_\alpha} |z|}.$$

По теореме Адамара

$$\det(1 - zT) = e^{cz} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \mu_i(T)z) e^{\mu_i(T)z}$$

(так как значение левой части в нуле есть 1). С другой стороны, разлагая правую часть равенства в ряд, получаем  $\det(1 - zT) = 1 + cz + \dots$ . Значит,  $c = -\operatorname{tr} T$  (напомним, что  $\det(1 - zT) = 1 - \operatorname{tr} Tz + \dots$ ). Но  $\{\mu_k(T)\} \in l_1$  и, следовательно,

$$\det(1 - zT) = e^{az} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \mu_i(T)z),$$

где  $a = -\operatorname{tr} T + \sum \mu_i$ .

Теперь применим теорему Уайта (см. [21]). Для этого рассмотрим банахов идеал  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  операторов, факторизующихся через пространства из  $\mathcal{F}$  и образуем квазинормированный операторный идеал  $\Gamma_{\mathcal{F}} \circ N_\alpha$  — суперпозицию двух идеалов. Ясно, что этот идеал имеет спектральный тип  $l_1$ ; следовательно, к нему может быть применена теорема Уайта. Поскольку идеал конечномерных операторов плотен в последнем идеале, спектральный след на нем есть линейный непрерывный функционал, совпадающий с ядерным следом на плотном множестве. Поэтому  $a = 0$ ,  $\operatorname{trace} T = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(T)$  и

$$\det(1 - zT) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \mu_k(T)z).$$

Порядок этой целой функции есть  $r$ , поскольку  $(\mu_k(T)) \in l_r$  (теорема Бореля о порядке канонического произведения).  $\square$

**6. Примеры применения.** Теперь применим полученные выше вспомогательные факты в некоторых конкретных ситуациях.

*6.1. Операторы в подпространствах фактор-пространств  $L_p$ .* Сначала рассмотрим случай ядерных операторов в подпространствах фактор-пространств пространств  $L_p(\mu)$ . Известно, что такие пространства обладают свойством аппроксимации  $AP_s$  при  $1 \leq p \leq \infty$  и  $0 < s < 1$ ,  $1/s = 1 + |1/p - 1/2|$  (см. [16–18]). Используя этот факт и некоторые идеи (как оказалось, те же, что и в [9, 2.b.13]) из теории абсолютно суммирующих операторов, Рейнов и Латиф сначала получили формулу Гротендика—Лидского для подпространств пространств  $L_p$  (в [16]), а затем и для подпространств фактор-пространств пространств  $L_p$  (см. [18]).

В [9, 2.c.9], однако, получены более сильные результаты о спектрах ядерных операторов в  $L_p$  (но не формула следа). Мы применим приведенные выше теоремы и предложения вместе с результатом из [9, 2.c.9] для установления более общих фактов, а также снова все той же формулы следа для операторов в подпространствах фактор-пространств пространств  $L_p$ . Приведем утверждение, усиливающее указанный выше факт о наличии свойств  $AP_s$  в таких пространствах (что представляет и самостоятельный интерес).

**Лемма 6.1.** Пусть  $0 < s < 1$ ,  $1/s = 1 + 1/q$ . Если  $d := (d_k) \in l_{(s,1)}$ , то найдутся  $\alpha := (\alpha_k) \in l_1$  и  $\beta := (\beta_k) \in l_{(q,\infty)}^0$ , для которых  $d = \alpha\beta$ , т.е.  $d_k = \alpha_k\beta_k$  для  $k = 1, 2, \dots$ . Здесь

$$l_{(q,\infty)}^0 := \left\{ (\beta_k) : \exists a_k \rightarrow 0, |\beta_k| \leq \frac{a_k}{k^{1/q}} \right\}.$$

Обратно, если  $\alpha := (\alpha_k) \in l_1$  и  $\beta := (\beta_k) \in l_{(q,\infty)}^0$ , то  $\alpha\beta \in l_{(s,1)}$ . Более того,  $l_1 \cdot l_{(q,\infty)} = l_{(s,1)}$ .

*Доказательство.* Возьмем  $d \in l_{(s,1)}$  (предполагая, что  $d = d^* = (d_k^*)$ ). Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/s} d_k^*/k < \infty, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/q} d_k^* < \infty.$$

Пусть  $\varepsilon = (\varepsilon_k)$  — такая числовая последовательность, что  $\varepsilon_k \searrow 0$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^* k^{1/q} / \varepsilon_k < \infty$ . Положим  $\alpha_k := d_k^* k^{1/q} / \varepsilon_k$ ,  $\beta_k := \varepsilon_k / k^{1/q}$ . Тогда  $\alpha := (\alpha_k) \in l_1$  и  $\beta := (\beta_k) \in l_{(q,\infty)}^0$ . Таким образом,  $d = \alpha\beta \in l_1 \cdot l_{(q,\infty)}^0$ . По поводу последних двух утверждений см. [14, 2.1.13].  $\square$

**Предложение 6.1.** Пусть  $\alpha \in [0, 1/2]$  и  $1/s = 1 + \alpha$ . Для банахова пространства  $Y$ , предположим, что

( $\alpha$ ) существует такая постоянная  $C > 0$ , что для каждого  $\varepsilon > 0$ , для любого натурального  $n$  и всякого  $n$ -мерного подпространства  $E$  пространства  $Y$  существует такой конечномерный оператор  $R$  в  $Y$ , что  $\|R\| \leq Cn^\alpha$  and  $\|R|_E - id_E\|_{L(E,Y)} \leq \varepsilon$ .

Тогда  $Y \in AP_{(s,1)}$ .

*Доказательство.* Пусть  $0 \neq z \in Y^* \widehat{\otimes}_{(s,1)} X$ . Воспользуемся леммой 6.1: возьмем представление  $z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k y'_k \otimes x_k$ , в котором  $(x_k), (y'_k)$  ограничены,  $(a_k) \in l_1$ ,  $(b_k) \in l_{q\infty}^0$  и  $b_k \searrow 0$ . Тогда  $(\tilde{x}_k := b_k x_k) \in l_{q\infty}^0(X)$  и для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  (которое будет выбрано ниже) можно найти оператор  $R \in X^* \otimes X$  с тем свойством, что  $\sup_n \|R\tilde{x}_n - \tilde{x}_n\| \leq \varepsilon$  (здесь мы использовали свойства рассматриваемого пространства  $X$ , отмеченные в разделе 1 работы [19]). Так как  $z \neq 0$ , то можно найти такой оператор  $V \in L(Y^*, X^*)$ , что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle V y'_k, \tilde{x}_k \rangle = 1.$$

Теперь, когда оператор  $V$  выбран, получаем:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle V y'_k, \tilde{x}_k - R\tilde{x}_k \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle V y'_k, R\tilde{x}_k \rangle \leq \varepsilon \|(a_k)\|_{l_1} \|V\| \cdot \text{const} + \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \langle R^* V y'_k, x_k \rangle \right|,$$

и, если  $\varepsilon$  достаточно мало, для конечномерного оператора  $R^*V : Y^* \rightarrow X^*$  имеем:

$$|\text{tr } z^t \circ (R^*V)| = |\text{tr}(R^*V) \circ z^t| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \langle R^* V y'_k, x_k \rangle \right| > 0.$$

Последняя сумма есть ядерный след тензорного элемента  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k R^* V y'_k \otimes x_k$ , который является композицией  $R \circ z_0$  конечномерного оператора  $R$  и тензорного элемента  $z_0 := \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k V y'_k \otimes x_k$ , принадлежащего тензорному произведению  $X^* \widehat{\otimes}_{(s,1)} X$  согласно второй части леммы 6.1. Отсюда следует, что как  $z_0$ , так и  $z$  порождают ненулевые операторы  $\tilde{z}_0$  и  $\tilde{z}$ .  $\square$

Свойством ( $\alpha$ ) обладают, в частности, фактор-пространства подпространств и подпространства фактор-пространств пространств  $L_p$  (при  $1 \leq p \leq \infty$  с  $\alpha = |1/2 - 1/p|$ ) (см. обсуждение этого в [19, раздел 1] и в [18, предложение 9]).



**Следствие 6.1.** Пусть  $s \in (0, 1]$ ,  $p \in [1, \infty]$  и  $1/s = 1 + |1/p - 1/2|$ . Если банахово пространство  $Y$  изоморфно подпространству фактор-пространства (или фактор-пространству подпространства) некоторого  $L_p$ -пространства, то оно обладает свойством  $AP_{(s,1)}$  (и, следовательно, свойством  $AP_s$ ).

Кстати, при  $s = 2/3$  получаем уже упоминавшийся результат о наличии свойства  $AP_{(2/3,1)}$  у любого банахова пространства.

Н. Кёниг показал (см. [9, 2.с.9]), что если  $1 < p < \infty$ ,  $0 < s < 1$ ,  $1/r = 1/s - |1/p - 1/2|$ , и  $X = L_p(\mu)$ , то собственные значения любого оператора  $T \in N_s(X)$  лежат в  $l_{(r,s)}$ . Поэтому получаем небольшое усиление ранее полученных теорем (см. [16–18]) о ядерных операторах в подпространствах фактор-пространств пространств  $L_p(\mu)$ .

Итак, обобщение предложения :

**Предложение 6.2** (ср. [9, 2.с.9]). Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $0 < s < 1$ ,  $1/r = 1/s - |1/p - 1/2|$ . Существует такая постоянная  $C_{s,p} > 0$ , что для всякого подпространства  $X$  любого фактор-пространства пространства  $L_p(\mu)$  и для любого оператора  $T \in N_s(X)$

$$\|\{\mu_k(T)\}\|_{l_{(r,s)}} \leq C_{s,p} \|T\|_{N_s}$$

(здесь  $\{\mu_k(T)\}$  — полный набор собственных значений оператора  $T$ ). При  $r = 1$  и  $1 = 1/s - |1/p - 1/2|$  полный набор собственных значений оператора  $T$  абсолютно суммируем, для любого оператора  $T \in N_s(X)$  его ядерный след  $\text{trace } T$  вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.

$$\text{trace } T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T).$$

*Доказательство.* Любое банахово пространство имеет как свойство  $\|\cdot\|_s$ -продолжения, так и свойство  $\|\cdot\|_s$ -лифтинга (см. пример 3.4). Из [9, 2.с.9] следует, что  $L_p$ -пространства имеют спектральный тип  $l_{(r,s)}$ . По теоремам 3.1 и 3.2, как подпространства, так и фактор-пространства  $L_p$ -пространств имеют спектральный тип  $l_{(r,s)}$ . По тем же теоремам их, соответственно, фактор-пространства и подпространства также имеют спектральный тип  $l_{(r,s)}$ . Применим предложение 5.1 к семействам фактор-пространств подпространств и подпространств фактор-пространств пространств  $L_p$ , рассматривая прямые суммы по типу  $l_p$ , получим нужные нам неравенства. Применяя в этих же ситуациях предложение 5.2 (учитывая наличие свойств  $AP_s$ ), получаем формулы следа.  $\square$

**6.2. Операторный идеал  $N_{(r,s),p}$ .** Пусть  $0 < r, s \leq 1$ ,  $1 \leq p \leq 2$ . Определим новую проективную квазинорму  $\|\cdot\|_{(r,s),p}$  следующим образом. Если  $u \in X \widehat{\otimes} Y$ , то

$$\|u\|_{(r,s),p} := \inf \left\{ \left\| (\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_{l_{(r,s)}} \left\| (x_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_{l_{\infty}(X)} \cdot \left\| (y_i)_{i=1}^{\infty} \right\|_{l_p^w(X)} : u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i \right\}.$$

Получаем новое тензорное произведение  $X \widehat{\otimes}_{(r,s),p} Y$ , состоящее из тензорных элементов  $u \in X \widehat{\otimes} Y$  конечной квазинормы  $\|\cdot\|_{(r,s),p}$ . Оно квази-банахово (проверяется стандартным образом на абсолютно сходящихся рядах) и является частичным обобщением тензорного произведения Лапестре (см. [11]).

Естественным образом мы приходим к квазинормированному операторному идеалу  $N_{(r,s),p}$ , рассматривая фактор-отображения  $X^* \widehat{\otimes}_{(r,s),p} Y \rightarrow N_{(r,s),p}(X, Y)$ . Всякий оператор из этого идеала допускает соответствующее разложение в ряд. Применим полученные выше факты (аналогично случаю операторов в подпространствах  $L_p$ -пространств) к операторам из этого нового операторного идеала типа Лапестре (идеала Лоренца—Лапестре).

**Замечание 6.1.** Более общим является тензорное произведение  $X \widehat{\otimes}_{(r,s),p,q} Y$ , получаемое аналогичным образом, но с дополнительным ограничением на последовательность  $(y_i)$ : требуется, чтобы эта последовательность была слабо  $q$ -суммируемой, где  $1 \leq q < \infty$ . Мы не рассматриваем его здесь в силу ограниченности объема работы.

Перейдем теперь к операторам из  $N_{(r,s),p}$ .

**Предложение 6.3.** *Если  $1 \leq p \leq 2$ ,  $1/r = 1/p + 1/2$ , то всякое банахово пространство обладает свойством  $AP_{(r,1),p}$ .*

Отметим, что при  $p = 1$  свойство  $AP_{(r,1),p}$  превращается в  $AP_{(2/3,1)}$ , о наличии которого в любом банаховом пространстве известно из [6, 19].

**Следствие 6.2.** *Если  $0 < r \leq 1$ ,  $1/r = 1/p + 1/2$ ,  $1 \leq p \leq 2$  и  $0 < s \leq 1$ , то  $N_{(r,s),p} \subset N_{(r,1),p}$  и, следовательно, всякое банахово пространство обладает свойством  $AP_{(r,s),p}$ .*

**Предложение 6.4.** *Идеал  $N_{(r,s),p}$  имеет спектральный тип  $l_{(1,s)}$ .*

*Доказательство.* Приведем доказательство, в ходе которого будут получены все три сформулированные выше утверждения. Пусть  $0 < r \leq 1$ ,  $1/r = 1/p + 1/2$ ,  $1 \leq p \leq 2$  и  $0 < s \leq 1$ . Предположим, что  $X \notin AP_{(r,s),p}$ . Пусть  $z \in X^* \widehat{\otimes}_{(r,s),p} X$  — такой элемент, что  $\text{trace } z = 1$ ,  $\tilde{z} = 0$ . Имеем

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k \otimes x_k,$$

где  $(\lambda_k) \in l_{r,s}$ ,  $(x'_k) \in l_{\infty}(X^*)$ ,  $(x_k)$  — слабо  $p'$ -суммируема.

Поскольку  $z = \sum \lambda_k x'_k \otimes x_k$ , где  $(\lambda_k) \in l_{r,s}$ ,  $(x'_k) \in l_{\infty}(X^*)$  и  $(x_k)$  — слабо  $p'$ -суммируема, то  $\tilde{z}$  может быть факторизован:

$$\tilde{z} : X \xrightarrow{A} l_{\infty} \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{j} l_p \xrightarrow{V} X,$$

где  $Ax = \{\langle x'_k, x \rangle\} \in l_{\infty}$  для  $x \in X$ ,  $V\{\delta_k\} := \sum \delta_k x_k$  для  $\{\delta_k\} \in l_p$ ,  $j$  — вложение,  $\Delta$  — диагональный оператор с диагональю  $(\lambda_k)$  из  $l_{(r,s)}$ . Так как  $\tilde{z} = 0$ , то  $V|_{j\Delta A(X)} = 0$ . Рассмотрим  $S := j\Delta AV : l_p \rightarrow l_p$ :

$$\begin{aligned} S\{\delta_k\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k j\Delta Ax_k = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k j\Delta \left( \sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_j, x_k \rangle e_j \right) = \sum_{k,j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x'_j, \delta_k x_k \rangle e_j = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left\langle x'_j, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k x_k \right\rangle e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left\langle \{\delta_k\}_k, \{\langle x'_j, x_k \rangle\}_k \right\rangle e_j \in l_p \end{aligned}$$

для  $\{\delta_k\} \in l_p$ . Положим

$$\left\langle \{\delta_k\}_k, \{\langle x'_j, x_k \rangle\}_k \right\rangle =: \psi_j(\delta).$$

Тогда

$$S\{\delta_k\} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \psi_j(\delta) e_j.$$

Следовательно,

$$\text{tr } S = \sum_j \lambda_j \psi_j(e_j) = \sum_j \lambda_j \langle x'_j, x_j \rangle = 1.$$

Очевидно,  $S^2 = 0$  и  $\text{trace } S = \text{trace } z = 1$ .

Рассмотрим диагональный оператор  $j\Delta : l_{\infty} \rightarrow l_p$  с диагональю из  $l_{(r,s)}$ . Из [14, 2.9.17\*] следует, что этот оператор есть оператор вейлевского (а значит и спектрального) типа  $(1, s)$  (см. [14, 3.6.2\*]; подробно об операторах Вейля см. указанную монографию). Следовательно, идеал  $N_{(r,s),p}$  имеет спектральный тип  $l_{1,s}$ .

Поскольку  $S \in N_{(r,1),p}(l_p, l_p)$ , имеем

$$S : l_p \xrightarrow{V} X \xrightarrow{A} l_{\infty} \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{j} l_p,$$

$N_{(r,1),p}$  имеет спектральный тип  $l_1$  и пространство  $l_p$  обладает свойством аппроксимации Гротендика (а, значит, и свойством  $AP_{(r,1),p}$ ), то ядерный след  $\text{trace } S$  вполне определен и равен сумме

всех собственных значений оператора  $S$  (по предложению 5.2, в котором сейчас  $\mathcal{F}$  есть семейство всех банаховых пространств). Противоречие с тем, что  $S^2 = 0$ .  $\square$

Применяя предложения 5.1 и 5.2 для рассматриваемой ситуации, получаем следующее утверждение.

**Теорема 6.1.** Пусть  $0 < r \leq 1$ ,  $1/r = 1/p + 1/2$ ,  $1 \leq p \leq 2$  и  $0 < s \leq 1$ . Существует такая постоянная  $C > 0$ , что для всякого банахова пространства  $X$  и для любого оператора  $T \in N_{(r,s),p}(X)$

$$\|\{\mu_k(T)\}\|_{l_{(1,s)}} \leq C \|T\|_{N_{(r,s),p}}$$

(здесь  $\{\mu_k(T)\}$  — полный набор собственных значений оператора  $T$ ). В частности, полный набор собственных значений оператора  $T$  абсолютно суммируем, его ядерный след  $\text{trace } T$  вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.

$$\text{trace } T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T).$$

Отметим частные случаи теоремы для  $N_{(r,s),p}$ . Пусть  $0 < r \leq 1$ ,  $1/r = 1/p + 1/2$ ,  $1 \leq p \leq 2$  и  $0 < s \leq 1$ .

- (a)  $r = 1$ ,  $s = 1$ ,  $p = 2$ : В. Б. Лидский (1959), А. Пич (1980);
- (b)  $r = 2/3$ ,  $s = 2/3$ ,  $p = 1$ : А. Гротендик (1955);
- (c)  $r = 2/3$ ,  $s = 1$ ,  $p = 1$ : А. Хинрихс и А. Пич (2010) и, независимо, О. И. Рейнов (2016);
- (d)  $0 \leq r \leq 1$ ,  $s = r$ ,  $1/r = 1/2 + 1/p$ : О. И. Рейнов и К. Латиф (2013).

Теорема соединяет в одной шкале операторов частные случаи (c) и (a):

$$\left\{ r = \frac{2}{3}, s = 1, p = 1 \right\} \longrightarrow \left\{ \frac{2}{3} \leq r \leq 1, s = 1, \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right\} \longrightarrow \{r = 1, s = 1, p = 2\}.$$

Все результаты, приведенные до теоремы об  $N_{(r,s),p}$ , точны. Теорема точна для случаев, когда  $r = s$ . Для  $r \neq s$  проблема возникает уже в частном случае  $N_{(2/3,1)}$  (т.е. при  $p = 1$ ).

Из статьи А. Хинрихса и А. Пича [6] в нашей формулировке: верно ли что в шкале пространств Лоренца  $l_{r,s}$  результат «любое банахово пространство обладает свойством  $AP_{(2/3,1)}$ » есть наилучший результат?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадец В. М. О прямой сумме нормированных пространств// Сиб. мат. ж. — 1991. — 32, № 1. — С. 186–189.
2. Лидский В. Б. Несамосопряженные операторы, имеющие след// Докл. АН СССР. — 1959. — 125, № 3. — С. 485–487.
3. Benyamini Y., Lindenstrauss J. Geometric Nonlinear Functional Analysis. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2000.
4. Gohberg I., Goldberg S., Krupnik N. Traces and Determinants of Linear Operators. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2000.
5. Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires — 1955. — 16.
6. Hinrichs A., Pietsch A.  $p$ -Nuclear operators in the sense of Grothendieck// Math. Nachr. — 2010. — 283, № 2. — P. 232–261.
7. Kalton N. J. Quasi-Banach Spaces. Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 2. — Amsterdam: North-Holland.
8. König H. On the eigenvalue spectrum of certain operator ideals// Coll. Math. — 1981. — 44. — P. 15–28.
9. König H. Eigenvalue Distribution of Compact Operators. — Boston: Birkhäuser, 1986.
10. Köthe G. Topological Vector Spaces. I. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1969.
11. Lapreste J. T. Opérateurs sommants et factorisations à travers les espaces  $L_p$ // Stud. Math. — 1976. — 57. — P. 47–83.
12. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Sequence Spaces. Vol. 1. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1977.
13. Pietsch A. Operator Ideals. — Berlin: North-Holland, 1978.

14. *Pietsch A.* Eigenvalues and  $s$ -Numbers. — New York: Cambridge Univ. Press, 1987.
15. *Reinov O.* Approximation properties associated with quasi-normed operator ideals of  $(r, p, q)$ -nuclear operators/ <http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2017/17-08.pdf>.
16. *Reinov O., Latif Q.* Grothendieck–Lidskii theorem for subspaces of  $L_p$ -spaces// *Math. Nachr.* — 2013. — 286, № 2–3. — P. 279–282.
17. *Reinov O. I., Latif Q.* Distribution of eigenvalues of nuclear operators and Grothendieck–Lidski type formulas// *J. Math. Sci.* — 2013. — 193, № 2. — P. 312–329.
18. *Reinov O. I., Latif Q.* Grothendieck–Lidskii theorem for subspaces of quotients of  $L_p$ -spaces// *Banach Center Publ.* — 2014. — 102. — P. 189–195.
19. *Reinov O. I.* Some remarks on approximation properties with applications// in: *Ordered Structures and Applications (De Jeu M., De Pagter B., Van Gaans O., Veraar M., eds.)*. — Berlin: Birkhäuser, 2016. — P. 371–394.
20. *Weyl H.* Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation// *Proc. Natl. Acad. Sci.* — 1949. — 35. — P. 408–411.
21. *White M. C.* Analytic multivalued functions and spectral trace// *Math. Ann.* — 1996. — 304. — P. 665–683.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Рейнов Олег Иванович  
Санкт-Петербургский государственный университет  
E-mail: [orein51@mail.ru](mailto:orein51@mail.ru)



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 75–88  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-75-88

УДК 517.97

## ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ ИЗ КРУГА

© 2024 г. М. И. РОНЖИНА, Л. А. МАНИТА

**Аннотация.** Изучается окрестность особых экстремалей второго порядка в задачах оптимального управления, аффинных по двумерному управлению из круга. Исследуется задача стабилизации для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка, для которой начало координат есть особая экстремаль второго порядка. Данную задачу можно рассматривать как возмущение аналога задачи Фуллера с двумерным управлением из круга. Показано, что для такого класса задач сохраняются оптимальные решения в виде логарифмических спиралей, которые приходят в особую точку за конечное время, при этом оптимальные управления совершают бесконечное число оборотов вдоль окружности. Приведен краткий обзор задач, в которых возникают решения в форме таких логарифмических спиралей.

**Ключевые слова:** двумерное управление из круга, особая экстремаль, раздутие особенности, логарифмическая спираль, гамильтонова система, принцип максимума Понтрягина.

## LOGARITHMIC SPIRALS IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH CONTROL IN A DISK

© 2024 M. I. RONZHINA, L. A. MANITA

**ABSTRACT.** We study a neighborhood of singular second-order extremals in optimal control problems that are affine in a two-dimensional control in a disk. We study the stabilization problem for a linear system of second-order differential equations for which the origin is a singular second-order extremal. This problem can be considered as a perturbation of an analog of the Fuller problem with two-dimensional control in a disk. We prove that for this class of problems, optimal solutions keep their form of logarithmic spirals that arrive at a singular point in a finite time, while optimal controls make an infinite number of revolutions along the circle. Finally, we present a brief review of problems whose solutions have the form of such logarithmic spirals.

**Keywords and phrases:** two-dimensional control in a disk, singular extremal, blow-up of a singularity, logarithmic spiral, Hamiltonian system, Pontryagin's maximum principle.

**AMS Subject Classification:** 49J15, 49N60, 34H05

**1. Введение.** Решения в виде логарифмических спиралей могут возникать в задачах оптимального управления, аффинных по ограниченному управлению, содержащих особые экстремали второго порядка. Особые экстремали — это траектории, в точках которых значение управления с помощью непосредственного применения условия принципа максимума Понтрягина определяется неоднозначно.

Для задач, аффинных по скалярному управлению  $u$ , т.е. для задач с гамильтонианом вида  $H(q, p, u) = H_0(q, p) + uH_1(q, p)$ , где  $q$  и  $p$  — фазовая и сопряженная переменные соответственно, экстремаль является особой, если функция  $H_1$  обращается в ноль на непустом промежутке

времени. Особая экстремаль второго порядка определяется из условий

$$\operatorname{ad} H_1(\operatorname{ad} H_0)^k H_1 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \quad \operatorname{ad} H_1(\operatorname{ad} H_0)^3 H_1 \neq 0$$

(см. [13]), где  $(\operatorname{ad} F)G = \{F, G\}$  — скобка Пуассона функций  $F$  и  $G$ . Для оптимальной особой экстремали второго порядка также должно быть выполнено условие Келли (см. [17]):

$$\operatorname{ad} H_1(\operatorname{ad} H_0)^3 H_1 < 0.$$

Простейший пример задачи со скалярным управлением, содержащей особую экстремаль второго порядка — задача Фуллера:

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad u, x, y \in \mathbb{R}.$$

Здесь начало координат является особой экстремалью второго порядка. Для задачи Фуллера построен полный синтез оптимальных траекторий (см., например, [1]). Доказано, что оптимальные траектории попадают в 0 за конечное время, при этом управление на оптимальной траектории имеет счетное число неустранимых разрывов, а именно, счетное число переключений с 1 на  $-1$  (*феномен Фуллера*, см. рис. 1). Такие траектории называют *четтеринг-траекториями*.

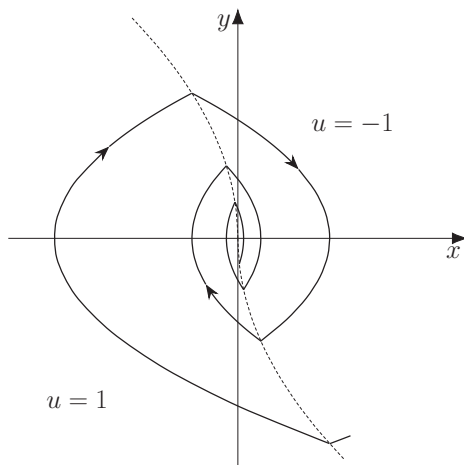


Рис. 1. Оптимальные четтеринг-траектории

Было доказано (см. [1, 14]), что для систем аффинных по скалярному управлению, содержащих особые экстремали 2-го порядка, наличие оптимальных четтеринг-траекторий является ситуацией общего положения. В работах М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова показано, что асимптотика решений в таких задачах в окрестности особых точек определяется решениями задачи Фуллера. Именно, было доказано, что фазовое пространство расслаивается над многообразием особых траекторий на двумерные слои, в которых поле оптимальных траекторий устроено аналогично полю оптимальных траекторий задачи Фуллера.

В [24] было доказано, что для произвольной управляемой системы дифференциальных уравнений, линейной по скалярному управлению, с каноническим лагранжианом, в котором кинетическая энергия зависит только от

обобщенных импульсов, особые режимы имеют порядок 2 и в окрестности многообразия особых траекторий второго порядка в расширенном фазовом пространстве имеется расслоение с двумерными слоями, являющимися интегральными многообразиями гамильтоновой системы, заполненными траекториями с накоплением переключений. Такая структура лагранжиана типична для задач управления механическими системами. Наличие четтеринг-решений было доказано для задач управления космическими аппаратами (см. [11, 20, 21, 23]), манипулятором (см. [4, 23]), многозвенным перевернутым маятником (см. [6]), балкой Тимошенко (см. [25]), колебаниями струны (см. [5]) и многими другими механическими системами.

Естественно предположить, что для задач с двумерным управлением структура решений в окрестности особых траекторий второго порядка определяется аналогом задачи Фуллера с двумерным управлением. Для аналога задачи Фуллера с управлением из правильного треугольника построен полный синтез оптимальных траекторий, содержащий особые экстремали второго порядка, четтеринг-траектории (см. [3]) и хаотическое поведение оптимальных траекторий на конечных промежутках времени (см. [2]). Доказано, что такое поведение решений в окрестности особой экстремали второго порядка типично для гамильтоновых систем общего вида, аффинных по управлению из треугольника, близкого к правильному (см. [2]).

В настоящей работе рассматриваются задачи, аффинные по двумерному управлению из круга. Мы предполагаем, что и в этом случае структура оптимального синтеза должна определяться решениями аналога задачи Фуллера, для которой на данный момент найдены некоторые оптимальные решения: четтеринг-решения и логарифмические спирали (см. [9, 23]). Полный синтез оптимальных траекторий для аналога задачи Фуллера с управлением из круга пока не построен. В данной работе показано, что при линейных возмущениях модельной задачи в окрестности особой точки второго порядка имеются оптимальные логарифмические спирали.

Изложение построено следующим образом. В разделе 2 приводится обзор полученных результатов для задач, аффинных по управлению из круга, содержащих особые экстремали второго порядка. В разделе 2.1 описано семейство логарифмических спиралей для аналога задачи Фуллера с управлением из круга. В разделе 2.2 описаны результаты для системы общего вида большой размерности. В разделе 2.3 приведены примеры систем малой размерности, в которых найдено семейство экстремалей в виде логарифмических спиралей. В разделе 3 рассмотрена линейно-квадратичная задача стабилизации для системы второго порядка малой размерности общего вида. Для нее в разделе 3.1 приведены необходимые и достаточные условия оптимальности. В разделе 3.2 доказана теорема о существовании решений задачи в форме логарифмических спиралей.

**2. Особые экстремали второго порядка в задачах с двумерным управлением.** Для задач оптимального управления, аффинных по двумерному управлению  $u = (u_1, u_2)$ , гамильтонова система принципа максимума Понтрягина

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (1)$$

имеет гамильтониан следующего вида:

$$H(q, p) = H_0(q, p) + H_1(q, p)u_1^0 + H_2(q, p)u_2^0, \quad (2)$$

где  $q(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $p(t) \in (\mathbb{R}^n)^*$ . Управление выбирается из условия максимума на ограничивающем множестве управлений  $U$

$$u^0 = \arg \max_{u \in U} (H_1(q, p)u_1 + H_2(q, p)u_2). \quad (3)$$

Заметим, что как и в скалярном случае, векторные особые управления характеризуются тем, что не определяются однозначно из условия максимума. Однако в случае векторного управления особые управления могут быть разного типа: только по одной компоненте, по нескольким компонентам или по всем компонентам сразу.

Нас будут интересовать, во-первых, особые управления по всем компонентам, а во-вторых, те, что имеют порядок 2. Приведем формальное определение особых экстремалей второго порядка для системы (1)–(3), с которым мы будем работать далее.

Для системы (1)–(3) точка  $(q_s, p_s)$  — *особая точка* (особая экстремаль) второго порядка, если:

(i) функции

$$H_i, (\text{ad } H_k)H_i, \text{ad } H_l(\text{ad } H_k)H_i, \text{ad } H_j(\text{ad } H_l)(\text{ad } H_k)H_i, \quad i = 1, 2, j, k, l = \overline{0, 2},$$

обращаются в нуль в точке  $(q_s, p_s)$ , а набор их дифференциалов в точке  $(q_s, p_s)$  имеет постоянный ранг;

(ii) билинейная форма

$$B_{ij} = \text{ad } H_i(\text{ad } H_0)^3 H_j \Big|_{(q_s, p_s)}, \quad i, j = 1, 2,$$

имеет ранг 2, симметрична и отрицательно определена;

(iii) остальные (не зависящие от перечисленных) скобки пятого порядка от функций  $H_j$ ,  $j = \overline{0, 2}$ , обращаются в нуль в точке  $(q_s, p_s)$ .

В данной работе мы рассматриваем задачи, в которых ограничивающее множество для управлений является кругом в  $\mathbb{R}^2$ , поэтому далее мы сформулируем базовую модель с двумерным управлением из круга, которая является аналогом задачи Фуллера.

2.1. *Модельная задача с двумерным управлением из круга.*

**Задача (P1):**

$$\int_0^{\infty} \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad \|u\| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad u, x, y \in \mathbb{R}^2$$

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и  $\|\cdot\|$  — скалярное произведение и евклидова норма в  $\mathbb{R}^2$ .

Далее приведем необходимые результаты для задачи (P1) (см. [9, 23]). Следуя стандартной схеме, применим принцип максимума Понтрягина, выпишем для модельной задачи гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина

$$\dot{\psi} = -\phi, \quad \dot{\phi} = x, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u = \psi / \|\psi\|. \quad (4)$$

Введем новые координаты, сводящие гамильтонову систему (4) модельной задачи к удобному виду:

$$z_{1i} = H_i, \quad z_{2i} = (\text{ad } H_0)H_i, \quad z_{3i} = (\text{ad } H_0)^2 H_i, \quad z_{4i} = (\text{ad } H_0)^3 H_i, \quad i = 1, 2,$$

где

$$H_0 = -\frac{1}{2} \langle x, x \rangle + \langle \phi, y \rangle, \quad H_1 = \psi_1, \quad H_2 = \psi_2.$$

В координатах  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^8$  система (4) примет вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -u, \quad u = z_1 / \|z_1\|. \quad (5)$$

Доказано (см. [9, 23]), что начало координат  $z = 0$  есть единственная особая экстремаль, причём её порядок равен двум (т.е.  $z = 0$  удовлетворяет определению особой точки второго порядка, приведенному выше). Было показано, что любая оптимальная траектория за конечное время приходит в начало координат. Однако в задаче (P1) полный синтез оптимальных решений до сих пор не построен. Только для некоторых классов начальных условий известны два семейства решений: семейство четтеринг-траекторий и семейство логарифмических спиралей. Оптимальные решения являются четтеринг-траекториями, если векторы  $x(0)$  и  $y(0)$  коллинеарны. Оптимальные логарифмические спирали возникают, если выполняются некоторые конкретные условия на  $x(0)$  и  $y(0)$ , а именно, на угол между  $x(0)$  и  $y(0)$  и на отношение их длин (эти условия мы приведем ниже). Особенность логарифмических спиралей состоит в том, что они входят в начало координат за конечное время, при этом и в плоскости  $x$ , и в плоскости  $y$  траектории совершают счетное число оборотов вокруг начала координат (аналог феномена Фуллера, см. рис. 2). Управление на таких траекториях за конечное время совершает счетное число оборотов по окружности (границе круга).

Заметим, что семейство решений (5) в форме логарифмических спиралей было найдено благодаря тому, что система (5) однородна относительно специальной группы симметрий (группы Фуллера). Приведем эти решения в явном виде:

$$z_m^*(t) = -A_{m-1}(T^* - t)^{5-m} e^{i\alpha \log |T^* - t|}, \quad u^*(t) = e^{i\alpha \log |T^* - t|}, \quad 0 \leq t < T^*, \quad m = \overline{1, 4}. \quad (6)$$

Здесь  $A_0 = -1/126$ ,  $A_{l+1} = -A_l(4 - l + i\alpha)$ ,  $l = 0, 1, 2$ , угол между  $z_3(0)$  и  $z_4(0)$  равен  $2 \arctg \alpha$ ,  $\alpha^2 = 5$ , и  $|z_4(0)|^2 = \sqrt{6}|z_3(0)|/2$ . Траектории  $z_m^*(t)$  попадают в ноль за конечное время  $T^*$ , и оптимальное управление  $u^*(t)$  совершает бесконечное число оборотов вдоль окружности  $S^1$ .

Оказывается, что наличие аналогичных логарифмических спиралей типичная ситуация для гамильтоновых систем (без предположения об однородности относительно группы симметрий), аффинных по двумерному управлению из круга, и которые обладают особой точкой второго порядка. А именно, если размерность гамильтоновой системы достаточно велика (не менее 32), то в окрестности особой точки второго порядка имеется семейство экстремалей в виде логарифмических спиралей. В следующем разделе мы приведем результаты, полученные для этого случая.



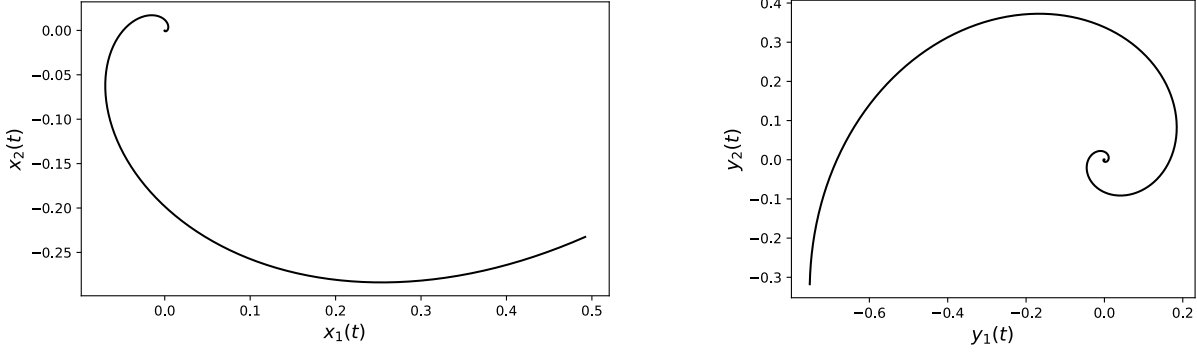


Рис. 2. Логарифмические спирали в модельной задаче.

2.2. *Общий случай с двумерным управлением.* Рассмотрим гамильтонову систему (1)–(3) размерности 32 или выше. Предположим, что имеется особая точка  $(q_s, p_s)$  второго порядка. Для того, чтобы исследовать ее окрестность, мы введем удобные локальные координаты (см. [7, 8]). Применим технику, развитую в работах Л. В. Локуциевского (см., например, [2]), для чего выпишем *ниспадающую систему* скобок Пуассона:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}^m = (\text{ad } H_0)\mathcal{K}^m + (\text{ad } H_l)\mathcal{K}^m u^l, \quad m \leq 4.$$

Здесь  $\mathcal{K}^m = \text{ad } K_m(\text{ad } K_{m-1}) \dots (\text{ad } K_2)K_1$  — скобка порядка  $m$ , где  $K_1 = H_1$  или  $H_2$ , и  $K_r$ ,  $r = \overline{2, m}$ , равно  $H_0$ ,  $H_1$  или  $H_2$ .

Обозначим через  $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}^m, m \leq 4\}$  множество всех скобок не более 4-го порядка, т.е.

$$\mathcal{K} = \left\{ H_i, (\text{ad } H_k)H_i, \text{ad } H_l(\text{ad } H_k)H_i, \text{ad } H_j(\text{ad } H_l)(\text{ad } H_k)H_i, i = 1, 2, j, k, l = \overline{0, 2} \right\}.$$

Набор  $\mathcal{K}$  состоит из 80 элементов, но в силу свойств антисимметричности и тождества Якоби является зависимым. Число  $N(m)$  независимых скобок порядка  $m$  в  $\mathcal{K}$  может быть вычислено с помощью формулы Витта (см. [22])

$$N(m) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu(d) \cdot 3^{m/d},$$

где  $\mu(d)$  — функция Мёбиуса. Таким образом, число независимых скобок в  $\mathcal{K}$  равно 31 (две скобки первого порядка, три — второго порядка, восемь — третьего порядка, и 18 скобок четвертого порядка).

Размерность гамильтоновой системы (1)–(3) больше 31, поэтому дополним  $\mathcal{K}$  до полного набора локальных координат в окрестности  $(q_s, p_s)$  гладкими функциями  $\omega(q, p) \in \mathbb{R}^{2n-31}$ , так что  $\omega(q_s, p_s) = 0$ . В координатах  $(\mathcal{K}, \omega)$  точка  $(q_s, p_s)$  — начало координат. В новых координатах  $(\mathcal{K}, \omega)$  гамильтонова система для (1)–(3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{K}^m &= (\text{ad } H_0)\mathcal{K}^m + (\text{ad } H_l)\mathcal{K}^m u^l, \quad m \leq 4, \\ \frac{d}{dt}\omega &= \eta(\mathcal{K}, \omega) + \beta(\mathcal{K}, \omega)u, \\ \mathcal{K}^1 u &\rightarrow \max_{u \in \mathcal{U}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\eta : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-31}$  и  $\beta : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-31} \times \mathbb{R}^2$  — некоторые гладкие функции.

Решения системы (7) удобнее описывать в терминах главных и неглавных скобок. Скобки  $H_l$ ,  $(\text{ad } H_0)H_l$ ,  $(\text{ad } H_0)^2 H_l$ ,  $(\text{ad } H_0)^3 H_l$ ,  $l = 1, 2$ , в ниспадающей системе называются *главными*, остальные скобки не более 4 порядка — *неглавными* скобками. Неглавные скобки имеют больший

порядок малости по сравнению с главными, поэтому они не влияют на принципиальное поведение системы (см. [2]).

**Теорема 1** (см. [7, 8]). *В достаточно малой окрестности начала координат существует решение системы (7) следующего вида:*

$$\begin{aligned} \text{главные скобки: } \mathcal{K}^m(t) &= k_m(t) (T-t)^{5-m} e^{i\alpha \log|T-t|} e^{i\varphi_m(t)}, & m = \overline{1, 4}, \\ \text{неглавные скобки: } \mathcal{K}^m(t) &= g_m(t) (T-t)^{6-m}, & m = \overline{1, 4}, \\ \text{другие координаты: } \omega(t) &= g_\omega(t) (T-t), \\ \text{управление: } u(t) &= e^{i\alpha \log|T-t|} e^{i\varphi_0(t)}. \end{aligned}$$

Здесь  $g_m(t)$  и  $g_\omega(t)$  — ограниченные функции,  $\alpha = \pm\sqrt{5}$ ,  $T > 0$ ,

$$\begin{aligned} k_m(t) &= k_m^0 (1 + o(T-t)^\sigma), & \varphi_l(t) &= \varphi_l^0 + o(T-t)^\sigma \text{ при } t \rightarrow T-0, \\ k_m^0, \varphi_l^0 &\in \mathbb{R}, & m &= \overline{1, 4}, \quad l = \overline{0, 4}, \quad \sigma > 0. \end{aligned}$$

Найденные экстремали совершают счетное число оборотов вокруг начала координат и приходят в 0 за конечное время  $T$ .

Теорема 1 доказана для задач, у которых размерность гамильтоновых систем 32 и больше. Однако имеются конкретные гамильтоновы системы меньшей размерности, для которых были получены аналогичные результаты. Далее мы приведем примеры некоторых таких задач.

*2.3. Примеры задач малой размерности.* В данном разделе кратко перечислим задачи небольшой размерности, для которых были найдены экстремали в виде логарифмических спиралей. Заметим, все эти примеры относятся к задачам управления механическими системами: задача быстрого действия для космической ракеты, задача стабилизации колебаниями перевернутого сферического маятника и балки Тимошенко.

*Задача управления космической ракетой:*

$$t_f \rightarrow \min, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= a \sin \theta \cos \psi + g_x, & \dot{\theta} &= (\omega_x \sin \phi + \omega_y \cos \phi) \sec \psi, & \dot{\omega}_x &= bu_1, \\ \dot{v}_y &= -a \sin \psi + g_y, & \dot{\psi} &= \omega_x \cos \phi - \omega_y \sin \phi, & \dot{\omega}_y &= bu_2, \\ \dot{v}_z &= a \cos \theta \cos \psi + g_z, & \dot{\phi} &= (\omega_x \sin \phi + \omega_y \cos \phi) \operatorname{tg} \psi, & u_1^2 + u_2^2 &\leq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения движения ракеты состоят из уравнений орбитальной динамики (уравнения на скорости  $v_x, v_y, v_z$ ), кинематических уравнений Эйлера (уравнения на углы Эйлера  $\theta, \psi, \phi$ ) и динамических уравнений Эйлера (уравнения на угловые скорости  $\omega_x, \omega_y$ ). Ракета управляется моментом силы тяги  $u = (u_1, u_2)$ , управление  $u$  ограничено единичным кругом.

В задаче (8)–(9) описана особая поверхность второго порядка, и доказано существование четтеринг-экстремалей [26].

Гамильтонова система для задачи (8)–(9) состоит из 16 уравнений: 8 уравнений на фазовые переменные, 8 уравнений на сопряженные переменные. В силу размерности теорема 1 для общей задачи здесь не применима. Однако при использовании той же схемы было найдено семейство экстремалей в виде логарифмических спиралей (см. [19]).

Ниже сформулированы еще две задачи малой размерности: задача управления перевернутым сферическим маятником и задача управления балкой Тимошенко (точнее, ее двумя модами, которые возникают при применении метода Галеркина к исходной задаче управления системой уравнений в частных производных). В обоих примерах управление двумерно и лежит в единичном круге.

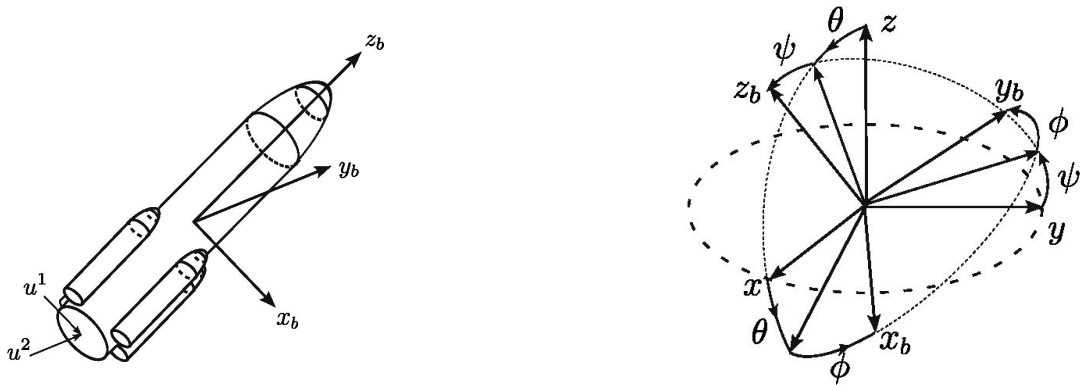


Рис. 3. Выбор углов Эйлера в задаче управления ракетой.

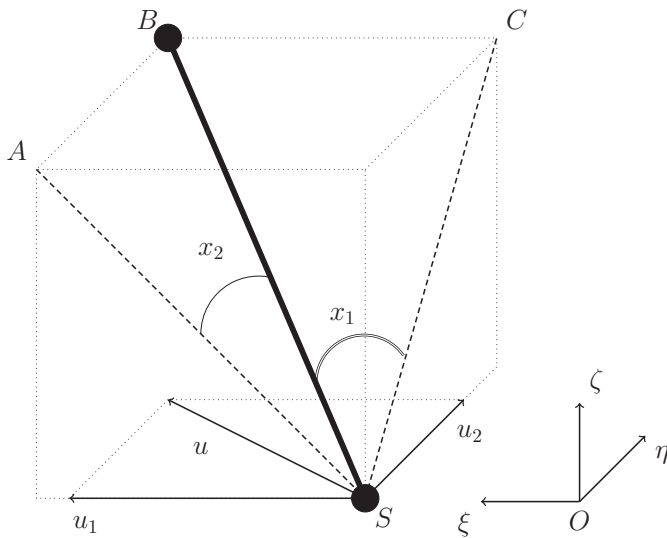


Рис. 4. Перевернутый сферический маятник

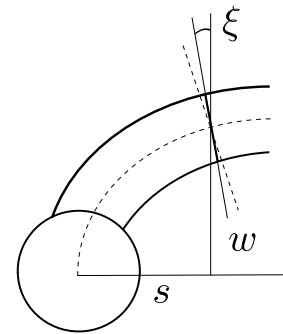


Рис. 5. Балка Тимошенко

*Перевернутый сферический маятник:*

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = kx + u, \quad \|u\| \leq 1, \quad u, x, y \in \mathbb{R}^2, \quad k > 0. \quad (10)$$

Данная задача возникает при изучении линеаризованной модели перевернутого сферического маятника. Маятник может перемещаться по горизонтальной плоскости (см. рис. 4) под действием ограниченной по величине внешней силы  $u$ . Предполагается, что сила приложена к основанию маятника. Целевой функционал представляет собой среднеквадратичное отклонение маятника от верхнего неустойчивого положения равновесия, через  $x_1, x_2$  обозначены углы отклонения маятника от вертикали.

*Балка Тимошенко:*

$$\int_0^\infty \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = Kx + u, \quad \|u\| \leq 1, \quad u, x, y \in \mathbb{R}^2, \quad K = \text{diag}\{k_1, k_2\}. \quad (11)$$

Задача (11) оптимального управления балкой Тимошенко записана в терминах коэффициентов  $x = (x_1, x_2)$  разложения функции  $(w(s, t), \xi(s, t))$  (поперечное смещение центральной линии балки относительно положения покоя и угол поворота поперечных сечений; см. рис. 5) в ряд Фурье по двум собственным функциям эллиптического оператора, соответствующего гиперболической системе уравнений, описывающей колебания балки ( $k_1, k_2 > 0$  — соответствующие собственные значения).

Задачи (10) и (11) отличаются от модельной наличием слагаемых  $kx$  и  $Kx$  ( $k > 0$  для маятника и диагональная матрица  $K$  для балки Тимошенко). Размерность гамильтоновых систем в этих задачах равна 8, поэтому теорема 1 здесь неприменима. С использованием аналогичных рассуждений нами было показано, что семейство логарифмических спиралей является оптимальным в этих задачах (см. [16, 18]).

**Замечание.** Далеко не все задачи малой размерности обладают семействами экстремалей в виде логарифмических спиралей. Например, в задаче наивысшей переориентации спутника, которая отличается от задачи управления ракетой отсутствием уравнений на скорости, особое управление второго порядка имеется только по одной компоненте управления (см. [20, 23]). Особого управления по всем компонентам нет, так как не выполняется условие на ранг билинейной формы из определения особой точки. Поэтому в окрестности особой (по одной компоненте управления) экстремали второго порядка имеется семейство четтеринг-экстремалей (см. [20, 23]), но не может быть семейства решений в форме логарифмических спиралей.

В следующем разделе рассмотрим задачу управления линейной системой второго порядка с квадратичным целевым функционалом, для которой размерность гамильтоновой системы равна 8 (как и для задач (10) и (11)) и которая является обобщением (в классе линейных управляемых систем) модельной задачи.

### 3. Задача стабилизации для линейной системы второго порядка малой размерности. Задача (P2):

$$\int_0^{\infty} \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = Kx + u, \quad \|u\| \leq 1, \quad x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0.$$

Здесь  $u, x, y \in \mathbb{R}^2$ ,  $K$  — произвольная невырожденная  $(2 \times 2)$ -матрица. Допустимые решения в задаче (P2) — абсолютно непрерывные функции, допустимые управления — ограниченные измеримые функции.

Нетрудно показать, что для начальных условий из достаточно малой окрестности начала координат решение задачи (P2) существует, единственно и стремится к началу координат при  $t \rightarrow \infty$ . Доказательство аналогично доказательству, приведенному в [23] для задачи со скалярным управлением.

*3.1. Необходимые и достаточные условия оптимальности.* Если  $(x(t), y(t), u_{\text{opt}}(t))$  — оптимальное решение, то, согласно принципу максимума Понтрягина, существуют такие непрерывные  $\mathbb{R}^2$ -значные функции  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  и неотрицательная константа  $\lambda_0$ , что

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_0 x - K^T \psi, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\phi, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \phi} = y, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = Kx + u_{\text{opt}}. \quad (12)$$

Здесь  $H$  — гамильтониан

$$H(x, y, \phi, \psi) = -\frac{\lambda_0}{2} \langle x, x \rangle + \langle \phi, y \rangle + \langle \psi, Kx \rangle + \langle \psi, u \rangle.$$

Управление на оптимальной траектории  $u_{\text{opt}}(t)$  определяется из условия максимума:

$$H(x(t), \phi(t), \psi(t), u_{\text{opt}}(t)) = -\frac{\lambda_0}{2} \langle x, x \rangle + \langle \phi, y \rangle + \langle \psi, Kx \rangle + \max_{\|u\| \leq 1} \langle \psi, u \rangle. \quad (13)$$

Для задачи (12)–(13) нетрудно показать, что  $\lambda_0 \neq 0$ , поэтому в дальнейшем полагаем  $\lambda_0 = 1$ .

Условие максимума (13) дает явное выражение для управления на оптимальной траектории, если  $\psi(t) \neq 0$ :  $u_{\text{opt}}(t) = \psi(t)/\|\psi(t)\|$ . Если же  $\psi = 0$ , то любое допустимое управление удовлетворяет условию максимума (13).

Приведем достаточные условия оптимальности для задачи (P2), которые будут необходимы для доказательства оптимальности логарифмических спиралей. Отметим, что далее будем предполагать, что начальные условия взяты из окрестности начала координат, для которой решения задачи (P2) существуют (и единственны).

**Предложение 1.** Пусть  $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{\phi}(t), \bar{\psi}(t), \bar{u}(t))$  – решение системы (12)-(13), удовлетворяющее условиям  $\bar{x}(0) = x^0$ ,  $\bar{y}(0) = y^0$ , и

$$\bar{x} \rightarrow 0, \quad \bar{y}(t) \rightarrow 0, \quad \bar{\phi}(t) \rightarrow 0, \quad \bar{\psi}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Тогда  $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t))$  является оптимальным решением задачи (P2).

*Доказательство.* Предположим, что для начальной точки  $(x_0, y_0)$  оптимальным является решение  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{u}(t))$ . Докажем, что

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle) dt \geq 0.$$

Так как в силу неравенства Коши–Буняковского  $\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle - \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 2\langle \bar{x}, \hat{x} - \bar{x} \rangle$ , то

$$\Delta \geq \Delta_1 = \int_0^{\infty} \langle \bar{x}, \hat{x} - \bar{x} \rangle dt.$$

Используя (12), получим

$$\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{\phi}} + K^T \bar{\psi}$$

и подставим в  $\Delta_1$ :

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \langle \dot{\bar{\phi}} + K^T \bar{\psi}, \hat{x} - \bar{x} \rangle dt$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\Delta_1 = \langle \bar{\phi}, \hat{x} - \bar{x} \rangle \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \langle \bar{\phi}, \hat{y} - \bar{y} \rangle dt + \int_0^{\infty} \langle K^T \bar{\psi}, \hat{x} - \bar{x} \rangle dt.$$

Первое слагаемое равно 0, так как  $\bar{x}(0) = \hat{x}(0) = x^0$  и функции  $\bar{x}(t)$ ,  $\hat{x}(t)$ ,  $\bar{\phi}(t)$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Вычисляя первый интеграл по частям и учитывая, что  $\dot{\bar{\psi}} = -\bar{\phi}$ , получаем:

$$\Delta_1 = \langle \bar{\psi}, \hat{y} - \bar{y} \rangle \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \langle \bar{\psi}, K(\hat{x} - \bar{x}) + (\hat{u} - \bar{u}) \rangle dt + \int_0^{\infty} \langle \bar{\psi}, K(\hat{x} - \bar{x}) \rangle dt.$$

Первое слагаемое опять же обращается в 0, так как  $\bar{y}(0) = \hat{y}(0) = y^0$  и функции  $\bar{y}(t)$ ,  $\hat{y}(t)$ ,  $\bar{\psi}(t)$  стремятся к 0 при  $t \rightarrow \infty$ . Отсюда

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} \langle \bar{\psi}, \bar{u} - \hat{u} \rangle dt.$$

В силу того, что управление  $\bar{u}(t)$  удовлетворяет условию максимума (13) вдоль траектории  $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{\phi}(t), \bar{\psi}(t))$ , имеем  $\langle \bar{\psi}, \bar{u} - \hat{u} \rangle \geq 0$ , так что  $\Delta_1 \geq 0$  и  $\Delta \geq 0$ . Таким образом, значение функционала задачи (P2) на траектории  $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$  не хуже, чем на оптимальной траектории  $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ .  $\square$

3.2. Решения гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина. Положим

$$H_0 = -\frac{1}{2}\langle x, x \rangle + \langle \phi, y \rangle + \langle \psi, Kx \rangle, \quad H_1 = \psi_1, \quad H_2 = \psi_2.$$

Введем новую систему координат, следуя той же схеме, что и для модельной задачи. Положим

$$z_{1i} = H_i, \quad z_{2i} = (\text{ad } H_0)H_i, \quad z_{3i} = (\text{ad } H_0)^2 H_i, \quad z_{4i} = (\text{ad } H_0)^3 H_i \quad i = 1, 2.$$

Тогда, в силу системы (12),

$$z_1 = \psi, \quad z_2 = -\phi, \quad z_3 = -x + K^T \psi, \quad z_4 = -y - K^T \phi$$

В координатах  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ ,  $z \in \mathbb{R}^8$ , система (12)–(13) примет вид:

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -u - KK^T z_1 + (K + K^T)z_3, \quad u = z_1 / \|z_1\|. \quad (14)$$

Заметим, что  $z_{ki}$  (в наших определениях) есть главная скобка порядка  $k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ). Таким образом, для рассматриваемой задачи размерность гамильтоновой системы совпадает с числом главных скобок порядка не более 4.

Приведем утверждение о существовании экстремалей типа спиралей в терминах координат  $z$  (в исходных координатах формулы будут иметь более громоздкий вид).

**Теорема 2.** В достаточно малой окрестности начала координат существует семейство решений системы (14) в форме логарифмических спиралей:

$$\begin{aligned} z_m(t) &= k_m(t) (T - t)^{5-m} e^{i\alpha \log |T-t|} e^{i\varphi_m(t)}, & m = \overline{1, 4}, \\ u(t) &= e^{i\alpha \log |T-t|} e^{i\varphi_0(t)}, & t \leq T, \\ z_m(t) &= u(t) = 0, & t \geq T, \end{aligned}$$

и все их возможные повороты. Здесь

$$k_m(t) = k_m^0 (1 + o(T - t)^\sigma), \quad \varphi_m(t) = \varphi_m^0 + o(T - t)^\sigma, \quad \varphi_0(t) = \varphi_0^0 + o(T - t)^\sigma \quad \text{при } t \rightarrow T - 0,$$

$$\alpha = \pm\sqrt{5}, \quad k_m^0, \varphi_m^0, \varphi_0^0 \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

*Схема доказательства теоремы 2.* В целом схема доказательства теоремы аналогична схеме доказательства соответствующего результата для гамильтоновой системы общего вида большой размерности. Отличие состоит в том, что гамильтонова система (14) записана в терминах главных скобок, отсутствуют неглавные скобки и дополнительные функции  $\omega$ .

1. Для гамильтоновой системы задачи (P2) проводим разрешение особенности (раздутие особенности) в окрестности особой точки.
2. Показываем, что существует инвариантное подпространство, на котором раздутие системы для задачи (P2) совпадает с раздутием системы для задачи (P1).
3. Доказываем, что периодическое решение для задачи (P1) есть также гиперболический цикл для задачи (P2).

*Раздутие особенности.* Раздутием особенности в начале координат для системы (14) назовем следующее отображение  $B : z \mapsto (\mu, \tilde{z})$ :

$$\tilde{z}_4 = \frac{z_4}{\mu}, \quad \tilde{z}_3 = \frac{z_3}{\mu^2}, \quad \tilde{z}_2 = \frac{z_2}{\mu^3}, \quad \tilde{z}_1 = \frac{z_1}{\mu^4}, \quad \mu^{24} = \frac{1}{4} \left( \left| \frac{z_4}{A_3} \right|^{24} + \left| \frac{z_3}{A_2} \right|^{12} + \left| \frac{z_2}{A_1} \right|^8 + \left| \frac{z_1}{A_0} \right|^6 \right), \quad (15)$$

где  $\mu \in \mathbb{R}_+$ ,  $A_j$ ,  $j = \overline{0, 3}$ , определены в (6) и  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^8$  лежит на многообразии

$$S = \left\{ \left| \frac{\tilde{z}_4}{A_3} \right|^{24} + \left| \frac{\tilde{z}_3}{A_2} \right|^{12} + \left| \frac{\tilde{z}_2}{A_1} \right|^8 + \left| \frac{\tilde{z}_1}{A_0} \right|^6 = 4 \right\}.$$

Система (14) обыкновенных дифференциальных уравнений в координатах  $(\mu, \tilde{z})$  имеет вид

$$\begin{aligned}\mu' &= \mu\mathcal{M}, & u &= \tilde{z}_1/\|\tilde{z}_1\|, \\ \tilde{z}'_1 &= \tilde{z}_2 - 4\tilde{z}_1\mathcal{M}, & \tilde{z}'_3 &= \tilde{z}_4 - 2\tilde{z}_3\mathcal{M}, \\ \tilde{z}'_2 &= \tilde{z}_3 - 3\tilde{z}_2\mathcal{M}, & \tilde{z}'_4 &= -u - \mu^4 K K^T \tilde{z}_1 + \mu^2(K + K^T)\tilde{z}_3 - \tilde{z}_4\mathcal{M},\end{aligned}\quad (16)$$

где  $'$  обозначает дифференцирование по переменной  $s$ :

$$ds = \frac{1}{\mu} dt, \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mu, \tilde{z}) &= \frac{1}{96} \left( \frac{-24}{|A_3|^{24}} |\tilde{z}_4|^{22} \left\langle \tilde{z}_4, \frac{\tilde{z}_1}{|\tilde{z}_1|} \right\rangle + \frac{12}{|A_2|^{12}} |\tilde{z}_3|^{10} \langle \tilde{z}_3, \tilde{z}_4 \rangle + \frac{8}{|A_1|^8} |\tilde{z}_2|^6 \langle \tilde{z}_2, \tilde{z}_3 \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{|A_0|^6} |\tilde{z}_1|^4 \langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle + \mu^2 \frac{24}{|A_3|^{24}} |\tilde{z}_4|^{22} \langle \tilde{z}_4, (K + K^T)\tilde{z}_3 \rangle - \mu^4 \frac{24}{|A_3|^{24}} |\tilde{z}_4|^{22} \langle \tilde{z}_4, K K^T \tilde{z}_1 \rangle \right).\end{aligned}$$

Решения системы (16) лежат на цилиндре  $Q = S \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$ . Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(\tilde{z}) &= \frac{1}{96} \left( \frac{-24}{|A_3|^{24}} |\tilde{z}_4|^{22} \left\langle \tilde{z}_4, \frac{\tilde{z}_1}{|\tilde{z}_1|} \right\rangle + \frac{12}{|A_2|^{12}} |\tilde{z}_3|^{10} \langle \tilde{z}_3, \tilde{z}_4 \rangle + \frac{8}{|A_1|^8} |\tilde{z}_2|^6 \langle \tilde{z}_2, \tilde{z}_3 \rangle + \frac{6}{|A_0|^6} |\tilde{z}_1|^4 \langle \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \rangle \right), \\ \mathcal{M}_1(\tilde{z}) &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{|A_3|^{24}} |\tilde{z}_4|^{22} \langle \tilde{z}_4, (K + K^T)\tilde{z}_3 - \mu^2 K K^T \tilde{z}_1 \rangle \right);\end{aligned}$$

тогда

$$\mathcal{M}(\mu, \tilde{z}) = \mathcal{M}_0(\tilde{z}) + \mu^2 \mathcal{M}_1(\tilde{z}).$$

Для задачи (P1)  $K = 0$  и, следовательно,  $\mathcal{M}_1(\tilde{z}) = 0$ . Гамильтонова система задачи (P1) в координатах  $(\mu, \tilde{z})$  примет вид

$$\begin{aligned}\mu' &= \mu\mathcal{M}_0(\tilde{z}), & u &= \tilde{z}_1/\|\tilde{z}_1\|, \\ \tilde{z}'_1 &= \tilde{z}_2 - 4\tilde{z}_1\mathcal{M}_0(\tilde{z}), & \tilde{z}'_3 &= \tilde{z}_4 - 2\tilde{z}_3\mathcal{M}_0(\tilde{z}), \\ \tilde{z}'_2 &= \tilde{z}_3 - 3\tilde{z}_2\mathcal{M}_0(\tilde{z}), & \tilde{z}'_4 &= -u - \tilde{z}_4\mathcal{M}_0(\tilde{z}).\end{aligned}\quad (18)$$

Следовательно, система (16) является малым возмущением системы (18). Заметим, что на нулевом сечении цилиндра  $Q_0 = Q \cap \{\mu = 0\}$  системы (16) и (18) совпадают и имеют вид

$$\begin{aligned}\mu &= 0, & \tilde{u} &= \tilde{z}_1/\|\tilde{z}_1\|, \\ \tilde{z}'_1 &= \tilde{z}_2 - 4\mathcal{M}_0\tilde{z}_1, & \tilde{z}'_3 &= \tilde{z}_4 - 2\mathcal{M}_0\tilde{z}_3, \\ \tilde{z}'_2 &= \tilde{z}_3 - 3\mathcal{M}_0\tilde{z}_2, & \tilde{z}'_4 &= -\tilde{u} - \mathcal{M}_0\tilde{z}_4.\end{aligned}\quad (19)$$

*Периодическое решение.* Используя известные явные решения в виде логарифмических спиралей (6) для задачи (P1), выражения (15) и (17), получим решение системы (19)

$$\mu^*(s) = 0, \quad \tilde{z}_m^*(s) = A_{m-1} e^{-i\alpha s}, \quad m = \overline{1, 4}, \quad \tilde{u}^*(s) = e^{-i\alpha s},$$

которое является частным решением систем (16) и (18). Заметим, что это решение является циклом; обозначим его через  $\xi^0(s) = (0, \tilde{z}^*(s))$ . С помощью непосредственных вычислений (аналогично доказательству теоремы для общей задачи; см. [8]) получим характеристические показатели цикла  $\xi^0(s)$ :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 4, \quad \lambda_4 = 5, \quad \lambda_5 = 24, \\ \lambda_{6,7} &= \frac{1}{2} \left( 5 + \sqrt{47 \pm 12\sqrt{34}i} \right) \approx 4,65903 \pm 4,0511i, \\ \lambda_{8,9} &= \frac{1}{2} \left( 5 - \sqrt{47 \pm 12\sqrt{34}i} \right) \approx 0,340974 \pm 4,0511i.\end{aligned}$$

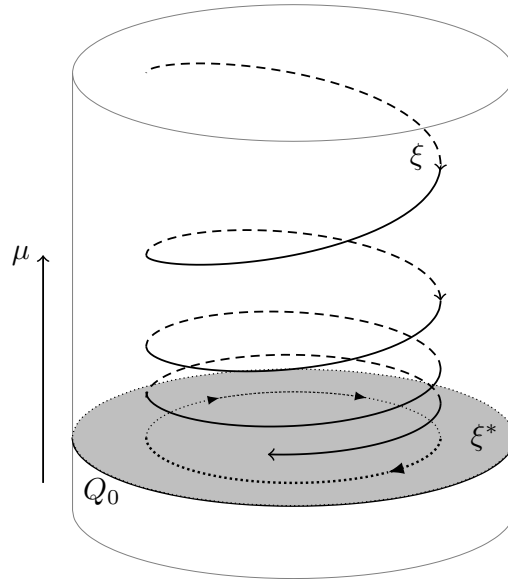


Рис. 6. Решения системы (16).

Периодическое решение  $\xi^0(s)$  имеет ровно один характеристический показатель с отрицательной действительной частью, 7 характеристических показателей с положительной действительной частью и ровно один нулевой характеристический показатель. Это приводит к следующему результату.

**Лемма 1.** *Периодическое решение  $\xi^0(s)$  является гиперболическим циклом.*

Таким образом, цикл  $\xi^0(s)$  не является орбитально устойчивым: имеет место сжатие вдоль направления  $\mu$  и расширение вдоль остальных направлений (см. [10]). Применяя к  $\xi^0(s)$  теорему об инвариантных многообразиях (см. [12]), получим, что система (16) имеет решение  $\xi(s) = (\mu(s), \tilde{z}(s)) \in \mathbb{R}^9$ , удовлетворяющее условию

$$\|\xi(s + s_0) - \xi^0(s)\| e^{cs} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow +\infty \quad (20)$$

для некоторых  $s_0$  и  $c > 0$  (параметр  $c$  может быть выбран сколь угодно близким к 1).

Таким образом, построено двумерное устойчивое многообразие цикла  $\xi^0(s)$  для системы (16) (см. рис. 6). В следующем пункте покажем, что это многообразие соткано из логарифмических спиралей.

*Обратный ход процедуры раздутия особенности.* Пусть  $T$  — момент попадания решения  $z(t)$  системы (14) в начало координат и  $\xi(s)$  — решение системы (16), удовлетворяющее условию (20). Из условия (20) могут быть получены [16] следующие оценки:

$$\begin{aligned} \mu(s) &= \kappa e^{-s} (1 + o(e^{-c_\mu s})) && \text{при } s \rightarrow \infty, \\ e^{-s(t)} &= \kappa^{-1} (T - t) \left( 1 + o(e^{-c_\mu s(t)}) \right) && \text{при } t \rightarrow T - 0, \\ e^{-i\alpha s(t)} &= e^{i\alpha \log(T-t)} e^{-i\alpha (\log \kappa + o((T-t)^{c_\mu}))} && \text{при } t \rightarrow T - 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\kappa$  и  $c_\mu$  — некоторые положительные постоянные.

Применяя (21) (аналогично [8]) к решению  $\xi(s)$  системы (16), получим окончательные асимптотические формулы для решения  $z(t)$  гамильтоновой системы (14) в форме логарифмических спиралей:

$$\begin{aligned} z_m(t) &= |A_{m-1}| (T - t)^{5-m} (1 + o((T - t)^\sigma)) e^{i \operatorname{Arg} A_{m-1}} e^{i\alpha \log(T-t)} e^{i\alpha (\gamma + o((T-t)^\sigma))}, \\ u(t) &= e^{i \operatorname{Arg}(A_0)} e^{i\alpha \log(T-t)} e^{i\alpha (\gamma + o((T-t)^\sigma))}, \quad \text{при } t \rightarrow T - 0, \end{aligned}$$



где  $\sigma > 0$ ,  $\gamma = s_0 - \log \kappa \in \mathbb{R}$ . Таким образом, теорема 2 доказана.  $\square$

**4. Заключение.** В работе исследовалась окрестность особой экстремали второго порядка в задаче стабилизации для линейной системы второго порядка малой размерности. Управление двумерно и лежит в круге. Задача является линейным возмущением аналога задачи Фуллера с двумерным управлением. Показано, что для данного класса задач сохраняются оптимальные решения в виде логарифмических спиралей. Заметим, что на настоящий момент данный класс задач является максимально широким классом, для которого доказана оптимальность решений в форме логарифмических спиралей. Мы надеемся, что полученные результаты могут быть полезны как с теоретической точки зрения, так и для приложений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зеликин М. И., Борисов В. Ф.* Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Тр. МИАН СССР. — 1991. — 197. — С. 85–166.
2. *Зеликин М. И., Локуцкий Л. В., Хильдебранд Р.* Типичность фрактально-хаотической структуры интегральных воронок в гамильтоновых системах с разрывной правой частью // Совр. мат. Фундам. направл. — 2015. — 56. — С. 5–128.
3. *Зеликин М. И., Мельников Н. Б., Хильдебранд Р.* Топологическая структура фазового портрета типичного слоя оптимального синтеза для задач с накоплением переключений // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2001. — 233. — С. 125–152.
4. *Манита Л. А.* Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задачах управления манипуляторами // Прикл. мат. мех. — 2000. — 64, № 1. — С. 19–28.
5. *Манита Л. А.* Оптимальный особый режим и режим с учащающимися переключениями в задаче управления колебаниями струны с закрепленными концами // Прикл. мат. мех. — 2010. — 74, № 5. — С. 856–863.
6. *Ронжина М. И.* Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления перевернутым двухзвенным маятником // Прикл. мат. мех. — 2016. — 80, № 1. — С. 24–33.
7. *Ронжина М. И., Манита Л. А., Локуцкий Л. В.* Решения гамильтоновой системы с двумерным управлением в окрестности особой экстремали второго порядка // Усп. мат. наук. — 2021. — 76, № 5 (461). — С. 201–202.
8. *Ронжина М. И., Манита Л. А., Локуцкий Л. В.* Окрестность особого режима второго порядка в задачах с управлением из круга // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2021. — 315. — С. 222–236.
9. *Chukanov S. V., Milyutin A. A.* Qualitative study of singularities for extremals of quadratic optimal control problem // Russ. J. Math. Phys. — 1994. — 2, № 1. — P. 31–48.
10. *Farkas M.* Periodic Motions. — New York: Springer-Verlag, 1994.
11. *Goh B. S.* Optimal singular rocket and aircraft trajectories // Proc. 2008 Chinese Control and Decision Conference (Yantai, China, July 2-4, 2008). — IEEE, 2008. — P. 1531–1536.
12. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. — New York: Wiley, 1964.
13. *Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G.* Singular extremals // in: Topics in Optimization (Leitmann G., ed.). — New York: Academic Press, 1967. — P. 63–101.
14. *Kupka I.* The ubiquity of Fuller’s phenomenon // in: Nonlinear Controllability and Optimal Control. — New York: Marcel Dekker, 1990. — P. 313–350.
15. *Lawden D. F.* Optimal Trajectories for Space Navigation. — London: Butterworths, 1963.
16. *Manita L. A., Ronzhina M. I.* Optimal spiral-like solutions near a singular extremal in a two-input control problem // Discr. Cont. Dyn. Syst. B. — 2022. — 27, № 6. — P. 3325–3343.
17. *Robbins H. M.* A generalized Legendre–Clebsch condition for the singular cases of optimal control // IBM J. Res. Develop. — 1967. — 11, № 4. — P. 361–372.
18. *Ronzhina M. I., Manita L. A.* Singularity of optimal control for a Timoshenko beam // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1740, № 012068.
19. *Ronzhina M. I., Manita L. A.* Spiral-like extremals near a singular surface in a rocket control problem // Regul. Chaotic Dyn. — 2023. — 28, № 2. — P. 148–161.
20. *Seywald, H., Kumar R. R.* Singular control in minimum time spacecraft reorientation // J. Guid. Control Dyn. — 1993. — 16, № 4. — P. 686–694.

21. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft using two controls// J. Guid. Control Dyn. — 1999. — 22, № 5. — P. 682–694.
22. *Witt E.* Die Unterringe der freien Lieschen Ringe// Math. Z. — 1956. — 64. — P. 195–216.
23. *Zelikin M. I., Borisov V. F.* Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering. — Boston: Birkhäuser, 1994.
24. *Zelikin M. I., Borisov V. F.* Optimal chattering feedback control// J. Math. Sci. — 2003. — 114. — P. 1227–1344.
25. *Zelikin M. I., Manita L. A.* Optimal control for a Timoshenko beam// C. R. Méc. Acad. Sci. — 2006. — 334, № 5. — P. 292–297.
26. *Zhu J., Trélat E., Cerf M.* Minimum time control of the rocket attitude reorientation associated with orbit dynamics// SIAM J. Control Optim. — 2016. — 54, № 1. — P. 391–422.

### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ронжина Мария Игоревна

Российский государственный университет нефти и газа

(национальный исследовательский университет) имени И. М. Губкина, Москва

E-mail: ronzhina.m@gubkin.ru

Манита Лариса Анатольевна

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,

Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова

E-mail: lmanita@hse.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 89–98  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-89-98

УДК 517.95, 519.63, 51-73

## О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2024 г. Е. В. СЕРЕГИНА, М. А. СТЕПОВИЧ, М. Н. ФИЛИПОВ

**Аннотация.** Изложен алгоритм применения проекционного метода Галеркина для решения двумерного нестационарного уравнения диффузии с переменным коэффициентом. Искомая концентрация неравновесных неосновных носителей заряда найдена в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе модифицированных функций Лагерра. Приведены результаты расчетов для параметров, характерных для диффузии экситонов в монокристаллическом нитриде галлия.

**Ключевые слова:** уравнение диффузии, проекционный метод Галеркина, функции Лагерра, концентрация неосновных носителей заряда, порядковая оценка погрешности, модуль непрерывности.

## ON THE APPLICATION OF THE GALERKIN PROJECTION METHOD TO THE NONSTATIONARY DIFFUSION EQUATION WITH A VARIABLE COEFFICIENT

© 2024 E. V. SEREGINA, M. A. STEPovich, M. N. FILIPPOV

**ABSTRACT.** In this paper, we present an algorithm for applying the Galerkin projection method to solve a two-dimensional nonstationary diffusion equation with a variable coefficient. The concentration of nonequilibrium minority charge carriers was found in the form of a partial sum of a double Fourier series using a system of modified Laguerre functions. The results of calculations are presented for parameters characteristic of exciton diffusion in single-crystal gallium nitride.

**Keywords and phrases:** diffusion equation, Galerkin projection method, Laguerre functions, concentration of minority charge carriers, order error estimate, modulus of continuity.

**AMS Subject Classification:** 35Q81, 35M99, 65T99

**1. Введение.** В [11] рассмотрен процесс нестационарной диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) в однородной полупроводниковой мишени после прекращения воздействия низкоэнергетического (менее 10 кэВ) остро сфокусированного электронного пучка, электронного зонда, на полупроводниковую мишень. Рассматривался один канал рекомбинации, и поэтому электрофизические параметры мишени — коэффициенты уравнения диффузии — при проведении расчетов полагались постоянными. В то же время имеющиеся экспериментальные результаты (см. [5, 6, 10]) позволяют предположить наличие нескольких каналов рекомбинации в

---

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда и Правительства Калужской области (проект № 23-21-10069).

этих мишенях. В настоящей работе рассмотрена математическая модель, описывающая два механизма рекомбинации неравновесных ННЗ при выключении внешнего воздействия, при этом зависимость числа неравновесных ННЗ от времени описывается двумя экспонентами. В этом случае коэффициенты уравнения диффузии будут переменными.

Ранее метод Галеркина эффективно применялся для решения стационарного уравнения диффузии с постоянными коэффициентами [3], и была получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному уравнению диффузии. Настоящая работа продолжает такие исследования. Рассмотрение проведено для нестационарного уравнения диффузии, описывающего зависимость от времени концентрации неравновесных ННЗ, генерированных электронным зондом в однородном полупроводнике, после прекращения действия внешнего низкоэнергетического источника.

**2. Постановка задачи.** При стационарном облучении полупроводникового материала электронным зондом в последнем генерируются неравновесные ННЗ, после чего происходит их диффузия и рекомбинация в объёме полупроводника. В математических моделях, описывающих стационарное квазиравновесное состояние, скорости генерации и рекомбинации ННЗ считаются одинаковыми [4, 8]. Но после прекращения действия электронного зонда генерации ННЗ не происходит, и концентрация ННЗ в полупроводнике  $c(x, y, t)$  при наличии зависимости времени жизни ННЗ  $\tau$  от времени  $t$  может быть найдена как решение следующего нестационарного уравнения диффузии [7]:

$$\frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t} = D\Delta c(x, y, t) - \frac{c(x, y, t)}{\tau(t)} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} c(x, y, 0) = n(x, y), \quad c(\pm\infty, y, t) = 0, \quad c(x, \pm\infty, t) = 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — двумерный оператор Лапласа,  $D$  — коэффициент диффузии и  $\tau(t)$  — зависимость времени жизни ННЗ от времени после выключения импульса возбуждения. Функция  $n(x, y)$  удовлетворяет стационарному дифференциальному уравнению, описывающему диффузию ННЗ в состоянии квазиравновесия (до выключения электронного пучка):

$$D\Delta n(x, y) - \frac{n(x, y)}{\tau} = -\rho(x, y). \quad (3)$$

В состоянии квазиравновесия  $\tau = \text{const}$ , а  $\rho(x, y)$  — функция, которая описывает концентрацию генерированных в единицу времени неравновесных ННЗ до их диффузии в мишени. Функция  $\rho(x, y)$  пропорциональна  $\rho^*(x, y)$  — плотности мощности, выделяемой электронами пучка в мишени; для полупроводниковых материалов  $\rho(x, y)$  может быть получена делением  $\rho^*(x, y)$  на энергию образования электронно-дырочной пары или экситона. В случае узкого электронного пучка, электронного зонда, зависимость  $\rho^*(x, y)$  может быть описана функцией распределения типа Гаусса, что даёт для правой части (3) соотношение, позволяющее найти  $\rho(x, y)$  (см. [8, 11]):

$$\rho^*(x, y) = \frac{1,085(1-\eta)E_0}{\pi^{3/2}a_1^2z_{ms}(1-\eta+\eta z_{ss}/z_{ms})} \left\{ \exp\left\{-\left[\frac{x^2+y^2}{a_1^2}\right]\right\} + \frac{\eta a_1^2}{(1-\eta)a_2^2} \exp\left\{-\left[\frac{x^2+y^2}{a_2^2}\right]\right\} \right\}.$$

Здесь  $E_0$  — энергия электронов зонда, рассеянная в мишени в единицу времени,  $z_{ms}$  — глубина максимальных потерь энергии первичными электронами, испытавшими малоугловое рассеяние и поглощёнными в мишени;  $z_{ss}$  — глубина максимальных потерь энергии обратно рассеянными электронами, вышедшими из мишени;  $\eta$  — коэффициент обратного рассеяния электронов зонда. Параметры  $a_1$  и  $a_2$  могут быть определены из соотношений

$$a_1^2 = z_{ms}^2 + 0,72 d_z^2, \quad a_2^2 = 0,25 z_{ss}^2 + 0,72 d_z^2,$$

где  $d_z$  — диаметр электронного зонда; для остро сфокусированного пучка электронов  $d_z = 0$ .

При построении математической модели нестационарной диффузии с переменным коэффициентом может использоваться подход, предложенный нами в [7] для описания диффузии экситонов, генерированных низкоэнергетическим электронным зондом в монокристаллическом нитриде галлия — перспективном материале полупроводниковой микро-, оптоэлектроники и СВЧ-техники. При наличии двух независимых каналов рекомбинации профиль спада концентрации экситонов может быть описан суммой двух экспонент и их эффективное время жизни  $\tau(t)$  в уравнении (1) находится по следующей формуле (см. [7]):

$$\tau(t) = -t / \ln \left( \alpha \exp(-t/\tau_1) + (1 - \alpha) \exp(-t/\tau_2) \right).$$

Здесь  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — время жизни экситонов для первого и второго канала рекомбинации соответственно,  $\alpha$  — безразмерный параметр.

Используя замену

$$c(x, y, t) = \exp \left( - \int_0^t \frac{d}{\tau(s)} \right) v(x, y, t),$$

от задачи (1), (2) перейдем к уравнению

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} = D \Delta v(x, y, t) \quad (4)$$

с начальным условием

$$v(x, y, 0) = n(x, y) \quad (5)$$

В [12] получено решение задачи (4), (5):

$$V(r, t) = \frac{1}{2Dt} \int_0^{+\infty} \exp \left( - \frac{r^2 + \xi^2}{4Dt} \right) I_0 \left( \frac{r\xi}{2Dt} \right) n(\xi) \xi d\xi.$$

Тогда решение исходной задачи (1)–(3) примет следующий вид:

$$c(r, t) = \frac{1}{2Dt} \exp \left( - \int_0^t \frac{ds}{\tau(s)} \right) \int_0^{+\infty} \exp \left( - \frac{r^2 + \xi^2}{4Dt} \right) I_0 \left( \frac{r\xi}{2Dt} \right) n(\xi) \xi d\xi. \quad (6)$$

Аналитическое решение задачи (1), (2) с постоянным коэффициентом  $\tau$  в уравнении (1) (т.е. если имеется один канал рекомбинации) имеет вид (см. [12]):

$$c(r, t) = \frac{\exp(-t/\tau)}{2Dt} \int_0^{+\infty} \exp \left( - \frac{r^2 + \xi^2}{4Dt} \right) I_0 \left( \frac{r\xi}{2Dt} \right) n(\xi) \xi d\xi. \quad (7)$$

Здесь  $r$  — полярный радиус;  $I_0(x)$  — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого рода.

В [3, 11] рассмотрены некоторые возможности использования проекционного метода Галеркина для моделирования двумерной диффузии ННЗ с постоянными электрофизическими параметрами в полупроводниковом материале, и получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному уравнению диффузии. В настоящей работе предлагается использование этого метода для нахождения концентрации ННЗ с переменным электрофизическим параметром и в качестве примера использовано два независимых канала рекомбинации.

**3. Проекционная аппроксимация исходной модели, основанная на применении метода Галеркина.** Переходя к цилиндрической системе координат, от уравнения (1) перейдем к следующему уравнению:

$$D\tau(t)r \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial r^2} + D\tau(t) \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} - \tau(t)r \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} - rc(r, t) = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями

$$c(r, 0) = n(r), \quad c(+\infty, t) = 0. \quad (9)$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$D\tau r \frac{d^2 n(r)}{dr^2} + D\tau \frac{dn(r)}{dr} - rn(r) = -\tau r \rho(r). \quad (10)$$

Сравнение формул (6) и (7) позволяет привести следующий алгоритм метода Галеркина.

Для нахождения приближенного решения уравнения (8)–(10) найдем сначала приближенное решение уравнения (8) с постоянным коэффициентом  $\tau$ . Поскольку одно из граничных условий задано на бесконечности, то для реализации проекционного метода Галеркина выберем двумерный базис из модифицированных функций Лагерра с параметрами, ускоряющими сходимость ряда (см. [9]):

$$\varphi_{i,j}(r, t) = \varphi_i^{\alpha_1, \gamma_1}(r) \varphi_j^{\alpha_2, \gamma_2}(t) = \exp\left(-\frac{\gamma_1 r}{2}\right) L_i(\gamma_1 r; \alpha_1) \exp\left(-\frac{\gamma_2 t}{2}\right) L_j(\gamma_2 t; \alpha_2),$$

которые определяются через многочлены Чебышева–Лагерра  $L_i(\gamma_1 r; \alpha_1)$  по переменной  $r$  и многочлены  $L_j(\gamma_2 t; \alpha_2)$  по переменной  $t$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ . Здесь параметры  $\alpha_1 > -1$ ,  $\alpha_2 > -1$  и  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 = 2/\tau > 0$  используются для оптимизации вычислительной схемы.

В методе Галеркина предполагается, что неизвестная функция  $c(r, t)$  может быть достаточно точно представлена приближенным решением:

$$c_{m+1}(r, t) = c_m(r, t) + c_0(r, t), \quad (11)$$

где

$$c_m(r, t) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} \varphi_i^{\alpha_1, \gamma_1}(r) \varphi_j^{\alpha_2, \gamma_2}(t)$$

— прямоугольная частичная сумма двойного ряда Фурье–Лагерра порядка  $m \times m$  функции  $c(r, t)$ ,

$$c_0(r, t) = c_0(r) \frac{\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t)}{\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)}, \quad c_0(r) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^n \varphi_i^{\alpha_1, \gamma_1}(r) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} \varphi_i^{\alpha_1, \gamma_1}(r) \varphi_j^{\alpha_2, \gamma_2}(0).$$

Функция  $c_0(r, t)$  введена, чтобы удовлетворить граничным условиям,  $c_i^n$  — коэффициенты разложения функции  $n(r)$ , которые находятся из решения уравнения (6), а неизвестные коэффициенты разложения  $c_{ij}$  искомой функции  $c(r, t)$  согласно методу Галеркина определяются из решения следующей системы уравнений:

$$(R, \varphi_k^{\alpha_1, \gamma_1}(r) \varphi_l^{\alpha_2, \gamma_2}) = 0, \quad k, l = \overline{0, m-1}, \quad (12)$$

где

$$R = D\tau r \frac{\partial^2 c_{m+1}(r, t)}{\partial r^2} + D\tau \frac{\partial c_{m+1}(r, t)}{\partial r} - \tau r \frac{\partial c_{m+1}(r, t)}{\partial t} - r c_{m+1}(r, t)$$

— невязка уравнения (8).

Обозначим столбцы (растянутые в столбцы матрицы) из коэффициентов разложения неизвестной функции  $c(r, t)$  и функции  $n(r)$  по выбранному базису через  $C_{mm}$  и  $C_m^n$  соответственно. Используя кронекерово произведение, введём матрицы дифференцирования по переменной  $r$  и по переменной  $t$ :

$$D_{mm}^r = D_m^{\gamma_1} \otimes E_m, \quad D_{mm}^t = E_m \otimes D_m^{\gamma_2},$$

где  $E_m$  — единичная матрица, а  $D_m^\gamma$  — матрица дифференцирования в одномерном базисе из модифицированных функций Лагерра, элементы которой находятся с помощью элементарных алгебраических операций (см. [3]):

$$d_{ij} = \begin{cases} -\gamma/2, & i = j, \\ -\gamma, & i < j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

Обозначим через  $B_1$  и  $B_2$  матрицы, элементы которых находятся по формулам

$$b_{ij}^1 = \begin{cases} \gamma_1(j-1)/4, & i+1=j, \\ \gamma_1(1+3\alpha_1/4-(i-1)/4), & j+1=i, \\ \gamma_1(3/4+\alpha_1/4-i/2), & i=j, \\ 0, & i+1 < j, \\ \gamma_1(1+\alpha_1), & j+1 < i, \end{cases} \quad b_{ij}^2 = \begin{cases} -i/\gamma_1, & i+1=j, \\ -(i-1+\alpha_1)/\gamma_1, & j+1=i, \\ (2i-1+\alpha_1)/\gamma_1, & i=j, \\ 0, & i+1 < j, \\ 0, & j+1 < i, \end{cases}$$

которые устанавливаются на основании известных рекуррентных соотношений для функций Лагерра. Затем, аппроксимируя дифференциальное уравнение (10), имеем соответствующее матричное уравнение:

$$(D\tau B_1^T + D\tau D^{\gamma_1} - B_2^T)C^n = \tau C^\Phi. \quad (13)$$

Здесь  $C^\Phi$  — столбец из коэффициентов разложения функции, стоящей в правой части уравнения (10). Из уравнения (13), находим столбец  $C^n$ .

Далее введем матрицы

$$D_{mm}^{r2} = B_1^T \otimes E_m, \quad D_{mm}^{t2} = B_2^T \otimes D_m^{\gamma_2}, \quad I_{mm} = B_2^T \otimes E_m.$$

Перепишем систему (8) в матричном виде:

$$(D\tau D_{mm}^{r2} - \tau D_{mm}^{t2} + D\tau D_{mm}^r + \tau \tilde{D}_{mm}^t - I_{mm})C_{mm} = \tau C_{mm}^{\Phi_1}, \quad (14)$$

где  $\tilde{D}_{mm}^t = B_2^T \otimes B_3$  — матрица с элементами  $b_{ij}^3 = -\gamma_2 \Gamma(\alpha_2 + i)/(i-1)!$ , а столбец  $C_{mm}^{\Phi_1}$  находится путем растяжения матрицы:

$$C^{\Phi_1} = B_2^T C_m^n (-\gamma_2 \varphi_m^{\gamma_2}(0))^T.$$

Здесь  $\varphi_m^{\gamma_2}(t)$  — столбец из  $m$  первых базисных функций.

Подстановка величин  $c_{ij}$ , определяемых из решения системы уравнений (14), в формулу (11), дает приближенное решение. Найденное приближенное решение уравнения (8) с постоянным коэффициентом  $\tau$  фактически представляет собой разложение в ряд Фурье функции

$$V(r, t) = \exp \frac{t}{\tau} c(r, t) \approx V_m(r, t) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^v \varphi_i^{\alpha_1, \gamma_1}(r) L_j \left( \frac{2t}{\tau}; \alpha_2 \right) + c_0(r) L_m \left( \frac{2t}{\tau} \right).$$

Тогда искомое приближенное решение уравнения (8) с переменным коэффициентом в силу (6) может быть найдено по формуле

$$c(r, t) \approx \exp \left( - \int_0^t \frac{ds}{\tau(s)} \right) V_m(r, t).$$

Интеграл в последней формуле может быть найден приближенно путем разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора.

**4. Условие сходимости.** Используя результаты работы [3], нетрудно установить оценку невязки неоднородного уравнения (8) с постоянным коэффициентом  $\tau$  и с функцией  $f(r, t) \in L_2$ , стоящей в правой части этого уравнения и имеющей непрерывные частные производные до порядка  $2n$  по обоим пространственным направлениям. Покажем, что невязка  $R$  сходится к нулю в среднем (в пределе при  $m \rightarrow \infty$ ). Следуя [1], введем обозначения:

$$D = r \frac{d^2}{dr^2} + (\alpha_1 - r + 1) \frac{d}{dr} + t \frac{d^2}{dt^2} + (\alpha_2 - t + 1) \frac{d}{dt};$$

$L_2^n(D)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , — класс таких функций  $f$ , что функции

$$\tilde{f}(r, t) = f(r, t) \exp \left( \frac{\gamma_1 r}{2} \right) \exp \left( \frac{\gamma_2 t}{2} \right) \in L_2$$

имеют обобщенные частные производные в смысле Леви  $\partial^k \tilde{f}(r, t) / \partial r^i \partial t^j$ ,  $i + j = k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , принадлежащие пространству  $L_2$ , для которых  $D^n \tilde{f} \in L_2$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , где  $D^0 \tilde{f} = \tilde{f}$ ,  $D^n \tilde{f} =$

$D(D^{n-1}\tilde{f})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $L_2^0(D) = L_2$ . Далее нам понадобится вспомогательная теорема, которой будем пользоваться ниже.

**Теорема 4.1.** Для любой функции  $f(r, t) \in L_2^n(D)$  справедлива оценка (см. [1, 3])

$$\|f - S_{m,m}(f)\| \leq \left[1 - (1-h)^m\right]^{-k} m^{-n} \Omega_k(D^n \tilde{f}; h), \quad (15)$$

где  $n = 0, 1, \dots$ ,  $0 < h < 1$ . Величины  $\Omega_k(D^n \tilde{f}; h)$  — обобщённые модули непрерывности функции  $D^n \tilde{f}$ ,

$$S_{m,m}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^f \varphi_i^{\alpha_1, \gamma_1}(r) \varphi_j^{\alpha_2, \gamma_2}(t)$$

— прямоугольная частичная сумма двойного ряда Фурье функции  $f(r, t)$ .

Если погрешности в исходных данных и погрешности вычислений отсутствуют, а учитываются лишь погрешности аппроксимаций, то, опираясь на результаты работы [3], в которой получены оценки для параметров  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , аналогично установим оценку для невязки при  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ .

**Теорема 4.2.** Пусть функция  $f(r, t) \in L_2$ ,  $n > 2$ , имеет непрерывные частные производные до порядка  $2n$  по обоим пространственным направлениям. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|R\|_{L_2} < \left( \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)}}{\gamma_1} (3D\tau + 2\tau + 1) + 2D\tau \right) \left[1 - (1 - m^{-1})^m\right]^{-k} m^{-n} \Omega(m^{-1}) + \\ + O(m^{-n+5/4})\omega(m^{-1}), \quad \alpha_2 \geq 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Здесь  $\Omega(m^{-1})$  — мажоранта обобщённых модулей непрерывности для функций из пространства  $L_2$ , а  $\omega(m^{-1})$  — заданная мажоранта модулей непрерывности дифференцируемых функций.

*Доказательство.* Для точного решения имеем

$$D\tau r \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial r^2} + D\tau \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} - \tau r \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} - rc(r, t) = -f(r, t).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|R\|_{L_2} \leq D\tau \|r\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r}} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{c}(r, t)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \tilde{c}_{m+1}(r, t)}{\partial r^2} \right\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r} t^{\alpha_2} e^{-t}} + \\ + D\tau \left\| \frac{\partial \tilde{c}(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{c}_{m+1}(r, t)}{\partial r} \right\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r} t^{\alpha_2} e^{-t}} + \|r\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r}} \left\| \tilde{c}(r, t) - \tilde{c}_{m+1}(r, t) \right\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r} t^{\alpha_2} e^{-t}} + \\ + \tau \|r\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r}} \left\| \frac{\partial \tilde{c}(r, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{c}_{m+1}(r, t)}{\partial t} \right\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r} t^{\alpha_2} e^{-t}}.$$

Обозначим слагаемые в правой части последнего неравенства через  $S_1, \dots, S_4$  и воспользуемся оценкой (15) и возможностью дифференцирования рядов Фурье—Лагерра (см. [1–3]), т.е.

$$S_1 = D\tau \|r\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r}} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{c}(r, t)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \tilde{c}_{m+1}(r, t)}{\partial r^2} \right\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r} t^{\alpha_2} e^{-t}} \leq \\ \leq \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)} D\tau}{\gamma_1} \left[1 - (1-h)^m\right]^{-k} m^{-n} \Omega_k \left( D^n \left( \tilde{c}_{rr}''(r, t) + \gamma_1 \tilde{c}_r'(r, t) + (\gamma_1^2/4) \tilde{c}(r, t) \right); h \right) + \\ + \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)} D\tau}{\gamma_1} \left[1 - (1-h)^m\right]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1} \left( D^n \left( \gamma_1 \tilde{c}_r'(r, t) + (\gamma_1^2) \tilde{c}(r, t) \right); h \right) + \\ + \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)} D\tau}{\gamma_1} \left[1 - (1-h)^m\right]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left( D^{n+1} \left( (\gamma_1^2/4) \tilde{c}(r, t) \right); h \right),$$



$$S_2 = D\tau \left\| \frac{\partial \tilde{c}(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{c}_{m+1}(r, t)}{\partial r} \right\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r} t^{\alpha_2} e^{-t}} \leq \\ \leq D\tau \left[ 1 - (1-h)^m \right]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1} \left( D^n \left( \tilde{c}'_r(r, t) + (\gamma_1/2) \tilde{c}(r, t) \right); h \right) + \\ + D\tau \left[ 1 - (1-h)^m \right]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left( D^{n+1} \left( (\gamma_1/2) \tilde{c}(r, t) \right); h \right),$$

$$S_3 = \|r\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r}} \left\| \tilde{c}(r, t) - \tilde{c}_{m+1}(r, t) \right\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r} t^{\alpha_2} e^{-t}} \leq \\ \leq \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)}}{\gamma_1} \left[ 1 - (1-h)^m \right]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left( D^{n+1}(\tilde{c}(r, t)); h \right),$$

$$S_4 = \tau \|r\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r}} \left\| \frac{\partial \tilde{c}(r, t)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{c}_{m+1}(r, t)}{\partial t} \right\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r} t^{\alpha_2} e^{-t}} \leq \\ \leq \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)}\tau}{\gamma_1} \left[ 1 - (1-h)^m \right]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1} \left( D^n \left( \tilde{c}'_t(r, t) + (\gamma_2/2) \tilde{c}(r, t) \right); h \right) + \\ + \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)}\tau}{\gamma_1} \left[ 1 - (1-h)^m \right]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left( D^{n+1} \left( (\gamma_2/2) \tilde{c}(r, t) \right); h \right) + \\ + \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)}\tau}{\gamma_1} \frac{\|\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t)\|_{L_2, t^{\alpha_2} e^{-t}}}{\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} \|(\tilde{c}_0(r))\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r}},$$

Оценим последнее слагаемое в  $S_4$ :

$$\frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)}\tau}{\gamma_1} \frac{\|\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t)\|_{L_2, t^{\alpha_2} e^{-t}}}{\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} \|(\tilde{c}_0(r))\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r}} \leq \\ \leq \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)}\tau}{\gamma_1} \frac{\|\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t)\|_{L_2, t^{\alpha_2} e^{-t}}}{\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} \left\| \sum_{i=0}^{m-1} c_i^n - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} L_j(0; \alpha_2) \right\|_{L_2} \|\hat{\varphi}_i^{\alpha_1, \gamma_1}(r)\|_{L_2} \leq \\ \leq \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)}\tau}{\gamma_1} \frac{\|\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t)\|_{L_2, t^{\alpha_2} e^{-t}}}{\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} \sum_{i=0}^{m-1} \left| c_i^n - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} L_j(0; \alpha_2) \right|,$$

где  $\hat{\varphi}_i^{\alpha_1, \gamma_1}(r)$  — ортонормированные функции Лагерра. Для оценки выражения

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left| c_i^n - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} L_j(0; \alpha_2) \right|$$

воспользуемся асимптотической формулой для коэффициентов Фурье—Лагерра (см. [2]):

$$c_{im} = O\left(m^{-(\alpha_2+2n+2)/2-1/4}\right) \omega(m^{-1/2}), \quad (16)$$

учитывая, что  $c_1 m^{\alpha_2} \leq L_m(0; \alpha_2) \leq c_2 m^{\alpha_2}$  (см. [1]). Здесь  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые фиксированные положительные постоянные, а  $\omega(t)$  — заданная мажоранта модулей непрерывности. Тогда в силу (16) и оценки

$$\sum_{j=m}^{\infty} j^{-\beta} = O(m^{-\beta+1}), \quad \beta > 1,$$

для отклонения сумм Фурье—Лагерра находим

$$\begin{aligned} \left| c_i^n - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} L_j(0; \alpha_2) \right| &= \left| \sum_{j=m}^{\infty} c_{ij} L_j(0; \alpha_2) \right| = \\ &= O(1) \sum_{j=m}^{\infty} j^{-(n+1)+\alpha_2/2-1/4} \omega(j^{-1/2}) = O(m^{-n+\alpha_2/2-1/4}) \omega(m^{-1/2}). \end{aligned}$$

Заметим, что последнее соотношение имеет место, если  $n > \alpha_2/2 - 1/4$ . Ясно, что если функция  $c(r, t)$  бесконечное число раз непрерывно дифференцируема, то всегда будет сходиться ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^{-(n+1)+\alpha_2/2-1/4} \omega(j^{-1/2}).$$

Таким образом, в этом случае будем учитывать, что полученная оценка справедлива при любом  $n > \alpha_2/2 - 1/4$ . Итак,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left| c_i^n - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} L_j(0; \alpha_2) \right| = O(m^{-n+\alpha_2/2+3/4}) \omega(m^{-1/2}).$$

Используя формулу дифференцирования для многочленов Лагерра и известную асимптотическую формулу

$$\Gamma(\alpha_2 + m + 1) = m^{\alpha_2+1} (1 + O(m^{-1})) (m-1)!,$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\|\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t)\|_{L_2, t^{\alpha_2} e^{-t}}}{\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} &= \frac{\gamma_2 \|\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t)\|_{L_2, t^{\alpha_2} e^{-t}}}{2\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} + \gamma_2 \frac{\|\varphi_{m-1}^{\alpha_2+1, \gamma_2}(t)\|_{L_2, t^{\alpha_2+1} e^{-t}}}{\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} = \\ &= \frac{\gamma_2 \sqrt{\Gamma(\alpha_2 + m + 1)}}{2\sqrt{m!} \varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} + \gamma_2 \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_2 + m + 1)}}{\sqrt{(m-1)!} \varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} = O(1) m^{(1-\alpha_2)/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)} \tau}{\gamma_1} \frac{\|\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t)\|_{L_2, t^{\alpha_2} e^{-t}}}{\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0)} \|(\tilde{c}_0(r))\|_{L_2, r^{\alpha_1} e^{-r}} = O(m^{-n+5/4}) \omega(m^{-1/2}).$$

Последняя оценка имеет место, если  $n > 5/4$ .

Полагая  $h = m^{-1/2}$  и собирая все оценки вместе, получаем оценку для невязки:

$$\begin{aligned} \|R\|_{L_2} &< \left( \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha_1 + 3)}}{\gamma_1} (3D\tau + 2\tau + 1) + 2D\tau \right) \left[ 1 - (1 - m^{-1/2})^m \right]^{-k} m^{-n} \Omega(m^{-1/2}) + \\ &+ O(m^{-n+5/4}) \omega(m^{-1/2}), \quad \alpha_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega(m^{-1/2})$  — мажоранта обобщенных модулей непрерывности (см. [1]). Теорема доказана.  $\square$

**5. Результаты расчетов.** Расчеты проведены с помощью математического пакета Matlab (MathWorks, Inc.) для параметров, характерных для нитрида галлия. При энергии электронного пучка  $E_0 = 8$  кэВ для  $m = 6$  базисных функций Лагерра число обусловленности матрицы системы (14), порожденное спектральной нормой, не превысило 60, что позволяет использовать для расчетов персональные ЭВМ. Отметим, что использование модифицированных функций Эрмита для решения поставленной задачи оказалось непригодным, поскольку в силу их рекуррентных соотношений, матрица системы (14) оказалась вырожденной.

Подынтегральная функция в экспоненциальном множителе в формуле для расчета концентрации экситонов была разложена в ряд Тейлора. Использовано 7 членов разложения, что оказалось достаточным для проведения практических расчетов.

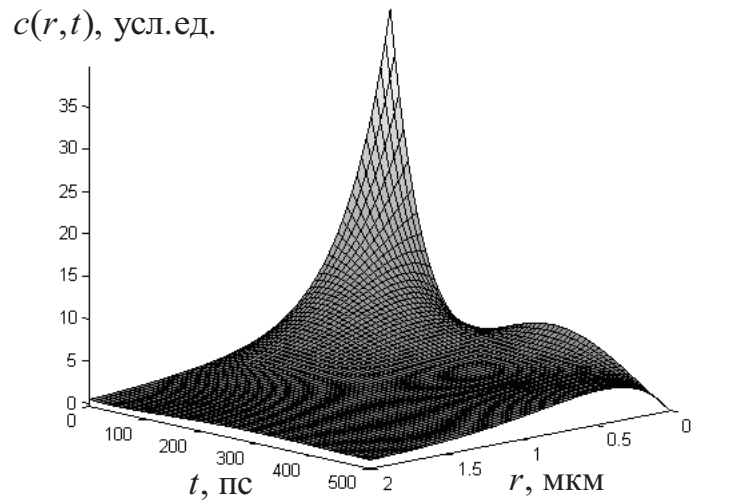


Рис. 1. Концентрация экситонов для случая переменного времени жизни.

Затраты машинного времени на расчет концентрации экситонов составили приблизительно 5 с, что говорит о вычислительной эффективности предложенного метода.

**6. Заключение.** Метод Галеркина в комбинации с разложением в ряд Тейлора подынтегральной функции в экспоненциальном множителе, содержащей переменный коэффициент, позволяет проводить расчеты концентрации генерированных неравновесных носителей заряда с точностью достаточной для проведения практических расчетов. Также метод позволяет проводить расчеты, не используя разложения переменного коэффициента в модели диффузии в ряд Фурье, что значительно упрощает применение проекционного метода.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абилов В. А., Абилов М. В., Керимов М. К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2015. — 55, № 7. — С. 1109–1117.
2. Лащенко В. К. Приближение дифференцируемых функций частными суммами ряда Фурье—Лагерра // Изв. вузов. Мат. — 1981. — 1(224). — С. 44–57.
3. Макаренко А. М., Серегина Е. В., Степович М. А. Проекционный метод Галёркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 5. — С. 801–813.
4. Поляков А. Н., Степович М. А., Туртин Д. В. Математическое моделирование катодолюминесценции экситонов, генерированных узким электронным пучком в полупроводниковом материале // Изв. РАН. Сер. физ. — 2016. — 80, № 12. — С. 1629–1633.
5. Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А. О практической реализации одной схемы времяпролётных измерений в катодолюминесцентной микроскопии // Прикл. физ. — 2015. — № 4. — С. 11–15.
6. Поляков А. Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М. А. Оценка значений электрофизических параметров полупроводниковых материалов по результатам измерений катодолюминесценции экситонов // Прикл. физ. — 2012. — № 6. — С. 41–46.
7. Серегина Е. В., Степович М. А., Филиппов М. Н. О математической модели диффузии экситонов в полупроводнике с учетом их переменного времени жизни // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2023. — № 3. — С. 74–78.

8. *Степович М. А.* Количественная катодоллюминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники/ Дисс. на соиск. уч. степ. д-ра физ.-мат. наук. — М.: МГТУ им. Баумана, 2003.
9. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Физматлит, 2007.
10. *Noltemeyer M., Bertram F., Hempel T., Bastek B., Polyakov A., Christen J., Brandt M., Lorenz M., Grundmann M.* Excitonic transport in ZnO// J. Mater. Res. — 2012. — 27, № 17. — С. 2225–2231.
11. *Seregina E. V., Polyakov A. N., Stepovich M. A.* On the possibility of using the Galerkin projection method to simulate the two-dimensional diffusion of excitons generated by an electron beam// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — 955. — P. 012032.
12. *Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V., Seregina E. V.* The use of the Hankel transform to solve nonstationary diffusion problem// J. Math. Sci. — 2021. — 255, № 6. — P. 773–778.

### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда и Правительства Калужской области (проект № 23-21-10069).

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Серегина Елена Владимировна

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Калужский филиал

E-mail: [evfs@yandex.ru](mailto:evfs@yandex.ru)

Степович Михаил Адольфович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: [m.stepovich@rambler.ru](mailto:m.stepovich@rambler.ru)

Филиппов Михаил Николаевич

Институт общей и неорганической химии им. Н. С. Курнакова РАН, Москва

E-mail: [fil@igic.ras.ru](mailto:fil@igic.ras.ru)



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 99–106  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-99-106

УДК 517.928

## УРАВНЕНИЕ ВЕТВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КВАДРАТИЧНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

© 2024 г. В. И. УСКОВ

Аннотация. Статья посвящена исследованию поведения решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве с квадратичными операторными пучками при производной от искомой функции. Получено уравнение ветвления; для его решения применяется диаграмма Ньютона. Выявлены условия, при которых возникает погранслоя вблизи начальной точки, и определяется вид функций погранслоя.

**Ключевые слова:** уравнение ветвления, дифференциальное уравнение первого порядка, фредгольмов оператор, банахово пространство, квадратичное возмущение, малый параметр, явление погранслоя.

## BRANCHING EQUATION FOR A FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN A BANACH SPACE WITH QUADRATIC PERTURBATIONS OF A SMALL PARAMETER

© 2024 V. I. USKOV

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of the behavior as  $\varepsilon \rightarrow 0$  of solutions of the Cauchy problem for a first-order differential equation in a Banach space with quadratic operator pencils with the derivative of the unknown function. The branching equation is obtained and analyzed by using the Newton diagram. The conditions of the appearing of a boundary layer near the initial point are identified and the structure of boundary-layer functions is determined.

**Keywords and phrases:** branching equation, first-order differential equation, Fredholm operator, Banach space, quadratic perturbation, small parameter, boundary layer.

**AMS Subject Classification:** 34E15

1. Введение и необходимые сведения. Рассмотрим задачу Коши

$$(A - \varepsilon B - \varepsilon^2 C) \frac{du}{dt} = (D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)u(t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$u(t_0, \varepsilon) = u^0(\varepsilon) \in X_1, \quad (2)$$

где  $A, B, C, D, E, F$  — замкнутые линейные операторы  $X_1 \rightarrow X_2$ ,  $X_1, X_2$  — банаховы пространства,  $\text{dom } A = \text{dom } B = \text{dom } C = \text{dom } D = \text{dom } E = \text{dom } F = X_1$ ,  $u^0(\varepsilon)$  — голоморфная в окрестности точки  $\varepsilon = 0$  функция;  $t \in \mathfrak{T} = [t_0; t_{\max}]$ ,  $\varepsilon \in \mathfrak{E} = (0; \varepsilon_0)$ .

Оператор  $A$  полагается фредгольмовым с нулевым индексом (далее — фредгольмов), имеющим одномерное ядро. Рассматривается частный случай конечной  $D$ -жордановой цепочки оператора  $A$ .

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция  $u(t, \varepsilon)$ , дифференцируемая по  $t \in \mathfrak{T}$  при каждом  $\varepsilon \in \mathfrak{E}$  и удовлетворяющая (1), (2) в  $\mathfrak{T} \times \mathfrak{E}$ .

Уравнениями вида (1) описываются экономические процессы (динамическая модель Леонтьева межотраслевого баланса; см. [5], явления в электрических и гидравлических цепях (см. [10]), быстрых бимолекулярных реакций (см. [6]), процессы фильтрации, влагопереноса и т. д.

Задача Коши для уравнения

$$A \frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C)u(t, \varepsilon) \quad (3)$$

с необратимым оператором  $A$  изучена в разных работах. Для фредгольмова оператора  $A$  случай одномерного ядра изучен в [12], где исследовались качественные свойства решения, и в [4], где для нее построено асимптотическое разложение решения; для оператора  $A$ , обладающего свойством иметь нуль нормальным собственным числом (0-Н.С.Ч.), в случае многомерного ядра в [11] изучено явление погранслоя. В [8] изучена задача Коши с правой частью уравнения (3), содержащей квадратичный операторный пучок  $B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D$  перед  $u$ , с 0-Н.С.Ч. оператором  $A$ , имеющим двумерное ядро.

В настоящей работе задача обобщается наличием квадратичного пучка перед производной. Цель работы: выявление условий, при которых имеет место явление пограничного слоя (далее погранслоя). Такие условия называются *условиями регулярности вырождения*. Для этого выводится уравнение ветвления. Это уравнение решается с применением диаграммы Ньютона (см. [9]).

Приведем необходимые сведения.

**Определение 1** (см. [3]). Ограниченная функция  $v(t, \varepsilon)$ , определенная на  $\mathfrak{T}$ , называется функцией погранслоя вблизи точки  $t = t_0$ , если  $v(t, \varepsilon) \Rightarrow 0$  на  $[t'; t_{\max}]$  при каждом  $t' \in (t_0; t_{\max})$  и  $v(t, \varepsilon) \not\Rightarrow 0$  по норме в банаховом пространстве  $X_1$  на  $\mathfrak{T}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Рассмотрим предельную задачу для (1), (2):

$$A \frac{d\bar{u}}{dt} = D\bar{u}(t), \quad \bar{u}(t_0) = \bar{u}^0. \quad (4)$$

**Определение 2** (см. [1]). В задаче (1), (2) имеет место явление погранслоя, если

$$u(t, \varepsilon) = \bar{u}(t) + v(t, \varepsilon),$$

где  $v(t, \varepsilon)$  — функция погранслоя вблизи точки  $t = t_0$ .

Фредгольмов оператор  $A : X_1 \rightarrow X_2$  вполне определяется следующим свойством (см. [7]):

$$X_1 = \text{Ker } A \oplus \text{Coim } A, \quad X_2 = \text{Im } A \oplus \text{Coker } A, \quad (5)$$

где  $\text{Ker } A$  — ядро оператора  $A$ ,  $\text{Coim } A$  — прямое дополнение к нему,  $\text{Im } A$  — образ,  $\text{Coker } A$  — дефект;  $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Coker } A < \infty$ ; сужение  $\tilde{A}$  оператора  $A$  на  $\text{Coim } A \cap \text{dom } A$  имеет ограниченный обратный  $\tilde{A}^{-1}$ .

Введем проектор  $Q$  на  $\text{Coker } A$ , полуобратный оператор

$$A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q) : \text{Im } A \rightarrow \text{Coim } A \cap \text{dom } A.$$

Зафиксируем элементы  $e \in \text{Ker } A$ ,  $e \neq 0$ ,  $\varphi \in \text{Coker } A$ . В  $\text{Coker } A$  введем скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  так, что  $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$ .

**Лемма 1** (см. [4]). Уравнение  $A\xi = \eta$ ,  $\xi \in X_1 \cap \text{dom } A$ ,  $\eta \in X_2$ , равносильно системе

$$\xi = A^- \eta + ce \quad \forall c \in \mathbb{C}, \quad \langle Q\eta, \varphi \rangle = 0.$$

**Определение 3.** Последовательность таких элементов  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ , что

$$\xi_0 = e, \quad A\xi_i = D\xi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

назовем  $D$ -жордановой цепочкой присоединенных элементов оператора  $A$ , отвечающих нулевому собственному значению.

**Лемма 2** (см. [2]). *D-Жорданова цепочка имеет конечную длину тогда и только тогда, когда существует такое число  $p < \infty$ , что*

$$\langle QD(A^-D)^i e, \varphi \rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \quad \langle QD(A^-D)^p e, \varphi \rangle \neq 0.$$

В настоящей работе будем рассматривать случай  $p \geq 1$ .

Наложим следующее условие.

**Условие 1.** Операторы  $QB, QC, QD, QE, QF, A^-B, A^-C, A^-D, A^-E, A^-F$  ограничены.

Приведем решение задачи (4).

**Теорема 1** (см. [2]). *Пусть выполнено условие 1. Пусть выполнена лемма 2. Тогда решение задачи (4) существует при выполнении условий*

$$\langle QD(A^-D)^i \bar{u}^0, \varphi \rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p.$$

Оно единственно и равно

$$\bar{u}(t) = e^{tT_p} \bar{u}^0$$

в обозначении

$$T_p(\cdot) = A^-D(\cdot) - \frac{\langle QD(A^-D)^{p+1}(\cdot), \varphi \rangle}{\langle QD(A^-D)^p e, \varphi \rangle} e.$$

Далее нам понадобятся следующие утверждения.

Пусть  $K_j, j = 1, 2, \dots, r$ , — линейные операторы, действующие в одном пространстве. Обозначим через  $S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r}$  сумму по всевозможным перестановкам из  $i_j$  элементов  $K_j$ . Также введем следующие обозначения:

$$\Gamma_r^m = \left\{ (i_1; i_2; \dots; i_r) \mid i_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j = 1, 2, \dots, r, i_1 + i_2 + \dots + i_r = m \right\};$$

$$\Gamma_{r,l}^\mu = \Gamma_r^\mu \setminus \left\{ (0; \dots; 0; \underbrace{\mu}_l; 0; \dots; 0) \right\}.$$

**Утверждение 1.** *Пусть для любого  $r \in \mathbb{N}$  выполнено равенство*

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r} = K_1 S_{i_1-1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r} + K_2 S_{i_1, i_2-1, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r} + \dots + K_r S_{i_1, i_2, \dots, i_r-1}^{K_1, K_2, \dots, K_r}. \quad (6)$$

Тогда для любых  $m, r \in \mathbb{N}$  справедлива следующая формула:

$$(K_1 + K_2 + \dots + K_r)^m = \sum_{\Gamma_r^m} S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r}. \quad (7)$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $r$  и докажем утверждение методом математической индукции по  $m$ . Пусть оно верно для  $m = \mu$ . Покажем, что оно верно и для  $m = \mu + 1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} & (K_1 + K_2 + \dots + K_r)^{\mu+1} = \\ & = (K_1 + K_2 + \dots + K_r)(K_1 + K_2 + \dots + K_r)^\mu = (K_1 + K_2 + \dots + K_r) \sum_{\Gamma_r^\mu} S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r} = \\ & = K_1 \sum_{\Gamma_r^\mu} S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r} + K_2 \sum_{\Gamma_r^\mu} S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r} + \dots + K_r \sum_{\Gamma_r^\mu} S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r}. \end{aligned}$$

В каждой  $l$ -й сумме извлечем слагаемое по набору  $(0; 0; \dots; \mu; \dots; 0)$ ,  $l = 1, 2, \dots, r$ :

$$\begin{aligned} & K_1 S_{\mu, 0, \dots, 0}^{K_1, K_2, \dots, K_r} + K_1 \sum_{\Gamma_{r,1}^\mu} S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r} + \dots + K_l S_{0, 0, \dots, \mu, \dots, 0}^{K_1, K_2, \dots, K_r} + \\ & + K_l \sum_{\Gamma_{r,l}^\mu} S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r} + \dots + K_r S_{0, 0, \dots, \mu}^{K_1, K_2, \dots, K_r} + K_r \sum_{\Gamma_{r,r}^\mu} S_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{K_1, K_2, \dots, K_r}. \end{aligned}$$

Сделаем в них замену  $i_l \rightarrow i_l - 1$ , внесем под одну сумму и воспользуемся равенством (6):

$$\begin{aligned} & S_{\mu+1,0,\dots,0}^{K_1,K_2,\dots,K_r} + S_{0,\mu+1,0,\dots,0}^{K_1,K_2,\dots,K_r} + \dots + S_{0,0,\dots,\mu+1}^{K_1,K_2,\dots,K_r} + \\ & + \sum_{\bigcup_{l=1}^r \Gamma_{r,l}^{\mu+1}} K_1 S_{i_1-1,i_2,\dots,i_r}^{K_1,K_2,\dots,K_r} + K_2 S_{i_1,i_2-1,\dots,i_r}^{K_1,K_2,\dots,K_r} + \dots + K_r S_{i_1,i_2,\dots,i_r-1}^{K_1,K_2,\dots,K_r} + \\ & = S_{\mu+1,0,\dots,0}^{K_1,K_2,\dots,K_r} + S_{0,\mu+1,0,\dots,0}^{K_1,K_2,\dots,K_r} + \dots + S_{0,0,\dots,\mu+1}^{K_1,K_2,\dots,K_r} + \sum_{\bigcup_{l=1}^r \Gamma_{r,l}^{\mu+1}} S_{i_1,i_2,\dots,i_r}^{K_1,K_2,\dots,K_r} = \sum_{\Gamma_r^{\mu+1}} S_{i_1,i_2,\dots,i_r}^{K_1,K_2,\dots,K_r}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**2. Уравнение ветвления.** Выведем уравнение ветвления. Подставив

$$u(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{t-t_0}{\lambda(\varepsilon)}\right) v(\varepsilon), \quad (8)$$

где  $v(\varepsilon)$  — равномерно ограниченная в  $\mathfrak{E}$  функция,  $v(\varepsilon) \neq 0$ , в (1), получим спектральное уравнение

$$Av(\varepsilon) = [\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)]v(\varepsilon). \quad (9)$$

В силу леммы 1 оно равносильно системе

$$\left(I - A^- [\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)]\right)v(\varepsilon) = e, \quad (10)$$

$$\left\langle Q[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)]v(\varepsilon), \varphi \right\rangle = 0. \quad (11)$$

Наложим следующее условие.

**Условие 2.** Числа  $\lambda = \lambda(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ , отличные от нуля и достаточно малые по модулю, таковы, что при каждом  $\varepsilon \in \mathfrak{E}$  выполнено неравенство

$$0 < \left\| A^- [\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)] \right\| < 1.$$

При выполнении условий 1, 2 уравнение (10) разрешимо:

$$v(\varepsilon) = \left(I - A^- [\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)]\right)^{-1} e. \quad (12)$$

Подставив (12) в (11), получим искомое уравнение ветвления:

$$R(\lambda, \varepsilon)e = 0, \quad (13)$$

где

$$R(\lambda, \varepsilon)(\cdot) = \left\langle Q[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)] \left(I - A^- [\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)]\right)^{-1}(\cdot), \varphi \right\rangle.$$

**3. Выявление условий регулярности вырождения в частном случае.** Выявим условия регулярности вырождения в задаче (1), (2), для чего рассмотрим уравнение (13).

Пусть выполнено равенство (6) для  $K_1 = A^- B$ ,  $K_2 = A^- C$ ,  $K_3 = A^- D$ ,  $K_4 = A^- E$ ,  $K_5 = A^- F$ . Преобразуем выражение  $\left(I - A^- [\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)]\right)^{-1}$  по формуле Неймана, применив утверждение 1:

$$\begin{aligned} & \left(I - A^- [\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)]\right)^{-1} = \\ & = I + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A^- [\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)]\right)^m = \\ & = I + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\Gamma_5^m} \lambda^{i_3+i_4+i_5} \varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+2} S_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}^{A^- B, A^- C, A^- D, A^- E, A^- F}. \end{aligned}$$



Тогда выражение  $R(\lambda, \varepsilon)(\cdot)$  можно записать в виде

$$R(\lambda, \varepsilon)(\cdot) = \varepsilon \langle QBe, \varphi \rangle + \varepsilon^2 \langle QCe, \varphi \rangle + \lambda \langle QDe, \varphi \rangle + \lambda \varepsilon \langle QEe, \varphi \rangle + \lambda \varepsilon^2 \langle QFe, \varphi \rangle + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ R_m^B(\lambda, \varepsilon) + R_m^C(\lambda, \varepsilon) + R_m^D(\lambda, \varepsilon) + R_m^E(\lambda, \varepsilon) + R_m^F(\lambda, \varepsilon) \right](\cdot), \quad (14)$$

где

$$R_m^B(\lambda, \varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m} \lambda^{i_3+i_4+i_5} \varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+3} \langle QBS_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}^{A^-B, A^-C, A^-D, A^-E, A^-F}(\cdot), \varphi \rangle, \\ R_m^C(\lambda, \varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m} \lambda^{i_3+i_4+i_5} \varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+4} \langle QCS_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}^{A^-B, A^-C, A^-D, A^-E, A^-F}(\cdot), \varphi \rangle, \\ R_m^D(\lambda, \varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m} \lambda^{i_3+i_4+i_5+1} \varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+3} \langle QDS_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}^{A^-B, A^-C, A^-D, A^-E, A^-F}(\cdot), \varphi \rangle, \\ R_m^E(\lambda, \varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m} \lambda^{i_3+i_4+i_5+1} \varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+4} \langle QES_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}^{A^-B, A^-C, A^-D, A^-E, A^-F}(\cdot), \varphi \rangle, \\ R_m^F(\lambda, \varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m} \lambda^{i_3+i_4+i_5+1} \varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+5} \langle QFS_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5}^{A^-B, A^-C, A^-D, A^-E, A^-F}(\cdot), \varphi \rangle.$$

Запишем выражение (14) в виде

$$R(\lambda, \varepsilon) = \sum_{i, j=0}^{\infty} \lambda^i \varepsilon^j H_{ij}, \quad H_{00} = 0,$$

и введем обозначение  $h_{ij} = H_{ij}e$ .

Решим уравнение (13) при выполнении следующего условия.

**Условие 3.** Существует такое число  $n \in \mathbb{N}$ , что

$$h_{ij} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad j = 1, 2, \dots, \\ h_{pj} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad h_{pn} \neq 0.$$

В силу леммы 2 конечность  $D$ -жордановой цепочки оператора  $A$  влечет

$$h_{p+1,0} \neq 0.$$

Построим диаграмму Ньютона (см. рис. 1). Уравнение ветвления имеет вид

$$\lambda^p \varepsilon^n h_{pn} + \lambda^{p+1} h_{p+1,0} + o(\lambda^{p+1}) = 0,$$

где  $o(\lambda^{p+1})$  вмещает в себя нормы ограниченных, в силу условия 1, операторов. Оно имеет решение

$$\lambda = -\frac{h_{pn}}{h_{p+1,0}} \varepsilon^n. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (8) приводит к следующему результату.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1, 2, 3, лемма 2 и неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{h_{pn}}{h_{p+1,0}} > 0. \quad (16)$$

Тогда в задаче (1), (2) наблюдается явление погранслоя, и функции погранслоя имеют переменную  $\tau = (t - t_0)/\varepsilon^n$ .

Неравенство (16) является условием регулярности вырождения.

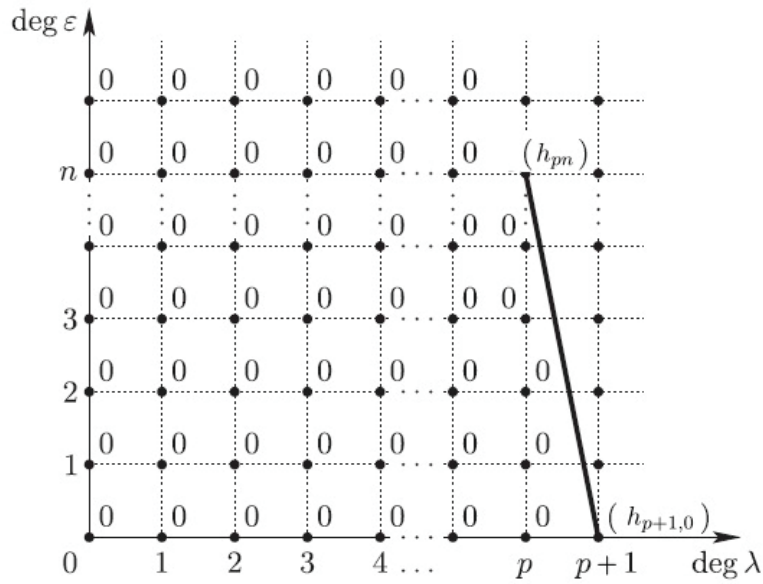


Рис. 1. Диаграмма Ньютона

**4. О фредгольмовости одного оператора.** Рассмотрим оператор  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , задаваемый числовой матрицей

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{11} + \beta a_{21} & \alpha a_{12} + \beta a_{22} & \alpha a_{13} + \beta a_{23} \end{pmatrix},$$

где  $a_{ij} \neq 0$ , отношения  $a_{2j}/a_{1j}$  попарно различны,  $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ .

**Утверждение 2.** Оператор  $\mathcal{A}$  фредгольмов.

*Доказательство.* Возьмем элементы  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T, \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T \in \mathbb{R}^3$  (здесь  $T$  — знак транспонирования). Решив уравнение  $\mathcal{A}\xi = 0$ , построим ядро оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \left\{ \left( \frac{\Delta_1}{\Delta} \xi_3, \frac{\Delta_2}{\Delta} \xi_3, \xi_3 \right)^T \right\}, \quad \xi_3 \neq 0,$$

где

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Разложив элемент  $\xi \in X_1 = \mathbb{R}^3$  в сумму  $\xi_{\text{Ker } \mathcal{A}} + \xi_{\text{Coim } \mathcal{A}}$  элементов из  $\text{Ker } \mathcal{A}$  и  $\text{Coim } \mathcal{A}$  соответственно, построим  $\text{Coim } \mathcal{A}$ :

$$\text{Coim } \mathcal{A} = \left\{ \left( \xi_1 - \frac{\Delta_1}{\Delta} \xi_3, \xi_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta} \xi_3, 0 \right)^T \right\}.$$

Приравнявая  $\xi_{\text{Ker } \mathcal{A}} = \xi_{\text{Coim } \mathcal{A}}$ , находим  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ ; значит, имеет место разложение

$$X_1 = \mathbb{R}^3 = \text{Ker } \mathcal{A} \oplus \text{Coim } \mathcal{A}.$$

Образ оператора  $\mathcal{A}$  равен

$$\text{Im } \mathcal{A} = \left\{ (\eta_1, \eta_2, \alpha\eta_1 + \beta\eta_2)^T \right\}.$$

Разложив элемент  $\eta \in X_2 = \mathbb{R}^3$  в сумму  $\eta_{\text{Im } \mathcal{A}} + \eta_{\text{Coker } \mathcal{A}}$ , построим  $\text{Coim } \mathcal{A}$ :

$$\text{Coim } \mathcal{A} = \left\{ (0, 0, -\alpha\eta_1 - \beta\eta_2 + \eta_3)^T \right\}.$$

Приравнявая  $\eta_{\text{Im } \mathcal{A}} = \eta_{\text{Coker } \mathcal{A}}$ , находим  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$ ; значит, имеет место разложение

$$X_2 = \mathbb{R}^3 = \text{Im } \mathcal{A} \oplus \text{Coker } \mathcal{A}.$$

Нетрудно видеть, что  $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \dim \text{Coker } \mathcal{A} = 1$ .

Проектор на  $\text{Coker } \mathcal{A}$

$$Q(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

является идемпотентным.

Решение уравнения  $\mathcal{A}\xi_{\text{Coim } \mathcal{A}} = \eta_{\text{Im } \mathcal{A}}$  влечет взаимно однозначное соответствие между  $\text{Coim } \mathcal{A}$  и  $\text{Im } \mathcal{A}$ , и

$$\mathcal{A}^- = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ограничен. Тем самым, фредгольмовость оператора  $\mathcal{A}$  доказана.  $\square$

**5. Пример.** Рассмотрим задачу (1), (2) со следующими операторами  $A, B, C, D, E, F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & d & 5 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} g_1 & 8 & g_2 \\ -10 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -45 & 80 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix},$$

где  $d, g_1, g_2$  — параметры. В силу утверждения 2 оператор  $A$  фредгольмов. Возьмем

$$e = (1, -2, 1)^T \in \text{Ker } A, \quad \varphi = (0, 0, 1)^T \in \text{Coker } A.$$

Так как  $QB = QC = 0$ , то  $h_{0j} = 0, j = 1, 2, \dots$ ,

$$h_{10} = \langle QDe, \varphi \rangle = 4d + 4,$$

$$h_{11} = \langle QDA^-Be, \varphi \rangle + \langle QEE, \varphi \rangle = -2g_1 - 2g_2 - 22d - 50,$$

$$h_{12} = \langle QEA^-Be, \varphi \rangle + \langle QFE, \varphi \rangle = 30g_1 + 180,$$

$$h_{20} = \langle QDA^-De, \varphi \rangle = 12d^2 - 26d - 468.$$

При  $d \neq -1$  имеем  $h_{10} \neq 0$ , что влечет равномерную сходимуюсь решения задачи (1), (2) к решению задачи (4), поскольку диаграмма Ньютона вырождается в точку  $(1; 0)$ .

Применим результаты теоремы 2. Пусть  $d = -1$ ; тогда  $h_{11} = -2g_1 - 2g_2 - 28, h_{20} = -430$ . При выполнении условия  $h_{11} < 0$ , т.е.  $g_1 + g_2 > -14$ , функции погранслоя имеют переменную  $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$ .

Если  $h_{11} = 0$ , т.е.  $g_1 + g_2 = -14$ , то при  $30g_1 + 180 < 0$ , т.е.  $g_1 < -6$  и  $g_2 > -8$ , функции погранслоя имеют переменную  $\tau = (t - t_0)/\varepsilon^2$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
2. Зубова С. П. Сингулярное возмущение линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1973.
3. Зубова С. П. О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной// Докл. Акад. наук. — 2014. — 454, № 4. — С. 383–386.
4. Зубова С. П., Усков В. И. Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай// Мат. заметки. — 2018. — 103, № 3. — С. 392–403.
5. Кузнецова А. В. Экономико-математические методы и модели. — Минск: БГЭУ, 2000.

6. *Нефедов Н. Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвекция: теория и применение// *Ж. вычисл. мат. мат. физ.* — 2021. — 61, № 12. — С. 2074–2094.
7. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах// *Изв. АН СССР. Сер. мат.* — 1943. — 7, № 3. — С. 147–166.
8. *Усков В. И.* Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части// *Вестн. рос. ун-тов. Мат.* — 2021. — 26, № 134. — С. 172–181.
9. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. — М.: Либроком, 2009.
10. *Christiansen P. L., Lomdahl P. S., Muto V.* On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom// *Nonlinearity.* — 1991. — 4, № 2. — P. 477–501.
11. *Uskov V. I.* Boundary layer phenomenon for a first order descriptor equation with small parameter on the right-hand side// *J. Math. Sci.* — 2020. — 250, № 1. — P. 175–181.
12. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* A study of the rigidity of descriptor dynamical systems in a Banach space// *J. Math. Sci.* — 2015. — 208, № 1. — P. 119–124.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Усков Владимир Игоревич

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова

E-mail: vum1@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 107–117  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-107-117

УДК 517.5, 514.17

## ПОЛНОТА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ПЛОЩАДИ

© 2024 г. Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Е. Г. КУДАШЕВА

**Аннотация.** Установлены условия полноты экспоненциальной системы в пространствах функций, непрерывных на компакте со связным дополнением и голоморфных во внутренности этого компакта, в пространствах голоморфных функций в ограниченной односвязной области в терминах евклидовой площади выпуклой оболочки этого компакта или области, а также некоторых специальных характеристик или плотностей распределений показателей экспоненциальной системы.

**Ключевые слова:** полнота, экспоненциальная система, евклидова площадь, выпуклая оболочка, опорная функция, целая функция экспоненциального типа, распределение корней.

## COMPLETENESS OF EXPONENTIAL SYSTEMS IN FUNCTION SPACES IN TERMS OF AREA

© 2024 B. N. KHABIBULLIN, E. G. KUDASHEVA

**ABSTRACT.** In this paper, we establish completeness conditions for exponential systems in spaces of functions that are continuous on a compact set with connected complement and holomorphic inside this compact set, in spaces of holomorphic functions in a bounded simply connected domain in terms of the Euclidean area of the convex hull of this compact set or a domain and in terms of some special characteristics or distribution densities of the exponents of the exponential system.

**Keywords and phrases:** completeness, exponential system, Euclidean area, convex hull, support function, entire function of exponential type, root distribution.

**AMS Subject Classification:** 30B60, 30D15, 52A38, 31A05

### 1. Введение.

*1.1. Некоторые обозначения, понятия и соглашения.* Пустое множество обозначаем через  $\emptyset$ ,  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$  — множество всех натуральных чисел,  $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$  — расширение множества  $\mathbb{N}_0$  со стандартным отношением порядка  $\leq$  и точной верхней гранью  $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$ , для которой неравенства  $n \leq +\infty$  выполнены при всех  $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$ . Множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$  с таким же отношением порядка  $\leq$  рассматриваем и как вещественную ось в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  с евклидовой нормой — модулем  $|\cdot|$ . Порядковое пополнение множества  $\mathbb{R}$  верхней и нижней гранями  $+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \emptyset \notin \mathbb{R}$  и  $-\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \emptyset \notin \mathbb{R}$  определяет расширенную вещественную ось  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , где, в дополнение к стандартным допустимым операциям, полагаем  $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0$ . Величина

---

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

$c \in \overline{\mathbb{R}}$  рассматривается и как функция, тождественно равная  $c$ , как правило, на плоскости  $\mathbb{C}$ . Символом  $0$ , наряду с  $0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , обозначаем и нулевые функции, меры и т. п.

Промежутки с концами  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  и  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  — это множества  $[a, b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\}$  — отрезок в  $\overline{\mathbb{R}}$ ,  $(a, b] := [a, b] \setminus a$ ,  $[a, b) := [a, b] \setminus b$ , а  $(a, b) := [a, b] \setminus a$  и  $(a, +\infty]$ ,  $[-\infty, b)$  — открытые промежутки в  $\overline{\mathbb{R}}$ , образующие базу открытых множеств при  $a < b$ . Используем также обозначение  $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$  для положительной полуоси с расширением  $\overline{\mathbb{R}}^+ := [0, +\infty]$ . При этом величина  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  положительна при  $x \in \overline{\mathbb{R}}^+$ , строго положительна при  $0 \neq x \in \overline{\mathbb{R}}^+$ , отрицательна при  $x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$ , строго отрицательна при  $0 \neq x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$ ,  $x^+ := \sup\{0, x\} \in \overline{\mathbb{R}}^+$  — положительная часть величины  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $x^- := (-x)^+ \in \overline{\mathbb{R}}^+$  — её отрицательная часть.

Обозначим через  $D(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z'| < r\}$  и  $\overline{D}(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z'| \leq r\}$ , а также  $\partial\overline{D}(r) := \overline{D}(r) \setminus D(r)$ , соответственно, открытый и замкнутый круги, а также окружность с центром в нуле радиуса  $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ . Для  $S \subset \mathbb{C}$  через  $\text{cl } S$ ,  $\text{int } S$ ,  $\text{bd } S$  и  $\text{co } S$  обозначаем соответственно замыкание, внутренность, границу и выпуклую оболочку множества  $S$  в  $\mathbb{C}$ . Таким образом, при  $0 < r \in \overline{\mathbb{R}}^+$  имеют место равенства  $\overline{D}(r) = \text{cl } D(r)$  и  $\partial\overline{D}(r) = \text{bd } D(r)$ , но не при  $r = 0$ , поскольку в этом случае это уже не так, а именно:  $\text{cl } D(0) = \text{cl } \emptyset = \emptyset = \text{bd } D(0) \neq \{0\} = \overline{D}(0) = \partial\overline{D}(0)$ .

Для расширенной числовой функции  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  через  $f^+ : x \mapsto_{x \in X} (f(x))^+$  обозначаем её положительную часть, а через  $f^- := (-f)^+$  — отрицательную часть. Если  $f = f^+$ , то функция  $f$  положительная, а если  $f = -f^-$ , то отрицательная. Если  $X \subset \overline{\mathbb{R}}$  и для любых  $x_1, x_2 \in X$  из  $x_1 < x_2$  следует нестрогое неравенство  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (соответственно, строгое неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ ), то функция  $f$  возрастающая (соответственно, строго возрастающая) на  $X$ ; функция  $f$  убывающая (соответственно, строго убывающая) на  $X$ , если противоположная функция  $-f$  возрастающая (соответственно, строго возрастающая) на  $X$ .

*1.2. Постановка задачи.* Всюду далее через  $Z$  обозначаем распределение точек на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , среди которых могут быть повторяющиеся. Распределение точек  $Z$  однозначно определяется функцией, действующей из  $\mathbb{C}$  в  $\overline{\mathbb{N}}_0$  и равной в каждой точке  $z \in \mathbb{C}$  количеству повторений этой точки  $z$  в  $Z$ . Для такой функции, которую часто называют функцией кратности распределения точек  $Z$  (см. [13, пп. 0.1.2–0.1.3]), или его дивизором, сохраняем то же самое обозначение  $Z$ . Другими словами,  $Z(z)$  — это количество вхождений точки  $z \in \mathbb{C}$  в распределение точек  $Z$ ; пишем  $z \in Z$ , если  $Z(z) > 0$ . Распределение точек  $Z$  можно эквивалентным образом трактовать и как распределение масс, или меру, со значениями в  $\overline{\mathbb{N}}_0$  с тем же самым обозначением:

$$Z(S) := \sum_{z \in S} Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0 \quad \text{для любого } S \subset \mathbb{C}. \quad (1)$$

Если считающая радиальная функция

$$Z^{\text{rad}}(r) := Z(\overline{D}(r)) \stackrel{(1)}{=} \sum_{z \in \overline{D}(r)} Z(z) \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad r \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad (2)$$

для  $Z$  конечна при каждом  $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ , т.е.  $Z^{\text{rad}}(r) < +\infty$  для всех  $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ , то  $Z$  — локально конечное распределение.

Евклидову площадь множества  $S \subset \mathbb{C}$  обозначаем через

$$\text{area}(S) := \iint_S dx dy = \iint_S r dr d\theta, \quad x + iy = re^{i\theta}, \quad x, y, \theta \in \mathbb{R}, \quad r \in \overline{\mathbb{R}}^+,$$

если двойные интегралы справа корректно определены, или множество  $S$  измеримо по плоской мере Лебега на  $\mathbb{C}$ . В частности, это всегда имеет место для выпуклых ограниченных  $S \subset \mathbb{C}$ .

Система векторов из топологического векторного пространства полна в нём, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с этим пространством. Для распределения точек  $Z$

на  $\mathbb{C}$  в данной статье далее исследуется полнота лишь экспоненциальных систем

$$\text{Exp}^Z := \left\{ w \xrightarrow{w \in \mathbb{C}} w^p \exp(zw) \mid z \in Z, Z(z) - 1 \geq p \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (3)$$

с распределением показателей  $Z$ , что, в частности, актуально в спектральной теории операторов.

Для функции  $f$  на  $S \subset \mathbb{C}$  со значениями в  $\mathbb{C}$  или в  $\overline{\mathbb{R}}$  полагаем

$$\|f\|_S := \sup \left\{ |f(z)| \mid z \in S \right\}, \quad (4)$$

а через  $C(S)$  обозначаем пространство непрерывных функций  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  с  $\text{sup}$ -нормой (4). Для открытого подмножества  $S \subset \mathbb{C}$  через  $\text{Hol}(S)$  обозначаем пространство голоморфных функций  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  с топологией равномерной сходимости на всех компактах  $K \subset S$ , определяемой  $\text{sup}$ -полунормами  $\|f\|_K$ . Для компакта  $S \subset \mathbb{C}$  с внутренностью  $\text{int } S$  через  $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$  обозначаем банахово пространство непрерывных на  $S$  и голоморфных на внутренности  $\text{int } S$  функций  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  с  $\text{sup}$ -нормой  $\|f\|_S$ . Таким образом, если в последнем случае  $\text{int } S = \emptyset$  — пустое множество, то  $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$  — это банахово пространство  $C(S)$  непрерывных на  $S$  функций со значениями в  $\mathbb{C}$ . Книга [13, п. 3.2] содержит детальный обзор по вопросам полноты экспоненциальных систем  $\text{Exp}^Z$  по состоянию вплоть до 2012 г. в разнообразных функциональных пространствах — в значительной мере именно для пространств  $\text{Hol}(S)$  или  $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$  функций соответственно на области  $S \subset \mathbb{C}$  или компакте  $S \subset \mathbb{C}$ . Основная задача — получить условия полноты экспоненциальной системы  $\text{Exp}^Z$  из (3) в функциональных пространствах  $\text{Hol}(S)$  или  $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$ , когда соответственно для ограниченной области  $S$  или компакта  $S$  априори известна лишь евклидова площадь  $\text{area}(\text{co } S)$  его выпуклой оболочки  $\text{co } S$  или площадь  $\text{area}(S)$  в случае выпуклой соответственно области или компакта  $S \subset \mathbb{C}$ . Естественно требовать, чтобы эти условия выражались через соотношения между какими-либо характеристиками распределения точек-показателей  $Z$  и площадью  $\text{area}(\text{co } S)$  и были точны. В данной работе мы не останавливаемся на подтверждении точности наших результатов, хотя это так и есть, например, для любых выпуклых  $S$ . Требуемые для этого примеры основаны на построении довольно тонких примеров целых функций экспоненциального типа и очень регулярного роста, особенно для компактов  $S$ . Построение таких примеров предполагается обсудить в другой работе.

*1.3. Основные результаты.* В теории целых функций одной комплексной переменной (см. [5, 6, 18]) а также в некоторых других вопросах, связанных с геометрией на плоскости (см. [8, отдел третий, гл. 3, § 1], [11, гл. 1, § 2]), опорную функцию подмножества  $S \subset \mathbb{C}$  чаще всего определяли как функцию

$$\text{spf}_S: \theta \xrightarrow{\theta \in \mathbb{R}} \sup_{s \in S} \text{Re } se^{-i\theta} \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (5)$$

По построению (5)  $2\pi$ -периодические на  $\mathbb{R}$  опорные функции множества  $S \subset \mathbb{C}$ , его замыкания  $\text{cl } S$  в  $\mathbb{C}$ , выпуклых оболочек  $\text{co } S$ ,  $\text{co } \text{cl } S$  и замыкания  $\text{cl } \text{co } S$  совпадают. Сдвиг компакта или ограниченной области  $S$  в  $\mathbb{C}$  не влияет на полноту экспоненциальной системы  $\text{Exp}^Z$  соответственно в пространстве  $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$  или  $\text{Hol}(S)$ . Поэтому, не умаляя общности, всюду далее нам удобно считать, что, после сдвига ограниченного  $S$  и сохранения за ним того же обозначения  $S$ , нулевая точка принадлежит замыканию выпуклой оболочки множества  $S$ , т.е. выполнено условие

$$0 \in \text{cl } \text{co } S. \quad (6)$$

Если  $S \subset \mathbb{C}$  — компакт, то условие (6) эквивалентно условию  $0 \in \text{co } S$ . Кроме того, по определению (5) для произвольного  $S \subset \mathbb{C}$  условие (6) эквивалентно положительности опорной функции

$$\text{spf}_S(\theta) \stackrel{(6)}{\geq} 0. \quad (7)$$

При трактовке распределения точек  $Z$  как распределения масс (1) для любой положительной функции  $f$  на  $S$  можно корректно определить сумму

$$\sum_{\substack{z \in Z \\ z \in S}} f(z) := \int_S f dZ \in \overline{\mathbb{R}}^+. \quad (8)$$

Для точки  $z \in \mathbb{C}$  через  $\arg z \subset \mathbb{R}$  обозначаем множество значений всех её угловых аргументов. Для  $2\pi$ -периодической функции на  $\mathbb{R}$  со значениями в  $\mathbb{R}$  однозначно определены значения этой функции на  $\arg z$  для любых  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . При ограниченном  $S \subset \mathbb{C}$  считающую радиальную функцию для распределения точек  $Z$  по аргументам относительно  $S$  определяем как

$$Z_S^{\text{rad}}(r) \stackrel{(8)}{:=}_{r \in \mathbb{R}^+} Z(0) \|\text{spf}_S\|_{\mathbb{R}} + \sum_{\substack{z \in Z \\ 0 < |z| \leq r}} \text{spf}_S(\arg z) \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad \|\text{spf}_S\|_{\mathbb{R}} \stackrel{(4)}{:=} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |\text{spf}_S(\theta)|. \quad (9)$$

При условии (6)–(7) функция  $Z_S^{\text{rad}}$  положительная, возрастающая и непрерывная справа на  $\mathbb{R}^+$ .

Для  $S := D(r)$  или  $S := \overline{D}(r)$  их опорные функции тождественно равны

$$\text{spf}_{D(r)}(\theta) \equiv_{\theta \in \mathbb{R}} \text{spf}_{\overline{D}(r)}(\theta) \equiv r \quad \text{и} \quad Z_{D(1)}^{\text{rad}} = Z_{\overline{D}(1)}^{\text{rad}} \stackrel{(2)}{=} Z^{\text{rad}} \quad (10)$$

— считающая радиальная функция  $Z^{\text{rad}}$  из (2). В отличие от последней считающая радиальная функция для  $Z$  по аргументам относительно ограниченного  $S \subset \mathbb{C}$  учитывает распределение точек из  $Z$  не только по радиусу, но и по аргументам.

Комплексно сопряжённое к  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$  с  $r \in \mathbb{R}^+$  и  $\theta \in \mathbb{R}$  число обозначаем через  $\bar{z} := re^{-i\theta}$ , а для подмножества  $S \subset \mathbb{C}$  сопряжённое подмножество, зеркально симметричное  $S$  относительно вещественной оси  $\mathbb{R}$ , обозначаем  $\bar{S} := \{\bar{z} \mid z \in S\}$  с опорной функцией  $\text{spf}_{\bar{S}}$ .

Следующая теорема — частный случай результата, анонсированного в [14, основная теорема].

**Теорема 1.** Пусть  $Z$  — распределение точек в  $\mathbb{C}$ . Если для компакта  $S \subset \mathbb{C}$  со связным дополнением  $\mathbb{C} \setminus S$  при оговорённом в (6)–(7) условии  $0 \stackrel{(6)}{\in} \text{cl co } S = \text{co } S$  для некоторого строго положительного  $r_0 \in \mathbb{R}^+$  выполнено равенство

$$\sup_{r_0 \leq r < R < +\infty} \left( \int_r^R \frac{Z_S^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt - \frac{\text{area}(\text{co } S)}{\pi} \ln \frac{R}{r} \right) = +\infty, \quad (11)$$

то система  $\text{Exp}^Z$  из (3) полна в пространстве  $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$ .

**Следствие 1.** Если для произвольных распределения точек  $Z$  в  $\mathbb{C}$  и ограниченной односвязной области  $S \subset \mathbb{C}$  при условии (6)–(7) выполнено неравенство

$$\limsup_{1 < a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \limsup_{0 < r \rightarrow +\infty} \int_r^{ar} \frac{Z_S^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt \geq \frac{1}{\pi} \text{area}(\text{co } S), \quad (12)$$

то система  $\text{Exp}^Z$  из (3) полна в пространстве  $\text{Hol}(S)$ .

**Замечание 1.** Величину в левой части неравенства (12) по аналогии с подобными плотностями из [19], [21, гл. 22], [13, гл. 3], [4], [9], [10] можно назвать верхней логарифмической блок-плотностью для  $Z$  относительно евклидовой площади выпуклой оболочки множества  $\bar{S}$ .

## 2. Доказательства результатов.

*Доказательство теоремы 1.* Предположим противное, а именно: в условиях теоремы 1 система  $\text{Exp}^Z$  не полна в пространстве  $C(S) \cap \text{Hol}(f S)$ . Тогда по теореме Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов на пространстве  $C(S)$  вкпе с теоремой Хана–Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов с сохранением нормы — в данном случае с замкнутого подпространства  $C(S) \cap \text{Hol}(\text{int } S)$  в  $C(S)$ , а также из известных следствий из неё, существует



борелевская комплекснозначная мера  $\mu \neq 0$  с носителем в  $S$ , аннулирующая экспоненциальную систему  $\text{Exp}^Z$ , но не аннулирующая хотя бы одну функцию из  $C(S) \cap \text{Hol}(f|_S)$ . Последнее означает, что заданная преобразованием Фурье—Лапласа целая функция

$$F: z \longmapsto \int_S e^{zs} d\mu(s) \quad (13)$$

обращается в нуль на  $Z$  с учётом кратности, а именно: кратность корня функции  $F$  в каждой точке  $z \in \mathbb{C}$  не превышает  $Z(z)$ . В силу связности дополнения  $\mathbb{C} \setminus S$  целая функция  $F$  из (13) ненулевая. Действительно, если  $F = 0$ , то согласно (13) мера  $\mu$  аннулирует экспоненциальную систему  $\{e^{zs} \mid z \in \mathbb{C}\}$ , замыкание линейной оболочки которой содержит все многочлены (см. [3, теорема 1], [13, гл. 1, п. 1.1.1, пример 1.1.1]). Следовательно, мера  $\mu$  аннулирует все многочлены. Но по теореме-критерию Мергеляна при условии связности  $\mathbb{C} \setminus S$  множество всех многочленов плотно в  $C(S) \cap \text{Hol}(f|_S)$ . Тогда мера  $\mu$  аннулирует все функции из  $C(S) \cap \text{Hol}(f|_S)$ , что не согласуется с выбором меры  $\mu$ . Таким образом, далее  $F \neq 0$ .

В обозначении  $|\mu|$  для полной вариации меры  $\mu$  и записи  $z := re^{i\theta}$  в полярной форме с  $r \in \mathbb{R}^+$  и  $\theta \in \mathbb{R}$  для целой функции  $F \neq 0$  из (13) имеет место оценка сверху

$$|F(re^{i\theta})| \leq \int_S |\exp(re^{i\theta}s)| d|\mu|(s) \leq \sup_{re^{i\theta} \in \mathbb{C}} \sup_{s \in S} |\exp(re^{i\theta}s)| |\mu|(S) = \exp\left(r \sup_{s \in S} \text{Re } se^{i\theta}\right) |\mu|(S),$$

где по определению опорной функции (5)

$$\sup_{s \in S} \text{Re } se^{i\theta} = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sup_{s \in S} \text{Re } se^{-i(-\theta)} \stackrel{(5)}{=} \text{spf}_{\bar{S}}(\theta)$$

— значения опорной функции сопряжённого компакта  $\bar{S}$  в точках  $\theta \in \mathbb{R}$ . Следовательно, эта оценка после логарифмирования может быть продолжена как

$$\ln |F(re^{i\theta})| \leq \text{spf}_{\bar{S}}(\theta)r + \ln |\mu|(S), \quad |\mu|(S) \neq 0. \quad (14)$$

Поскольку целая функция  $F$  ненулевая, можем рассмотреть субгармоническую функцию

$$u := \ln |F| - \ln |\mu|(S) \neq -\infty \quad (15)$$

с распределением масс Рисса, или мер Рисса (см. [16, 17, 20])

$$\Delta_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u = \frac{1}{2\pi} \Delta \ln |F| \geq 0, \quad (16)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, действующий на субгармоническую функцию  $u$  как обобщённую функцию на пространстве основных финитных функций на  $\mathbb{C}$ . В частности, ввиду обращения в нуль целой функции  $F$  на  $Z$  и известного вида [20, теорема 3.7.8] распределения масс Рисса субгармонической функции  $\ln |F|$  при рассмотрении распределения точек  $Z$  как распределения масс в смысле (1) имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \ln |F| \geq Z$$

и, как следствие, приходим к неравенству

$$\Delta_u \stackrel{(16)}{\geq} Z$$

для распределений масс  $\Delta_u$  и  $Z$  на  $\mathbb{C}$ . Это неравенство в силу положительности  $\text{spf}_{\bar{S}} \geq 0$  при условии (6) по условию-равенству (11) показывает, что

$$\sup_{r_0 \leq r < R < +\infty} \left( \int_r^R \frac{(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt - \frac{\text{area}(\bar{S})}{\pi} \ln \frac{R}{r} \right) = +\infty, \quad (17)$$

где в порядке переноса определения (9) с распределений точек на распределения масс мы положили

$$(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t) \stackrel{(9)}{=}_{r \in \mathbb{R}^+} (\Delta_u)(\overline{D}(r_0)) \| \text{spf}_{\bar{S}} \|_{\mathbb{R}} + \int_{r_0 < |z| \leq t} \text{spf}_{\bar{S}}(\arg z) d(\Delta_u)(z) \quad \text{при } t \in [r_0, +\infty) \quad (18)$$

— считающая радиальная функция для распределения масс  $\Delta$  по аргументам относительно  $\bar{S}$  вне  $\overline{D}(r_0)$ , которая при (6)–(7) положительная, возрастающая и непрерывная справа на  $[r_0, +\infty)$ . Напомним, что для субгармонической на  $\mathbb{C}$  и непрерывной функции (см. [2])

$$M: re^{i\theta} \xrightarrow{re^{i\theta} \in \mathbb{C}} \text{spf}_{\bar{S}}(\theta)r \quad (19)$$

её распределение масс Рисса определяется как произведение мер [13, п. 3.3.1] через её плотность

$$d\Delta_M(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} dr \otimes dl_{\text{co}\bar{S}}(\theta) \quad (20)$$

в полярных координатах, где  $l_{\text{co}\bar{S}}(\theta)$  — длина дуги границы  $\text{bd co } \bar{S}$ , отсчитываемой при движении по границе «против часовой стрелки» от последней точки опоры опорной к компакт  $\text{cl co } \bar{S}$  прямой, ортогональной положительной полуоси  $\mathbb{R}^+$ , до последней точки опоры опорной к компакт  $\text{cl co } \bar{S}$  прямой, ортогональной направлению радиус-вектора точки  $e^{i\theta}$  (см. [1, 11, 13]). В частности, вычисление площади выпуклого компакта  $\text{co } \bar{S} \ni 0$  путём аппроксимации его выпуклыми описанными многоугольниками, площади которых вычисляются через сумму площадей внутренних треугольников с центрами в нуль как половины произведений длин апофем на длины соответствующих сторон, дают равенство для площади

$$\text{area}(\bar{S}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{spf}_{\bar{S}}(\theta) dl_{\text{co}\bar{S}}(\theta). \quad (21)$$

Отсюда для вычитаемого произведения с  $\text{area}(\bar{S})$  из (17) при всех  $r_0 \leq r < R < +\infty$  имеем

$$\frac{\text{area}(\bar{S})}{\pi} \ln \frac{R}{r} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{spf}_{\bar{S}}(\theta) dl_{\text{co}\bar{S}}(\theta) \int_r^R \frac{1}{t} dt \stackrel{(20)}{=} \int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \frac{\text{spf}_{\bar{S}}(\theta)}{r} d\Delta_M(re^{i\theta}), \quad (22)$$

а для интеграла из (17) при всех  $r_0 \leq r < R < +\infty$  интегрирование по частям даёт равенство

$$\int_r^R \frac{(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt = \frac{(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(R)}{R} - \frac{(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(r)}{r} + \int_r^R \frac{1}{t} d(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t). \quad (23)$$

При этом в силу (14) и (15) имеют место отграничения

$$u(re^{i\theta}) \leq \text{spf}_{\bar{S}}(\theta)r \stackrel{(19)}{=} M(re^{i\theta}) \quad \text{при всех } re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad (24)$$

откуда  $u$  — субгармоническая функция конечного типа при порядке 1 (см. [16, гл. 4]), для которой

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{|z|} < +\infty, \quad \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_u(\overline{D}(r))}{r} < +\infty. \quad (25)$$

В частности, из последнего предельного соотношения ввиду ограниченности  $\text{spf}_{\bar{S}}$  на  $\mathbb{R}$  получаем

$$\sup_{r \in [r_0, +\infty)} \frac{(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(r)}{r} \stackrel{(18)}{\leq} \sup_{r \in [r_0, +\infty)} \| \text{spf}_{\bar{S}} \|_{\mathbb{R}} \frac{\Delta_u(\overline{D}(r))}{r} < +\infty,$$

откуда для первых двух слагаемых в правой части (23) имеем

$$\sup_{r_0 < r \leq R} \left| \frac{(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(R)}{R} - \frac{(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(r)}{r} \right| \leq 2 \sup_{r \in [r_0, +\infty)} \frac{(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(r)}{r} < +\infty,$$

а последний интеграл в (23) согласно (18) можем записать как

$$\int_r^R \frac{1}{t} d(\Delta_u)_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t) = \int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \frac{\text{spf}_{\bar{S}}(\theta)}{t} d\Delta_u(te^{i\theta}).$$

Отсюда согласно (17) и (22) получаем

$$\sup_{r_0 < r < R < +\infty} \int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \frac{\text{spf}_{\bar{S}}(\theta)}{t} d(\Delta_u - \Delta_M)(te^{i\theta}) = +\infty. \quad (26)$$

Итоговая наша задача — получить противоречие между этим равенством и ограничением (24), показав, что из (24) следует конечность левой части (26). Для этого рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V_R: te^{i\theta} \xrightarrow{te^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \text{spf}_{\bar{S}}(\theta) \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{R^2} \right) &\stackrel{(5)}{=} \sup_{s \in S} (\text{Re } se^{i\theta}) \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{R^2} \right) \\ &= \sup_{z := te^{i\theta} \neq 0} \sup_{s \in S} \text{Re} \left( \frac{s}{\bar{z}} - \frac{sz}{R^2} \right) \stackrel{=}{=} V_R(z), \end{aligned} \quad (27)$$

которая по построению положительна на  $\bar{D}(R)$  ввиду условия (6)–(7), обращается в нуль на окружности  $\partial\bar{D}(R)$  и непрерывна ввиду непрерывности опорных функций ограниченных множеств. Кроме того, согласно последнему равенству в (27), функция  $V_R$  представляет собой точную верхнюю грань локально ограниченного сверху семейства гармонических на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  функций

$$\left\{ \text{Re} \left( \frac{s}{\bar{z}} - \frac{sz}{R^2} \right) \right\}_{s \in S}.$$

Отсюда сразу следует, что функция  $V_R$  субгармонична на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

При этом выпуклый компакт со  $\bar{S} \subset \mathbb{C}$  можно представить как пересечение последовательности выпуклых компактов  $K_n \supset_{n \in \mathbb{N}} K_{n+1}$ , вложенных друг в друга, для которых их опорные функции  $k_n := \text{spf}_{K_n}$  дважды непрерывно дифференцируемы. По построению убывающая последовательность положительных опорных функций  $k_n$  стремится к опорной функции  $\text{spf}_{\bar{S}}$  и функции

$$v_n: te^{i\theta} \xrightarrow{te^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} k_n(\theta) \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{R^2} \right), \quad (28)$$

согласно обоснованному выше, положительны на  $\bar{D}(R) \setminus \{0\}$ , а также субгармоничны и имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Далее нам потребуется следующее объединение двух утверждений из [12], которые могут быть выведены и по общим интегральным формулам из [7, теорема 2].

**Лемма 1** (см. [12, леммы 2.2–2.3]). Пусть  $0 < r < R < +\infty$  и функция  $V$  положительна на замкнутом кольце  $\bar{D}(R) \setminus D(r)$ , субгармонична в его внутренности  $D(R) \setminus \bar{D}(r)$ , тождественно равна нулю на окружности  $\partial\bar{D}(R)$  и совпадает с сужением на  $\bar{D}(R) \setminus D(r)$  некоторой дважды непрерывно дифференцируемой в окрестности кольца  $\bar{D}(R) \setminus D(r)$  функции. Используя инверсию функции  $V$  относительно окружности  $\partial\bar{D}(r)$ , построим положительную на  $\mathbb{C}$  функцию

$$V^*(z) := \begin{cases} V(z), & r < |z| \leq R, \\ V(r^2/\bar{z}), & r^2/R < |z| \leq r, \\ 0, & |z| \leq r^2/R, |z| > R, \end{cases} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (29)$$

Тогда для любой пары субгармонических на окрестности круга  $\overline{D}(R)$  функций  $u \neq -\infty$  и  $M$  с распределениями масс Рисса соответственно  $\Delta_u$  и  $\Delta_M$  из неравенства  $u \leq M$  на этой окрестности следует неравенство

$$\int_{\mathbb{C}} V^* d\Delta_u \leq \int_{\mathbb{C}} V^* d\Delta_M + \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - M(re^{i\theta})) \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta}) d\theta, \quad (30)$$

где  $\partial/\partial \vec{n}_{\text{out}}$  — оператор дифференцирования по внешней нормали к кольцу  $D(R) \setminus \overline{D}(r)$  на  $\partial \overline{D}(r)$ .

Интегральное среднее функции  $g: \partial \overline{D}(r) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  по окружности  $\partial \overline{D}(r)$  обозначим следующим образом:

$$g^\circ(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta. \quad (31)$$

Следующая лемма — предельная форма предшествующей леммы 1.

**Лемма 2.** Пусть в убывающей последовательности функций  $v_n: \overline{D}(R) \setminus D(r) \rightarrow \mathbb{R}$  каждая из них обладает теми же свойствами, что и функция  $V$  в предыдущей лемме, а также модули производных по радиусу от них равномерно по  $n$  ограничены сверху во всех точках на окружности  $\partial \overline{D}(R)$  некоторым числом  $N_r \in \mathbb{R}^+$ . Обозначим теперь через  $V$  уже предельную функцию для последовательности  $v_n$ . Тогда для субгармонических на окрестности замкнутого круга  $\overline{D}(R)$  функций  $u \leq M$ , где  $u \neq -\infty$ , имеет место неравенство

$$\int_{r < |z| \leq R} V d\Delta_u \leq \int_{r < |z| \leq R} V d\Delta_M + \Delta_M(\overline{D}(r)) \sup_{r \leq |z| \leq R} V(z) + N_r \frac{r}{\pi} (|u|^\circ(r) + |M|^\circ(r)). \quad (32)$$

*Доказательство леммы 2.* Производная по внешней нормали  $\partial/\partial \vec{n}_{\text{out}}$  к кольцу  $D(R) \setminus \overline{D}(r)$  на  $\partial \overline{D}(r)$  — это, с точностью до знака, производная по радиусу на  $\partial \overline{D}(r)$ . Поэтому в силу положительности функции  $V^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^*$ , известной теореме о монотонном пределе в интегралах, а также равномерных оценок на  $\partial \overline{D}(r)$  через  $N_r$  на производные по радиусу функций  $v_n$ , переходя к пределу по  $n \rightarrow +\infty$ , из неравенства (30) леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} \int_{\overline{D}(R) \setminus D(r)} V d\Delta_u &\leq \int_{\mathbb{C}} V^* d\Delta_u \leq \int_{\mathbb{C}} V^* d\Delta_M + \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - M(re^{i\theta})) \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta}) d\theta \stackrel{(29)}{\leq} \\ &\stackrel{(29)}{\leq} \int_{\overline{D}(R) \setminus D(r)} V d\Delta_M + \int_{\overline{D}(r) \setminus D(r^2/R)} V \left( \frac{r^2}{z} \right) d\Delta_M(z) + \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta}) - M(re^{i\theta})| N_r d\theta \leq \\ &\leq \int_{r < |z| \leq R} V d\Delta_M + \sup_{r^2/R \leq |z| \leq r} V \left( \frac{r^2}{z} \right) \Delta_M(\overline{D}(r)) + \frac{r}{\pi} N_r \left( \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta + \int_0^{2\pi} |M(re^{i\theta})| d\theta \right) \stackrel{(29), (31)}{\leq} \\ &\stackrel{(29), (31)}{\leq} \int_{r < |z| \leq R} V d\Delta_M + \sup_{r \leq |z| \leq R} V(z) \Delta_M(\overline{D}(r)) + \frac{r}{\pi} N_r (|u|^\circ(r) + |M|^\circ(r)), \end{aligned}$$

что и даёт требуемую оценку (32), завершая доказательство леммы 2.  $\square$

Для применения леммы 2 к убывающей последовательности функций (28) с предельной функцией  $V_R$  из (27) отметим, что функции  $v_n$  удовлетворяют всем требованиям леммы 2 по установленным выше перед леммой 1 их свойствам и для них выполнены равномерные по  $n$  неравенства

для производных по радиусу:

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial r}(re^{i\theta}) \right| \stackrel{(28)}{\leq} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} k_n(\theta) \left| -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right| \leq \frac{2}{r^2} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} k_1(\theta) = \frac{a}{r^2} =: N_r, \quad (33)$$

где число  $a := \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} k_1(\theta)$ , очевидно, не зависит от  $n \in \mathbb{N}$ . Таким образом, заключительная

оценка (32) леммы 2 может быть записана для функций  $V \stackrel{(27)}{=} V_R$  и  $M \stackrel{(24)}{\geq} u$  из (19) как

$$\begin{aligned} \int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \text{spf}_{\bar{S}}(\theta) \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{R^2} \right) d\Delta_u(te^{i\theta}) &\stackrel{(32), (27), (33)}{\leq} \int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \text{spf}_{\bar{S}}(\theta) \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{R^2} \right) d\Delta_M(re^{i\theta}) + \\ &+ \Delta_M(\overline{D}(r)) \sup_{r \leq t \leq R} \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{R^2} \right) \|\text{spf}_{\bar{S}}\|_{\mathbb{R}} + \frac{ar}{\pi r^2} (|u|^\circ(r) + |M|^\circ(r)). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая явный вид функции  $M$  из (19) и её распределения масс Рисса из (20), имеем

$$\begin{aligned} \int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \frac{\text{spf}_{\bar{S}}(\theta)}{t} d\Delta_u(te^{i\theta}) &\stackrel{(19), (20)}{\leq} \int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \frac{\text{spf}_{\bar{S}}(\theta)t}{R^2} d\Delta_u(te^{i\theta}) + \int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \frac{\text{spf}_{\bar{S}}(\theta)}{t} d\Delta_M(re^{i\theta}) + \\ &+ r \frac{l_{\text{co}\bar{S}}(2\pi) - l_{\text{co}\bar{S}}(0)}{2\pi} \frac{1}{r} \|\text{spf}_{\bar{S}}\|_{\mathbb{R}} + \frac{a}{\pi r} (|u|^\circ(r) + |M|^\circ(r)). \quad (34) \end{aligned}$$

Первое, третье и четвёртое слагаемые из правой части этого неравенства оцениваются сверху числом, не зависящим от значений радиуса  $r \geq r_0 > 0$ . Действительно, для первого получаем

$$\int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \frac{\text{spf}_{\bar{S}}(\theta)t}{R^2} d\Delta_u(te^{i\theta}) \leq \|\text{spf}_{\bar{S}}\| \frac{1}{R} \Delta_u(\overline{D}(R)) \leq C_1,$$

где число  $C_1 \in \mathbb{R}^+$  не зависит от  $R \geq r_0$ , поскольку для субгармонической функции  $u$  конечного типа при порядке 1 выполнено (25). В третьем слагаемом  $r$  просто исчезает и оно оценивается сверху через некоторое число  $C_3 \in \mathbb{R}^+$ . Наконец,  $|M|^\circ(r) \leq \|\text{spf}_{\bar{S}}\| r$  при всех  $r \in \mathbb{R}^+$ , а для интегральных средних  $|u|^\circ(r)$  по окружностям  $\partial\overline{D}(r)$  модуля субгармонической функции  $u \not\equiv -\infty$  конечного типа при порядке 1 удовлетворяет, как следует, например, из [15, лемма 6.2], соотношению  $|u|^\circ(r) \underset{R \rightarrow +\infty}{=} O(r)$ . Это даёт возможность оценить сверху четвёртое слагаемое числом  $C_4 \in \mathbb{R}^+$ , не зависящим от  $r \geq r_0 > 0$ . Таким образом, полагая  $C := C_1 + C_3 + C_4$  из (34) с учётом (21) получаем оценку

$$\int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \frac{\text{spf}_{\bar{S}}(\theta)}{t} d\Delta_u(te^{i\theta}) \stackrel{(34)}{\leq} \int_{r < |te^{i\theta}| \leq R} \frac{\text{spf}_{\bar{S}}(\theta)}{t} d\Delta_M(re^{i\theta}) + C \quad \text{для всех } r \geq r_0. \quad (35)$$

Это противоречит равенству (26), что и завершает доказательство теоремы 1.  $\square$

*Доказательство следствия 1.* Для ограниченной односвязной области  $S \subset \mathbb{C}$  существует последовательность  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  компактов  $S_n \subset S$  со связными дополнениями  $\mathbb{C} \setminus S_n$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , объединение которых совпадает с односвязной областью  $S$ . При этом для выпуклой оболочек со  $S_n$  этих компактов имеем  $\text{area}(\text{co } S_n) < \text{area}(\text{co } S)$ . Для полноты системы  $\text{Exp}^Z$  в  $\text{Hol}(S)$  с топологией равномерной сходимости на компактах достаточно показать, что система  $\text{Exp}^Z$  полна в каждом из пространств  $C(S_n) \cap \text{Hol}(\text{int } S_n)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Положим

$$d_n := \frac{1}{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} (\text{area}(\text{co } S) - \text{area}(\text{co } S_n)) > 0.$$

При фиксированном  $n \in \mathbb{N}$  из равенства (11) следует существование возрастающей неограниченной последовательности  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  чисел  $a_k > 1$ , для которой

$$\limsup_{0 < r \rightarrow +\infty} \int_r^{a_k r} \frac{Z_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt \geq \frac{1}{\pi} (\text{area}(\text{co } S_n) + d_n) \ln a_k \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда для каждого  $k \in \mathbb{N}$  найдётся достаточно большое  $r_k \geq 1$ , для которого

$$\int_{r_k}^{a_k r_k} \frac{Z_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt \geq \frac{1}{\pi} (\text{area}(\text{co } S_n) + d_n) \ln a_k - 1 = \frac{1}{\pi} \text{area}(\text{co } S_n) \ln \frac{a_k r_k}{r_k} + \frac{1}{\pi} d_n \ln a_k - 1,$$

что может быть записано как неравенства

$$\int_{r_k}^{a_k r_k} \frac{Z_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt - \frac{\text{area}(\text{co } S_n)}{\pi} \ln \frac{a_k r_k}{r_k} \geq \frac{1}{\pi} d_n \ln a_k - 1.$$

Применяя операцию  $\sup$  по  $k$  к обеим частям, получаем

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left( \int_{r_k}^{a_k r_k} \frac{Z_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt - \frac{\text{area}(\text{co } S_n)}{\pi} \ln \frac{a_k r_k}{r_k} \right) \geq \frac{d_n}{\pi} \sup_{k \in \mathbb{N}} \ln a_k - 1 = +\infty,$$

поскольку  $d_n > 0$ . Тем более, имеет место равенство

$$\sup_{1 < r < R < +\infty} \left( \int_r^R \frac{Z_{\bar{S}}^{\text{rad}}(t)}{t^2} dt - \frac{\text{area}(\text{co } S_n)}{\pi} \ln \frac{R}{r} \right) = +\infty.$$

Отсюда по теореме 1 система  $\text{Exp}^Z$  полна в пространстве  $C(S_n) \cap \text{Hol}(\text{int } S_n)$ . В силу произвола в выборе  $n \in \mathbb{N}$  получаем и полноту системы  $\text{Exp}^Z$  в пространстве  $\text{Hol}(S)$ , что и требовалось.  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. — М.: Фазис, 2002.
2. *Гришин А. Ф., Малютин К. Г.* Тригонометрически выпуклые функции. — Курск: Юго-Западный гос. ун-т, 2015.
3. *Громов В. П.* О полноте системы значений голоморфной вектор-функции в пространстве Фреше // Мат. заметки. — 2003. — 73, № 6. — С. 827–840.
4. *Каримов М. Р., Хабибуллин Б. Н.* Совпадение некоторых плотностей распределения множеств и полнота систем целых функций // (Мерзляков С. Г., 2000, ред.) Тр. Междунар. конф. «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы». III. Анализ и дифференциальные уравнения. — Уфа: Ин-т мат. с ВЦ УНЦ РАН, 2000. — С. 29–34.
5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Физматгиз, 1956.
6. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1978.
7. *Меньшикова Э. Б.* Интегральные формулы типа Карлемана и Левина Б. Я. для мероморфных и субгармонических функций // Изв. вузов. Мат. — 2022. — № 6. — С. 37–53.
8. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. — М.: Наука, 1978.
9. *Саллимова А. Е., Хабибуллин Б. Н.* Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса // Уфим. мат. ж. — 2020. — 12, № 2. — С. 35–48.
10. *Саллимова А. Е., Хабибуллин Б. Н.* Рост целых функций экспоненциального типа и характеристики распределений точек вдоль прямой на комплексной плоскости // Уфим. мат. ж. — 2021. — 13, № 3. — С. 116–128.
11. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. — М.: Наука, 1983.
12. *Хабибуллин Б. Н.* Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. — 1991. — 182, № 6. — С. 811–827.
13. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа: БГУ, 2012.

14. Хабибуллин Б. Н. Смешанные площади и полноты систем экспоненциальных функций // Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения—XXXIV» (Воронеж, 3–9 мая 2023 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. — С. 390–392.
15. Хабибуллин Б. Н., Шмелёва А. В. Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. Классический случай // Алгебра анал. — 2019. — 31, № 1. — С. 156–210.
16. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
17. Hörmander L. Notions of Convexity. — Boston: Birkhäuser, 1994.
18. Levin B. Ya. Lectures on Entire Functions. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1996.
19. Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. — 1961. — 89, № 2. — P. 175–201.
20. Ransford T. Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
21. Rubel L. A., Colliander J. E. Entire and Meromorphic Functions. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.

### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хабибуллин Булат Нурмиевич

Институт математики с вычислительным центром

Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Кудашева Елена Геннадьевна

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа

E-mail: lena\_kudasheva@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 118–126  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-118-126

УДК 519.24

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЧЕТКИМИ СОСТОЯНИЯМИ

© 2024 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

**Аннотация.** В работе изучены непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями. Основное внимание уделено классу стационарных нечетко-случайных процессов. Установлены свойства их числовых характеристик: нечетких ожиданий, ожиданий и корреляционных функций. Обосновано их спектральное представление и обобщенная теорема Винера–Хинчина. Полученные результаты опираются на свойства нечетко-случайных величин и числовых случайных процессов. В качестве примеров рассмотрены треугольные нечетко-случайные процессы.

**Ключевые слова:** непрерывный случайный процесс, нечеткое состояние, нечеткое ожидание, корреляционная функция, спектральное разложение.

## ON SOME PROPERTIES OF STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES WITH FUZZY STATES

© 2024 V. L. KHATSKEVICH

**ABSTRACT.** In this work, continuous stochastic processes with fuzzy states are studied. The main attention is paid to the class of stationary fuzzy stochastic processes. The properties of their numerical characteristics are established: fuzzy expectations, expectations, and correlation functions. Their spectral representation and the generalized Wiener–Khinchin theorem are substantiated. The results obtained are based on the properties of fuzzy stochastic variables and numerical stochastic processes. Triangular fuzzy stochastic processes are considered as examples.

**Keywords and phrases:** continuous stochastic process, fuzzy state, fuzzy expectation, correlation function, spectral decomposition.

**AMS Subject Classification:** 60G10

**1. Введение.** Нечеткое моделирование в последние десятилетия активно используется при решении различных прикладных задач, когда исходные данные неполны или слабо формализованы (см. [1, 5]). С другой стороны, при исследовании динамических процессов в условиях ограниченной исходной информации один из возможных подходов заключается в трактовке их параметров как реализации некоторых случайных процессов (см. [2, 3]).

В данной работе сочетаются упомянутые подходы, а именно, исследуются непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями (нечетко-случайные процессы). Точнее, мы считаем время и множество возможных нечетких состояний непрерывным. При этом сечение непрерывного нечеткого случайного процесса в любой момент времени представляет собой нечетко-случайную величину. В своем исследовании мы опираемся на известные результаты по теории нечетко-случайных величин (см. [7, 11, 12]) и классические результаты теории вещественных случайных процессов (см. [2, 3]).



В настоящей работе введены и исследованы стационарные нечетко-случайные процессы, в частности, их спектральное представление, обобщенная теорема Винера–Хинчина. Полученные в этой области результаты являются развитием на случай нечеткости известных (см. [2, гл. 1], [3, гл. 23]) для стандартных непрерывных случайных процессов. Подчеркнем, что в нашем случае важную роль играют нечеткие ожидания, отражающие тренды нечетко-случайных процессов. Отметим отличие нашего подхода и результатов от работ, посвященных случайным процессам с непрерывным временем и дискретными нечеткими состояниями (см., например, [4]).

Ниже под нечетким числом  $\tilde{z}$ , заданным на универсальном пространстве  $\mathbb{R}$  вещественных чисел, будем понимать совокупность упорядоченных пар  $(x, \mu_{\tilde{z}(x)})$ , где функция принадлежности  $\mu_{\tilde{z}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  определяет степень принадлежности каждого  $x \in \mathbb{R}$  множеству  $\tilde{z}$  (см. [1, гл. 5]).

Множество  $\alpha$ -уровня нечеткого числа  $\tilde{z}$  с функцией принадлежности  $\mu_{\tilde{z}(x)}$  определяется соотношением  $Z_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{z}(x)} \geq \alpha\}$ ,  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $Z_0 = \text{cl}\{x | \mu_{\tilde{z}(x)} > 0\}$  где  $\text{cl}$  обозначает замыкание множества.

Будем считать, что все  $\alpha$ -уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Таким образом,  $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ , где  $z^-(\alpha)$  и  $z^+(\alpha)$  — левый и правый  $\alpha$ -индексы нечеткого числа, соответственно. Ниже будем рассматривать совокупность нечетких чисел  $J$ , для которых индексы  $z^\pm(\alpha)$  измеримы и ограничены на  $[0, 1]$ .

**2. Нечеткие ожидания, ожидания и ковариации нечетко-случайных величин.** Пусть  $(\Omega, \Sigma, P)$  — вероятностное пространство, где  $\Omega$  — множество элементарных событий,  $\Sigma$  —  $\sigma$ -алгебра, состоящая из подмножеств множества  $\Omega$ ,  $P$  — вероятностная мера. Рассмотрим отображение  $\tilde{X} : \Omega \rightarrow J$ . Его интервалы  $\alpha$ -уровня  $X_\alpha(\omega)$  при фиксированном  $\omega \in \Omega$  определяются формулами

$$X_\alpha(\omega) = \{r \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1], \quad X_0(\omega) = \text{cl}\{\mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) > 0\},$$

где  $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(r)$  — функция принадлежности нечеткого числа  $\tilde{X}(\omega)$ . Интервал  $X_\alpha(\omega)$  представим в виде  $X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega, \alpha), X^+(\omega, \alpha)]$ . Его границы  $X^-(\omega, \alpha)$ ,  $X^+(\omega, \alpha)$  называют левым и правым  $\alpha$ -индексами для  $\tilde{X}(\omega)$ , соответственно.

Отображение  $\tilde{X} : \Omega \rightarrow J$  называют нечетко-случайной величиной (кратко н.с.в.; см., например, [11, 12]), если вещественнозначные функции  $X^\pm(\omega, \alpha)$  измеримы по  $\omega$  для всех  $\alpha \in [0, 1]$ . В этом случае  $\alpha$ -индексы являются вещественными случайными величинами при  $\alpha \in [0, 1]$ .

В дальнейшем будем рассматривать класс  $\mathfrak{X}$  н.с.в., для которых индексы  $X^-(\omega, \alpha)$  и  $X^+(\omega, \alpha)$  являются квадратично суммируемыми на  $\Omega \times [0, 1]$ . Положим

$$x^-(\alpha) = \int_{\Omega} X^-(\omega, \alpha) dP, \quad x^+(\alpha) = \int_{\Omega} X^+(\omega, \alpha) dP. \quad (1)$$

Нечеткое число с индексами, определяемыми в (1), называют нечетким ожиданием н.с.в.  $\tilde{X}$  и обозначают  $M(\tilde{X})$ , а его индексы —  $[M(\tilde{X})]_\alpha^\pm$ .

Ожидание  $m(\tilde{X})$  н.с.в.  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}$  определяют как среднее (см. [9]) нечеткого числа  $M(\tilde{X})$  с  $\alpha$ -индексами  $[M(\tilde{X})]_\alpha^\pm$ , задаваемыми формулой (1):

$$m(\tilde{X}) = \frac{1}{2} \int_0^1 ([M(\tilde{X})]^- (\alpha) + [M(\tilde{X})]^+ (\alpha)) d\alpha. \quad (2)$$

Для н.с.в.  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  ковариацию определяют равенством

$$\text{cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\text{cov}(X_\alpha^-, Y_\alpha^-) + \text{cov}(X_\alpha^+, Y_\alpha^+)) d\alpha \quad (3)$$

(см. [10]), а дисперсию — равенством  $D(\tilde{X}) = \text{cov}(\tilde{X}, \tilde{X})$ . В (3) ковариации вещественных случайных величин  $X_\alpha^\pm$  и  $Y_\alpha^\pm$  определены стандартной формулой (см. [11, гл. 23])

$$\text{cov}(X_\alpha^\pm, Y_\alpha^\pm) = E(X_\alpha^\pm - E(X_\alpha^\pm))(Y_\alpha^\pm - E(Y_\alpha^\pm)).$$

Здесь и ниже символ  $E$  обозначает математическое ожидание случайной величины, т.е. для случайной величины  $\xi(\omega)$  полагаем

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) dP.$$

Свойства ковариаций и дисперсий н.с.в. обсуждаются в [10], [8, гл. 6].

**3. Непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями.** Пусть  $[t_0, T]$  — расширенный отрезок числовой оси. Непрерывным случайным процессом с нечеткими состояниями или нечетко-случайным процессом (н.с.п.)  $\tilde{X}(t)$  будем называть отображение  $\tilde{X} : [t_0, T] \rightarrow \mathfrak{X}$ , т.е. функцию  $\tilde{X}(t) = \tilde{X}(\omega, t)$ , значениями которой при всех  $t \in [t_0, T]$  являются н.с.в. из  $\mathfrak{X}$ .

Обозначим  $\alpha$ -индексы н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  через  $X_{\alpha}^{\pm}(\omega, t)$ .

Ниже будем рассматривать н.с.п., для которых вещественные функции  $X_{\alpha}^{\pm}(\omega, t)$  квадратично суммируемы по совокупности переменных на  $\Omega \times [0, 1] \times [t_0, T]$ .

Определим нечеткое ожидание  $M(\tilde{X}(t)) = M(\tilde{X}(\omega, t))$  н.с.п.  $\tilde{X}(\omega, t)$  при каждом  $t \in [t_0, T]$  как нечеткое ожидание (1) соответствующей н.с.в. с  $\alpha$ -индексами

$$\left[ M(\tilde{X}(\omega, t)) \right]_{\alpha}^{\pm} = \int_{\Omega} X_{\alpha}^{\pm}(\omega, t) dP \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (4)$$

Свойства нечетких ожиданий н.с.п. вытекают из свойств нечетких ожиданий н.с.в. (см., например, [6, 7]).

**Утверждение 1.** *Нечеткие ожидания н.с.п. обладают следующими свойствами:*

(i) *для неслучайной функции  $\tilde{z} : [t_0, T] \rightarrow J$  справедливо*

$$M(\tilde{z}(t)) = \tilde{z}(t);$$

(ii) *если  $\phi : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — неслучайный скалярный множитель, а  $\tilde{X}(t)$  — н.с.п., то*

$$M(\phi(t)\tilde{X}(t)) = \phi(t)M(\tilde{X}(t));$$

(iii) *для н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  и  $\tilde{Y}(t)$  справедливо равенство*

$$M(\tilde{X}(t) + \tilde{Y}(t)) = M(\tilde{X}(t)) + M(\tilde{Y}(t)).$$

Ожидание н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  при всех  $t \in [t_0, T]$  согласно (2) определяется формулой

$$m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( [M(\tilde{X}(t))]^{-}(\alpha) + [M(\tilde{X}(t))]^{+}(\alpha) \right) d\alpha.$$

**Пример 1.** Пусть случайные числовые процессы  $\xi_i(\omega, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in [t_0, T]$ ) квадратично суммируемы на  $\Omega \times [t_0, T]$  и таковы, что  $\xi_1(\omega, t) < \xi_2(\omega, t) < \xi_3(\omega, t)$  при всех  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in [t_0, T]$ .

Рассмотрим н.с.п.  $\tilde{X}(t)$ , для которого при всех  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in [t_0, T]$  нечеткое число  $\tilde{X}(\omega, t)$  имеет треугольный вид  $(\xi_1(\omega, t), \xi_2(\omega, t), \xi_3(\omega, t))$ , т.е. функция принадлежности  $\tilde{X}(\omega, t)$  при всех  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in [t_0, T]$  дается формулой

$$\mu_{\omega, t}(x) = \begin{cases} \frac{x - \xi_1(\omega, t)}{\xi_2(\omega, t) - \xi_1(\omega, t)}, & \text{если } x \in [\xi_1(\omega, t), \xi_2(\omega, t)]; \\ \frac{x - \xi_3(\omega, t)}{\xi_2(\omega, t) - \xi_3(\omega, t)}, & \text{если } x \in [\xi_2(\omega, t), \xi_3(\omega, t)]; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае  $\alpha$ -индексы  $\tilde{X}(t)$  определяются выражениями

$$X^{-}(\omega, t) = (1 - \alpha)\xi_1(\omega, t) + \alpha\xi_2(\omega, t), \quad X^{+}(\omega, t) = (1 - \alpha)\xi_3(\omega, t) + \alpha\xi_2(\omega, t). \quad (5)$$

Тогда нечеткое ожидание  $M(\tilde{X}(t))$  задается формулами для  $\alpha$ -индексов

$$[M(\tilde{X})]_{\alpha}^{-}(t) = (1 - \alpha)E\xi_1(t) + \alpha E\xi_2(t), \quad [M(\tilde{X})]_{\alpha}^{+}(t) = (1 - \alpha)E\xi_3(t) + \alpha E\xi_2(t)$$

для всех  $\alpha \in [0, 1]$ .

Ниже рассмотрим понятие корреляционной функции н.с.п. и ее свойства. В соответствии с (3) корреляционной функцией н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  назовем величину

$$K_{\tilde{X}}(t, s) = \text{cov}(\tilde{X}(t), \tilde{X}(s)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( K_{X_{\alpha}^{-}}(t, s) + K_{X_{\alpha}^{+}}(t, s) \right) d\alpha. \quad (6)$$

Здесь  $K_{X_{\alpha}^{-}}(t, s)$  и  $K_{X_{\alpha}^{+}}(t, s)$  — корреляционные функции случайных процессов  $X_{\alpha}^{-}(\omega, t)$  и  $X_{\alpha}^{+}(\omega, t)$ . Дисперсия н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  определяется равенством  $D_{\tilde{X}}(t) = K_{\tilde{X}}(t, t)$ .

Согласно (6) и [10] имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Корреляционная функция н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  обладает следующими свойствами:

- (i) симметричность:  $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2, t_1)$  при всех  $t_1, t_2 \in [t_0, T]$ ;
- (ii) если  $\phi(t)$  — неслучайная числовая функция и  $\tilde{Y}(t) = \phi(t)\tilde{X}(t)$ , то

$$K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$$

при  $\phi(t_1)\phi(t_2) \geq 0$ ;

- (iii) если  $\tilde{Y}(t) = \tilde{X}(t) + \phi(t)$ , то

$$K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_1, t_2);$$

- (iv) справедливо соотношение

$$|K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_{\tilde{X}}(t_1)D_{\tilde{X}}(t_2)}.$$

**Пример 2.** Пусть выполнены условия примера 1 и дополнительно случайные процессы  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$ , а также  $\xi_2(t)$ ,  $\xi_3(t)$  попарно некоррелированы. Выразим корреляционную функцию  $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$  н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  треугольного вида  $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$  через корреляционные функции  $K_{\xi_1}(t_1, t_2)$ ,  $K_{\xi_2}(t_1, t_2)$ ,  $K_{\xi_3}(t_1, t_2)$  случайных процессов  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  и  $\xi_3(t)$ .

Согласно формуле (5) для левого индекса  $X_{\alpha}^{-}$  треугольного нечеткого процесса и по предположению о некоррелированности  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  для корреляционной функции  $K_{X_{\alpha}^{-}}(t_1, t_2)$  имеем

$$K_{X_{\alpha}^{-}}(t_1, t_2) = (1 - \alpha)^2 K_{\xi_1}(t_1, t_2) + \alpha^2 K_{\xi_2}(t_1, t_2).$$

Аналогично

$$K_{X_{\alpha}^{+}}(t_1, t_2) = (1 - \alpha)^2 K_{\xi_3}(t_1, t_2) + \alpha^2 K_{\xi_2}(t_1, t_2).$$

Тогда по определению (6) корреляционной функции н.с.п. получим

$$\begin{aligned} K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 (1 - \alpha)^2 d\alpha K_{\xi_1}(t_1, t_2) + 2 \int_0^1 \alpha^2 d\alpha K_{\xi_2}(t_1, t_2) + \int_0^1 (1 - \alpha)^2 d\alpha K_{\xi_3}(t_1, t_2) \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ K_{\xi_1}(t_1, t_2) + 2K_{\xi_2}(t_1, t_2) + K_{\xi_3}(t_1, t_2) \right\}. \end{aligned}$$

**4. Стационарные нечетко-случайные процессы.** К стационарным (в широком смысле) случайным процессам относятся такие, математические ожидания которых не зависят от времени, а корреляционные функции зависят лишь от разности аргументов (см. [2, гл. 8], [3, гл. 24]).

Назовем н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  *стационарным*, если его нечеткое ожидание  $M(\tilde{X}(t))$  и ожидание  $m(\tilde{X}(t))$  постоянны, а корреляционная функция  $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2 - t_1)$  зависит от разности аргументов  $t_2 - t_1 = \tau$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha$ -индексы н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  при всех  $\alpha \in [0, 1]$  являются стационарными случайными процессами. Тогда н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  является стационарным случайным процессом.

Действительно, обозначим постоянные математические ожидания  $\alpha$ -индексов  $X_\alpha^\pm(t)$  н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  при всех  $\alpha \in [0, 1]$  через  $m_\alpha^\pm$ . Согласно определению (4) они являются  $\alpha$ -индексами нечеткого ожидания  $m_\alpha^\pm = [M(\tilde{X}(t))]_\alpha^\pm$ . Тогда нечеткое ожидание  $M(\tilde{X}(t))$  постоянно. При этом

$$m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 (m_\alpha^+ + m_\alpha^-) d\alpha.$$

Обозначим корреляционные функции случайных процессов  $X_\alpha^\pm(\omega, t)$  через  $K_{X_\alpha^\pm}(t_1, t_2)$ . По условию  $K_{X_\alpha^\pm}(t_1, t_2) = K_{X_\alpha^\pm}(t_2 - t_1)$ . Тогда по определению (6) корреляционная функция н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  зависит от разности аргументов.

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 корреляционная функция  $K_{\tilde{X}}(\tau)$  н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  обладает следующими свойствами:

- (i) корреляционная функция является четной, т.е.  $K_{\tilde{X}}(\tau) = K_{\tilde{X}}(-\tau)$ ;
- (ii) дисперсия н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  постоянна и равна  $D_{\tilde{X}} = K_{\tilde{X}}(0)$ ;
- (iii) для всех  $\tau \in \mathbb{R}$  справедливо неравенство  $|K_{\tilde{X}}(\tau) \leq K_{\tilde{X}}(0)|$ .

Теорема 2 следует из выполнения соответствующих свойств для корреляционных функций  $K_{X_\alpha^-}(\tau)$ ,  $K_{X_\alpha^+}(\tau)$  (см. [11, гл. 23]) и представления (6).

**Пример 3.** Пусть выполнены условия примера 2 и дополнительно все случайные процессы  $\xi_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , являются стационарными в широком смысле. Тогда треугольный н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  является стационарным. Это следует из выражений, полученных в примерах 1–2 для нечетких ожиданий и соответственно корреляционных функций треугольного н.с.п.  $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ .

Рассмотрим вопрос о спектральном разложении н.с.п. Как известно, спектральным разложением вещественного случайного процесса  $\xi(t)$  называют представление вида

$$\xi(t) = m_\xi + \sum_{i=0}^{\infty} (\xi_i \cos \omega_i t + \eta_i \sin \omega_i t), \quad (7)$$

где  $m_\xi$  — вещественное число,  $\xi_i$  и  $\eta_i$  — случайные величины (коэффициенты), а  $\omega_i = i\omega_1$  — относительные частоты гармоник, кратные основной частоте  $\omega_1$ .

**Лемма 1** (см. [2, гл. 8], [3, гл. 25]). Пусть случайные коэффициенты  $\xi_i$  и  $\eta_i$  случайного процесса (7) взаимно некоррелированы и имеют математические ожидания  $E\xi_i = E\eta_i = 0$  и дисперсии  $D\xi_i = D\eta_i = D_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , причем

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_i < \infty.$$

Тогда случайный процесс (7) имеет постоянное математическое ожидание  $E\xi(t) = m_\xi$  и корреляционную функцию  $K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(t)$ , зависящую только от разности  $\tau = t_2 - t_1$ , т.е. является стационарным в широком смысле. При этом

$$K_\xi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i \cos \omega_i \tau,$$

а дисперсия  $D_\xi$  определяется равенством

$$D_\xi = \sum_{i=0}^{\infty} D_i.$$

Отметим, что совокупность  $D_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , называют спектром стационарного случайного процесса.

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha$ -индексы н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  при всех  $\alpha \in [0, 1]$  допускают спектральные разложения

$$X_{\alpha}^{\pm}(t) = m_{\alpha}^{\pm} + \sum_{i=0}^{\infty} ((\xi_{\alpha}^{\pm})_i \cos \omega_i t + (\eta_{\alpha}^{\pm})_i \sin \omega_i t), \quad (8)$$

причем при всех  $\alpha \in [0, 1]$  для случайных величин  $(\xi_{\alpha}^{\pm})_i, (\eta_{\alpha}^{\pm})_i$  выполнены следующие условия:

- (i)  $E(\xi_{\alpha}^{\pm})_i = E(\eta_{\alpha}^{\pm})_i = 0, i = 0, 1, 2, \dots;$
- (ii)  $E((\xi_{\alpha}^{\pm})_i (\xi_{\alpha}^{\pm})_j) = E((\eta_{\alpha}^{\pm})_i (\eta_{\alpha}^{\pm})_j) = 0, i \neq j;$
- (iii)  $E((\xi_{\alpha}^{\pm})_i (\eta_{\alpha}^{\pm})_i) = 0$  для всех  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть

$$D(\xi_{\alpha}^{\pm})_i = D(\eta_{\alpha}^{\pm})_i = (D_{\alpha}^{\pm})_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (D_{\alpha}^{\pm})_i < \infty \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Тогда  $\tilde{X}(t)$  — стационарный н.с.п.: его ожидание постоянно и имеет  $\alpha$ -индексы, равные  $m_{\alpha}^{-}$  и  $m_{\alpha}^{+}$ , а корреляционная функция н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  имеет вид

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 ((D_{\alpha}^{-})_i + (D_{\alpha}^{+})_i) d\alpha \cos \omega_i \tau. \quad (9)$$

При этом дисперсия н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  определяется формулой

$$D_{\tilde{X}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 ((D_{\alpha}^{-})_i + (D_{\alpha}^{+})_i) d\alpha.$$

Действительно, значения  $\alpha$ -индексов нечеткого ожидания стационарного н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  следуют из формул (8) и определения (4) с учетом предположений теоремы на коэффициенты  $(\xi_{\alpha}^{\pm})_i$  и  $(\eta_{\alpha}^{\pm})_i$ . Кроме того, в условиях теоремы 3 согласно лемме 1, справедливо представление

$$K_{X_{\alpha}^{\pm}}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} (D_{\alpha}^{\pm})_i \cos \omega_i \tau.$$

Поэтому формула (9) следует из определения (6) корреляционной функции н.с.п. Формула для дисперсии  $D_{\tilde{X}}$  вытекает из теоремы 2.

**Пример 4.** Пусть в условиях примера 1 случайные величины  $\xi_j(t), j = 1, 2, 3$ , допускают спектральные разложения

$$\xi_j(t) = m_j + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_{j,i} \cos \omega_i t + \eta_{j,i} \sin \omega_i t), \quad (10)$$

причем для всех  $j = 1, 2, 3$  и всех  $i = 0, 1, 2, \dots$  выполнены условия

$$E(\xi_{j,i}) = E(\eta_{j,i}) = 0, \quad E(\xi_{j,i} \xi_{s,k}) = E(\eta_{j,i} \eta_{s,k}) = 0$$

во всех случаях, кроме одновременного выполнения равенств  $j = s, i = k$ . Пусть, кроме того,  $E(\xi_{j,i} \eta_{s,k}) = 0$  для всех  $j = 1, 2, 3$  и всех  $i, s, k = 1, 2, \dots$ , а также  $D\xi_{j,i} = D\eta_{j,i} = D_{j,i}$  для всех  $j = 1, 2, 3$  и всех  $i = 0, 1, 2, \dots$ , причем

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_{j,i} \leq \infty, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда корреляционная функция н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  треугольного вида  $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$  представима формулой

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{\infty} (D_{1,i} + 2D_{2,i} + D_{3,i}) \cos \omega_i \tau.$$

Действительно, согласно (10) и (5), левый и правый индексы нечеткого треугольного процесса  $\tilde{X}(t)$ , порождаемого тройкой  $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$  имеют вид (8), где в обозначениях теоремы 3

$$m_{\alpha}^{-}(t) = (1 - \alpha)m_1 + \alpha m_2, \quad (\xi_{\alpha}^{-})_i = (1 - \alpha)\xi_{1,i} + \alpha\xi_{2,i}, \quad (\eta_{\alpha}^{-})_i = (1 - \alpha)\eta_{1,i} + \alpha\eta_{2,i}.$$

Аналогично,

$$m_{\alpha}^{+}(t) = (1 - \alpha)m_3 + \alpha m_2, \quad (\xi_{\alpha}^{+})_i = (1 - \alpha)\xi_{3,i} + \alpha\xi_{2,i}, \quad (\eta_{\alpha}^{+})_i = (1 - \alpha)\eta_{3,i} + \alpha\eta_{2,i}.$$

Тогда согласно предположениям примера 4

$$D(\xi_{\alpha}^{-})_i = (1 - \alpha)^2 D_{1,i} + \alpha^2 D_{2,i} = D(\eta_{\alpha}^{-})_i, \quad D(\xi_{\alpha}^{+})_i = (1 - \alpha)^2 D_{3,i} + \alpha^2 D_{2,i} = D(\eta_{\alpha}^{+})_i.$$

Поскольку в условиях примера выполнены предположения теоремы 3, то (9) влечет доказываемую формулу для  $K_{\tilde{X}}(\tau)$ .

**5. Спектральная плотность стационарного н.с.п. Обобщенная теорема Винера—Хинчина.** Рассмотренное выше спектральное представление (7) характерно для стационарных случайных процессов, заданных на конечном промежутке времени. Для стационарного скалярного случайного процесса, определенного на бесконечном интервале времени, вместо спектра дисперсий рассматривают спектральную плотность дисперсий.

**Лемма 2** (теорема Винера—Хинчина; см. [2, гл. 8]; [3, гл. 25]). *Ковариационная функция  $K_{\xi}(\tau)$  и спектральная плотность  $S_{\xi}(\omega)$  стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье*

$$K_{\xi}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad S_{\xi}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\xi}(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Приведем обобщение этого утверждения на случай стационарных н.с.п. Пусть стационарный н.с.п.  $\tilde{X}(t)$ , заданный на  $(-\infty, \infty)$ , имеет  $\alpha$ -индексы  $X_{\alpha}^{\pm}(t)$  и пусть  $S_{X_{\alpha}^{\pm}}(\omega)$  — спектральные плотности стационарных случайных процессов  $X_{\alpha}^{\pm}(t)$  для всех  $\alpha \in [0, 1]$ , причем функции  $S_{X_{\alpha}^{\pm}}(\omega)$  суммируемы по  $\alpha$  на  $[0, 1]$ .

Спектральной плотностью стационарного н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  назовем функцию

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^1 (S_{X_{\alpha}^{+}}(\omega) + S_{X_{\alpha}^{-}}(\omega)) d\alpha. \quad (11)$$

**Пример 5.** Пусть выполнены условия примера 3. Обозначим через  $S_i(\omega)$  спектральные плотности случайных процессов  $\xi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда спектральная плотность н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  треугольного вида  $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$  описывается формулой

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{6} (S_1(\omega) + 2S_2(\omega) + S_3(\omega)).$$

Действительно, согласно (5) и в силу предположения о попарной некоррелированности случайных процессов  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , а также  $\xi_2$  и  $\xi_3$  для  $\alpha$ -индексов  $X_{\alpha}^{\pm}$  н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  можем записать

$$D_{X_{\alpha}^{-}} = (1 - \alpha)^2 D_{\xi_1} + \alpha^2 D_{\xi_2}, \quad D_{X_{\alpha}^{+}} = (1 - \alpha)^2 D_{\xi_3} + \alpha^2 D_{\xi_2}.$$

По определению спектральная плотность дисперсий случайного процесса  $\xi(t)$  равна

$$S_{\xi}(\omega) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{D_{\omega}}{\Delta \omega},$$

где  $D_{\omega}$  — дисперсия, приходящаяся на интервал частот  $\Delta \omega$  в окрестности  $\omega$ . Тогда на основании формул для дисперсий случайных процессов  $X_{\alpha}^{\pm}$  имеем

$$S_{X_{\alpha}^{-}} = (1 - \alpha)^2 S_1(\omega) + \alpha^2 S_2(\omega), \quad S_{X_{\alpha}^{+}} = (1 - \alpha)^2 S_3(\omega) + \alpha^2 S_2(\omega).$$

Поэтому в соответствии с (11) спектральная плотность н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  треугольного типа  $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$  имеет вид

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 (1-\alpha)^2 d\alpha S_1(\omega) + \int_0^1 \alpha^2 d\alpha S_2(\omega) + \int_0^1 (1-\alpha)^2 d\alpha S_3(\omega) + \int_0^1 \alpha^2 d\alpha S_2(\omega) \right) = \\ = \frac{1}{6} (S_1(\omega) + 2S_2(\omega) + S_3(\omega)).$$

Отметим, что по определению (11) и в силу свойств спектральных плотностей скалярных случайных процессов выполнены следующие свойства спектральной плотности н.с.п.:

- (i) спектральная плотность н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  неотрицательна, т.е.  $S_{\tilde{X}}(\omega) \geq 0$ ;
- (ii) интеграл от спектральной плотности н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  в пределах от нуля до бесконечности равен дисперсии н.с.п.  $\tilde{X}(t)$ :

$$\int_0^{\infty} S_{\tilde{X}}(\omega) d\omega = D_{\tilde{X}}.$$

Целесообразность данного выше определения (11) спектральной плотности н.с.п. подтверждается приводимой ниже обобщенной теоремой Винера—Хинчина.

**Теорема 4.** Пусть  $\tilde{X}(t)$  — стационарный н.с.п. и для его  $\alpha$ -индексов  $X_{\alpha}^{\pm}(t)$  при любом  $\alpha \in [0, 1]$  определены ковариационная функция  $K_{X_{\alpha}^{\pm}}(\tau)$  и спектральная плотность  $S_{X_{\alpha}^{\pm}}(\omega)$ , причем они суммируемы по совокупности переменных на  $[0, \infty) \times [0, 1]$ . Тогда ковариационная функция и спектральная плотность стационарного н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье:

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{\tilde{X}}(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{\tilde{X}}(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (12)$$

Покажем первую из формул (12). Для скалярных стационарных процессов  $X_{\alpha}^{\pm}(t)$  по лемме 2 имеем

$$K_{X_{\alpha}^{-}}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{X_{\alpha}^{-}}(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad K_{X_{\alpha}^{+}}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{X_{\alpha}^{+}}(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Сложим обе части этих равенств, а затем проинтегрируем полученные результаты по  $\alpha$  от 0 до 1. Тогда

$$\int_0^1 (K_{X_{\alpha}^{-}}(\tau) + K_{X_{\alpha}^{+}}(\tau)) d\alpha = \int_0^1 \int_0^{\infty} (S_{X_{\alpha}^{-}}(\omega) + S_{X_{\alpha}^{+}}(\omega)) \cos \omega \tau d\omega d\alpha.$$

Меняя в правой части порядок интегрирования на основании теоремы Фубини и используя (6), (11), установим формулу для  $K_{\tilde{X}}(\tau)$ . Кроме того, по лемме 2

$$S_{X_{\alpha}^{\pm}}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{X_{\alpha}^{\pm}}(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Отсюда, аналогично предыдущему, с учетом (6), (11) следует вторая из формул (12).

**Пример 6.** Пусть выполнены условия примера 2, причем каждый из случайных процессов  $\xi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , является стационарным белым шумом, а именно,  $\xi_i(t)$  — стационарный случайный процесс с постоянной спектральной плотностью  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Как известно (см. [3, гл. 25]), в этом случае корреляционная функция  $\xi_i(t)$  имеет вид  $K_{\xi_i}(\tau) = 2\pi S_i \delta(\tau)$ , где  $\delta(\tau)$  — дельта-функция

Дирака. Тогда в соответствии с примером 2 корреляционная функция н.с.п.  $\tilde{X}(t)$  треугольного вида, порождаемого тройкой  $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ , имеет вид

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{\pi}{3}(S_1 + 2S_2 + S_3)\delta(\tau).$$

**6. Заключение.** Существенное содержание и научную новизну данной работы составляют теоремы 1–4. Подчеркнем значимость введенного в данной статье понятия спектральной плотности стационарного н.с.п. Примеры 1–6 показывают возможность применения развитой теории к треугольным н.с.п.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверкин А. Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. — М.: Наука, 1986.
2. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и их инженерные приложения. — М.: Кнорус, 2016.
3. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 2003.
4. *Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А.* Марковские процессы с нечеткими состояниями// Информ. технол. — 2020. — 26, № 6. — С. 323–334.
5. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. — М.: БИНОМ, 2015.
6. *Хацкевич В. Л.* О некоторых свойствах нечетких ожиданий и нелинейных нечетких ожиданий нечетко-случайных величин// Изв. вузов. Мат. — 2022. — № 11. — С. 97–109.
7. *Шведов А. С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин// Прикл. эконометрика. — 2016. — 42. — С. 121–138.
8. *Язенин А. В.* Основные понятия теории возможностей. — М.: Физматлит, 2016.
9. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24, № 3. — P. 279–300.
10. *Feng Y., Hu L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables// Fuzzy Syst. — 2001. — 120. — P. 487–497.
11. *Nguyen H. T., Wu B.* Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
12. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Fuzzy random variables// J. Math. Anal. Appl. — 1986. — 114. — P. 409–422.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хацкевич Владимир Львович

Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж

E-mail: vlkhats@mail.ru





ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 233 (2024). С. 127–153  
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-127-153

УДК 519.17

## КРАТКИЙ АНГЛО-РУССКИЙ СЛОВАРЬ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

© 2024 г. В. А. ВОБЛЫЙ, Н. А. АРХИПОВА

**Аннотация.** Предлагаемый «Краткий англо-русский словарь по теории графов» содержит около 1200 терминов по теории графов и ее приложениям. Он будет полезен всем переводчикам английских текстов, связанных с теорией графов и ее приложениями к естественным наукам, экономике и технике.

**Ключевые слова:** теория графов, физика, химия, техника.

## CONCISE ENGLISH-RUSSIAN DICTIONARY ON GRAPH THEORY

© 2024 V. A. VOBLUYI, N. A. ARKHIPOVA

**АБСТРАКТ.** The proposed «Concise English-Russian Dictionary of Graph Theory» contains about 1,200 terms on graph theory and its applications to physics, chemistry and engineering. It will be useful to all translators of English texts related to graph theory and its applications to natural sciences, economics, and engineering.

**Keywords and phrases:** graph theory, physics, chemistry, engineering.

**AMS Subject Classification:** 05-00

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Переводчики с английского языка научно-технической литературы, связанной с теорией графов и их приложениями, знают «Русско-английский и англо-русский словарь по графам в информатике» В. А. Евстигнеева и В. Н. Касьянова, изданный в Новосибирске ООО «Сибирское Научное Издательство» в 2011 г. Словарь содержит около 2500 терминов в англо-русской части и находится в свободном доступе в интернете:

[https://www.iis.nsk.su/files/book/file/evst\\_kas\\_2011\\_ver2.pdf](https://www.iis.nsk.su/files/book/file/evst_kas_2011_ver2.pdf)

К сожалению, целый ряд терминов теории графов, относящихся к ее приложениям в физике, химии, экономике и технике не вошли в этот словарь. Кроме того, бурное развитие дискретной математики и вычислительной техники приводит к постоянному появлению новых терминов в теории графов.

Предлагаемый «Краткий англо-русский словарь по теории графов» создан на основе словаря В. А. Евстигнеева и В. Н. Касьянова. Большое количество малоупотребительных терминов этого словаря не включены в краткий словарь. Новый словарь пополнен более 500 терминами, отсутствующими в словаре В. А. Евстигнеева и В. Н. Касьянова. При этом основным источником новых терминов служили рефераты из раздела «Теория графов» в Реферативном журнале «Математика» и БД «Математика» ВИНТИ РАН. Объем словаря около 1200 терминов.

## А

- absorbant number** число поглощения  
**absorbent set, absorbing set, absorbant set** поглощающее множество  
**acceptable assignment** насыщающая разметка  
**accordion** аккордеон (граф)  
**acyclic graph** ациклический граф  
**acquisition number** число приобретения  
**adjacency matrix** матрица смежности  
**adjacent vertices** смежные вершины  
**adjoint digraph** сопряженный орграф  
**alphabet overlap graph** граф алфавитного перекрытия  
**alt** альт, альтернативный фрагмент, закрытый фрагмент  
**altermatic number** альтерматическое число  
**alternating group** знакопеременная группа  
**alternating chain** чередующаяся (альтернирующая) цепь  
**amalgamation** амальгамирование, слияние  
**amallamorphic graphs** амалламорфные графы  
**amount of a flow** величина потока  
**ancestor of a vertex** предок вершин  
**Andrasfai graph** граф Андрашфай  
**animal** полимино  
**annihilating-ideal graph** граф аннулирующих идеалов  
**annihilation number** число аннигиляции  
**annihilator graph** аннуляторный граф  
**anti-adjacency matrix** матрица антисмежности  
**anti-Kekule number** антикекулево число  
**antiprism graph** граф антипризмы  
**anti-Ramsey number** антирамсеево число  
**anti-triangle** антитреугольник, дополнение треугольника  
**apex graph** апексный граф  
**arachnoid graph** арахноидальный граф  
**arank number** аранговое число  
**arbitrarily traceable graph** произвольно вычерчиваемый граф  
**arbitrarily traverseable graph** произвольно проходимый граф  
**arborable graph** разветвляемый граф  
**arboreal hypergraph** древесный гиперграф  
**arborescence** ориентированное дерево  
**arboricity** древесность  
**arc** дуга  
**arc-transitive graph** дуготранзитивный граф  
**Archimedean graph** архимедов граф  
**arithmetic graph** арифметический граф  
**arrangeable graph** упорядочиваемый граф  
**arrangement graph** граф расположения  
**arrow** стрела (граф)  
**articulation point** точка сочленения  
**assignment problem** задача о назначениях  
**assortativity** ассортативность  
**atom-bond connectivity index** индекс связности атомного соединения

**attachment vertex** вершина присоединения  
**augmented adjacency matrix** расширенная матрица смежности  
**augmenting chain** увеличивающая цепь  
**automaton graph** автоматный граф  
**automorphism group** группа автоморфизмов

## В

**backbone** хребет  
**backbone coloring** хребтовая раскраска  
**back-edge** обратная дуга  
**backward arc** обратная дуга  
**balanced graph** сбалансированный граф  
**ball number** шаровое число (графа)  
**bandwidth** ширина полосы, пропускная способность  
**banner** флаг, баннер (граф)  
**barbell** гантель (граф)  
**barrier** барьер  
**base digraph** базовый орграф  
**base of a directed graph** база орграфа, основание орграфа  
**basic cycle** базисный цикл  
**basis number** базисное число  
**basis graph of matroid** граф баз матроида  
**bend number** число изгиба  
**Beraha number** число Бераха  
**Berge graph** граф Бержа  
**Bertz index** индекс Берца  
**Bethe tree** дерево Бете  
**betweenness** промежуточность  
**bi-arc graph** двухдуговой граф  
**biased graph** смещенный граф  
**biclique** биклика  
**biclique graph** граф биклик  
**bicolored** 2-раскрашенный граф  
**biconnected component** компонента двусвязности, блок  
**Bidiakis cube** куб Бидиакиса  
**bidirectional arcs** двунаправленные дуги  
**Biggs-Smith graph** граф Биггса-Смита  
**bigraph** биграф  
**binary tree** бинарное дерево  
**binding number** число связи  
**Binet-Cauchy theorem** теорема Бине-Коши  
**bipartite graph** двудольный граф  
**bipartiteness** двудольность  
**bipartition** деление (графа) на две части, биразделение  
**biregular graph** бирегулярный граф  
**bishop graph** граф слона  
**Blanusa snark** снарк Блануши  
**block** блок  
**block-cactus graph** (полно)блочно-кактусный граф

**block graph** граф блоков  
**block-cutpoint graph** граф блоков и точек сочленения  
**blossom tree** цветущее дерево  
**blow-up lemma** лемма о раздутии  
**bluff graph** блефовый граф  
**body-hinge graph** телешарнирный граф  
**Bollobas graph** граф Боллобаша  
**bond** бонд  
**bond percolation** просачивание по ребрам  
**bondage number** число зависимости  
**book graph** книжный граф  
**borderenergetic graph** граничноэнергетический граф  
**boron tree** двоичное дерево  
**bottleneck** узкое место  
**bouquet** букет (граф)  
**bowtie** галстук-бабочка (граф)  
**boxity** ящичность.  
**brace** брекет (скоба)(граф)  
**bracelet** браслет (граф)  
**bramble** ежевика, колючка (граф)  
**bramble number** терновое число  
**branch** ветвь  
**branch vertex** вершина ветвления  
**branchwidth** ширина ветвления  
**BFS (breadth first search)** поиск в ширину  
**brick** брикет, брусок (граф)  
**bridge** мост  
**bridged graph, bridge graph** граф с мостами  
**bridgeless graph** граф без мостов  
**broadcast graph** граф ширококовещания  
**broom** метла (граф)  
**Brouwer-Haemers graph** граф Брауэра-Хемерса  
**Bruhat graph** граф Брюа  
**brush number** щеточное число  
**bubble-sort graph** граф пузырьковой сортировки  
**bug** жук (граф)  
**bull** бык (граф)  
**bull's head graph** граф головы быка (граф)  
**bundle** расслоение  
**bunkbed conjecture** гипотеза о двухъярусной кровати  
**burning number** число горения  
**burnt pancake graph** граф подгоревших блинов  
**Burnside lemma** лемма Бернсайда  
**butterfly** бабочка (граф)

## С

**cactus** кактус (граф)  
**cage** клетка  
**cage graph** клеточный граф

**call graph** граф [вызова] процедур  
**capacity of a cut-set** пропускная способность разреза  
**carambola** карамбола (граф)  
**Cartesian product of graphs** декартово произведение графов  
**carving** нарезка (графа)  
**caterpillar** гусеница (граф)  
**cathedral** купол  
**Cayley graph** граф Кэли  
**center** центр  
**centipede** сороконожка (граф)  
**centroid** центроид  
**chain** цепь  
**chain graph** цепной граф  
**chair** кресло (граф)  
**chamber graph** камерный граф  
**Chang graph** граф Чана  
**character degree graph** граф степеней характеров  
**Cheeger constant** константа Чигера  
**cherry** черри (граф)  
**child** потомок, порожденный, дочерний  
**chip-firing** поджигание  
**chiral graph** хиральный граф  
**choice number** число выбора  
**choosability** выбираемость  
**chord** хорда  
**chordal graph** хордальный граф  
**chromatic number** хроматическое число  
**chromatically unique graph** хроматически единственный граф  
**Chvatal graph** граф Хватала  
**circle graph** круговой граф  
**circuit** цикл  
**circuit connected** циклически связный  
**circuit rank** цикломатический ранг, цикломатическое число  
**circuitless graph** граф без циклов  
**circulant graph** циркулянтный граф  
**circular-arc graph** граф дуг окружности  
**circular coloring** круговая раскраска  
**circumference** окружение  
**claw** лапа, клешня  
**claw-free graph** граф без лап  
**claw-heavy graph** граф с тяжелыми лапами  
**clean graph** чистый граф  
**Clebsch graph** граф Клебша  
**clique** клика  
**clique cover** кликовое покрытие  
**clique graph** граф клик  
**clique number** кликовое число  
**clique-width** кликовая ширина  
**closure** замыкание  
**cluster** кластер

**clustered graph** кластерный граф  
**clutter** клаттер, беспорядок  
**coalescing** срастание  
**coarseness** крупность, зернистость, шероховатость  
**Coates graph** граф Коутса  
**cocktail party graph** граф коктейльной вечеринки  
**cocycle** коцикл  
**cohesion** сцепление  
**coin graph** монетный граф  
**collapsible graph** сжимаемый, стягиваемый граф  
**color-blind index** индекс дальтонизма  
**colored graph** раскрашенный граф  
**coloring** раскраска  
**coloured class** цветной класс  
**comb graph** гребешковый граф  
**comet** комета (граф)  
**commuting graph** граф коммутирования  
**comparability graph** граф сравнимости  
**comparable vertices** сравнимые вершины  
**competition graph** граф конкуренции  
**complement of a graph, complementary graph** дополнение графа  
**complete graph** полный граф  
**complete multipartite graph** полный многодольный граф  
**complete tree** завершенное дерево  
**NP-complete problem** NP-полная задача  
**complex unit gain graph** граф усиления с комплексной единицей  
**component of a graph** компонента графа  
**composition of graphs** композиция графов  
**compound graph** составной граф  
**condensation** конденсация  
**conference graph** конференционный граф  
**congestion** скопление  
**conjunction of graphs** конъюнкция графов  
**connected component** компонента связности  
**connected graph** связный граф  
**connector** соединитель  
**connectivity** связность  
**constellation** созвездие (граф)  
**contact graph** контактный граф  
**containment graph** граф включений  
**contraction of an edge** стягивание ребра  
**control flow graph** граф потока управления  
**converse digraph** обратный орграф  
**convex dominating set** выпуклое доминирующее множество  
**convex domination number** число выпуклого доминирования  
**co-occurrence graph** граф совместного появления  
**Cops and Robbers game** игра полицейские и воры  
**cop-win graph** граф выигрыша полицейского  
**cordial graph** сердечный граф  
**core** ядро, сердцевина

**coreness** ядерность  
**coritvity** коритивность  
**corona** корона (графов)  
**correspondence coloring** соответствующая раскраска  
**coset graph** граф смежных классов  
**cospectral graphs** коспектральные графы  
**cotree** кодерево  
**covering graph** покрывающий граф, накрывающий граф  
**countable graph** счетный граф  
**coupon coloring** купонная раскраска  
**Coxeter graph** граф Коксетера  
**CPM (critical path method)** метод критического пути  
**crossing number** число скрещиваний, число пересечений  
**crown graph** граф короны  
**crumby coloring** рассыпчатая раскраска  
**cube graph** граф куба  
**cubic graph** кубический граф  
**cubicity** кубичность  
**curling number** число завихрения  
**current** ток  
**curvature** кривизна  
**cut of a layout** разрез укладки  
**cut-edge** ребро-разрез, мост  
**cutpoint** точка сочленения, шарнир  
**cutpoint graph** граф точек сочленения  
**cutset** разрез, сечение  
**cutwidth of a layout** ширина разреза укладки  
**cyclability** циклируемость  
**cycle** цикл  
**cycle matrix** матрица циклов  
**cyclic sequence** циклический маршрут  
**cyclomatic number** цикломатическое число, цикломатический ранг

## D

**DAG (directed acyclic graph)** ациклический орграф  
**dart** дротик (граф)  
**de Bruijn graph** граф де Брёйна  
**decision problem** задача принятия решения  
**decidable problem** (алгоритмически) разрешимая задача  
**decision tree** дерево решений  
**deck** колода (графа)  
**decomposable graph** разложимый граф  
**decomposition** разложение, декомпозиция  
**decycling number** число дециклирования  
**deer** олень (граф)  
**defensive alliance** оборонительный союз  
**deficiency** дефицит  
**defining set** определяющее множество  
**degree of a vertex** степень вершины

**degree sequence** степенная последовательность  
**Dejter graph** граф Дейтера  
**demand graph** граф заказов  
**demigenus** полурод  
**dense graph** плотный граф  
**density** плотность  
**depth of a tree** глубина дерева  
**DFS (depth-first search)** поиск в глубину  
**derangement graph** граф беспорядков  
**derivation tree** дерево вывода  
**derived graph** производный граф  
**Desargues graph** граф Дезарга  
**descendant** потомок  
**descendance graph** граф потомства  
**dessin d'enfant** детский рисунок  
**detour** обход  
**diameter** диаметр  
**diamond** алмаз (граф)  
**difference graph** разностный граф  
**digon** двуугольник  
**digraph** оргграф  
**Dijkstra algorithm** алгоритм Дейкстры  
**Dilworth number** число Дилуорса  
**Dinitz algorithm** алгоритм Диница  
**dipole** диполь (граф)  
**direct product** прямое произведение (графов)  
**directed edge** ориентированное ребро, дуга  
**directed graph** ориентированный граф, оргграф  
**directed sequence** ориентированный маршрут  
**disc** диск  
**disk graph** дисковый граф  
**disconnected graph** несвязный граф  
**disjoint paths** непересекающиеся цепи  
**disjintness graph** граф непересекаемости  
**disjunct union of graphs** дизъюнктное объединение графов  
**dismantlable graph** разборный граф  
**disorientation of an arc** дезориентация дуги  
**dissection** рассечение  
**dissociation number** число диссоциации  
**distance** расстояние  
**distance hereditary graph** дистанционно-наследуемый граф  
**distance regular graph** дистанционно-регулярный граф  
**distinguishing number** отличительное число  
**ditree** ордерено  
**domatic number** доматическое число  
**dominance number, domination number** число доминирования  
**dominant set, dominating set** доминирующее множество  
**dominator** обязательный предшественник, доминатор  
**dominator tree** доминаторное дерево  
**dot product** скалярное произведение



**doublecross graph** граф с двойным пересечением  
**double dominating set** двойное доминирующее множество  
**double domination number** число двойного доминирования  
**dragon graph** драконов граф  
**drawing** укладка (графа)  
**dual graph** двойственный граф  
**dually chordal graph** двойственно-хордальный граф  
**Dudenev set** множество Дьюдене  
**dumbbell graph** гантельный граф  
**duplicate graph** граф дублирования  
**Dürer graph** граф Дюрера  
**dyadic graph** двоичный граф  
**Dyck graph** граф Дика

## Е

**ear expansion** колосковое разложение  
**ears of graphs** уши графов  
**eccentricity** эксцентриситет  
**edge** ребро  
**edge adding** добавление ребра  
**edge coloring** реберная раскраска  
**edge connectivity** реберная связность  
**edge cut, edge cut set** разрез  
**eigenvalue** собственное значение (графа)  
**elegant graph** элегантный граф  
**Ellingham-Horton graph** граф Эллингема-Хортон  
**embedding of a graph** вложение графа  
**enclave** анклав  
**endblock** концевой блок, висячий блок  
**k-ended tree** k-законченное дерево  
**endpoint, end-vertex** висячая, концевая вершина  
**energy** энергия (графа)  
**entire colouring** целая, сплошная раскраска  
**entire Zagreb index** полный загребский индекс  
**entry vertex** стартовая вершина, входная вершина  
**equally coloured vertices** соцветные вершины  
**equicoverable graph** равнопокрываемый граф  
**equienergetic graph** равноэнергетический граф  
**equimatchable** равносогласуемый, равнопаросочетаемый  
**equipartite graph** равнодольный граф  
**equitable partition** справедливое разбиение  
**equivelar map** эквивелярная карта  
**Erdős-Gyarfas conjecture** гипотеза Эрдёша-Дьярфаша  
**Erdős-Renyi model** модель Эрдёша-Реньи  
**Errera graph** граф Эрреры  
**Estrada index** индекс Эстрады  
**eternal coloring** вечная раскраска  
**Euler-Poincare characteristic** характеристика Эйлера-Пуанкаре  
**Eulerian graph, Euler graph** эйлеров граф

**even graph** четный граф  
**excellent graph** превосходный граф  
**exceptional graph** исключительный граф  
**excess** избыток  
**exchanged hypercube** обмененный гиперкуб  
**exhaustive search** перебор  
**expander** расширитель  
**expansion graph** граф расширения  
**exponent of a digraph** экспонента орграфа  
**extendable graph** расширяемый граф  
**exterior face** внешняя грань  
**external stability set** внешне устойчивое множество  
**external vertex** висячая вершина  
**eye-free graph** безглазый граф

## F

**face** грань (графа)  
**factor-critical graph** фактор-критический граф  
**factor** фактор  
**factorable graph, factorizable graph** факторизуемый граф  
**factorization** факторизация  
**factor-graph** фактор-граф  
**fair matching** справедливое паросочетание  
**fall coloring** падающая раскраска  
**fan** веер (граф)  
**Farey graph** граф Фарея  
**fasciagraph** фасциаграф  
**fat graph** толстый граф  
**father of a vertex** отец (непосредственный предок) вершины  
**fault tolerance** отказоустойчивость  
**feed back vertex** вершина обратной связи  
**felicitous graph** удачный граф  
**fibre** слой  
**firecracker** фейерверк (граф)  
**first-fit coloring** первая подходящая (непосредственная) раскраска  
**fixatic number** число закрепления  
**fixed vertex** неподвижная вершина  
**fixity** неподвижность  
**flag** флаг (граф)  
**flip graph** граф переворачиваний  
**flat graph** плоский граф  
**flow augmenting path** путь (цепь), увеличивающий поток  
**flow graph** управляющий граф  
**flow-equivalent graphs** потоко-эквивалентные графы  
**flower** цветок (граф)  
**Floyd-Warshall algorithm** алгоритм Флойда-Уоршалла  
**folded hypercube** складной гиперкуб  
**Folkman graph** граф Фолкмана  
**forbidden subgraph** запрещенный подграф

**forcing minor** вынужденный минор  
**forcing number** число форсинга  
**Ford-Fulkerson theorem** теорема Форда-Фалкерсона  
**forest** лес  
**fork** вилка (граф)  
**forward arc** прямая дуга, дуга вперед  
**four color theorem** теорема о четырех красках  
**fractional coloring** дробная раскраска  
**fragile graph** хрупкий граф  
**frame** фрейм  
**frame graph** каркасный граф  
**friendship graph** граф дружбы  
**friends-and-strangers graph** граф друзей и незнакомцев  
**frieze group** группа бордюра  
**Frucht graph** граф Фрухта  
**frustration** фрустрация  
**fulleren** фуллерен  
**fuzzy graph** нечеткий граф

## G

**gain graph** граф усиления  
**galaxy** галактика (граф)  
**gamburger** гамбургер (граф)  
**game chromatic number** игровое хроматическое число  
**game domination number** число игрового доминирования  
**gap-planar graph** разрывно-планарный граф  
**gear** шестерня (граф)  
**gem** драгоценный камень, гемма (граф)  
**general graph** общий граф, граф общего вида  
**generating function** производящая функция  
**genus** род (графа)  
**geodesic** геодезическая  
**geodetic graph** геодезический граф  
**Gewirtz graph** граф Гевирца  
**girth** обхват  
**s-gonal tree** s-угольное дерево  
**gonality** гональность  
**Gordon-Scantlebury index** индекс Гордона-Скантлбери  
**gossip graph** граф распространения слухов  
**graceful graph** грациозный граф  
**grafting** пересадка, прививка  
**Graham-Houghton graph** граф Грэхема-Хоутона  
**Graovac-Gorbani index** индекс Граоваца-Горбани  
**graph bundle** связка графов  
**graph chessboard** таблица графа  
**graphlet** графлет  
**graph of mapping** граф отображения  
**graph of a partial order** граф частичного порядка  
**graphon** графон

**graph pebbling** фиширование графа, игра с фишками на графе  
**graph unfolding** развертка графа  
**graph union** объединение графов  
**graphic sequence** графическая последовательность  
**graphoid** графоид  
**greedoid** гридоид  
**greedy algorithm** жадный алгоритм  
**grid graph** граф решетки  
**Grötzsch graph** граф Грётша  
**group graph** граф группы  
**groupie** групи  
**growing tree** растущее дерево  
**Gruenberg-Kegel graph** граф Грюнберга-Кегеля  
**Grundy number** число Гранди  
**guessing number** число угадывания  
**Gupta scheme** код Гапта

## Н

**Hadamard graph** граф Адамара  
**Hadwiger number** число Хадвигера  
**Hajos graph** граф Хайоша  
**half-edge** полурребро  
**half graph** полуграф  
**Halin graph** граф Халина  
**Hall theorem** теорема Холла  
**hammer** молот (граф)  
**Hamiltonian circuit** гамильтонов цикл  
**Hamiltonian connected graph** гамильтоново-связный граф  
**Hamiltonian decomposable graph** гамильтоново разложимый граф  
**Hamiltonian graph** гамильтонов граф  
**Hamming graph** граф Хэмминга  
**hammock** гамак  
**handcuff** наручники (граф)  
**handshake's lemma** лемма о рукопожатиях  
**Hawkes graph** граф Хоукса  
**heap** куча  
**Heawood graph** граф Хивуда  
**hedgehog** ёж (граф)  
**height of a tree** высота дерева  
**Helly hypergraph** гиперграф Хелли  
**helm** штурвал (граф)  
**hereditary class of graphs** наследственный класс графов  
**Herschel graph** граф Хершеля  
**Hertz graph** граф Герца  
**Higman-Sims graph** граф Хигмана-Симса  
**hinge vertex** шарнирная вершина  
**hole** дыра  
**homeomorphical graphs** гомеоморфные графы  
**homeomorphically irreducible graph** гомеоморфно несводимый граф

**homology** гомология  
**honest graph** честный граф  
**Hosoya index** индекс Хосойа  
**host graph** базовый граф  
**hourglass** песочные часы (граф)  
**house** дом (граф)  
**hub number** центральное число  
**Hückel graph** граф Хюккеля  
**hull number** оболочечное число  
**hydra number** число гидры  
**hyper de Bruijn graph** гиперграф де Брёйна  
**hyper Petersen graph** гиперграф Петерсена  
**hyper-Wiener index** гипериндекс Винера  
**hypercube** гиперкуб  
**hypergraph** гиперграф  
**hypohamiltonian graph** гипогамильтонов граф  
**hypermap** гиперкарта

## I

**identical group** тождественная группа  
**identity tree** асимметрическое дерево  
**idiomatic number** идиоматическое число  
**immediate dominator** непосредственный обязательный предшественник  
**immediate postdominator** непосредственный обязательный преемник  
**immersion** погружение, иммерсия  
**immovable vertex** неподвижная вершина  
**impropriety** неправильность  
**incenter** внутренний центр  
**incidence graph** граф инцидентности  
**incidence matrix** матрица инцидентности  
**incidentor coloring** инцидентная раскраска  
**inclusion tree** дерево вложенности  
**incomparable vertices** несравнимые вершины  
**incompatibility graph** граф несовместимости  
**indecomposable** неразложимый  
**indegree, in-degree** полустепень захода (вершины)  
**independence number** число независимости  
**independent dominating number** число независимого доминирования  
**independent set** независимое множество  
**indicated coloring** индикаторная раскраска  
**indifference graph** индифферентный граф, граф безразличия  
**induced subgraph** порожденный подграф  
**inflation** инфляция  
**inheritance graph** граф наследования  
**inhibitor arc** ингибиторная дуга  
**initial node** начальная вершина  
**in-neighborhood** входящая окрестность  
**input arc** заходящая дуга  
**inradius** внутренний радиус

**inset** заходящее множество  
**integer distance graph** граф целочисленных расстояний  
**integral graph** целочисленный граф  
**integrity** целостность (графа)  
**interchange graph** граф замен  
**interlace polynomials** многочлен сплетения  
**intersection graph** граф пересечений  
**intersection of graphs** пересечение графов  
**interval graph** интервальный граф  
**intractable problem** труднорешаемая задача  
**in-tree** входящее ордереве  
**inverse arborescence** обратная древесность  
**irreducible graph** несводимый граф  
**irredundance** избыточность  
**irreflexive relation** антирефлексивное отношение  
**irregular graph** неоднородный (нерегулярный) граф  
**irregularity strength** степень нерегулярности  
**Isaaks graph** граф Айзекса  
**isolation number** изоляционное число  
**isoperimetric number** число изопериметричности  
**isthmus** перешеек, мост

## J

**Jahangir graph** граф Джахангира  
**jellyfish graph** медузный граф  
**jewel** жемчужина (граф)  
**Johnson graph** граф Джонсона  
**join** соединение (графов)  
**judicious partition** разумное разбиение  
**jump graph** граф скачков  
**jump distance** расстояние скачков  
**justified tree** выровненное дерево  
**juxtaposition** наложение, сопоставление

## K

**kaleidoscope** калейдоскоп (граф)  
**Karp-Miller tree** дерево Карпа-Миллера  
**Kautz digraph** орграф Каутца  
**kayak paddle** байдарка (граф)  
**kernel** ядро  
**kernelization** выделение ядра  
**keyring** связка ключей (граф)  
**king** король  
**king graph** граф короля  
**kipas** кипас (граф)  
**Kirchoff matrix** матрица Кирхгофа  
**Kirszbraun graph** граф Киршбрауна  
**kissing number** поцелуйное число

**kite** воздушный змей (граф)  
**kite system** змейковая система  
**Kittel graph** граф Киттеля  
**Klein bottle** бутылка Клейна  
**Kneser graph** граф Кнезера  
**Knödel graph** граф Кнёделя  
**knot** узел  
**knowledge graph** граф знаний  
**König's theorem** теорема Кёнига  
**Königsberg's bridges problem** задача о кенигсбергских мостах  
**Krausz dimension of a graph** краусова размерность графа  
**Kronecker product** кронекерово произведение  
**Kruskal's algorithm** алгоритм Краскала

## L

**labeled graph** помеченный граф  
**labeling** разметка  
**laceability** связываемость  
**ladder** лестница (граф)  
**Laman graph** ламанов граф  
**lamplighter graph** граф фонарщика  
**Lanzhou index** индекс Ланьчжоу  
**Laplacian eigenvalues** лапласово собственное значение  
**Laplacian matrix** матрица Лапласа, лапласиан  
**lattice graph** граф решётки  
**layout** укладка, нумерация, схема  
**leaf** лист  
**leaf number** листовое число  
**leafage** крона  
**leaf-connected** листово связный  
**leapfrog fulleren** скачкообразный фуллерен  
**left linear tree** левостороннее дерево  
**left-sided balanced tree** левостороннее балансирующее дерево  
**letter graph** буквенный граф  
**lettericity** буквенность  
**level graph** граф уровней  
**Levi graph** граф Леви  
**liar's domination** доминирование лжеца  
**lifting graph** граф поднятия  
**light edge** легкое ребро  
**line graph** реберный граф  
**line-independence number** реберное число независимости  
**linear arboricity** линейная древесность  
**linear arrangement** линейное размещение  
**link** звено, ребро  
**linkage** соединение  
**linked graph** связанный граф  
**list coloring** предписанная раскраска  
**Ljubljana graph** граф Любляны

**lobe graph** блок  
**lobster** омар (граф)  
**locating chromatic number** размещенное хроматическое число  
**locating total domination** локализирующе-тотальное доминирование  
**location number** число размещения  
**lollipop graph** леденцовый граф  
**loop** петля, цикл  
**loop region** циклический участок  
**loose cycle** неплотный цикл  
**looseness** несвязанность  
**lopsidependency graph** граф односторонней зависимости  
**Loupekinе snark** снарк Лупекина  
**Lovacz lemma** лемма Ловаса

## М

**magic labeling** магическая разметка  
**magnitude of a flow** мощность потока, величина потока  
**main eigenvalue** главное собственное значение  
**majestic coloring** грандиозная раскраска  
**majority domination number** число мажоритарного доминирования  
**maker-breaker game** игра созидатель-разрушитель  
**map** карта  
**marked graph** маркированный граф  
**marking** разметка, маркировка  
**Mason graph** граф Мэсона  
**matcher** сопоставитель  
**matching** паросочетание  
**matching equivalent** эквивалентность по паросочетаниям  
**matching number** число паросочетания  
**matching polynomial** полином паросочетаний  
**matching preclusion number** число препятствия для паросочетания  
**matchoid** матчоид  
**matchstick graph** спичечный граф  
**matrix-tree theorem** матричная теорема о деревьях  
**matroid** матроид  
**Matthews graph** граф Мэтьюза  
**max-flow min-cut theorem** теорема о наибольшем потоке и наименьшем разрезе  
**McGee graph** граф МакГи  
**McLaughlin graph** граф Маклафлина  
**mean graph** средний граф  
**meander** меандр  
**meanness** срединность  
**median graph** медианный граф  
**Menger's theorem** теорема Менгера  
**Meredith graph** граф Мередита  
**mergeable heap** сливаемое дерево  
**Meringer graph** граф Мерингера  
**Merrifield-Simmons index** индекс Меррифилда-Симмонса  
**mesh** сеть



**metric dimension** метрическая размерность  
**metrized graph** метризованный граф  
**middle graph** срединный граф  
**minor** минор (графа)  
**minor-closed class of graphs** минорно замкнутый класс графов  
**minus domination number** число минус-доминирования  
**mixed graph** смешанный граф  
**Möbius ladder** лестница Мёбиуса (граф)  
**Monge graph** граф Монжа  
**monochromatic class (set)** одноцветный класс  
**Moore graph** граф Мура  
**Moser graph (spindle)** граф (веретено) Мозера  
**Mostar index** индекс Мостара  
**MC coloring** MC раскраска, раскраска с монохроматической связью  
**multipartite graph** многодольный граф  
**multiple domination** кратное доминирование  
**multiway tree** многоходовое дерево  
**Mycielskian of a graph** мысельскиан графа

## N

**near perfect matching** почти совершенное паросочетание  
**nearly regular graph** почти однородный граф  
**necklace** ожерелье(граф)  
**neighbourhood matrix** матрица соседства  
**neighbourhood of a vertex** окрестность вершины  
**neighbouring vertices** соседние вершины  
**NEPS (noncomplete extended p-sum)** неполная расширенная р-сумма  
**neutrosophic graph** нейтрософный граф  
**network** сеть  
**niche graph** граф ниш  
**nilradical graph** нильрадикальный граф  
**node** узел, вершина  
**noncovered vertex** свободная вершина  
**non-backtracking graph** граф без возврата  
**noncursal vertex** нонкурсальная вершина  
**nondecidable problem** (алгоритмически) неразрешимая проблема  
**non-edge** ребро, отсутствие ребра  
**non-separable graph** неразделимый граф  
**Nordhaus-Gaddum boundary** Нордхауза-Гаддума граница  
**nowhere-zero flow** нигде не нулевой поток  
**NP-hard problem** NP-трудная задача  
**null graph** нуль-граф  
**nullity** дефект  
**numbering** нумерация (вершин графа)  
**nut graph** ореховый граф

## О

**obstruction set** препятствующее множество  
**occurrence graph** граф событий  
**octree** октодерево, восьмеричное дерево  
**odd graph** нечётный граф  
**offensive alliance** наступательный союз  
**one-ended** одноконцевой  
**one-to-one mapping** взаимно однозначное отображение  
**order of a graph** число вершин графа  
**ordered tree** упорядоченное дерево  
**ordering** упорядочение  
**oriented graph** направленный граф  
**outcenter** внешний центр  
**outcoming arc** исходящая дуга  
**outdegree, out-degree** полустепень исхода (вершины)  
**outerplanar graph** внешнепланарный граф  
**out-neighbourhood** исходящая окрестность  
**outradius** внешний радиус

## Р

**P=NP problem, P versus NP problem** P=NP проблема  
**pack of a graph** колода графа  
**page number** книжное число  
**pair group** парная группа  
**palette index** индекс палитры  
**Paley graph** граф Пэли  
**pan** сковорода (граф)  
**pancyclic graph** панциклический граф  
**pancake graph** блинный граф  
**pants graph** граф штанов  
**Pappus graph** граф Паппа  
**paraglider** парашлан, параглайдер (граф)  
**Parikh mapping** отображение Париха  
**parity coloring** сравнимая раскраска  
**parse tree** дерево разбора  
**parsimony distance** экономное расстояние  
**partial edge** частичное ребро  
**partially ordered set** частично упорядоченное множество, посет  
**n-partite graph**  $n$ -дольный граф  
**partition of a graph** разбиение графа  
**patch** участок, блок  
**path** путь, цепь  
**path connectivity** цепная (путевая) связность  
**path covering** путевое покрытие  
**path-distance width** дистанционно-путевая ширина  
**pathos** пафос (графа)  
**pathos clique graph** пафосно-кликтивный граф  
**pathos lic subdivision** пафосное ликтовое подразбиение

- pathwidth of a graph** путевая ширина графа  
**raw** лапа (граф)  
**pebbling** фиширование  
**pebbling number** фишечное число, число мощения  
**pegging number** число привязки  
**pendant vertex** висячая вершина, концевая вершина  
**peninsula** полуостров  
**percolation** просачивание, перколяция  
**perfect graph** совершенный граф  
**perfect matching** совершенное паросочетание  
**peripheral vertex** периферийная вершина  
**permutation graph** граф перестановки  
**permuton** пермутон  
**petal graph** лепестковый граф  
**Petersen graph** граф Петерсена  
**Petri net** сеть Петри  
**pfafian graph** пфаффов граф  
**phylogeny graph** филогенный граф  
**pineapple graph** ананасный граф  
**piercing number** число пирсинга  
**Pisot number** число Пизо  
**pivot number** поворотное число  
**plabic (planar + bicoloured) graph** плабический граф  
**planar graph** планарный граф  
**plane graph** плоский граф  
**planted tree** дерево с висячим корнем  
**Platonic graph** платонов граф  
**platypus** утконос (граф)  
**plex** сплетение (сеть)  
**point** точка, вершина (графа)  
**point-covering number** число вершинного покрытия  
**point-line group** вершинно-реберная группа  
**point-symmetric** вершинно-симметричный  
**point visibility graph** граф видимости точек  
**pointihedron** острогранник  
**Polya enumeration theorem** теорема перечисления Пойа  
**polytop graph** граф многогранника  
**polyhedral graph** полиэдральный граф  
**polyomino graph** полиминный граф  
**Posa theorem** теорема Поша  
**poset** посет, частично упорядоченное множество  
**postdominator** обязательный преемник, постдоминатор  
**Poussin graph** граф Пуссена  
**power domination** доминирование по мощности  
**predecessor of a vertex** предок вершины  
**prefix graph** префиксный граф  
**premap** предкарта  
**preorder** предпорядок  
**pretzel** крендель (граф)  
**primal-dual** прямо-двойственное (представление)

**prime graph** примитивный граф, элементарный граф  
**prism** призма (граф)  
**product of graphs** произведение графов  
**profinite graph** проконечный граф  
**proper coloring** собственная, правильная раскраска  
**proximity** близость  
**Prüfer code** код Прюфера  
**pruned tree** обрезанное дерево  
**pseudograph** псевдограф  
**Ptolemaic graph** птолемеев граф  
**pumping lemmas** леммы о возрастании  
**pumpkin** тыква (граф)  
**pushable chromatic number** выталкиваемое хроматическое число  
**pushdown graph** магазинный граф

## Q

**quadrangulation** квадрангуляция  
**quadrilateral** четырехсторонник, четырехугольник  
**quadrilateral graph** четырехугольный граф  
**quadtrees** кваддерево  
**queen graph** граф ферзя  
**queue number** число очередей  
**quipu** кипу (граф)  
**quiver** колчан (граф)  
**quorum coloring** кворумная раскраска

## R

**radio number** радио число, лучевое число  
**radius** радиус (графа)  
**rainbow connection number** число радужной связи  
**Ramanujan graph** граф Рамануджана  
**Ramsey number** число Рамсея  
**Randic index** индекс Рандича  
**random graph** случайный граф  
**random walk** случайное блуждание  
**rank** ранг (графа)  
**ranking number** число ранжирования  
**Rauzy graph** граф Розы  
**ray** луч  
**reachability graph** граф достижимости  
**reconfiguration graph** граф реконфигурации  
**Reeb graph** граф Риба  
**rectagraph** ректаграф  
**regular graph** регулярный (однородный) граф  
**reinforcement number** число подкрепления  
**relation precedence** отношение предшествования  
**removal of an edge** удаление ребра  
**reproduction graph** граф воспроизводства

**resolving set** разрешающее множество  
**restrained dominating set** ограниченное доминирующее множество  
**restricted domination number** число ограниченного доминирования  
**retraction** ретракция (графа)  
**reverse arc** обратная дуга  
**revised Szeged index** дополненный сегедский индекс  
**ribbon graph** ленточный граф  
**ridge graph** хребтовый граф  
**right-linear tree** правостороннее дерево  
**rigid circuit graph** циклически жесткий граф, хордальный граф  
**rigid graph** жесткий граф  
**rim** обод (граф)  
**ring-sum** кольцевая сумма (графов)  
**rising sun graph** граф восходящего солнца  
**Roman domination** римское доминирование  
**Roman domination number** число римского доминирования  
**rook graph** граф ладьи, ладейный граф  
**root** корень  
**rooted graph** корневой граф  
**rose graph** граф розы  
**rotagraph** ротаграф  
**roughness** грубость  
**route** обход, маршрут  
**routing** маршрутизация  
**rubbling** измельчение, рубка  
**rupture degree** степень разрыва  
**Ryjachek closure** замыкание Рьячека

## S

**Sachs graph** граф Захса  
**safe number** число безопасности  
**sandglass graph** граф песочных часов  
**sandpile group** критическая группа  
**satisfiability problem** задача о выполнимости  
**saturated graph** насыщенный граф  
**scattering number** число рассеяния  
**Schrläfli graph** граф Шлефли  
**Schrijver graph** граф Схрейвера  
**Schultz index** индекс Шульца  
**score** счет (в турнире)  
**scorpion** скорпион (граф)  
**scramble number** число шифрования  
**security number** число безопасности  
**Seidel switching** переключатель Зейделя  
**self-centered graph** самоцентрированный граф  
**self-complementary graph** самодополнительный граф  
**self-converse graph** самообратный граф  
**selfdual** самодвойственный  
**semigraph** полуграф  
**separable graph** делимый граф

**separating set** разделяющее множество, разрез  
**separator** разделитель  
**sequence** маршрут  
**sequence graph** граф последовательности  
**serf** крепостной (граф)  
**series-parallel graph** последовательно-параллельный граф  
**sesquivalent** полуторавалентный  
**set-graceful graph** множественно-грациозный граф  
**set Ramsey number** множественное число Рамсея  
**shadow graph** теневой граф  
**shredder** разделитель  
**Shrikhande graph** граф Шрикханде  
**Sierpinski graph** граф Серпинского  
**sign graph, sigraph** знаковый граф  
**signed domination number** число знакового доминирования  
**similar vertices** подобные вершины  
**simple graph** простой граф, обыкновенный граф  
**simplicial vertex** симплицальная вершина  
**simply rooted** однокорневой  
**singleton graph** одноэлементный граф  
**sink** выход, сток  
**sink-tree** дерево источников  
**size of a graph** число ребер графа  
**size Ramsey number** реберное число Рамсея  
**skein** моток  
**skeleton graph** остов  
**skew energy** асимметричная (косая) энергия  
**skewed tree** дерево со скосом  
**skewness of a graph** искаженность, асимметрия графа  
**skirting cycle** крайний цикл  
**Slater number** число Слейтера  
**small-world graph** граф малого мира  
**Smarandachely graph** граф Смрандаке  
**Smith graph** граф Смита  
**smooth graph** гладкий граф  
**snake graph** граф змеи  
**snark** снарк  
**snowflake** снежинка (граф)  
**snub prism** курносая призма  
**soccerball graph** граф футбольного мяча  
**son of a vertex** сын вершины  
**sorting tree** дерево сортировки  
**source** источник, начало дуги  
**Sousselier graph** граф Сусилье  
**spanner** стягиватель  
**spanning tree** остов, каркас, скелет  
**sparse graph** разреженный граф  
**spider** паук  
**split graph** расщепляемый граф  
**splitting of a vertice** расщепление вершины

- spoke** спица  
**spread** размах (спектра), spread  
**square** квадрат  
**square graph** квадратный граф  
**squared graph** отквадрированный граф  
**squco (square-complementary) graph** квадратично-дополнительный граф  
**stability number** число стабильности  
**stable set** устойчивое множество  
**stamen of a flower** тычинка цветка (граф)  
**star** звезда  
**star coloring** звездная раскраска  
**starfish** морская звезда (граф)  
**starlike tree** звёздopodobный граф, звёздopodobное дерево  
**Steiner distance** расстояние Штейнера  
**stem** ствол, стебель  
**straight line graph** граф с ребрами, являющимися отрезками прямых  
**stretcher** носилки (граф)  
**string graph** струнный граф  
**strong closure of a graph** сильное замыкание графа  
**strong component of a digraph** бикомпонента  
**strong dominating set** строго доминирующее множество  
**strong orientation** сильная ориентация  
**strong product of graphs** сильное произведение графов  
**strongly chordal graph** строго хордальный граф  
**strongly connected graph** сильно связный граф  
**strongly regular graph** сильно регулярный граф  
**Sturmian graph** граф Штурма  
**subdivision graph** граф подразбиений  
**subdivision of an edge** подразбиение ребра  
**subgraph** подграф  
**successive coloring** последовательная раскраска  
**successor of a vertex** преемник вершины  
**suffle cube** перетасованный куб  
**sum graph** граф сумм  
**sum hypergraph** суммарный гиперграф  
**sum of graphs** сумма графов  
**sun** солнце (граф)  
**sunflower** подсолнечник (граф)  
**sunlet graph** солнечный граф  
**sunlike graph** солнцеподобный граф  
**supergraph** надграф  
**support** опора (графа)  
**support vertex** опорная вершина  
**swap graph** граф замены  
**switch operation** операция переключения  
**switch equivalent graphs** графы, эквивалентные по переключению  
**switching** переключение  
**Sylvester graph** граф Сильвестра  
**Szeged index** сегедский индекс  
**Szekeres snark** снарк Секереша

## Т

- tadpole** головастик (граф)  
**tail** конец (дуги)  
**tangle** связка, сплетение, клубок  
**tanglegram** танглграмма  
**target** сток, конец дуги  
**tenacity** прочность (графа)  
**tensegrity graph** тенсегритный граф  
**terminal vertex** конечная вершина, висячая вершина  
**Terwilliger graph** граф Тервиллигера  
**tetrahedral graph** тетраэдральный граф  
**tesselation** замощение, мозаика  
**theta graph** тэта-граф  
**thickness of a graph** толщина графа  
**Thomsen graph** граф Томсена  
**thorn graph** колючий граф  
**thrackle** трекл  
**threshold graph** пороговый граф  
**throttling number** число дросселирования  
**tiered graph** многоярусный граф  
**Tietze graph** граф Титце  
**tightened graph** стягиваемый граф  
**tight graph** плотный граф  
**tiling** замощение  
**token** фишка  
**token graph** маркерный граф  
**tolerance graph** граф толерантности  
**total chromatic number** тотальное хроматическое число  
**total dominating number, total domination number** число тотального доминирования  
**total graph** тотальный граф  
**tough graph** жесткий граф  
**toughness of a graph** жесткость графа  
**tour** маршрут, тур  
**tournament** турнир  
**traceable number** число вычерчиваемости  
**trail** след, маршрут  
**trampoline** трамплин, батут (граф)  
**transformation graph** граф преобразований  
**transitive graph** транзитивный граф  
**transmission** трансмиссия  
**transversal** трансверсаль  
**trap** ловушка  
**TSP (traveling salesman problem)** задача коммивояжера  
**traversal of a graph** обход графа  
**tree** дерево  
**tree dominating set** древесное доминирующее множество  
**tree domination number** число древесного доминирования  
**tree graph** граф каркасов  
**tree traversal inorder** внутренний порядок обхода дерева



**tree-like graph** древовидный граф  
**treewidth** древесная ширина  
**triameter** триаметр  
**triangle** треугольник  
**triangle-free graph** граф без треугольников  
**triangular graph** треугольный граф  
**triangulated graph** триангулированный граф  
**triconnected graph** трехсвязный граф  
**trie** префиксное дерево, нагруженное дерево  
**Trinajstic index** индекс Тринайстича  
**tripod** тренога (граф)  
 **$n$ -tuple domination**  $n$ -кратное доминирование  
**trunk** ствол  
**tulgeity** дремучесть  
**Turing machine** машина Тьюринга  
**Tutte polynomial** многочлен Татта  
**twin domination** двойное доминирование

## U

**unavoidable graph** неизбежный граф  
**unbounded face** внешняя грань, бесконечная грань (плоского графа)  
**undecidable problem** (алгоритмически) неразрешимая задача  
**undensity** неплотность графа, число независимости, число внутренней устойчивости  
**underlying graph** базовый граф, основной граф  
**undirected graph** неориентированный граф  
**unicursal graph** уникарсальный граф  
**unicyclic graph** унициклический граф, одноциклический граф  
**uniform hypergraph** однородный гиперграф  
**unigraph** униграф  
**unigraphical (degree) sequence** униграфическая (степенная) последовательность  
**unilateral connectivity** односторонняя связность  
**union of graphs** объединение графов  
**uniquely coloured graph** однозначно раскрашиваемый граф  
**unit acquisition number** число прибавления единицы  
**unit-disk graph** единичнодисковый граф  
**unit distance graph** граф единичных расстояний  
**univoque graph** однотонный граф  
**unit gain graph** граф единичного усиления  
**unknotting number** число развязывания  
**urchin** ёж (граф)  
**utility graph** граф полезности

## V

**vague graph** нечеткий граф  
**valency of a vertex** валентность вершины, степень вершины  
**vertex (of a graph)** вершина (графа)  
**vertex connected graph** вершинно-связный граф  
**vertex connectivity** вершинная связность

**vertex-deleted** вершинно-вычеркнутый  
**vertex disjoint graphs** вершинно непересекающиеся графы  
**vertex weighted graph** вершинно взвешенный граф  
**visibility graph** граф видимости  
**voltage graph** граф напряжения  
**volvox graph** вольвоксовый граф  
**Voronoi diagram** диаграмма Вороного  
**vulnerability** уязвимость

## W

**walk** маршрут  
**walk-regular graph** маршрутно-регулярный граф  
**wallpaper group** кристаллографическая группа  
**Watkins graph** граф Уоткинса  
**wavelet tree** вейвлетное дерево  
**web graph** веб-граф, интернет-граф  
**weighted graph** взвешенный граф  
**well-hued graph** хорошо окрашенный граф  
**well-located graph** хорошо размещенный граф  
**well-partitioned graph** вполне разделенный граф  
**Wells graph** граф Уэлса  
**Wenger graph** граф Венгера  
**wheel** колесо (граф)  
**Whitney number** число Уитни  
**wide diameter** широкий диаметр  
**width** ширина  
**windmill** ветряная мельница (граф)  
**Wiener-Araya graph** граф Винера-Арайи  
**wirelength** протяженность (графа)  
**witness rectangle graph** граф привязочных прямоугольников  
**word-representable** словесно-представимый (граф)  
**WORM coloring** раскраска без радужных и монохроматических подграфов  
**wounded spider** раненый паук (граф)  
**wreath product of graphs** композиция графов (веночное произведение графов)

## Y

**Yanov schemata** схемы Янова  
**Yutsis graph** граф Юциса

## Z

**Zagreb index** загребский индекс  
**zero-divisor graph** граф делителей нуля  
**zero forcing number** число нулевого форсинга  
**zip product** сжатое произведение  
**Zhang-Zhang polynomial** многочлен Чжан-Чжана  
**zig-zag graph** зигзагообразный граф  
**zombie number** число зомби  
**zone** зона, сильно связная область

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н.* Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. — Новосибирск: Наука, 1999.
2. *Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н.* Словарь по графам в информатике. — Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, 2009.
3. *Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н.* Русско-английский и англо-русский словарь по графам в информатике. — Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, 2011.

**ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ**

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич

Всероссийский институт научной и технической информации

Российской академии наук, Москва

E-mail: vitvobl@yandex.ru

Архипова Наталия Александровна

Всероссийский институт научной и технической информации

Российской академии наук, Москва

E-mail: nataar1956@mail.ru

## CONTENTS

The regular cyclic matrix of an isolated singular point of the Sturm–Liouville equation of the standard form ( <i>A. A. Golubkov</i> ) . . . . .	3
Two-component window system based on coherent states and theta functions ( <i>M. L. Zhadanova, S. N. Ushakov, E. A. Kiselev</i> ) . . . . .	14
On the solvability of an integral equation associated with the fractional loaded heat conduction problem ( <i>M. T. Kosmakova, A. N. Khamzeyeva</i> ) . . . . .	27
On the solvability of a periodic problem for a system of ordinary differential equations with quasi-homogeneous nonlinearity ( <i>A. N. Naimov, M. V. Bystretskii</i> ) . . . . .	37
Equations for covariance functions of the state vector of a linear system of stochastic differential equations with finite concentrated and distributed delays ( <i>I. E. Poloskov</i> ) . . . . .	46
Trace, determinant and eigenvalues of kernel operators ( <i>O. I. Reinov</i> ) . . . . .	56
Logarithmic spirals in optimal control problems with control in a disk ( <i>M. I. Ronzhina, L. A. Manita</i> ) . . . . .	75
On the application of the Galerkin projection method to the nonstationary diffusion equation with a variable coefficient ( <i>E. V. Seregina, M. A. Stepovich, M. N. Filippov</i> ) . . . . .	89
Branching equation for a first-order differential equation in a Banach space with quadratic perturbations of a small parameter ( <i>V. I. Uskov</i> ) . . . . .	99
Completeness of exponential systems in function spaces in terms of area ( <i>B. N. Khabibullin, E. G. Kudasheva</i> ) . . . . .	107
On some properties of stationary stochastic processes with fuzzy states ( <i>V. L. Khatskevich</i> ) . . . . .	118
Concise English-Russian dictionary on graph theory ( <i>V. A. Voblyi, N. A. Arkhipova</i> ) . . . . .	127

## ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте [math@viniti.ru](mailto:math@viniti.ru)

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (\*.tex и \*.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**  
**информационных изданий ВИНТИ РАН по математике**

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,  
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)  
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,  
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНТИ РАН)  
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,  
канд. физ.-мат. наук (ВИНТИ РАН)

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

Аграчёв Андрей Александрович,  
д.ф.-м.-н., профессор  
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,  
д.ф.-м.-н., профессор  
(НИУ «Высшая школа экономики»,  
ВИНТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,  
к.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,  
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор  
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,  
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,  
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор  
(МИРАН им. В. А. Стеклова,  
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антониевич,  
д.ф.-м.-н. (ВИНТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,  
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический  
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,  
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор  
(МИРАН им. В. А. Стеклова,  
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,  
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,  
академик РАН, профессор  
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,  
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор  
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,  
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,  
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор  
(МИРАН им. В. А. Стеклова,  
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,  
д.ф.-м.-н., профессор  
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,  
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет  
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,  
д.ф.-м.-н., профессор  
(НИУ «Московский энергетический институт»,  
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,  
д.ф.-м.-н., профессор  
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ**

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович  
Акбаров Сергей Саидмузафарович  
Корпусов Максим Олегович  
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович  
Степанов Сергей Евгеньевич  
Туганбаев Аскар Аканович  
Шамолин Максим Владимирович