ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 13–21
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-13-21

УДК 519.16, 519.17

О ФУНКЦИОНИРОВАНИИ РЕСУРСНЫХ СЕТЕЙ

© 2024 г. Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, Х. Н. АБДУЛРАХМАН, В. А. СКОРОХОДОВ, В. А. БАБИНЦЕВ

Аннотация. Ресурсные сети — динамические графовые модели, введенные в рассмотрение О. П. Кузнецовым и Л. Ю. Жиляковой. В основе модели лежат правила их функционирования. В работе предложен общий подход к определению функционирования ресурсных сетей, состоящий в задании на дугах ресурсной сети функции приоритетности, которая и определяет правила функционирования ресурсной сети. Ресурсные сети Кузнецова—Жиляковой являются частным случаем ресурсных сетей с приоритетами на дугах, когда все дуги имеют одинаковые приоритеты. Приведены примеры, показывающие, что ресурсные сети, имеющие одинаковую топологию, при разных функциях приоритетности функционируют по-разному. Получены критерии возникновения стационарного функционирования ресурсной сети с приоритетами на дугах, главным из которых является условие сбалансированности потока. Наиболее общим расширением понятия ресурсной сети является приведенное в работе определение ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах. В этом случае функция приоритетности, заданная на дугах сети, зависит от дискретного времени, в котором функционирует сеть.

Ключевые слова: граф, ресурсная сеть, распределение ресурса, поток, приоритеты на дугах.

ON FUNCTIONING OF RESOURCE NETWORKS

© 2024 I. M. ERUSALIMSKIY, H. N. ABDULRAHMAN, V. A. SKOROKHODOV, V. A. BABINTSEV

Abstract. Resource networks are dynamic graph models introduced by O. P. Kuznetsov and L. Yu. Zhilyakova. These models are based on their functioning rules. The paper proposes a general approach to determining the functioning of resource networks, which consists of specifying a priority function on arcs of the resource network. Such a function determines the rules for the functioning of the resource network. Kuznetsov–Zhilyakova resource networks are a special case of resource networks with priorities on the arcs, where all arcs have the same priorities. We show by examples that resource networks of the same topology with different priority functions operates differently. Criteria for the emergence of stationary functioning of a resource network with priorities on arcs are obtained; the main criterion is the condition of flow balance. Also, we propose a more general extension of the concept of a resource network, namely, the definition of a resource network with dynamic priorities on arcs. In this case, the priority function specified on the network arcs is a function of discrete time in which the network operates.

Keywords and phrases: graph, resource network, resource allocation, flow, priorities on arcs.

AMS Subject Classification: 05C21, 05C85, 90B10

Ресурсные сети — новые динамические сетевые модели, введенные в рассмотрение О. П. Кузнецовым и Л. Ю. Жиляковой (см., например, [2–8]). Настоящая статья посвящена расширению понятия ресурсной сети. Речь пойдет об общем определении ресурсной сети, при этом ресурсные сети Кузнецова—Жиляковой будут частным случаем ресурсных сетей.

1. Ресурсные сети с приоритетами на дугах. К сожалению, определение ресурсной сети с приоритетами на дугах довольно громоздко, как и определение ресурсной сети по Кузнецову—Жиляковой.

Определение 1. Ресурсной сетью $G(X, U, f, \rho, \mathrm{pr})$ с приоритетами на дугах будем называть конечный связный ориентированный граф без петель (здесь X — множество вершин сети, U — множество дуг сети, $f : U \to X \times X$ — отображение инцидентности, ставящее в соответствие каждой дуге упорядоченную пару вершин (начало и конец дуги), $\rho : U \to \mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$ — отображение, задающее пропускные способности дуг сети, $\mathrm{pr} : U \to N$ — отображение приоритетности (считается, что чем меньше значение $\mathrm{pr}(u)$ на дуге $u \in U$, тем приоритет этой дуги выше), с заданными правилами функционирования, которые сформулируем в определении 2.

Определение 2 (правила функционирования)**.** Ресурсная сеть $G(X, U, f, \rho, \mathrm{pr})$ функционирует в дискретном времени $\mathbb{Z}_+$, т.е. на множестве неотрицательных целых чисел. Множество $\mathbb{Z}_+$ представим в виде объединения множеств $\mathbb{Z}_{+\text{чет}}$ четных и $\mathbb{Z}_{+\text{нечет}}$ нечетных чисел. Функционирование ресурсной сети на $\mathbb{Z}_+$ определяется двумя рекурсивными функциями

$$q(x, t) : X \times \mathbb{Z}_{+\text{чет}} \to \mathbb{R}_+ = [0; +\infty), \quad \varphi(u, t) : U \times \mathbb{Z}_{+\text{нечет}} \to \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$$

называемыми соответственно распределением ресурса в вершинах сети и потоком ресурса на дугах сети.

Эти функции определены следующими условиями (a)–(c):

(a) Задается начальное распределение ресурса в вершинах сети, т.е. неотрицательные значения функции $q(x, 0)$ на множестве X.

(b) Каждое из множеств $U_+(x) = f^{-1}(\{x\} \times X)$ представим в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств $(U_+(x))_i$, $i = 1, 2, \ldots, k_x$, $k_x = \max\limits_{u \in U_+(x)} \mathrm{pr}(u)$, отнеся ко множеству $(U_+(x))_1$ все дуги из $U_+(x)$, имеющие наивысший приоритет, ко множеству $(U_+(x))_2$ все дуги из $U_+(x)$, имеющие следующее возможное значение приоритета и т. д. Для каждого из множеств $(U_+(x))_i$ определим величину

$$(W(x))_i = \sum_{u \in (U_+(x))_i} \rho(x).$$

Значения потоковой функции $\varphi(u, t)$ в момент времени $t = 2n + 1$ в множестве $U_+(x)$ определяются индуктивно по множествам $(U_+(x))_i$ в соответствии со следующим алгоритмом:

(i) Полагаем $S = q(x, 2n)$. Если $S \leqslant (W(x))_1$, то

$$\varphi(u, 2n + 1) = \frac{\rho(u)}{\sum\limits_{v \in (U_+(x))_1} \rho(v)} \cdot q(x, 2n) \quad \forall\, u \in (U_+(x))_1,$$

а поток на дугах остальных множеств $(U_+(x))_i$, $i = 2, \ldots, k_x$, полагаем равным нулю. На этом определение потока $\varphi(u, 2n + 1)$ на множестве $U_+(x)$ завершено.

(ii) В противном случае полагаем

$$\varphi(u, 2n + 1) = \rho(u) \quad \forall\, u \in (U_+(x))_1, \qquad S = q(x, 2n) - \sum_{u \in (U_+(x))_1} \varphi(u, 2n + 1),$$

и переходим к определению потока на множестве $(U_+(x))_2$ по правилу, описанному в п. (bi) и т. д.

(c) Значение функции $q(x,t)$ в момент времени $t = 2n+2$ в каждой вершине $x \in X$ определяется её значением в момент времени $t = 2n$ и потоком на дугах в момент времени $t = 2n+1$ следующим правилом:

$$q(x, 2n+2) = q(x, 2n) - \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u, 2n+1) + \sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u, 2n+1). \tag{1}$$

Общее определение ресурсной сети, которое состоит из двух определений 1 и 2, завершено.

Ясно, что функционирование ресурсной сети на $\mathbb{Z}_+$ однозначно определяется начальным распределение ресурса в вершинах сети, т.е. $q(x,0)$ для любого $x \in X$. Равенство 1 называют балансовым соотношением; оно, в частности, означает, что ресурс во время функционирования сети не поступает в сеть и не расходуется в ней, т.е.

$$\sum_{x \in X} q(x,0) = \sum_{x \in X} q(x,2n) \quad \forall\, n \in N. \tag{2}$$

Из определения ресурсной сети (определение 1(b) следует, что

$$0 \leqslant \varphi(u, 2n+1) \leqslant \rho(u) \quad \forall\, u \in U,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Неравенство (3) означает, поток по любой дуге ресурсной сети в любой момент времени не превосходит её пропускной способности, что позволяет говорить о том, что ресурсная сеть является динамической сетевой моделью.

Ресурсные сети Кузнецова—Жиляковой (см. [7]) являются частным случаем ресурсных сетей, когда все дуги имеют одинаковый приоритет.

Приведем три примера ресурсных сетей. В качестве основы для рассматриваемых ресурсных сетей возьмем один и тот же граф, приведенный на рис. 1. Пропускные способности всех дуг (I–V) полагаем равными 8.

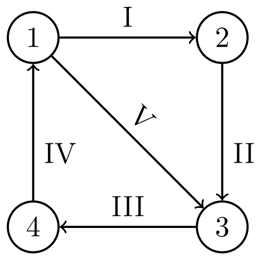

Рис. 1. Граф ресурсной сети примеров 1-3.

Пример 1. Рассмотрим функционирование ресурсной сети с начальным распределением ресурса $(2,2,2,2)$ как сети Кузнецова—Жиляковой (все дуги имеют одинаковый приоритет). Результаты, полученные с помощью описанной в [6] программы и приведенные в таблице 1, показывают, что довольно простая ресурсная сеть по Кузнецову—Жиляковой функционирует довольно «прихотливо».

Пример 2. Рассмотрим функционирование ресурсной сети с начальным распределением ресурса $(2,2,2,2)$ в случае, когда дуга I имеет более высокий приоритет, чем все остальные дуги. Ясно, что в этом случае поток по дуге V в любой момент времени равен нулю. Функционирование такой ресурсной сети приведено в таблице 2, из которой видно, что начальное распределение ресурса $(2,2,2,2)$ порождает стационарное функционирование сети.

Пример 3. Рассмотрим функционирование ресурсной сети с начальным распределением ресурса $(2,2,2,2)$ в случае, когда дуга V имеет более высокий приоритет, чем все остальные дуги. Ясно, что в этом случае поток по дуге I в любой момент времени равен нулю. Функционирование такой ресурсной сети приведено в таблице 3, из которой видно, что начальное распределение ресурса $(2,2,2,2)$ порождает её периодическое функционирование, начиная с $t = 2$.

Таблица 1. Функционирование ресурсной сети (рис. 1) с начальным распределением ресурса $(2,2,2,2)$ без учёта приоритетов дуг (пример 1).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
0	2	2	2	2					
1					1	2	2	2	1
2	2	1	3	2					
3					1	1	3	2	1
4	2	1	2	3					
5					1	1	2	3	1
6	3	1	2	2					
7					1,5	1	2	2	1,5
8	2	1,5	2	2,5					
9					1	1,5	2	2,5	1
10	2	1	2,5	2,5					
11					1	1	2,5	2,5	1
12	2,5	1	2	2,5					
13					1,25	1	2	2,5	1,25
14	2,5	1,25	2,25	2					
15					1,25	1,25	2,25	2	1,25
16	2	1,25	2,5	2,25					
17					1	1,25	2,5	2,25	1
18	2,25	1	2,25	2,5					
19					1,125	1	2,25	2,5	1,125
20	2,5	1,125	2,125	2,25					
21					1,25	1,125	2,125	2,25	1,25
22	2,25	1,25	2,375	2,125					
23					1,125	1,25	2,375	2,125	1,125
24	2,125	1,125	2,375	2,375					
25					1,0625	1,125	2,375	2,375	1,0625
26	2,375	1,0625	2,1875	2,375					
27					1,1875	1,0625	2,1875	2,375	1,1875
28	2,375	1,1875	2,25	2,1875					
29					1,1875	1,1875	2,25	2,1875	1,1875
30	2,1875	1,1875	2,375	2,25					

Для заполнения таблиц 2 и 3 использована программа, составленная В. А. Бабинцевым, которая в отличие от [9] рассчитана на ресурсные сети, рассмотренные в этой работе, т.е. с приоритетами на дугах.

Начальное состояние ресурсной сети, однозначно определяющее вместе с топологией графа и пропускными способностями дуг функционирование ресурсной сети, было названо в [11] состоянием, ведущим к стационарному функционированию сети, если начиная с какого-то момента времени $T_0 \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$ имеет место равенство

$$q(x,T_0) = q(x,T_0+2) = q(x,T_0+4) = \ldots \quad \forall\, x \in X. \tag{4}$$

Из определения потока в ресурсной сети с приоритетами на дугах следует, что с момента T_0+1 поток тоже стационарен, т.е.

$$\varphi(u,T_0+1) = \varphi(u,T_0+3) = \varphi(u,T_0+5) = \ldots \quad \forall\, u \in U. \tag{5}$$

Таблица 2. Функционирование ресурсной сети (рис. 1) с начальным распределением ресурса $(2, 2, 2, 2)$ в случае, когда дуга I имеет более высокий приоритет (пример 2).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
0	2	2	2	2					
1					2	2	2	2	0
2	2	2	2	2					
3					2	2	2	2	0
4	2	2	2	2					
5					2	2	2	2	0
6	2	2	2	2					
7					2	2	2	2	0
8	2	2	2	2					
9					2	2	2	2	0
10	2	2	2	2					
11					2	2	2	2	0
12	2	2	2	2					

Таблица 3. Функционирование ресурсной сети (рис. 1) с начальным распределением ресурса $(2, 2, 2, 2)$ в случае, когда дуга V имеет более высокий приоритет (пример 3).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
	2	2	2	2					
1					0	2	2	2	2
2	2	0	4	2					
3					0	0	4	2	2
4	4	0	2	2					
5					0	0	2	4	2
6	4	0	2	2					
7					0	0	2	2	4
8	2	0	4	2					
9					0	0	4	2	2
10	2	0	2	4					
11					0	0	2	4	2
12	4	0	2	2					
13					0	0	2	2	4
14	2	0	4	2					
15					0	0	4	2	2

При этом в каждой вершине сети для потока выполнено равенство

$$\sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u,t) = \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u,t) \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, t \in \mathbb{Z}_{+\text{нечет}},\ t \geqslant T_0 + 1. \tag{6}$$

Равенство (6) выглядит аналогично условию неразрывности потока в любой промежуточной вершине классической по Форду—Фалкерсону сети (см. [10]).

В [11] были получены два критерия стационарного функционирования ресурсной по Кузнецову—Жиляковой (КЖ) сети, состоящие в следующем.

Критерий 1. Ресурсная сеть КЖ функционирует стационарно с момента времени $T_0 \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$, т.е. с выполнением (4) и (5), тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$q(x, T_0) = q(x, T_0 + 2) = \ldots \quad \forall\, x \in X. \tag{7}$$

Критерий 2. Ресурсная сеть КЖ функционирует стационарно с момента времени $T_0 \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$, т.е. с выполнением (4) и (5), тогда и только тогда, когда для потока на дугах сети в момент времени $T_0 + 1$ выполнено равенство

$$\sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u, T_0 + 1) = \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u, T_0 + 1) \quad \forall\, x \in X. \tag{8}$$

Проанализировав доказательство этих критериев, легко понять, что они справедливы и для ресурсных сетей с приоритетами на дугах.

Определение 3. Поток $\varphi(u, t)$, $u \in U$, $t \in \mathbb{Z}_{+\text{нечет}}$, в ресурсной сети $G(X, U, f, \rho, \mathrm{pr})$, порожденный некоторым начальным распределением ресурса, будем называть сбалансированным в момент времени t_0, если для него в этот момент времени во всех вершинах сети выполнено равенство (6).

Как уже отмечалось, выполнение равенства (6) для потока в ресурсной сети в момент времени t_0 является необходимым и достаточным условием того, что ресурсная сеть вышла в своем функционировании на стационарный режим; значит, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если поток в сети сбалансирован в какой-либо момент времени t_0, то он сбалансирован и в любой момент времени $t \geqslant t_0$, $t \in \mathbb{Z}_{+нечет}$.*

Определение 4. Рассмотрим ресурсную сеть $G(X, U, f, \rho, \mathrm{pr})$ и её функционирование, порожденное некоторым начальным распределением ресурса. Говорят, что функционирование выходит на периодический режим, если существуют такие $T_0 \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$ и $L \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$, $L > 2$, что выполнены условия

$$(x, t) = q(x, t + L) = q(x, t + 2L) = \ldots \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, t \geqslant T_0,\ t \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}, \tag{9}$$

$$q(x, t) \neq q(x, t + 2) \neq \cdots \neq q(x, t + L - 2). \tag{10}$$

Для ресурсных сетей с приоритетами на дугах справедлив следующий критерий выхода на периодический режим.

Теорема 2 (критерий выхода на периодический режим). *Для того чтобы функционировние ресурсной сети $G(X, U, f, \rho, \mathrm{pr})$, порожденное некоторым начальным распределением ресурса, выходило на периодический режим, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $T_0 \in \mathbb{Z}_{+чет}$ и $L \in \mathbb{Z}_{+чет}$, $L > 2$, для которых выполнено два условия*:

(I) $q(x, T_0) = q(x, T_0 + L)$ *для всех* $x \in X$;

(II) *поток $\varphi(u, t)$ не является сбаласированным ни в один из моментов времени на отрезке* $[T_0 + 1, L - 1]_{\mathbb{Z}_{+нечет}}$.

Ясно, что условие (II) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (10) определения 4. Ясно, что в случае выхода ресурсной сети на периодический режим функционирования не только распределение ресурса, но и поток периодичен, т.е. удовлетворяет условиям аналогичным условию периодичности распределения ресурса (определение 3).

2. Ресурсные сети с динамическими приоритетами на дугах. Рассмотренные примеры 2 и 3 показывают, что при одном и том же начальном распределении ресурса, на одном и том же графе сети с разными приоритетами функционируют совершенно по-разному (пример 2 — стационарно, пример 3 — периодически). В этом разделе введем понятие ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах. Поскольку определение ресурсной сети с приоритетами на дугах достаточно громоздко (ср. определения 1 и 2), ограничимся только необходимыми изменениями, которые следует в них внести, чтобы получить определение ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах.

Таблица 4. Функционирование ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах (пример 4).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
0	2	2	2	2					
1					2	2	2	2	0
2	2	2	2	2					
3					0	2	2	2	2
4	2	0	4	2					
5					2	0	4	2	0
6	2	2	0	4					
7					0	2	0	4	2
8	4	0	4	0					
9					4	0	4	0	0
10	0	4	0	4					
11					0	4	0	4	0
12	4	0	4	0					
13					4	0	4	0	0
14	0	4	0	4					

В определении 1 отображение $G(X,U,f,\rho,\mathrm{pr})$ заменяется на отображение приоритетности $G(X,U,f,\rho,\mathrm{Pr})$, где $\mathrm{Pr}: U\times\mathbb{Z}_{+\text{нечет}}\to N$ (считается, что чем меньше значение $\mathrm{Pr}(u,t)$ на дуге $u\in U$, тем приоритет этой дуги в момент времени t выше в сравнении с другими дугами в этот же момент времени).

Наиболее существенно меняется в этом случае пункт (b) определения 2. Он заменяется на следующее условие:

(b′) Каждое из множеств $U_+(x)=f^{-1}(\{x\}\times X)$ представим в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств $(U_+(x,t))_i$, $i=1,2,\dots,k_x$, $k_x=\max\limits_{u\in U_+(x)}\mathrm{Pr}(u,t)$, отнеся ко множеству $(U_+(x,t))_1$ все дуги из $U_+(x)$, имеющие наивысший приоритет в момент времени t, ко множеству $((U_+(x,t))_2$ — все дуги из $U_+(x)$, имеющие следующее возможное значение приоритета в момент времени t и т. д. Для каждого из множеств $(U_+(x,t))_i$ определим величину $(W(x,t))_i=\sum\limits_{u\in(U_+(x,t))_i}\rho(x)$. Значения потоковой функции $\varphi(u,t)$ в момент времени t на множестве $U_+(x)$ определяются индуктивно по множествам $(U_+(x,t))_i$ в соответствии со следующим алгоритмом:

(iii) Полагаем $S=q(x,t-1)$. Если $S\leqslant(W(x,t))_1$, то
$$\varphi(u,t)=\frac{\rho(u)}{\sum\limits_{v\in(U_+(x))_1}\rho(v)}\cdot q(x,t-1)\quad\forall\,u\in(U_+(x,t))_1,$$
а поток на дугах остальных множеств $(U_+(x,t))_i, i=2,\dots,k_x$, полагаем равным нулю. На этом определение потока $\varphi(u,t)$ на множестве $U_+(x)$ завершено.

(iv) В противном случае полагаем
$$\varphi(u,t)=\rho(u)\quad\forall\,u\in(U_+(x,t))_1,\qquad S=q(x,t-1)-\sum_{u\in(U_+(x))_1}\varphi(u,t)$$
и переходим к определению потока на множестве $(U_+(x,t))_2$ по правилу, описанному в п. (bi) и т. д.

Пример 4. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 1, считая, что пропускные способности всех дуг равны 8. Динамические приоритеты дуг определены следующим образом: при $t=1$

Таблица 5. Функционирование ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах (пример 5).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
0	2	2	2	2					
1					2	2	2	2	0
2	2	2	2	2					
3					0	2	2	2	2
4	2	0	4	2					
5					1	0	4	2	1
6	2	1	1	4					
7					2	1	1	4	0
8	4	2	1	1					
9					0	2	1	1	4
10	1	0	6	1					
11					0,5	0	6	1	0,5
12	1	0,5	0,5	6					
13					1	0,5	0,5	6	0
14	6	1	0,5	0,5					
15					0	1	0,5	0,5	6
16	0,5	0	7	0,5					
17					0,25	0	7	0,5	0,25
18	0,5	0,25	0,25	7					
19					0,5	0,25	0,25	7	0
20	7	0,5	0,25	0,25					
21					0	0,5	0,25	0,25	7
22	0,25	0	7,5	0,25					
23					0,125	0	7,5	0,25	0,125
24	0,25	0,125	0,125	7,5					
25					0,25	0,125	0,125	7,5	0
26	7,5	0,25	0,125	0,125					
27					0	0,25	0,125	0,125	7,5
28	0,125	0	7,75	0,125					
29					0,0625	0	7,75	0,125	0,0625

наивысший приоритет имеет дуга I, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 3$ наивысший приоритет имеет дуга V, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 5$ наивысший приоритет имеет дуга I, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 7$ наивысший приоритет имеет дуга V, приоритет остальных дуг меньше и т. д.

Зададим начальное распределение ресурса в вершинах $(2, 2, 2, 2)$ и рассмотрим функционирование ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах. Как видно из таблицы 4, эта ресурсная сеть с начального распределения ресурса $(2, 2, 2, 2)$ выходит начиная с $t = 8$ на периодическое функционирование (но не такое, как в примере 3).

Пример 5. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 1, считая, что пропускные способности всех дуг равны 8. Динамические приоритеты дуг определены следующим образом: при $t = 1$ наивысший приоритет имеет дуга I, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 3$ наивысший приоритет имеет дуга V, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 5$ приоритет всех дуг одинаковые (т.е. ресурсы распределяются, как в сети Кузнецова—Жиляковой), а потом повторяется процесс, т.е. при $t = 7$ наивысший приоритет имеет дуга I, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 9$ наивысший приоритет имеет дуга V, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 11$ приоритет всех дуг одинаковые (КЖ) и т. д.

Зададим начальное распределение ресурса в вершинах $(2,2,2,2)$, и рассмотрим функционирование ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах (таблица 5). Результаты, полученные в [1, 11] для ресурсных сетей Кузнецова—Жиляковой справедливы и для ресурсных сетей с заданными приоритетами на дугах (определения 1, 2 настоящей работы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдулрахман Х. Н., Ерусалимский Я. М.* О реализуемрсти потоков в классических сетях потоками в ресурсных сетях// Вестн. Дагестан. гос. ун-та. Сер. 1: Естеств. науки. — 2023. — *38*, № 3. — С. 7–17.
2. *Жилякова Л. Ю.* Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах// Автомат. телемех. — 2011. — № 4. — С. 133–143.
3. *Жилякова Л. Ю.* Полные несимметричные ресурсные сети. Случай одного приемника// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. рег. Естеств. науки. — 2011. — № 4 (164). — С. 14–18.
4. *Жилякова Л. Ю.* Управление предельными состояниями в поглощающих ресурсных сетях// Пробл. управл. — 2013. — № 3. — С. 51–59.
5. *Жилякова Л. Ю.* Графовые динамические модели и их свойства// Автомат. телемех. — 2015. — № 8. — С. 115–139.
6. *Жилякова Л. Ю.* Исследование эйлеровых ресурсных сетей// Управление большими системами. — 2013. — № 41. — С. 28–50.
7. *Жилякова Л. Ю., Кузнецов О. П.* Теория ресурсных сетей. — М.: РИОР: ИНФРА-М, 2017.
8. *Кузнецов О. П., Жилякова Л. Ю.* Полные двусторонние ресурсные сети с произвольными пропускными способностями// Управление большими системами. — 2010. — № 30–1. — С. 640–664.
9. *Скороходов В. А., Абдулрахман Х., Ерусалимский Я. М.* Программа SYMDRN для исследования функционирования динамических ресурсных сетей// Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019617935, 25.06.2019. Заявка № 2019616962 от 13.06.2019.
10. *Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.* Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
11. *Abdulrahman H. N., Erusalimskiy I. M.* On the realizability of stationary flows in resource networks by flows in classical networks// J. Math. Sci. — 2024. doi: 10.1007/s10958-024-07093-1.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ерусалимский Яков Михайлович (Erusalimskiy Iakov Mikhailovich)
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
(Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)
E-mail: `ymerusalimskiy@sfedu.ru`

Абдулрахман Хайдар Нофалович (Abdulrahman Haidar Nofalovich)
Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону
(Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia)
E-mail: `abdulrahm.haidar@gmail.com`

Скороходов Владимир Александрович (Skorokhodov Vladimir Aleksandrovich)
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
(Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)
E-mail: `vaskorohodov@sfedu.ru`

Бабинцев Валерий Андреевич (Babintsev Valerii Andreevich)
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
(Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)
E-mail: `babintsev@sfedu.ru`