ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 71–82
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-71-82

УДК 519.716

ОБ ОДНОМ SI^*-ИНТЕРВАЛЕ МУЛЬТИОПЕРАЦИЙ РАНГА 2

© 2025 г. **И. В. ФОМИНА, В. И. ПАНТЕЛЕЕВ**

Аннотация. Рассматриваются мультиоперации ранга 2 с суперпозицией, определенной на основе теоретико-множественной операции пересечения с выделением одного элемента. Описан интервал между клоном самодвойственных операций и мультиклоном всех мультиопераций. Полученные результаты могут быть применены при изучении других интервалов в решетке мультиклонов ранга 2.

Ключевые слова: интервал, мультиоперация, суперпозиция, клон, замкнутый класс.

ABOUT ONE SI^*-INTERVAL OF RANK 2 MULTIOPERATIONS

© 2025 **I. V. FOMINA, V. I. PANTELEEV**

Abstract. We consider rank-2 multi-operations. The superposition is defined on the basis of a set-theoretic intersection operation with selection of a single element. The interval between the clone of self-transitive operations and the multiclone of all multi-operations is described. The results obtained can be applied to the description of other intervals in the lattice of rank-2multiclones.

Keywords and phrases: interval, multioperation, superposition, clone, closed set.

AMS Subject Classification: 08 A99

1. Введение. В теории дискретных функций одним из объектов исследования являются мультиоперации — операции, заданные на конечном множестве и возвращающие в качестве своих значений подмножества этого множества. Множество мультиопераций содержит в себе множества операций (чаще называемое множеством операций k-значной логики), частичных операций и гиперопераций. Классификация мультиопераций относительно оператора суперпозиции приводит к континууму числа замкнутых классов, поэтому задача полного описания решетки таких классов является трудно решаемой. В связи с этим интерес представляют некоторые фрагменты такой решетки. Одной из первых в этом направлении была работа [1], в которой были описаны клоны частичных операций, содержащие максимальные клоны операций. Оказалось, что в четырех случаях эти множества конечны, а в одном имеют мощность континуум. Задача исследования таких клонов для произвольных клонов операций была сформулирована в [8] и решена для частичных операций в [7]. Для мультиопераций авторам не известно решение этой проблемы на сегодняшний день. Стоит заметить, что для мультиопераций и суперпозиция определяется неоднозначно.

Для исследований нами был выбран интервал между клоном так называемых самодвойственных булевых операций, который максимален в клоне всех операций (см. [9]), и мультиклоном всех мультиопераций ранга 2. При этом применяется суперпозиция, основанная на теоретико-множественной операции пересечения с выделением одного элемента. Для такой суперпозиции рассматриваемый интервал содержит 22 клона. Если не выделять отдельно один элемент, то данный интервал содержит 17 элементов (см. [2, 3]).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00011) в Бурятском государственном университете им. Д. Банзарова.

2. Основные понятия и определения. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Для целого положительного n отображение $f : E_2^n \to 2^{E_2}$ называется n-местной мультиоперацией ранга 2. Множество всех мультиопераций ранга 2 обозначим $\mathcal{M}_2$.

В множестве $\mathcal{M}_2$ выделяют подмножества операций ($\mathcal{O}_2$), квазиопераций (частичных операций) ($\mathcal{O}_2^*$) и гиперопераций ($\mathcal{H}_2$):

$$\mathcal{O}_2^{(n)} = \Big\{ f : |f(\tilde{\alpha})| = 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n \Big\}, \quad \mathcal{O}_2 = \bigcup_n \mathcal{O}_2^{(n)},$$
$$\mathcal{O}_2^{(n)\,*} = \Big\{ f : |f(\tilde{\alpha})| \leqslant 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n \Big\}, \quad \mathcal{O}_2^* = \bigcup_n \mathcal{O}_2^{(n)\,*},$$
$$\mathcal{H}_2^{(n)} = \Big\{ f : |f(\tilde{\alpha})| \geqslant 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n \Big\}, \quad \mathcal{H}_2 = \bigcup_n \mathcal{H}_2^{(n)},$$

где через $|A|$ обозначена мощность множества A.

Основным оператором замыкания для дискретных операций является суперпозиция. Суперпозиция с внешней n-местной мультиоперацией f_0 и внутренними m-местными мультиоперациями $f_1, \ldots, f_n$ должна определять некоторую m-местную мультиоперацию $s(f_0, f_1, \ldots, f_n)$.

Если рассматривать суперпозицию только операций, то значение $s(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$ вычисляется следующим образом. Вначале находятся значения внутренних мультиопераций на заданном наборе. Эти значения образуют набор $\big(f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, f_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\big)$, на котором уже определяется значение внешней мультиоперации. Это значение и объявляется значением суперпозиции. Очевидно, что такое определение для мультиопераций не проходит, так как набор из значений внутренних мультиопераций не обязательно будет двоичным.

В теории мультиопераций имеется несколько способов вычисления значения суперпозиции на заданном наборе. В основном они основаны на теоретико-множественных операциях пересечения и объединения (см. [4, 10]).

В данной работе используется определение, основанное на пересечении с выделением «особенного элемента». Этот «особенный» элемент можно трактовать как «поломку». Дадим строгое определение.

Рассматриваем суперпозицию $s(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ с внешней n-местной мультиоперацией f_0 и внутренними m-местными мультиоперациями $f_1, \ldots, f_n$. Пусть набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ принадлежит E_2^m и $g = s(f_0, f_1, \ldots, f_n)$. Тогда

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если найдется такой } i \text{ из } \{1, \ldots, n\}, \text{ что } f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \varnothing \text{ или найдется набор } (\beta_1, \ldots, \beta_n), \text{ где } \beta_j \in f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \text{ для } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ и при этом } f_0(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \varnothing; \\ \bigcap\limits_{\substack{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \\ i \in \{1, \ldots, n\}}} f_0(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\substack{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \\ i \in \{1, \ldots, n\}}} f_0(\beta_1, \ldots, \beta_n) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение суперпозиции позволяет считать мультиоперации, заданные на некотором конечном множестве A, операциями, заданными на множестве 2^A. При этом такие операции на наборах, образованных только одноэлементными подмножествами, принимают произвольные значения. На наборах, в которых хотя бы один элемент не является синглетоном, значение определяется уже в соответствии с определением суперпозиции, в которой внутренние операции суть подмножества. Переход к операциям, заданным на множестве 2^A можно избежать, если отождествить множество из одного элемента и элемент этого множества, т.е. $\{a\} = a$.

В дальнейшем мультиоперации будем рассматривать с точностью до фиктивных аргументов. Переменные для обозначения аргументов используем обычным образом, как и понятие «мультиоперация-переменная».

Мультиоперацию f, зависящую от n переменных, будем записывать в виде вектора $(\tau_{\tilde{0}}, \ldots, \tau_{\tilde{1}})$ длины 2^n, где каждый элемент $\tau_{\tilde{\sigma}}$ есть $f(\tilde{\sigma})$, а $\tilde{0}, \ldots, \tilde{1}$ — все двоичные представления чисел $0, \ldots, 2^n-1$ соответственно. Для одноместных и двухместных мультиопераций такой вектор имеет вид $(f(0)\, f(1))$ и $(f(0,0)\, f(0,1)\, f(1,0)\, f(1,1))$, соответственно.

Проекцией называется такая n-местная мультиоперация $e_i^n(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \in \{1, 2, \ldots\})$, что $e_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ для $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Мультиклоном назовем множество мультиопераций, содержащее все проекции и замкнутое относительно суперпозиции. Вместо термина мультиклон будем использовать термин клон, если это не вызывает недоразумений.

Мультиклон Q называется максимальным в мультиклоне R, если не существует такого мультиклона K, что $Q \subset K \subset R$, и просто максимальным, если $R = \mathcal{M}_2$.

Интервалом $I(Q, R)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех мультиклонов, в котором любой элемент K удовлетворяет условию $Q \subseteq K \subseteq R$. Как обычно, для частично упорядоченных множеств интервалы будем изображать в виде диаграмм.

При описании замкнутых классов мультиопераций важную роль играет понятие сохранение предиката.

Пусть ρ^m — m-местный предикат, заданный на множестве 2^A. Для мультиоперации $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем говорить, что она сохраняет предикат ρ^m, если для любых n наборов $(a_{11}, \ldots, a_{m1})$, $\ldots$, $(a_{1n}, \ldots, a_{mn})$ из предиката набор $\big(f(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, f(a_{m1}, \ldots, a_{mn})\big)$ также принадлежит предикату.

Рассмаривая $f(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$ как суперпозицию, мы сможем найти значение f на таком наборе, т.е. определение является корректным.

Если m-местный предикат R содержит всего t наборов, то его удобно задавать в виде матрицы размерности $m \times t$, в которой столбцами являются наборы из предиката.

Для двоичного набора $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ противоположный набор (0 противоположен 1 и наоборот) будем обозначать $\overline{\widetilde{\alpha}}$. Если не указано, какой набор рассматривается, то подразумевается, что это двоичный набор, размерность которого определяется из контекста.

Замыкание множества мультиопераций Q относительно суперпозиции будем обозначать $[Q]$. Множество мультиопераций Q называется замкнутым, если $[Q] = Q$.

Для упрощения записи будем также использовать кодировку $\varnothing \leftrightarrow *$, $\{0, 1\} \leftrightarrow -$, а для суперпозиции $s(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ будем также использовать обозначение $f_0(f_1, \ldots, f_n)$.

Недостающие определения можно найти в $[2, 5, 8]$.

3. Основной результат.

3. Основной результат. Определим следующие множества мультиопераций:

S — класс самодвойственных операций;

S^- — класс гиперопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}$;

$S^{\bar{*}}$ — класс мультиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & * \\ 1 & 0 & - & * \end{pmatrix}$;

K_1 — множество таких мультиопераций, что на одном наборе из любой пары противоположных наборов мультиоперация возвращает $*$;

K_2 — класс мультиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & * & * & 0 & * & 1 & * & - \\ 1 & 0 & - & * & 0 & * & 1 & * & - & * \end{pmatrix}$.

Утверждение 1. *Классы S, S^-, K_1, $S^- \cup K_1$, $S^{\bar{*}}$, $S^{\bar{*}} \cup K_1$, K_2 замкнуты относительно суперпозиции.*

Доказательство. S и S^- — это классы самодвойственных операций и самодвойственных гиперопераций, которые являются замкнутыми относительно суперпозиции.

Замкнутость класса K_1 следует из определения суперпозиции, из которого следует, что если внутренняя мультиоперация на каком-нибудь наборе возвращает $*$, то и вся суперпозиция возвращает $*$.

Рассмотрим класс $S^- \cup K_1$. Пусть $g(x_1,\ldots,x_m) = s(f_0,f_1,\ldots,f_n)$, где для любого $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ выполняется $f_i \in S^- \cup K_1$.

Если все внутренние операции и внешняя операция из множества S^-, то и $g \in S^-$. Пусть хотя бы одна из внутренних операций f_i ($i \in \{1,\ldots,n\}$) принадлежит множеству K_1. Если рассмотреть $g(x_1,\ldots,x_m)$ на противоположных наборах $\widetilde{\alpha}$ и $\overline{\widetilde{\alpha}}$, то на одном из них f_i возвращает $*$. Это означает, что и g на этом наборе возвращает $*$, т.е. $g \in K_1$. Предположим, что все внутренние операции из множества S^-, а внешняя операция f_0 принадлежит K_1. Так как на противоположных наборах $\widetilde{\alpha}$ и $\overline{\widetilde{\alpha}}$ внутренние операции возвращают противоположные значения, то наборы $(f_1(\widetilde{\alpha}),\ldots,f_n(\widetilde{\alpha}))$ и $(f_1(\overline{\widetilde{\alpha}}),\ldots,f_n(\overline{\widetilde{\alpha}})$ являются противоположными. На одном из них f_0 возвратит $*$. Из этого следует, что $g \in K_1$.

Доказательство замкнутости класса $S^{\bar{*}}$ сводится к замкнутости класса S^-.

Замкнутость класса $S^{\bar{*}} \cup K_1$ следует из замкнутости класса $S^- \cup K_1$.

Класс K_2 — это класс мультиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & * & * & 0 & * & 1 & * & - \\ 1 & 0 & - & * & 0 & * & 1 & * & - & * \end{pmatrix}$. Пусть $g(x_1,\ldots,x_m) = s(f_0,f_1,\ldots,f_n)$, где для любого $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ выполняется $f_i \in K_2$. Предположим, что на некоторых наборах из предиката g возвращает набор не из предиката. Очевидно, что при этом наборы из предиката не содержат $*$. Поэтому можно считать, что выполняется

$$g\begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & - & - & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - & - \end{matrix}\right\}$$

(применяя при необходимости перестановку переменных, отождествление и добавление фиктивных переменных). Достаточно рассмотреть следующие случаи:

$$g\begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix} \in \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & - \end{matrix}\right\}.$$

Пусть $(g(01-)g(10-)) = (00)$. Тогда для некоторого α выполняется $g(01\alpha) = 0$. В соответствии с леммой 1 из [6] будет выполняться $g(10\overline{\alpha}) \in \{1, *\}$, а потому $g(10-) \neq 0$. □

Если $(g(01-)g(10-)) = (0-)$, то снова для некоторого α выполняется $g(01\alpha) = 0$ и $g(10\overline{\alpha}) \in \{1, *\}$. Очевидно, что $g(10\overline{\alpha}) \neq *$. Но, если $g(10\overline{\alpha}) = 1$, то найдется $\overline{\beta}$ для которого выполняется $g(10\overline{\beta}) = 0$. По лемме 1 из [6] имеем $g(01\beta) \in \{1, *\}$. Значит, $g(01-) \neq 0$; противоречие.

Утверждение 2. *Справедливы следующие включения*:

(a) $[\mathcal{H}_2 \cup K_1] = \mathcal{M}_2$;

(b) $S^- \subset S^- \cup \{*\} \subseteq S^- \cup K_1 \subseteq S^{\bar{*}} \cup K_1 \subset K_2 \subset \mathcal{M}_2$;

(c) $S^- \subset S^- \cup \{*\} \subseteq S^{\bar{*}} \subset S^{\bar{*}} \cup K_1 \subset K_2 \subset \mathcal{M}_2$.

Доказательство. (a) В классе K_1 имеется мультиоперация $f_2(x) = (0*)$, а в классе $\mathcal{O}_2$ — операция $f_3(x,y) = (1000)$. Суперпозиция $f_2(f_3)$ определяет квазиоперацию $f_4(x,y) = (*000)$. Пусть $f_5(x,y) = y$. Суперпозиция $s(f_5, f_4, (0001))$ определяет мультиоперацию $f_6 = (*001)$. Суперпозиция $s((010-),(*001),(0101))$ определяет мультиоперацию $(*10-)$. Кроме того,

$$[\mathcal{O}_2 \cup \{(*10-)\}] = \mathcal{M}_2.$$

(b), (c) следуют из того, что $S^- \subset S^{\bar{*}} \subseteq K_2$ и $K_1 \subseteq K_2$. □

Лемма 1. *Справедливо соотношение* $K_1 \subseteq [S \cup \{(-*)\}]$.

Доказательство. Пусть $f_1(x) = (-*)$, $f_2(x) = (10)$, $f_3(x,y) = y$. Построим операции

$$f_4(x,y) = f_3(f_1,f_2) = (1*), \quad f_5(x) = f_4(f_2) = (*1),$$
$$f_2(f_5) = f_6(x) = (*0), \quad f_7(x,y) = f_1(y), \quad f_8(x,y) = f_2(x).$$

Тогда

$$f_3(f_7,f_8) = (1*0*), \quad f_3(f_6(y), f_6(x)) = (***0) = f_9(x,y).$$

Из f_9 с помощью отрицания несложно получить операцию $f_{10} = (1***)$. Добавив в f_{10} и f_1 фиктивные аргументы, получим операции

$$f_{11}(x,y,z,u) = (1111* \dots *), \quad f_{12}(x,y,z,u) = (----* \dots *).$$

В классе S есть операция $g(x,y,z) = (01001101)$. Тогда суперпозиция $g(f_{12},y,z)$ даст операцию $g_1(x,y,z) = (-10-* \dots *)$.

Суперпозиция $f_3(f_{11}(x,y,z,u), g_1(y,z,u))$ определяет $g_2(x,y,z,u) = (-10-* \dots *)$.

Пусть операция $f(x_1,\dots,x_n)$ принадлежит K_1. По f в классе S найдем четыре операции f^1, f^2, f^3, f^4 следующим образом:

набор	f	f^1	f^2	f^3	f^4
$\widetilde{\alpha}$	0	0	0	1	0
$\overline{\widetilde{\alpha}}$	$*$	1	1	0	1
$\widetilde{\beta}$	1	0	0	0	1
$\overline{\widetilde{\beta}}$	$*$	1	1	1	0

набор	f	f^1	f^2	f^3	f^4
$\widetilde{\gamma}$	$-$	0	0	0	0
$\overline{\widetilde{\gamma}}$	$*$	1	1	1	1
$\widetilde{\delta}$	$*$	0	1	0	0
$\overline{\widetilde{\delta}}$	$*$	1	0	1	1

Несложно проверить, что $f(x_1,\dots,x_n) = g_2(f^1,f^2,f^3,f^4)$. $\square$

Следствие 1. $K_1 \subseteq [S^- \cup \{(-*)\}]$

Следствие 2. *Если* $f \in \{(*0),(*,1),(0*),(1*)\}$, *то* $K_1 \subseteq [S^- \cup \{f\}]$.

Доказательство. Если $f = (*0)$, то $s((-1),(*0)) = (*-)$. Остальные случаи легко сводятся к рассмотренному. $\square$

Лемма 2. *Пусть для мультиоперации f найдутся такие наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, что*

$$(f(\widetilde{\alpha}), f(\overline{\widetilde{\alpha}})) = (--), \quad (f(\widetilde{\beta}), f(\overline{\widetilde{\beta}})) = (**).$$

Тогда $\bar{S^*} \subseteq S^- \cup \{f\}$.

Доказательство. Применяя отождествление и перестановку переменных, от мультиоперации f можно перейти к мультиоперации g с такими же свойствами, но зависящей от четырёх переменных. Поэтому считаем, что f зависит от четырёх переменных.

В матрице $\left(\widetilde{\alpha}\ \widetilde{\beta}\ \overline{\widetilde{\beta}}\ \overline{\widetilde{\alpha}}\right)^t$ столбцами являются столбцы вида $(0011)^t$, $(0101)^t$, $(1100)^t$, $(1010)^t$. Операции, соответствующие этим столбцам, принадлежат S^-. Подставив эти мультиоперации в f, получим мультиоперацию $f_1(x,y) = (-**-)$. Добавляя фиктивную переменную, получим $f_2(x,y,z) = (--****--)$.

Суперпозиция $s((10001110), f_2, z, \bar{y})$ определяет мультиоперацию $g(x,y,z) = (-0***1-)$.

Пусть теперь мультиоперация $h(x_1,\dots,x_n)$ принадлежит $\bar{S^*}$. По h построим операции f^1, f^2, f^3 из S так, как указано в таблице:

набор	f	f^1	f^2	f^3
$\widetilde{\alpha}$	$-$	0	0	0
$\overline{\widetilde{\alpha}}$	$-$	1	1	1
$\widetilde{\beta}$	0	0	0	1
$\overline{\widetilde{\beta}}$	1	1	1	0
$\widetilde{\gamma}$	$*$	0	1	0
$\overline{\widetilde{\gamma}}$	$*$	1	0	1

Несложно проверить, что $h(x_1,\dots,x_n) = g(f^1,f^2,f^3)$. $\square$

Утверждение 3. *Пусть* $f \notin S^-$ *и* $[S^- \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $S^- \cup \{\,*\,\} \subseteq A$ *или* $\mathcal{H}_2 \subseteq A$.

Доказательство. Если f — гипероперация, то, как известно, $[S^- \cup \{f\}] = \mathcal{H}_2$.

Если f не является гипероперацией и не принадлежит S^-, то для нее найдется пара противоположных наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\overline{\widetilde{\alpha}}$ на которых f принимает одно значение из $\{(00),(11),(\,*\,a),(b\,*\,),(-c),(d-)\}$ где $\{a,b\} \subseteq \{0,1,\,*\,,-\}$, $\{c,d\} \subseteq \{0,1,\,*\,\}$.

Так как операции (01) и (10) принадлежат S^-, то можно получить одну из мультиопераций $\{(00),(11),(\,*\,a),(b\,*\,),(-c),(d-)\}$.

Класс S содержится в S^-, а с другой стороны, является предполным в $\mathcal{O}_2$. Поэтому, если получена одна из констант, то можно получить и $\mathcal{O}_2$. Но $\mathcal{O}_2$ является предполным в $\mathcal{H}_2$, поэтому $[\mathcal{O}_2 \cup S^-] = \mathcal{H}_2$.

Гипероперации вида $(-c)$, $(d-)$, где $\{c,d\} \subseteq \{0,1\}$, позволяют получить константы, т.е. этот случай сводится к предыдущему.

Если получена квазиоперация, тождественно равная $\,*\,$, то $S^- \cup \{\,*\,\} \subseteq A$.

Случаи $(\,*\,a)$, $(-c)$, где $\{a\} \neq \{\,*\,\}$, $c = \,*\,$, согласно лемме 1 позволяют получить множество K_1 и, соответственно, множество $S^- \cup K_1$. □

Утверждение 4. *Пусть* $f \notin S^- \cup \{\,*\,\}$ *и* $[S^- \cup \{\,*\,\} \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $S^{\bar{*}} \subseteq A$, *или* $S^- \cup K_1 \subseteq A$, *или* $\mathcal{H} \cup \{\,*\,\} \subseteq A$.

Доказательство. Не будем рассматривать случаи, разобранные в предыдущем утверждении. Рассмотрим случай, когда f не удовлетворяет ни одному из рассмотренных случаев. Пусть f на противоположных наборах возвращает только (01), (10), $(--)$ и $(\,*\,*\,)$. В этом случае согласно лемме 2 выполняется $S^{\bar{*}} \subseteq A$. □

Утверждение 5. *Пусть* $f \notin S^{\bar{*}}$ *и* $[S^{\bar{*}} \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $S^{\bar{*}} \cup K_1 \subseteq A$ *или* $\mathcal{M}_2 \subseteq A$.

Доказательство. Если $f \notin S^{\bar{*}}$, то найдутся такие противоположные наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\overline{\widetilde{\alpha}}$, что

$$\big(f(\widetilde{\alpha}), f(\overline{\widetilde{\alpha}})\big) \in \big\{(00),(11),(-0),(-1),(1-),(0-),(\,*\,0),(\,*\,1),(\,*\,-),(0\,*\,),(1\,*\,),(-\,*\,)\big\}.$$

Суперпозиция с внешней f и внутренними (01) и (10) позволит получить одну мультиоперацию из множества (00), (11), (-0), (-1), $(1-)$, $(0-)$, $(\,*\,0)$, $(\,*\,1)$, $(\,*\,-)$, $(0\,*\,)$, $(1\,*\,)$, $(-\,*\,)$. Мультиоперации из множества (00), (11), (-0), (-1), $(1-)$, $(0-)$ позволят получить $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{M}_2$, а из множества $(\,*\,0)$, $(\,*\,1)$, $(\,*\,-)$, $(0\,*\,)$, $(1\,*\,)$, $(-\,*\,)$, согласно следствию 2, позволят получить $S^{\bar{*}} \cup K_1$. □

Утверждение 6. *Пусть* $f \notin S^- \cup K_1$ *и* $[S^- \cup K_1 \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $S^{\bar{*}} \cup K_1 \subseteq A$ *или* $\mathcal{M}_2 \subseteq A$.

Доказательство. Если $f \notin S^- \cup K_1$, то найдется пара противоположных наборов, на которой f принимает значения из множества (-0), (-1), $(0-)$, $(1-)$, (00), (11) либо найдется пара противоположных наборов, на одном из которых f возвращает $\,*\,$ и при этом найдется другая пара противоположных наборов, ни на одном из которых f не возвращает $\,*\,$. Это позволит получить константы либо получить мультиоперации из множества $(\,*\,010)$, $(\,*\,--0)$, $(\,*\,01\,*\,)$, $(\,*\,--\,*\,)$, $(\,*\,010-)$, $(\,*\,---)$. Каждая из них по лемме 2 позволяет получить множество $S^{\bar{*}}$. □

Утверждение 7. *Пусть* $f \notin S^{\bar{*}} \cup K_1$ *и* $[S^{\bar{*}} \cup K_1 \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $K_2 \subseteq A$ *или* $\mathcal{M}_2 \subseteq A$.

Доказательство. Покажем, что любая мультиоперация $g(x_1,\ldots,x_m) \in K_2$ может быть выражена с помощью суперпозиции мультиопераций из множества $S^{\bar{*}} \cup K_1$ и мультимультиоперации $f \in K_2 \setminus (S^{\bar{*}} \cup K_1)$. Достаточно рассмотреть случай, когда $g(x_1,\ldots,x_m) \in K_2 \setminus (S^{\bar{*}} \cup\ K_1)$. Введём следующие обозначения для наборов и соответствующих значений мультимультиоперации g:

$\widetilde{\alpha}_1,\dots,\widetilde{\alpha}_{t_1}$	0	$\overline{\overline{\alpha}}_1,\dots,\overline{\overline{\alpha}}_{t_1}$	1	$\widetilde{\beta}_1,\dots,\widetilde{\beta}_{t_2}$	1	$\overline{\overline{\beta}}_1,\dots,\overline{\overline{\beta}}_{t_2}$	0
$\widetilde{\gamma}_1,\dots,\widetilde{\gamma}_{t_3}$	$-$	$\overline{\overline{\gamma}}_1,\dots,\overline{\overline{\gamma}}_{t_3}$	$-$	$\widetilde{\delta}_1,\dots,\widetilde{\delta}_{t_4}$	$*$	$\overline{\overline{\delta}}_1,\dots,\overline{\overline{\delta}}_{t_4}$	$*$
$\widetilde{\zeta}_1,\dots,\widetilde{\zeta}_{t_5}$	$*$	$\overline{\overline{\zeta}}_1,\dots,\overline{\overline{\zeta}}_{t_5}$	0	$\widetilde{\eta}_1,\dots,\widetilde{\eta}_{t_6}$	0	$\overline{\overline{\eta}}_1,\dots,\overline{\overline{\eta}}_{t_6}$	$*$
$\widetilde{\theta}_1,\dots,\widetilde{\theta}_{t_7}$	$*$	$\overline{\overline{\theta}}_1,\dots,\overline{\overline{\theta}}_{t_7}$	1	$\widetilde{\lambda}_1,\dots,\widetilde{\lambda}_{t_8}$	1	$\overline{\overline{\lambda}}_1,\dots,\overline{\overline{\lambda}}_{t_8}$	$*$
$\widetilde{\xi}_1,\dots,\widetilde{\xi}_{t_9}$	$*$	$\overline{\overline{\xi}}_1,\dots,\overline{\overline{\xi}}_{t_9}$	$-$	$\widetilde{\sigma}_1,\dots,\widetilde{\sigma}_{t_{10}}$	$-$;	$\overline{\overline{\sigma}}_1,\dots,\overline{\overline{\sigma}}_{t_{10}}$	$*$

а также

$$\begin{gathered}
i\in\{1,\dots,t_1\},\quad j\in\{1,\dots,t_2\},\quad k\in\{1,\dots,t_3\},\quad l\in\{1,\dots,t_4\},\quad m\in\{1,\dots,t_5\},\\
n\in\{1,\dots,t_6\},\quad p\in\{1,\dots,t_7\},\quad q\in\{1,\dots,t_8\},\quad r\in\{1,\dots,t_9\},\quad s\in\{1,\dots,t_{10}\}.
\end{gathered}$$

Так как $f\in K_2\setminus(\bar{S^*}\cup K_1)$, то эту мультиоперацию можно привести к одной из следующих форм:

$$f_1=(0*01),\quad f_1=(-*1-),\quad f_1=(-*0-),\quad f_1=(0*-1),\quad f_1=(0*11),\quad f_1=(-*--).$$

Рассмотрим только случай, когда $f_1=(0*01)$; остальные случаи аналогичны. Построим суперпозицию $h(x_1,x_2,x_3,x_4)=h_1(f_1,f_2,f_3,f_4)$, где $h_1=(0--10--1)$, $f_2=(00**0011)$, $f_3=(0111101100100001)$, $f_4=(0000110**1001111)$ — мультиоперации, принадлежащие классу $\bar{S^*}$. Тогда

$$\begin{gathered}
h(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0-11****-1000-1),\\
g(x_1,\dots,x_m)=h(g_1(x_1,\dots,x_m),\dots,g_4(x_1,\dots,x_m)),
\end{gathered}$$

где $g_1,\dots,g_4$ — такие самодвойственные булевы мультиоперации, что

$$\begin{aligned}
&(g_1(\widetilde{\alpha_i}),\dots,g_4(\widetilde{\alpha_i}))=(0000), && (g_1(\overline{\overline{\alpha_i}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\alpha_i}}))=(1111),\\
&(g_1(\widetilde{\beta_j}),\dots,g_4(\widetilde{\beta_j}))=(0010), && (g_1(\overline{\overline{\beta_j}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\beta_j}}))=(1101),\\
&(g_1(\widetilde{\gamma_k}),\dots,g_4(\widetilde{\gamma_k}))=(0001), && (g_1(\overline{\overline{\gamma_k}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\gamma_k}}))=(0111),\\
&(g_1(\widetilde{\delta_l}),\dots,g_4(\widetilde{\delta_l}))=(0010), && (g_1(\overline{\overline{\delta_l}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\delta_l}}))=(1000),\\
&(g_1(\widetilde{\zeta_m}),\dots,g_4(\widetilde{\zeta_m}))=(0100), && (g_1(\overline{\overline{\zeta_n}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\zeta_n}}))=(1011),\\
&(g_1(\widetilde{\eta_j}),\dots,g_4(\widetilde{\eta_j}))=(1011), && (g_1(\overline{\overline{\eta_n}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\eta_n}}))=(0100),\\
&(g_1(\widetilde{\theta_p}),\dots,g_4(\widetilde{\theta_p}))=(0101), && (g_1(\overline{\overline{\theta_p}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\theta_p}}))=(1010),\\
&(g_1(\widetilde{\lambda_q}),\dots,g_4(\widetilde{\lambda_q}))=(1010), && (g_1(\overline{\overline{\lambda_q}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\lambda_q}}))=(0101),\\
&(g_1(\widetilde{\xi_r}),\dots,g_4(\widetilde{\xi_r}))=(0110), && (g_1(\overline{\overline{\xi_r}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\xi_r}}))=(1001),\\
&(g_1(\widetilde{\sigma_s}),\dots,g_4(\widetilde{\sigma_s}))=(1001), && (g_1(\overline{\overline{\sigma_s}}),\dots,g_4(\overline{\overline{\sigma_s}}))=(0110).
\end{aligned}$$

Остальные случаи для f позволяют получить множество $\mathcal{M}_2$ $\square$

Утверждение 8. *Пусть $f\notin K_2$ и $[K_2\cup\{f\}]=A$. Тогда $\mathcal{M}_2\subseteq A$.*

Доказательство. Если $f\notin K_2$, то подстановка вместо переменных некоторых наборов из предиката позволяет получить набор не из предиката. Наборы, содержащие $*$, очевидно, не используются. Осталось только три набора. Отождествление, перестановка и возможность использования фиктивных переменных позволяет считать, что f зависит от трех переменных x, y, z и при этом вместо x подставляется $(01)^t$, вместо y — $(10)^t$, вместо z — $(--)^t$. Запишем это в виде

$$f\begin{pmatrix}0&1&-\\1&0&-\end{pmatrix}\in\left\{\begin{matrix}0&1&-&-&1&0\\0&1&0&1&-&-\end{matrix}\right\}.$$

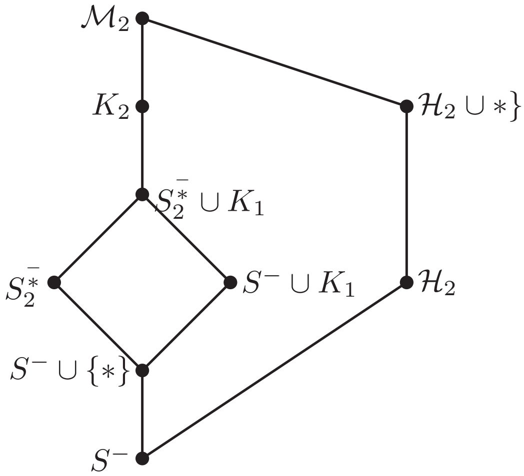

Рис. 1. Интервал $I\,(S^-, \mathcal{M}_2)$.

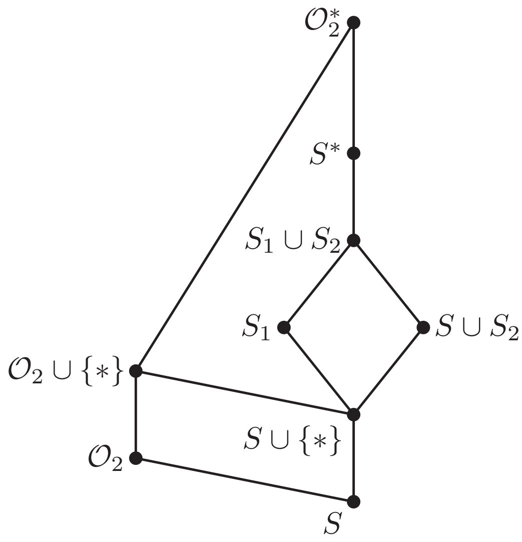

Рис. 2. Интервал $I\,(S, \mathcal{O}_2^*)$.

Мультиоперации (01), (10), $(--)$ принадлежат S^-, поэтому можно считать, что получена некоторая мультиоперация из множества (00), (11), (-0), (-1), $(1-)$, $(0-)$. Каждая из них позволяет получить константу, а значит, и множества $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{M}_2$. $\square$

Теорема 1. *Интервал* $I\,(S^-, M_2)$ *содержит ровно* 9 *различных мультиклонов, а именно, мультиклоны, представленные на рис.* 1.

Доказательство следует из утверждений 2–8. $\square$

В [1] введены следующие замкнутые классы квазиопераций:

S_1 — класс квазиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}$;

S_2 — класс квазиопераций таких, что на одном из любой пары противоположных наборов она возвращает $*$;

S^* — класс квазиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & b \\ 1 & 0 & a & * \end{pmatrix}$, при этом $\{a, b\} \subseteq \{0, 1, *\}$.

Решетка клонов квазиопераций, содержащих клон самодвойственных операций имеет вид, изображённый на рис. 2 (см. [1]).

Пусть $f \notin S$ и $[S \cup \{f\}] = A$. Так как $f \notin S$, то найдется такая пара противоположных наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\overline{\widetilde{\alpha}}$, что

$$\big(f(\widetilde{\alpha}), f(\overline{\widetilde{\alpha}})\big) \in \big\{(0a),\ (1b),\ (-c),\ (*\,d),\ \{a, b, c, d\} \subseteq \{0, 1, -, *\},\ a \neq 1,\ b \neq 0\big\}. \tag{1}$$

Это означает, что подставляя в f самодвойственные операции (01) и (10), можно получить одну из одноместных мультиопераций из правой части равенства (1).

Если получили одну из констант 0 или 1, то, поскольку S максимален в $\mathcal{O}_2$, получим $\mathcal{O}_2 \subseteq A$.

Предположим, что получили одну из операций $(0-)$, $(1-)$, (-0), (-1).

Рассмотрим случай $(0-)$. Суперпозиция $s((0-),(0-))$ определяет (00). Но $[S \cup \{(00)\}] = \mathcal{O}_2$. Для остальных вариантов этого случая все аналогично, т.е. имеем $\mathcal{O}_2 \subseteq A$.

Если получена гипероперация $(--)$, то с учетом максимальности S в S^- (см. [3, 4]) получим $S^- \subseteq A$.

Если получена квазиоперация $h(x)$, то $[S \cup \{h\}]$ находится в интервале $I(S, \mathcal{O}_2)$.

Осталось рассмотреть случай, когда получена $u(x) = (*-)$. Но в этом случае по лемме 1 получим $K_1 \subseteq A$. Квазиоперация, тождественно равная $*$, принадлежит K_1, поэтому дальше можно рассматривать только множество $S \cup \{*\}$.

Утверждение 9. *Пусть* $f \notin S \cup \{*\}$ *и* $[S \cup \{*\} \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $S^- \subseteq A$, *или* $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, *или* $S_1 \subseteq A$, *или* $S \cup S_2 \subseteq A$, *или* $S \cup K_1 \subseteq A$.

Доказательство. Легко получить равенство (1) с условием $d \neq *$ и повторить последующие рассуждения. □

Эти же рассуждения приводят к справедливости следующих четырех утверждений.

Утверждение 10.

(i) *Пусть* $f \notin S_1$ *и* $[S_1 \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, *или* $S_1 \cup K_1 \subseteq A$, *или* $S^- \subseteq A$.
(ii) *Пусть* $f \notin S \cup S_2$ *и* $[S \cup S_2 \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, *или* $S \cup K_1 \subseteq A$, *или* $S^- \subseteq A$.
(iii) *Пусть* $f \notin S_1 \cup S_2$ *и* $[S_1 \cup S_2 \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, *или* $S_1 \cup K_1 \subseteq A$, *или* $S^- \subseteq A$.
(iv) *Пусть* $f \notin S^*$ *и* $[S^* \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $\mathcal{O}_2^* \subseteq A$, *или* $S^* \cup K_1 \subseteq A$, *или* $S^- \subseteq A$.

Утверждение 11. *Пусть* $f \notin S \cup K_1$ *и* $[S \cup K_1 \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, *или* $S_1 \cup K_1 \subseteq A$, *или* $S^- \subseteq A$.

Доказательство. Пусть f на некоторой паре противоположных наборов возвращает одноместную мультиоперацию h, которая не принадлежит $S \cup K_1$. Если h — квазиоперация, то $S_1 \subseteq A$ или $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, если h — гипероперация, то $S^- \subseteq A$ или $\mathcal{M}_2 \subseteq A$. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда для f есть пара противоположных наборов, на которых f возвращает $(*-)$, и пара противоположных наборов, на которых f возвращает (01). Это позволяет получить мультиоперации $(*01-)$ и $(-01*)$. Из этих мультиопераций несложно получить $h = (*01*)$. Суперпозиция мультиоперации h и мультиопераций из класса S позволяет построить любую мультиоперацию из класса S_1. □

Утверждение 12. *Пусть* $f \notin S_1 \cup K_1$ *и* $[S_1 \cup K_1 \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, *или* $S^* \cup K_1 \subseteq A$, *или* $S^- \subseteq A$.

Доказательство. Рассмотрим только случай, когда для f имеется пара противоположных наборов, на которых f возвращает $(*-)$, и пара противоположных наборов, на которых f возвращает (01). Это позволяет получить мультиоперации $(*01-)$, $(010*)$ и $(*011)$. Если

$$f_1(x,y,z) = (00010111), \qquad f_2(x,y,z) = (**001111),$$
$$f_3(x,y,z) = (010*010*), \qquad f_4(x,y,z) = (00110011),$$

то суперпозиция $s(f_1, f_2, f_3, f_4)$ определяет мультиоперацию $(**0*011*)$. Суперпозиция этой мультиоперации и мультиопераций из класса S позволяет построить любую мультиоперацию из класса S^*. □

Определим класс S' как класс мультиопераций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & b \\ 1 & 0 & \alpha & * \end{pmatrix}$, $\{a, b\} \subseteq \{0, 1, -, *\}$. Несложно доказать, что этот класс замкнут относительно суперпозиции. Кроме того, этот класс содержит в себе классы K_1 и S^*.

Утверждение 13. *Пусть* $f \notin S^* \cup K_1$ *и* $[S^* \cup K_1 \cup \{f\}] = A$. *Тогда* $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, *или* $S' \subseteq A$, *или* $S^- \subseteq A$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда для f найдется пара противоположных наборов, на которых f возвращает $(--)$. Суперпозиция $s((01001101), (0101), (----), (0011))$ определяет мультиоперацию $(0--1)$. Мультиоперация $(001--011)$ определяется суперпозицией

$$s((01001101), (00----11), (01010101), (00110011)).$$

Пусть

$$f_1(x,y,z,u) = (001--011001--011), \quad f_2(x,y,z,u) = (010*00110011****),$$
$$f_3(x,y,z,u) = (0011001100110011), \quad f_4(x,y,z,u) = (0000111100001111).$$

Суперпозиция $s(f_1, f_2, f_3, f_4)$ определяет мультиоперацию

$$g(x,y,z,u) = (01-*0-0101-1****).$$

Если $h(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежит классу S', то ее значения на противоположных наборах образуют только следующие столбцы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & 0 & * & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & 0 & * & 1 & * & - & * \end{pmatrix}.$$

По h в классе S найдем четыре операции f^1, f^2, f^3, f^4 следующим образом:

набор	h	f^1	f^2	f^3	f^4
$\widetilde{\alpha}$	0	0	0	0	0
$\overline{\widetilde{\alpha}}$	$*$	1	1	1	1
$\widetilde{\beta}$	1	0	0	0	1
$\overline{\widetilde{\beta}}$	$*$	1	1	1	0
$\widetilde{\gamma}$	$-$	0	0	1	0
$\overline{\widetilde{\gamma}}$	$*$	1	1	0	1
$\widetilde{\delta}$	$*$	0	0	1	1
$\overline{\widetilde{\delta}}$	$*$	1	1	0	0
$\widetilde{\nu}$	0	0	1	0	1
$\overline{\widetilde{\nu}}$	1	1	0	1	0

Суперпозиция $s(g, f^1, f^2, f^3, f^4)$ задает h.

Рассмотрим оставшийся случай, когда для f найдется пара противоположных наборов на которых f возвращает $(*-)$ и пара противоположных наборов на которых f возвращает (01). Это позволяет получить мультиоперацию $(*01-)$ и, добавляя фиктивные аргументы, мультиоперацию $h_1 = (****00001111----)$. В классе S^* есть квазиоперация $h_2 = (000000001111111*)$, операции $h_3 = (0101010101010101)$, $h_4 = (0011001100110011)$ и $h_5 = (0010001010111011)$.

Суперпозиция $s(h_5, h_1, h_2, h_3, h_4)$ определяет мультиоперацию $g = (****01001101-100*)$, которая на противоположных наборах принимает в качестве своих значений все возможные столбцы из предиката, задающего класс S'. □

Утверждение 14. *Пусть $f \notin S'$ и $[S' \cup \{f\}] = A$. Тогда $\mathcal{M}_2 \subseteq A$, или $K_2 \subseteq A$, или $S^- \subseteq A$.*

Доказательство. Пусть для f найдется пара противоположных наборов, на которых f возвращает $(--)$. Суперпозиция $s((01001101), (0101), (----), (0011))$ определяет мультиоперацию $(0--1)$.

Мультиоперация $(001--011)$ определяется суперпозицией

$$s((01001101), (00----11), (01010101), (00110011))$$

. Пусть

$$f_1(x,y,z,u) = (001--011001--011), \quad f_2(x,y,z,u) = (010*00110011****),$$
$$f_3(x,y,z,u) = (0011001100110011), \quad f_4(x,y,z,u) = (0000111100001111).$$

Суперпозиция $s(f_1, f_2, f_3, f_4)$ определяет мультиоперацию

$$g(x,y,z,u) = (01-*0-0101-1****).$$

Если $h(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит классу K_2, то ее значения на противоположных наборах образуют только следующие столбцы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & * & * & 0 & * & 1 & * & - \\ 1 & 0 & - & * & 0 & * & 1 & * & - & * \end{pmatrix}.$$

По h в классе S найдем четыре операции f^1, f^2, f^3, f^4 следующим образом:

набор	h	f^1	f^2	f^3	f^4
$\widetilde{\alpha}$	0	0	0	0	0
$\overline{\widetilde{\alpha}}$	$*$	1	1	1	1
$\widetilde{\beta}$	1	0	0	0	1
$\overline{\widetilde{\beta}}$	$*$	1	1	1	0
$\widetilde{\gamma}$	$-$	0	0	1	0
$\overline{\widetilde{\gamma}}$	$*$	1	1	0	1

набор	h	f^1	f^2	f^3	f^4
$\widetilde{\delta}$	$*$	0	0	1	1
$\overline{\widetilde{\delta}}$	$*$	1	1	0	0
$\widetilde{\lambda}$	$-$	0	1	0	0
$\overline{\widetilde{\lambda}}$	$-$	1	0	1	1
$\widetilde{\nu}$	0	0	1	0	1
$\overline{\widetilde{\nu}}$	1	1	0	1	0

Суперпозиция $s(g, f^1, f^2, f^3, f^4)$ задает h. □

Таким образом, доказан основной результат.

Теорема 2. *Интервал $I\,(S, M_2)$ содержит ровно 22 различных мультиклона, а именно, мультиклоны, представленные на рис. 3.*

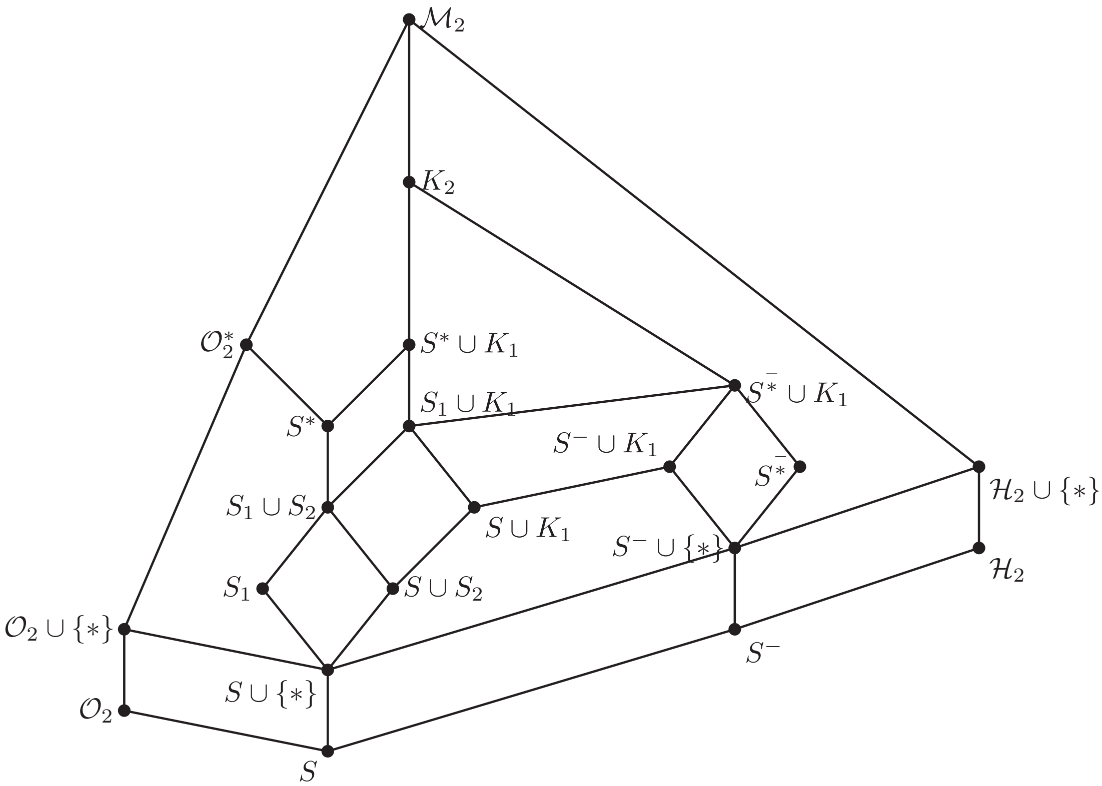

Рис. 3. Интервал $I\,(S, \mathcal{M}_2)$.

Для того, чтобы избежать лишних нагромождений, на рисунке не отмечены некоторые включения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. Б., Вороненко А. А.* О некоторых замкнутыхклассах в частичной двузначной логике// Дискр. мат. — 1994. — *6*, № 4. — С. 58–79.
2. *Бадмаев С. А., Дугаров А. Е., Фомина И. В., Шаранхаев И. К.* О некоторых интервалах в решетке ультраклонов ранга 2// Сиб. электрон. мат. изв. — 2021. — *18*, № 2. — С. 1210–1218.
3. *Бадмаев С. А., Дугаров А. Е., Фомина И. В., Шаранхаев И. К.* О двух интервалах в решетке частичных ультраклонов ранга 2// Сиб. электрон. мат. изв. — 2023. — *20*, № 1. — С. 262–275.
4. *Пантелеев В. И.* Критерий полноты для доопределяемых булевых мультиопераций// Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. серия — 2009. — *68*, № 2. — С. 60–79.
5. *Пантелеев В. И., Халтанова С. Ю.* О некоторых интервалах в решетке клонов частичных ультрафункций// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2010. — *4*. — С. 80–87.
6. *Пантелеев В. И., Тагласов Э. С.* ESI^*-замыкание мультифункций ранга 2: критерий полноты, классификация и типы базисов// Интел. сист. Теор. прилож. — 2021. — *25*, № 2. — С. 55–80.
7. *Lamsade M., Sholzel K., Haddad L., Waldhauzer T.* A solution to a problem of D. Lau: Complete classification of intervals in the lattice of partial Boolean clones// IEEE 43 Int. Symp. on Multiple-Valued Logic, 2013. — P. 123–128.
8. *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Multiple-Valued Logic and Clone Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
9. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions// Am. J. Math — 1921. — *43*, № 4. — P. 163–185.
10. *Pouzet M., Rosenberg I. G.* Small clones and the projection property// Alg. Univ. — 2010. — *63*. — P. 37–44.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00011) в Бурятском государственном университете им. Д. Банзарова.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Фомина Ирина Владимировна (Fomina Irina Vladimirovna)
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)
E-mail: `fomina-irina0104@yandex.ru`

Пантелеев Владимир Иннокентьевич (Panteleev Vladimir Innokentievich)
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ;
Иркутский государственный университет, Иркутск
(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: `vl.panteleyev@gmail.com`