ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 63–70
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-63-70

УДК 517.95

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА—ЛЫКОВА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

© 2023 г. **М. А. КЕРЕФОВ, С. Х. ГЕККИЕВА, Б. М. КЕРЕФОВ**

Аннотация. Исследованы краевые задачи для неоднородного уравнения влагопереноса с переменными коэффициентами с дробной по времени производной Капуто. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки для решения первой и третьей краевых задач, из которых следует единственность решения рассматриваемых задач и их устойчивость по правой части и начальным данным.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Аллера—Лыкова, априорная оценка, дифференциальное уравнение дробного порядка, регуляризованная дробная производная, производная Капуто.

FIRST BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE ALLER–LYKOV EQUATION WITH THE CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE

© 2023 **M. A. KEREFOV, S. Kh. GEKKIEVA, B. M. KEREFOV**

Abstract. In this paper, we examine boundary-value problems for the inhomogeneous humidity transport equation with variable coefficients and the Caputo fractional derivative in time. Using the method of energy inequalities, we obtain a priori estimates for solutions of the first and third boundary-value problems, which imply the uniqueness and stability of solutions.

Keywords and phrases: boundary-value problem, Aller–Lykov equation, a priori estimate, fractional differential equation, regularized fractional derivative, Caputo derivative.

AMS Subject Classification: 35Q99

1. Введение. В последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления агроэкосистемой, например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги, существенно повысился интерес к дифференциальным уравнениям дробного порядка [14, 17, 19]. Исследователи при этом концентрируют свое внимание на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов и т. д. В связи с этим возникает качественно новый класс дифференциальных уравнений состояния и переноса с дробной производной, являющихся основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной структурой и памятью [6, 16, 18, 27]. Начально-краевые задачи в ограниченных областях для диффузионных и диффузионно-волновых уравнений дробного порядка решались методом разделения переменных [5, 22, 26], методами интегральных преобразований [25], с использованием принципов максимума и априорных оценок [3, 8, 12, 21], а также численными методами [7, 23, 24]. Настоящая работа посвящена исследованию уравнения влагопереноса типа Аллера—Лыкова с переменными коэффициентами с дробной производной Капуто

$$A_1\partial_{0t}^{\alpha+1}u + \partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t), \qquad (1)$$

где ∂_{0t}^{γ} — оператор дробного дифференцирования Капуто, $0 < \alpha < 1$, A_1, $A = \mathrm{const} > 0$. Такого рода уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля рассматривались в работах авторов и решались методом разделения переменных, методом априорных оценок. Среди последних отметим работы [2, 9, 13], в которых исследовано уравнение влагопереноса Аллера—Лыкова с дробной по времени производной с различного рода граничными условиями. В [4] доказано существование и единственность решения первой краевой задачи для уравнения Аллера—Лыкова с постоянными коэффициентами, в [10] исследована вторая краевая задача. В [11] получены решения системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами, возникающих при использовании метода прямых, также найдены априорные оценки, из которых следует сходимость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами дробного порядка.

2. Вспомогательные сведения. Оператор дробного интегродифференцирования в смысле Римана—Лиувилля D_{0y}^{γ} порядка γ определяется следующим образом (см. [17]):

$$D_{ay}^{\gamma}g(y) = \frac{\operatorname{sign}(y-a)}{\Gamma(-\gamma)}\int_a^y \frac{g(y)\,ds}{|y-s|^{\gamma+1}}, \quad \gamma < 0;$$

при $\gamma \geqslant 0$ оператор D_{0y}^{γ} определяется соотношением

$$D_{ay}^{\gamma}g(y) = \operatorname{sign}(y-a)\frac{d}{dy}D_{0y}^{\gamma-1}g(y), \quad \gamma \geqslant 0.$$

Дробная производная Капуто $\partial_{0t}^{\gamma}g(y)$ порядка γ определяется формулой (см. Kerefov:bib:01)

$$\partial_{ay}^{\gamma}g(y) = \operatorname{sign}^n(y-a)\,D_{0y}^{\gamma-n}g^{(n)}(y), \quad n-1 < \gamma \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и, в частности, связана с производной Римана—Лиувилля соотношением

$$D_{ay}^{\gamma}g(y) = \frac{g(a)(y-a)^{\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} + \partial_{ay}^{\gamma}g(y), \quad g(y) \in L[a,b], \quad \gamma \in (0,1).$$

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1 (см. [1]). *Для любой абсолютно непрерывной на $[0,T]$ функции $g(y)$ справедливо неравенство*

$$g(y)\partial_{0y}^{\alpha}g(y) \geqslant \frac{1}{2}\partial_{0y}^{\alpha}g^2(y), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Лемма 2 (см. [1]). *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $g(y)$ удовлетворяет для почти всех y из $[0,T]$ неравенству*

$$\partial_{0y}^{\alpha}g(y) \leqslant c_1 g(y) + c_2(y), \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $c_1 > 0$, $c_2(y)$ — суммируемая на $[0,T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$g(y) \leqslant y(0)E_{\alpha}\big(c_1 y^{\alpha}\big) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}\big(c_1 y^{\alpha}\big)D_{0y}^{-\alpha}c_2(y),$$

где

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}, \quad E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}$$

— функции Миттаг-Леффлера.

Лемма 3 (см. [15, с. 152]). *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0,T]$ неравенству*

$$\frac{dy}{dt} \leqslant c_1(t)y(t) + c_2(t),$$

где $c_i(t)$ — суммируемые на $[0,T]$ неотрицательные функции. Тогда

$$y(t) \leqslant \exp\left\{\int\limits_0^t c_1(\tau)d\tau\right\}\left[y(0) + \int\limits_0^t c_2(\xi)\exp\left(-\int\limits_0^\xi c_1(\tau)d\tau\right)d\xi\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\int\limits_0^t c_1(\tau)d\tau\right\}\left[y(0) + \int\limits_0^t c_2(\tau)d\tau\right].$$

В дальнейшем будем предполагать существование решения, рассматриваемой в работе задачи. Далее M_i, $i = 1, 2, \ldots$ положительные постоянные, зависящие исключительно только от входных данных рассматриваемой задачи.

Скалярное произведение и норма определяется следующим образом:

$$(a,b) = \int\limits_0^l a(x)b(x)\,dx, \quad (a,a) = \|a\|_0^2, \quad a,b \in [0,l].$$

Исследование уравнения (1) будем проводить методом априорных оценок.

3. Постановка первой краевой задачи и формулировка результата. В области $\Omega_T = \big\{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\big\}$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1) с краевыми условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_t(x,0) = \nu(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ — заданные функции.

Теорема 1. *Если*

$$k_t(x,t),\ q_t(x,t),\ f(x,t) \in C\big(\overline{\Omega}_T\big), \quad \nu(x) \in C[0,l], \quad \tau(x) \in C^1[0,l],$$
$$0 < c_1 \leqslant k(x,t),\ \eta(x),\ r(x,t),\ q(x,t) \leqslant c_2, \quad \big|k_t(x,t),\ q_t(x,t)\big| \leqslant c_3$$

всюду на $\overline{\Omega}_T$, то для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2 + \|u\|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant M\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|\tau(x)\|^2_{w_2^2(0,\,l)} + \|\nu(x)\|_0^2\right), \tag{4}$$

где $\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2$.

Доказательство. Для вывода априорной оценки умножим уравнение (1) скалярно на u_t:

$$\big(A_1\partial_{0t}^{\alpha+1}u,\ u_t\big) + \big(\partial_{0t}^{\alpha}u,\ u_t\big) - \big((ku_x)_x,\ u_t\big) - \big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x,\ u_t\big) - \big(ru_x,\ u_t\big) + \big(qu,\ u_t\big) = \big(f,\ u_t\big). \tag{5}$$

Преобразуем слагаемые тождества (5), учитывая лемму 1 и граничные условия (2):

$$\big(A_1\partial_{0t}^{\alpha+1}u,\ u_t\big) = A_1\int\limits_0^l \frac{u_t}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx = A_1\int\limits_0^l u_t\partial_{0t}^{\alpha}u_t\,dx \geqslant \frac{A_1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u_t\|_0^2,$$

$$\big((ku_x)_x,\ u_t\big) = \int\limits_0^l u_t(ku_x)_x dx = u_t k u_x(x,t)\Big|_0^l - \int\limits_0^l k u_{xt} u_x\, dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l k u_x^2(x,t)\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^l k_t u_x^2(x,t)\, dx,$$

$$\big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x,\ u_t\big) = u_t \partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)\Big|_0^l - \int\limits_0^l \eta(x) u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha} u_x\, dx = -\int\limits_0^l \eta(x) u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha} u_x\, dx,$$
$$\int\limits_0^l q(x,t)u(x,t)u_t(x,t)dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l q(x,t)u^2(x,t)\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^l q_t(x,t)u^2(x,t)\, dx,$$
$$\big(ru_x,\ u_t\big) \leqslant \frac{c_2}{4\varepsilon}\|u_x\|_0^2 + c_2\varepsilon\|u_t\|_0^2, \quad \big(f,\ u_t\big) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2 + \varepsilon\|u_t\|_0^2.$$

Последние два неравенства получены при помощи неравенства Коши—Буняковского и ε-неравенства (см. [20]):

$$\big(f,\ u_t\big) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2 + \varepsilon\|u_t\|_0^2, \quad \varepsilon > 0.$$

С учетом полученных неравенств из (5) находим

$$\frac{A_1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u_t\|_0^2 + \big(\partial_{0t}^{\alpha}u,\ u_t\big) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^l k u_x^2(x,t)dx + \int\limits_0^l q(x,t)u^2(x,t)dx\right) + \int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{c_2}{4\varepsilon} + \frac{c_3}{2}\right)\|u_x\|_0^2 + (c_2\varepsilon + \varepsilon)\|u_t\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2 + \frac{c_3}{2}\|u\|_0^2. \quad (6)$$

Проинтегрируем (6) по τ от 0 до t с учетом (3):

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2 + \int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l u_t\partial_{0t}^{\alpha}u\, dx + \int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x\, dx \leqslant$$
$$\leqslant M_1\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \|u_t\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau'(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|_0^2\right), \quad (7)$$

Справедлива следующая оценка:

$$\left|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l u_t\,\partial_{0t}^{\alpha}u\, dx\right| = \left|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l u_\tau(x,\tau)\int\limits_0^\tau \frac{u_\eta(x,\eta)}{(\tau-\eta)^\alpha}d\eta\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_\tau(x,\tau)\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2\Gamma^2(1-\alpha)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l dx\left(\int\limits_0^\tau \frac{u_\eta(x,\eta)}{(\tau-\eta)^\alpha}d\eta\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_\tau(x,\tau)\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2\Gamma^2(2-\alpha)}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t d\tau\left(\tau^{1-\alpha}\int\limits_0^\tau \frac{u_\eta^2(x,\eta)}{(\tau-\eta)^\alpha}d\eta\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_\tau(x,\tau)\|_0^2 d\tau + \frac{t^{1-\alpha}}{2\Gamma^2(1-\alpha)}\int\limits_0^l dx\int\limits_0^t (t-\tau)^{1-\alpha}u_\tau^2(x,\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{t^{2-2\alpha}}{2\Gamma^2(2-\alpha)}\right)\int\limits_0^t \|u_\tau(x,\tau)\|_0^2 d\tau. \quad (8)$$

Из (7) с учетом (8) и неравенства

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^\alpha u_x\, dx \leqslant c_2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l u_{xt}\, D_{0t}^{\alpha-1}u_{x\tau}\, dx \geqslant 0$$

(см. [17]) получим

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2 + \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_2\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) d\tau + \int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right). \quad (9)$$

Воспользуемся леммой 3. Отбросив первое слагаемое в левой части неравенства (9) и введя обозначения

$$y(t) = \int\limits_0^t \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 d\tau, \quad y'(t) = \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2, \quad y(0) = 0,$$

получим оценку

$$\int\limits_0^t \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 d\tau \leqslant M_2\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right). \quad (10)$$

Отбросив в левой части неравенства (9) второе и третье слагаемые, с учетом (10) приходим к неравенству

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2 \leqslant M_4\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right). \quad (11)$$

На основании леммы 2, где

$$y(t) = \int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau, \quad \partial_{0t}^\alpha y(t) = D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2, \quad y(0) = 0$$

из (11) находим

$$\int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau \leqslant M_5\left(D_{0t}^{-\alpha-1}\|f\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2\right). \quad (12)$$

В силу неравенства

$$D_{0t}^{-\alpha-1}\|f\|_0^2 \leqslant \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau$$

из неравенств (9), (10), (12) получаем искомую априорную оценку (4), которая влечет единственность решения задачи (1)–(3). □

4. Постановка третьей краевой задачи и априорная оценка решения. Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения (1) в области Ω_T, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \Pi(0,t) = \beta_1 u - \mu_1(t), x = 0, \\ -\Pi(l,t) = \beta_2 u - \mu_2(t), x = l, \end{cases} \tag{13}$$

и начальным условиям (3), где

$$\Pi(x,t) = k(x,t)u_x + \partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x).$$

Теорема 2. *Если дополнительно к условиям теоремы* 1 *выполняются соотношения*

$$\beta_i,\ \mu_i \in C[0,T], \quad \beta_i \geqslant c_4 > 0, \quad i = 1,2, \quad \text{для всех } t \in [0,T],$$

то для решения задачи (1), (13), (3) *справедлива априорная оценка*

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2 + \|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + u^2(l,t) + u^2(0,t) \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\int_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \int_0^t (\mu_1^2 + \mu_2^2) d\tau + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau(x)\|^2_{w_2^2(0,l)} + \tau^2(l) + \tau^2(0)\right). \tag{14}$$

Доказательство. Повторим те же рассуждения, которые производились при доказательстве теоремы 1. Преобразуя слагаемые (5) с учетом (13), получим:

$$\big((ku_x)_x,\ u_t\big) = \int_0^l u_t (ku_x)_x dx = u_t k u_x(x,t)\Big|_0^l - \int_0^l k u_{xt} u_x dx =$$
$$= ku_x(l,t)u_t(l,\tau) - ku_x(0,t)u_t(0,\tau) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l k u_x^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^l k_t u_x^2(x,t)dx,$$

$$\big(\partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)_x,\ u_t\big) = u_t \partial_{0t}^{\alpha}(\eta u_x)\Big|_0^l - \int_0^l \eta(x) u_{xt} \partial_{0t}^{\alpha} u_x dx =$$
$$= u_t(l,\tau)\partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(l)u_x(l,\tau)\big) - u_t(0,\tau)\partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(0)u_x(0,\tau)\big) - \int_0^l \eta(x) u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha} u_x dx.$$

С учетом полученных неравенств из (5) получим

$$\frac{A_1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u_t\|_0^2 + \big(\partial_{0t}^{\alpha} u,\ u_t\big) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^l k u_x^2(x,t)dx + \int_0^l q(x,t)u^2(x,t)dx\right) + \int_0^l \eta(x) u_{xt}\, \partial_{0t}^{\alpha} u_x dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{c_2}{4\varepsilon} + \frac{c_3}{2}\right)\|u_x\|_0^2 + (c_2\varepsilon + \varepsilon)\|u_t\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2 + \frac{c_3}{2}\|u\|_0^2 + \Pi(x,t)u_t(x,t)\Big|_0^l. \tag{15}$$

Оценим последнее слагаемое правой части неравенства (15):

$$\Pi(x,t)u_t(x,t)\Big|_0^l =$$
$$= u_t(l,t)\Big(ku_x(l,t) + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(l)u_x(l,\tau)\big)\Big) - u_t(0,t)\Big(ku_x(0,t) + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(0)u_x(0,\tau)\big)\Big) =$$
$$= u_t(l,t)\big(\mu_2(t) - \beta_2 u\big) - u_t(0,t)\big(\beta_1 g - \mu_1(t)\big) =$$
$$= u_t(l,t)\mu_2(t) - u_t(l,t)\beta_2 u(l,t) - u_t(0,t)\beta_1 u(0,t) + u_t(0,t)\mu_1(t) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{c_4}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u^2(l,t)+u^2(0,t)\big)+u_t(l,t)\mu_2(t)+u_t(0,t)\mu_1(t). \quad (16)$$

Из (15) с учетом приведенных преобразований (16), а также в силу неравенства

$$\mu_1 u(0,t)+\mu_2 u(l,t)\leqslant \frac{1}{2}(\mu_1^2+\mu_2^2)+\frac{1}{2}\big((u(0,t))^2+(u(l,t))^2\big)\leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(\mu_1^2+\mu_2^2)+\left(\varepsilon\big\|(u(x,t))_x\big\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\|u(x,t)\|_0^2\right)$$

(см. [15]) приходим к неравенству

$$\frac{A_1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u_t\|_0^2+\big(\partial_{0t}^{\alpha}u,\ u_t\big)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^l k u_x^2(x,t)dx+\int\limits_0^l q(x,t)u^2(x,t)dx\right)+$$
$$+\int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x dx+\frac{c_4}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u^2(l,t)+u^2(0,t)\big)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{c_2}{4\varepsilon}+\frac{c_3}{2}\right)\|u_x\|_0^2+(c_2\varepsilon+\varepsilon)\|u_t\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+\frac{c_3}{2}\|u\|_0^2+$$
$$+\frac{1}{2}(\mu_1^2+\mu_2^2)+\left(\varepsilon\big\|(u(x,t))_x\big\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\|u(x,t)\|_0^2\right). \quad (17)$$

Проинтегрируем (17) по τ от 0 до t с учетом (3):

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u_t\|_0^2+\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l u_t\,\partial_{0t}^{\alpha}u\,dx+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l \eta(x)u_{xt}\partial_{0t}^{\alpha}u_x dx+u^2(l,t)+u^2(0,t)\leqslant$$
$$\leqslant M_5\left(\int\limits_0^t\Big(\|u_x\|_0^2+\|u\|_0^2\Big)d\tau+\int\limits_0^t\|f\|_0^2 d\tau+\int\limits_0^t(\mu_1^2+\mu_2^2)d\tau+\int\limits_0^t\|u_\tau\|_0^2 d\tau+\right.$$
$$\left.+\|\nu(x)\|_0^2+\|\tau'(x)\|_0^2+\|\tau(x)\|_0^2+\tau^2(l)+\tau^2(0)\right). \quad (18)$$

Аналогично первой краевой задаче, из (18), применяя последовательно леммы 3 и 2, получим априорную оценку (14) доказывающую единственность решения задачи (1), (13), (3). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алиханов А. А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка// Диффер. уравн. — 2010. — *46*, № 5. — С. 658–664.
2. *Геккиева С. Х.* Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — № 4 (24). — С. 76–86.
3. *Геккиева С. Х., Керефов М. А.* Смешанные краевые задачи для нагруженного уравнения с дробной производной// Мат. III Междунар. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2006). — Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2006. — С. 80–82.
4. *Геккиева С. Х., Керефов М. А.* Первая краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с дробной по времени производной// Уфим. мат. ж. — 2019. — *11*, № 2. — С. 72–82.
5. *Керефов М. А.* Об одной краевой задаче для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной// Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 1999. — *4*, № 1. — С. 12–14.
6. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной в многомерной области// Науч. вед. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2015. — *41*, № 23. — С. 17–23.

7. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2016. — № 1. — С. 76–86.
8. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2017. — № 2. — С. 106–112.
9. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Краевая задача для нелокального уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2019. — *167*. — С. 27–33.
10. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2019. — *23*, № 4. — С. 607–621.
11. *Керефов М. А., Геккиева С. Х.* Численно–аналитический метод решения краевой задачи для обобщенных уравнений влагопереноса// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2021. — *31*, № 1. — С. 19–34.
12. *Керефов М. А., Кармоков М. М., Геккиева С. Х.* Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Аллера// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2020. — *26*, № 2. — С. 7–14.
13. *Керефов М. А., Нахушева Ф. М., Геккиева С. Х.* Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с сосредоточенной теплоемкостью// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2018. — *24*, № 3. — С. 23–29.
14. *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка// Диффер. уравн. — 1990. — *26*, № 4. — С. 660–670.
15. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
16. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Физматлит, 1995.
17. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
18. *Нахушев А. М.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
19. *Нигматуллин Р. Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация// Теор. мат. физ. — 1992. — *90*, № 3. — С. 354–368.
20. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
21. *Al-Refai M., Luchko Yu.* Maximum principle for the multi-term time-fractional diffusion equations with the Riemann–Liouville fractional derivatives// Appl. Math. Comput. — 2014. — *257*. — P. 40–51.
22. *Daftardar-Gejji V., Bhalekar S.* Boundary-value problems for multi-term fractional differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 2008. — № 345. — P. 754–735.
23. *Li G., Sun C., Jia X., Du D.* Numerical solution to the multi-term time fractional diffusion equation in a finite domain// Numer. Math. Theor. Meth. Appl. — 2016. — *9*, № 3. — P. 337–357.
24. *Liu F., Meerschaert M. M., McGough R. J., Zhuang P., Liu Q.* Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2013. — *16*, № 1. — P. 9–25.
25. *Liu X., Wang J., Wang X., Zhou Y.* Exact solutions of multi-term fractional diffusion-wave equations with Robin type boundary conditions// Appl. Math. Mech. — 2014. — *35*, № 1. — P. 49–62.
26. *Luchko Yu.* Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation// J. Math. Anal. Appl. — 2011. — *374*, № 2. — P. 538–548.
27. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. — New York: Academic Press, 1974.

Керефов Марат Асланбиевич
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик
E-mail: kerefov@mail.ru

Геккиева Сакинат Хасановна
Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Нальчик
E-mail: Gekkieva_s@mail.ru

Керефов Батыр Маратович
Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Нальчик;
Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь
E-mail: timur200660@gmail.com