ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 20–30
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-20-30

УДК 517.95

О СПЕКТРЕ ИЕРАРХИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШРЁДИНГЕРА, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КАНТОРОПОДОБНОМ МНОЖЕСТВЕ

© 2023 г. **А. Д. БЕНДИКОВ**

Аннотация. Статья написана в рамках совместного с А. Григорьяном (Университет Билефельда) и С. Молчановым (Университет Северной Каролины) проекта «Спектр иерархических операторов типа Шрёдингера» и продолжает начатые ранее исследования.

Ключевые слова: ультраметрическое пространство, симметричная марковская полугруппа, симметричный марковский генератор, спектральная асимптотика, теория локализации.

ON THE SPECTRUM OF HIERARCHICAL SCHRÖDINGER-TYPE OPERATORS ACTING ON A CANTOR-LIKE SET

© 2023 **A. D. BENDIKOV**

Abstract. This paper is written within the project "On the spectrum of hierarchical Schrödinger-type operators" joint with A. Grigor'yan (Bielefeld University) and S. Molchanov (University of North Carolina at Charlotte) and continues the studies started earlier.

Keywords and phrases: ultrametric space, symmetric Markov semigroup, symmetric Markov generator, spectral asymptotics, localization theory.

AMS Subject Classification: 35P05

1. Введение. Концепция иерархического лапласиана восходит к Н. Н. Боголюбову и его школе; она была использована Ф. Дж. Дайсоном при построении фазового перехода в $1D$-ферромагнитной модели с дальнодействующим взаимодействием (см. [8, 9]). Теория иерархического лапласиана, действующего на общем ультраметрическом пространстве X, была достаточно полно разработана в [1, 3].

В случае $X = \mathbb{Q}_p$, поля p-адических чисел, упомянем тесно связанные работы С. Альбеверио, В. Карвовски, В. С. Владимирова, И. В. Воловича, Е. И. Зеленова, А. Н. Кочубея.

1.1. В качестве простейшего примера рассмотрим диадическую модель Дайсона. В этой модели иерархический оператор типа Шредингера $H = L + V$ реализуется как возмущение самосопряженного интегрального оператора L, действующего в $L^2(0, \infty)$.

1.2. Иерархическая структура. Иерархическая структура определяется семейством разбиений $\{\Pi_r : r \in \mathbb{Z}\}$ множества $X = [0, \infty)$. Каждая часть Π_r состоит из диадических интервалов $I = [(i-1)2^r, i2^r)$. Число r называется рангом разбиения Π_r (соответственно, рангом двоичного интервала I).

Любая точка x принадлежит ровно одному интервалу $I_r(x)$ ранга r, и все множество X является объединением возрастающего семейства диадических интервалов $I_r(x)$ при $r \nearrow \infty$.

Иерархическое расстояние $\mathrm{d}(x,y)$ определяется как мера Лебега $|I|$ минимального диадического интервала I, содержащего x и y.

Легко видеть, что

$$\mathrm{d}(x,y) \leqslant \max\{\mathrm{d}(x,z), \mathrm{d}(z,y)\} \quad \forall x,y,z \in X,$$

т.е. $\mathrm{d}(x,y)$ является *ультраметрикой* на X.

(i) Евклидова метрика $|x-y|$ и введенная ультраметрика $\mathrm{d}(x,y)$ определяют неэквивалентные топологии. Действительно, по определению

$$\mathrm{d}(x,y) \geqslant |x-y| \quad \forall x,y \in X;$$

с другой стороны,

$$\mathrm{d}(1-\varepsilon, 1) = 2 \quad \forall \varepsilon \in (0,1].$$

(ii) Пара (X,d) является полным, локально компактным, некомпактным и сепарабельным метрическим пространством. В этом метрическом пространстве множество $\mathcal{B}$ всех открытых шаров совпадает с множеством всех диадических интервалов.

(iii) Каждый открытый шар B в (X,d) является замкнутым компактом, каждая точка $a \in B$ может рассматриваться как его центр, любые два шара либо не пересекаются, либо один является подмножество другого и т. д. Таким образом, (X,d) является собственным вполне несвязным метрическим пространством. В частности, (X,d) гомеоморфно канторову множеству с выколотой точкой.

(iv) Борелевская σ-алгебра, порожденная ультраметрическими шарами, совпадает с классической борелевской σ-алгеброй, порожденной евклидовой метрикой.

1.3. Иерархический лапласиан. Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех локально постоянных функций с компактным носителем, $\varkappa \in]0,1[$ — фиксированный параметр.

Иерархический лапласиан L вводится как сумма (минус) марковских образующих L_r чисто скачкообразных процессов[1]

$$(Lf)(x) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \underbrace{(1-\varkappa)\varkappa^r \left(f(x) - \frac{1}{|I_r(x)|} \int\limits_{I_r(x)} f\,dl \right)}_{(L_r f)(x)} \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

Так как каждый *элементарный лапласиан* L_r может быть записан в виде

$$L_r f(x) = \int\limits_0^\infty \big(f(x) - f(y)\big) J_r(x,y)dy, \quad J_r(x,y)dy = \underbrace{(1-\kappa)\kappa^{r-1}}_{\lambda_r(x)} \cdot \underbrace{\mathbf{1}_{I_r(x)}(y)/|I_r(x)|dy}_{\mathcal{U}_r(x,dy)},$$

оператор L может быть представлен в виде гиперсингулярного интегрального оператора:

$$(Lf)(x) = \int\limits_0^\infty \big(f(x) - f(y)\big) J(x,y)dy, \quad J(x,y) = \frac{\kappa^{-1}-1}{1-\kappa/2} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}(x,y)^{1+\alpha}}, \quad \alpha = \frac{2}{\log_2 1/\varkappa}.$$

[1]Марковский процесс называется чисто скачкообразным, если, начиная с любой точки x, все его выборочные пути, за исключением изолированных скачков, постоянны и непрерывны справа.

Основными данными, определяющими процесс, являются (i) функция $0 < \lambda(x) < \infty$ и (ii) марковское ядро $\mathcal{U}(x,dy)$, удовлетворяющее условию $\mathcal{U}(x,\{x\}) = 0$. Интуитивно, частица, начиная с положения x, остается в этом положении в течение экспоненциально распределенного времени с параметром $\lambda(x)$; за это время она «перескакивает» в новое положение x' в соответствии с распределением $\mathcal{U}(x,\cdot)$ и т. д.

1.4. Спектр оператора L. Каждому диадическому интервалу $I = [(i-1)2^r, i2^r)$ поставим в соответствие функцию Хаара

$$\mathcal{X}_I(x) = \begin{cases} 2^{-r/2} & \text{при } x \in [(i-1)2^r, (i-1/2)2^r), \\ -2^{-r/2} & \text{при } x \in [(i-1/2)2^r, i2^r), \\ 0 & \text{при } x \notin I. \end{cases}$$

Функция Хаара $\mathcal{X}_I$ является собственной функцией оператора L, соответствующей собственному значению $\varkappa^r$:

$$L\mathcal{X}_I = \varkappa^r \mathcal{X}_I.$$

Легко видеть, что каждое собственное значение $\varkappa^r$ имеет бесконечную кратность.

Множество $\{\mathcal{X}_I : I \in \mathcal{B}\}$ является полным ортонормированным базисом в $L^2(0,\infty)$. В частности, L — существенно самосопряженный оператор, имеющий чисто точечный спектр

$$\operatorname{Spec}(L) = \{\varkappa^r : r \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

1.5. Ядро теплопроводности оператора L. Оператор L порождает симметричную марковскую полугруппу $(e^{-tL})_{t>0}$. Полугруппа $(e^{-tL})_{t>0}$ допускает непрерывное ядро теплопроводности $p(t,x,y)$ (фундаментальное решение уравнения $(\partial_t - L)u = v$), которую можно оценить следующим образом:[1]

$$p(t,x,y) \asymp \frac{t}{[t^{1/\alpha} + \mathrm{d}(x,y)]^{1+\alpha}}, \quad \alpha = \frac{2}{\log_2 1/\varkappa}.$$

Функция $p(t,x,x)$ не зависит от x. Полагая $\mathfrak{p}(t) := p(t,x,x)$, по формуле спектрального разрешения получаем

$$\mathfrak{p}(t) = t^{-1/\alpha}\mathcal{A}(\log_2 t),$$

где $\mathcal{A}(\tau)$ — непрерывная непостоянная α-периодическая функция. В частности, в отличие от классического случая (симметричные устойчивые плотности), функция $t \to \mathfrak{p}(t)$ не имеет регулярного изменения.

1.6. Множитель Тэйблсона—Владимирова. Примечательно, что введенный выше иерархический лапласиан L можно отождествить с множителем Тэйблсона—Владимирова $\mathfrak{D}^\alpha$, $\alpha > 0$, действующим в $L^2(\mathbb{Q}_2)$, где $\mathbb{Q}_2$ — поле 2-адических чисел,

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha f}(\zeta) = \|\zeta\|_2^\alpha \widehat{f}(\zeta).$$

В частности, $-\mathfrak{D}^\alpha$ — симметричный α-стабильный генератор Леви, действующий на абелевой группе $\mathbb{Q}_2$, ядро теплопроводности которого $p_\alpha(t,x,y)$ можно оценить следующим образом:

$$p_\alpha(t,x,y) \asymp \frac{t}{\left[t^{1/\alpha} + \|x-y\|_2\right]^{1+\alpha}}.$$

2. Операторы типа Шрёдингера. В дальнейшем рассмотрим множитель Тэйблсона—Владимирова $\mathfrak{D}^\alpha$, $\alpha > 0$, действующий в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, где $\mathbb{Q}_p$ — кольцо p-адических чисел, снабженное нормированной мерой Хаара. Одно из возможных определений $\mathfrak{D}^\alpha$ очевидно:

$$\widehat{\mathfrak{D}^\alpha f}(\zeta) = \|\zeta\|_p^\alpha \widehat{f}(\zeta).$$

[1] Ядро $p(t,x,y)$ является непрерывной (и даже локально липшицевой) функцией в введенной d-топологии, но разрывной функцией в евклидовой топологии. Этот факт следует из представления

$$p(t,x,y) = t \int_0^{1/d_*(x,y)} e^{-t\tau} N(\tau)\, d\tau,$$

где $d_*(x,y)$ — ультраметрика, определяющая топологию, эквивалентную d-топологии и внутренне связанная с L, а $N(\tau)$ — так называемая спектральная функция распределения, связанная с лапласианом L (см. [7]).

2.1. Случай локально ограниченных потенциалов. Пусть V — локально ограниченная функция и $V : u \to V \cdot u$ — множитель. Оператор $H = \mathfrak{D}^\alpha + V$ с областью определения $\mathcal{D}$ является плотно определенным симметричным оператором, действующим в $L^2(0, \infty)$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Оператор H существенно самосопряжен.*
2. *Если $V(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, то самосопряженный оператор H имеет компактную резольвенту.* (*Таким образом, его спектр дискретен.*)
3. *Если $V(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то существенный спектр оператора H совпадает со спектром оператора $\mathfrak{D}^\alpha$.* (*Таким образом, спектр оператора H является чисто точечным спектром, отрицательная часть которого состоит из изолированных собственных значений конечной кратности.*)

Замечание 2. Для оператора Шрёдингера $H = -\Delta + V$ в $\mathbb{R}^D$ утверждение о существенной самосопряженности H, вообще говоря, неверно. Действительно, в случае оператора Шрёдингера

$$H\psi = -\psi'' + V \cdot \psi, \quad \psi \in C_c^\infty(0, \infty),$$

где $V(x) = -x^\gamma$, $\gamma > 2$б существует *континуум* самосопряженных расширений оператора H.

Кроме того, согласно С. Котани, спектр оператора H может содержать нетривиальные абсолютно непрерывные и сингулярные непрерывные части.[1]

2.2. Случай потенциалов с локальными особенностями. Если нас интересуют потенциалы с локальными особенностями, такие, как $V(x) = b\|x\|_p^{-\beta}$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}_p$, то для того чтобы доказать, что квадратичная форма

$$Q(u, u) := Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(u, u) + Q_V(u, u) \tag{1}$$

определенная на множестве

$$\mathrm{dom}(Q) := \mathrm{dom}(Q_{\mathfrak{D}^\alpha}) \cap \mathrm{dom}(Q_V),$$

является плотно определенной, замкнутой и ограниченной снизу, необходимы некоторые локальные условия на потенциал V; следовательно, она ассоциирована с ограниченным снизу самосопряженным оператором H. Принято писать $H = \mathfrak{D}^\alpha + V$, но следует иметь в виду, что это сумма квадратичных форм, а не сумма операторов, как в предыдущем подразделе.

Теорема 3. *Если $0 \leqslant V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p)$, то квадратичная форма* (1) *является регулярной формой Дирихле. В частности, это форма неотрицательного самосопряженного оператора H,*

$$Q(u, u) = (H^{1/2}u, H^{1/2}u),$$

а множество $\mathcal{D}$ является ядром формы Q.

Замечание 4. Ясно, что теорема 3 может быть распространена на потенциалы V, ограниченные снизу и лежащие в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ после добавления достаточно большой положительной константы. Если же нас интересуют потенциалы V с отрицательными локальными особенностями, то необходимы более сильные локальные условия на V, чтобы можно было доказать замкнутость формы Q.

Определение 5. Пусть $p \geqslant 1$ — фиксированное число. Говорят, что потенциал V лежит в $L^p + L^\infty$, если $V = V' + V''$, где $V' \in L^p(X, m)$ и $V'' \in L^\infty(X, m)$. Это разложение не единственно, и в некоторых случаях можно добиться того, чтобы $\|V'\|_p$ было сколь угодно малым.

Теорема 6. *Пусть оператор $\mathfrak{D}^\gamma$ действует в $L^p(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ и $Q = Q_{\mathfrak{D}^\gamma} + Q_V$ — квадратичная форма* (1), *где $V \in L^p + L^\infty$ при некотором $p > 1/\gamma$. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1. *квадратичная форма Q плотно определена, замкнута и ограничена снизу*; *следовательно, ей соответствует ограниченный снизу самосопряженный оператор H.*
2. *Если $2 \leqslant 1/\gamma < p$, то* $\mathrm{dom}(H) = \mathrm{dom}(\mathfrak{D}^\gamma)$; *аналогично для $1/\gamma < 2$ и $p = 2$.*

[1]Справедлив ли этот результат в условиях иерархического лапласиана (например, множителя Тэйблсона—Владимирова) — интересный открытый вопрос.

2.3. Положительный спектр. Приведем критерий того, что спектр оператора типа Шрёдингера $H = \mathfrak{D}^\alpha + V$ содержится в интервале $[0, \infty)$. Предполагаем, что квадратичная форма $Q = Q_{\mathfrak{D}^\alpha} + Q_V$ является плотно определенной, замкнутой, ограниченной снизу, имеет ядро $\mathcal{D}$, а H является ограниченным снизу самосопряженным оператором, ассоциированным с Q. Однако заметим, что даже если $\mathrm{Spec}(H)$ содержится в интервале $[0, \infty)$, форма Q не является форма Дирихле, если не выполнено условие $V \geqslant 0$.

С помощью интерполяции оператор $\mathfrak{D}^\alpha : \mathcal{D} \to L^2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ можно расширить на каждое из банаховых пространств $C_\infty(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ и $L^q(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$, $1 \leqslant q < \infty$, как минус марковский генератор. Для упрощения обозначений по-прежнему будем обозначать расширенный оператор через $\mathfrak{D}^\alpha$, указывая при необходимости его область определения.

Следующее утверждение непосредственно следует из p-адической версии классического неравенства Харди:

$$\frac{(n-2)^2}{4} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2}{\|x\|^2} dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx,$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\left(\Gamma_p \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right)^2 \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \frac{|f(x)|^2}{\|x\|_p^\alpha} dx \leqslant Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(f, f).$$

Здесь $\Gamma_p(z) = (1 - p^{z-1})(1 - p^{-z})^{-1}$ — p-адическая гамма-функция. Функция $z \to \Gamma_p(z)$ мероморфна в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma_p(z)\Gamma_p(1 - z) = 1.$$

Теорема 7. *Предположим, что* $0 < \alpha < 1$ *и почти всюду выполняется неравенство*

$$V_-(x) \leqslant \left(\Gamma_p \left(\frac{1+\alpha}{2} \right) \right)^2 \|x\|_p^{-\alpha}.$$

Тогда

$$\mathrm{Spec}(\mathfrak{D}^\alpha + V) \subseteq [0, \infty).$$

Чтобы обосновать теорему 7, докажем сначала следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть H — ограниченный снизу самосопряженный оператор, ассоциированный с квадратичной формой Q. Предположим, что существует функция* $0 < f \in \mathrm{dom}_{C_\infty(X)}(\mathfrak{D}^\alpha)$, *для которой почти всюду выполняется неравенство*

$$V(x) \geqslant -\frac{\mathfrak{D}^\alpha f(x)}{f(x)}.$$

Тогда форма Q неотрицательно определена; *в частности,* $\mathrm{Spec}(H) \subseteq [0, \infty)$.

Полагая

$$V(x) = -\frac{\mathfrak{D}^\alpha f(x)}{f(x)},$$

где $f(x) = \|x\|_p^\beta$ при некотором подходящем β, и применяя тождество

$$\mathfrak{D}^\alpha \|x\|_p^\beta = \frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta + 1 - \alpha)} \|x\|_p^{\beta - \alpha} \quad \forall \beta \neq \alpha,$$

получаем нужный результат.

2.4. Отрицательный спектр. Далее обсудим несколько результатов, дающих информацию об отрицательной части спектра оператора $H = \mathfrak{D}^\gamma + V$.

Теорема 9. *Пусть $V \in L^p(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ для некоторого $p > 1/\gamma$. Имеют место следующие факты:*

1. *Оператор $H = \mathfrak{D}^\gamma + V$ имеет существенный спектр, совпадающий со спектром оператора $\mathfrak{D}^\gamma$.*
2. *В частности, если H имеет отрицательный спектр, то он состоит из последовательности отрицательных собственных значений конечной кратности. Если эта последовательность бесконечна, то она сходится к нулю.*
3. *Предположим, что существует открытое множество $U \subset X$, на котором потенциал V отрицателен. Если E_λ — инфимум спектра оператора $H_\lambda = \mathfrak{D}^\gamma + \lambda V$, то $E_\lambda \leqslant 0$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E_\lambda = -\infty$.*

Доказательство. 1. По теореме 6, если число $c > 0$ достаточно велико, то оператор $H + cI$ неотрицателен и

$$\frac{1}{2}\left\|(\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{1/2}u\right\|_2 \leqslant \left\|(H + cI)^{1/2}u\right\|_2 \leqslant \frac{3}{2}\left\|(\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{1/2}u\right\|_2 \tag{2}$$

для всех $u \in \mathrm{dom}(Q_L)$. Положим $\Delta := (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{-1} - (H + cI)^{-1}$; тогда

$$\Delta = (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{-1}V(H + cI)^{-1} = ABCDE,$$

где

$$A = (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{-1/2}, \quad B = (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{-1/2}|V|^{1/2}, \quad C = \mathrm{sign}(V)\cdot B^*,$$
$$D = (\mathfrak{D}^\gamma + cI)^{1/2}(H + cI)^{-1/2}, \quad E = (H + cI)^{-1/2}.$$

Ясно, что A и E — ограниченные операторы в $L^2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$, B^* и C — компактные операторы в $L^2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$, а D — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$ согласно (2). Таким образом, являясь произведением компактного и ограниченного операторов, разность двух резольвент Δ является компактным оператором в L^2. Согласно теории возмущений линейных операторов, H и L имеют один и тот же существенный спектр (см., например [2]). Поскольку $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{D}^\gamma) = \mathrm{Spec}(\mathfrak{D}^\gamma) \subset [0,\infty]$, любая отрицательная точка спектра оператора H должна быть изолированным собственным значением конечной кратности. Любой предел отрицательных собственных значений лежит в существенном спектре и, следовательно, единственной возможной предельной точкой является нуль.

2. Неравенство $E_\lambda \leqslant 0$ при всех $\lambda \geqslant 0$ вытекает из следующих фактов:

$$\{0\} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{D}^\gamma), \quad \mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{D}^\gamma + \lambda V) = \mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{D}^\gamma).$$

Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что $\mathcal{D}$ является ядром для $Q_{\mathfrak{D}^\gamma} + Q_{\lambda V}$, так что

$$E_\lambda = \inf\Big\{Q_{\mathfrak{D}^\gamma}(u,u) + Q_{\lambda V}(u,u) : u \in \mathcal{D},\ \|u\|_2 = 1\Big\}. \tag{3}$$

Выберем функцию $u \in \mathcal{D}$. носитель которой лежит в множестве U; тогда

$$E_\lambda \leqslant Q_{\mathfrak{D}^\gamma}(u,u) + Q_{\lambda V}(u,u) = Q_{\mathfrak{D}^\gamma}(u,u) - \lambda\int\limits_U |V||u|^2 dm \to -\infty \quad \text{as } \lambda \to \infty. \qquad \square$$

Следующий пример показывает, что решающим вопросом существования отрицательных собственных значений в теореме 9 для всех $\lambda > 0$ является скорость, с которой потенциал $V(x)$ сходится к 0 при $\|x\|_\mathrm{p} \to \infty$.

Пример 10. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $H_\lambda = \mathfrak{D}^\alpha - \lambda V$, где

$$V(x) = \big(\|x\|_\mathrm{p} + 1\big)^{-\beta}$$

для некоторых $0 < \beta < 1$ и $\lambda > 0$.

1. Если $\beta \geqslant \alpha$, то применима теорема 9, так что существует положительный порог существования отрицательных собственных значений оператора H_λ.

2. Если $\beta > \alpha$, то количество отрицательных собственных значений H_λ с учетом их кратностей можно оценить следующим образом:

$$\mathrm{Neg}(H_\lambda) \leqslant c(\alpha,\beta)\lambda^{1/\alpha}.$$

Действительно, применяя результат С. Молчанова и Б. Вайнберга, получаем

$$\mathrm{Neg}(H_\lambda) \leqslant c(\alpha)\int\limits_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}} (\lambda V)^{1/\alpha} dm = c(\alpha)\lambda^{1/\alpha}\int\limits_{\mathbb{Q}_\mathrm{p}} \frac{dm(x)}{(\|x\|_\mathrm{p}+1)^{\beta/\alpha}} = c(\alpha,\beta)\lambda^{1/\alpha}.$$

3. Если $0 < \beta < \alpha$, то получается совершенно иной результат.

Теорема 11. *В обозначениях примера* 10, *предположим, что* $0 < \beta < \alpha$. *Тогда* H_λ *имеет непустой отрицательный спектр для всех* $\lambda > 0$.

Доказательство. Пусть $f := \mathfrak{D}^{-\alpha}1_B$, где B — шар с центром в нейтральном элементе, который будет указан позже. Пусть

$$f_T = \left(\frac{1_T}{m(T)} - \frac{1_{T'}}{m(T')}\right).$$

Функция f принадлежит $\mathrm{dom}(\mathfrak{D}^\alpha)$ и вычисления по формуле спектрального разрешения дают

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{-\alpha}1_B/m(B) &= \mathfrak{D}^{-\alpha}\sum_{T:B\subseteq T} f_T = \sum_{T:B\subseteq T}\mathfrak{D}^{-\alpha}f_T = \sum_{T:B\subseteq T}\left(\frac{m(T')}{\mathrm{p}}\right)^\alpha f_T = \\ &= \sum_{T:B\subseteq T} m(T)^\alpha\left(\frac{1_T}{m(T)} - \frac{1_{T'}}{m(T')}\right) = m(B)^{\alpha-1}\sum_{T:B\subseteq T}\left(\frac{m(T)}{m(B)}\right)^{\alpha-1}\left(1_T - \frac{1}{\mathrm{p}}1_{T'}\right).\end{aligned}$$

В частности, $W := (\mathfrak{D}^\alpha f)/f$ выражается следующим образом:

$$W = \frac{1_B}{\mathfrak{D}^{-\alpha}1_B} = \frac{\mathrm{p}-\mathrm{p}^\alpha}{\mathrm{p}-1}\frac{1_B}{m(B)^\alpha} = \frac{\mathrm{p}-\mathrm{p}^\alpha}{\mathrm{p}-1}\frac{1_B}{\mathrm{diam}(B)^\alpha}.$$

Если $\lambda > 0$ and $0 < \beta < \alpha$, то существует такой шар B достаточно большого диаметра $\mathrm{diam}(B)$, так что

$$W(x) < \frac{\lambda}{\left(\|x\|_\mathrm{p}+1\right)^\beta} = \lambda V(x)$$

для всех $x \in \mathbb{Q}_p$. Следовательно, поскольку f принадлежит $\mathrm{dom}(\mathfrak{D}^\alpha)$, получаем

$$Q_{H_\lambda}(f,f) = Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(f,f) - Q_{\lambda V}(f,f) < Q_{\mathfrak{D}^\alpha}(f,f) - Q_W(f,f) = (\mathfrak{D}^\alpha f,f) - (W\cdot f,f) = 0,$$

и требуемый результат следует из формул Рэлея—Ритца. □

3. Лемма о расщеплении. В некоторых случаях спектральные свойства оператора $H = L+V$ могут быть сведены к спектральным свойствам некоторого оператора $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{V}$, определенного на дискретном ультраметрическом пространстве $\mathcal{X}$, например, $\mathcal{X} = \{0,1,2,\dots\}$.

3.1. Соответствие $L \leftrightarrow \mathcal{L}$. Рассмотрим семейство диадических разбиений $\{\Pi_r\}$ множества $\mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}&\Pi_0 = \{0,1,2,\dots,n,\dots\} \text{ — простые точки},\\ &\Pi_1 = \{(0,1),\ (2,3),\ (4,5),\ (6,7),\ \dots\},\\ &\Pi_2 = \{(0,1,2,3),\ (4,5,6,7),\dots\}, \quad \dots\end{aligned}$$

и определим очевидным образом иерархическую структуру (ультраметрику, множество ультраметрических шаров и т. д.).

Определение 12. Пусть $\mathcal{I}_r = \{(i-1)2^r, \dots, i2^r - 1\}$ и $\mathcal{I}_r(x)$ — единственный ультраметрический шар $\mathcal{I}_r$, содержащий x. Иерархический лапласиан $\mathcal{L}$, ассоциированный с $\mathcal{X}$, определяется следующим образом:

$$(\mathcal{L}f)(x) = \sum_{r=1}^{\infty}(1-\varkappa)\varkappa^r \left(f(x) - \frac{1}{2^r}\sum_{y\in\mathcal{I}_r(x)} f(y)\right).$$

Оператор $\mathcal{L}$ является *ограниченным симметрическим оператором* с собственными значениями $\varkappa^r$, $r = 1, 2, \dots$. Соответствующие собственные функции являются дискретными версиями функций Хаара $\mathcal{X}_I$, определенных в непрерывном случае.

3.2. Соответствие $V \leftrightarrow \mathcal{V}$. Рассмотрим потенциал

$$V = \sum_{i=0}^{\infty}\sigma_i \mathbf{1}_{[i,i+1)}$$

и определим его дискретную версию

$$\mathcal{V} = \sum_{i=0}^{\infty}\sigma_i\delta_i.$$

Ясно, что оператор $\mathcal{V} : f \to \mathcal{V}\cdot f$ можно записать в виде

$$\mathcal{V}f = \sum_{i=0}^{\infty}\sigma_i(f,\delta_i)\delta_i.$$

3.3. Соответствие $H \leftrightarrow \mathcal{H}$. Наряду с оператором $Hf = Lf + Vf$ рассмотрим его дискретный аналог, а именно, оператор

$$\mathcal{H}f := \mathcal{L}f + \mathcal{V}f.$$

Для описания соответствия $H \leftrightarrow \mathcal{H}$ определим два подпространства в $L^2(0,\infty)$:

$$L^2_- = \operatorname{span}\{\mathcal{X}_{I_r} : r \leqslant 0\}, \quad L^2_+ = \operatorname{span}\{\mathbf{1}_{I_r} : r \geqslant 0\}.$$

Лемма 13 (лемма о расщеплении)**.** *Во введенных выше обозначениях имеем*:

(i) $L^2(0,\infty) = L^2_- \oplus L^2_+$;
(ii) *пространства* L^2_- *и* L^2_+ *редуцируют оператор* H;
(iii) *если* $I \subset [i, i+1)$ *имеет ранг* r, *то* $H\mathcal{X}_I = (\varkappa^r + \sigma_i)\mathcal{X}_I$;
(iv) *оператор* H, *ограниченный на* L^2_+, *можно отождествить с оператором* $\mathcal{H}$.

4. Возмущения ранга 1.

Предположим, что однородное ультраметрическое пространство с мерой (X, d, m) является *счетным.* В этом случае X можно отождествить со счетной абелевой группой G (например, со слабой суммой циклических групп), снабженной последовательностью $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ его малых подгрупп. Каждый шар в G — это множество вида $g + G_n$ для некоторых g и n.

Пусть L — однородный иерархический лапласиан и

$$Hf(x) = Lf(x) - \sigma(f,\delta_a)\delta_a(x),$$

возмущение ранга 1 оператора L.

Напомним теорему Cfqмона—Вольфа о чисто точечном спектре возмущения ранга 1 операторов с простым спектром.

Определение 14. Говорят, что самосопряженный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, имеет простой спектр, если существует такой вектор φ (циклический вектор), что $\{(A-\lambda)^{-1}\varphi \mid \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ — тотальное множество для $\mathcal{H}$.

4.1. Критерий Саймона—Вольфа. Пусть A — самосопряженный оператор с простым спектром в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а φ — циклический вектор. Согласно спектральной теореме пространство $\mathcal{H}$ унитарно эквивалентно пространству $L^2(\mathbb{R},\mu)$, так что A — это умножение на x с циклическим вектор $\varphi\equiv 1$. Пусть $H_\sigma = A-\sigma(\varphi,\cdot)\varphi$ — возмущение ранга 1 оператора A. Положим

$$F(x) := \int (x-y)^{-2} d\mu(y) = \lim_{\epsilon\to 0} \left\| (A-(x+i\epsilon)\mathrm{I})^{-1}\varphi \right\|^2.$$

Теорема 15. *Зафиксируем интервал (a,b). Следующие свойства эквивалентны*:

(i) H_σ *имеет только чисто точечный спектр в* (a,b) σ-*п.в.*;

(ii) $F(x)<\infty$ *для почти всех* $x\in(a,b)$.

В общем случае $\mathcal{H}_0 := \{(A-\lambda\mathrm{I})^{-1}\varphi \mid \operatorname{Im}\lambda>0\}$ — замкнутое подпространство; его ортогональное дополнение $(\mathcal{H}_0)^\perp$ является инвариантным пространством оператора H и $H=A$ на $(\mathcal{H}_0)^\perp$. Таким образом, переход от циклического случая к общему очевиден.

Функция $\varphi=\delta_a$ не является циклическим вектором для L, поскольку оператор L имеет много собственных функций с компактным носителем вне a.

Чтобы показать, что спектр оператора $H_\sigma = L-\sigma\delta_a$ является чисто точечным спектром для всех σ, воспользуемся тождеством типа Крейна

$$\mathcal{R}_V(\lambda,x,y) = \mathcal{R}(\lambda,x,y) + \frac{\sigma\mathcal{R}(\lambda,x,a)\mathcal{R}(\lambda,a,y)}{1-\sigma\mathcal{R}(\lambda,a,a)},$$

где

$$\mathcal{R}(\lambda,x,y) = (L-\lambda I)^{-1}\delta_y(x), \quad \mathcal{R}_V(\lambda,x,y) = (H_\sigma-\lambda I)^{-1}\delta_y(x)$$

резольвентные ядра.

Теорема 16. *Спектр* $\operatorname{Spec}(H_\sigma)$ *является чисто точечным спектром для всех* σ. *Он состоит не более чем из одного отрицательного собственного значения и счетного числа положительных собственных значений.*

При $\sigma>0$ *оператор* H_σ *имеет ровно одно отрицательное собственное значение*

$$\lambda_-^\sigma < 0 < \dots < \lambda_{k+1} < \lambda_k^\sigma < \lambda_k < \dots < \lambda_2 < \lambda_1^\sigma < \lambda_1$$

тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:

(i) *марковская полугруппа* $(e^{-tL})_{t>0}$ *рекуррентна, т.е.* $\mathcal{R}(0,a,a)=\infty$;

(ii) *марковская полугруппа* $(e^{-tL})_{t>0}$ *является переходной, т.е.* $\mathcal{R}(0,a,a)<\infty$ *и* $\mathcal{R}(0,a,a)>1/\sigma$.

Если $\sigma<0$, *то все собственные значения оператора* H_σ *положительны*:

$$0 < \dots < \lambda_{k+1} < \lambda_k^\sigma < \lambda_k < \dots < \lambda_2 < \lambda_1^\sigma < \lambda_1 < \lambda_+^\sigma.$$

Собственные значения λ_k *являются собственными значениями оператора* L. *Все собственные значения* λ_k *имеют бесконечные кратности и финитные собственные функции — собственные функции оператора* L, *носители которых не содержат* a.

Собственное значение λ_k^σ (*соответственно,* λ_-^σ, λ_+^σ) *является единственным решением уравнения*

$$\mathcal{R}(\lambda,a,a) = \frac{1}{\sigma}$$

на интервале $]\lambda_{k+1},\lambda_k[$ (*соответственно,* $]-\infty,0[$, $]\lambda_1,+\infty[$). *Каждое* λ_k^σ (*соответственно,* λ_-^σ, λ_+^σ) *имеет кратность* 1 *и собственную функцию с некомпактным носителем* $\psi_k(x)=\mathcal{R}(\lambda_k^\sigma,x,a)$ (*соответственно,* $\psi_-(x)=\mathcal{R}(\lambda_-^\sigma,x,a)$, $\psi_+(x)=\mathcal{R}(\lambda_+^\sigma,x,a)$).

5. Разреженные потенциалы. Предположим, что ультраметрическое пространство с мерой (X,d,m) является *счетно бесконечным.* Анализ конечномерных возмущений

$$V=\sum_{i=1}^n \sigma_i\delta_{a_i}$$

показывает, что в случае увеличения расстояний между положениями $\{a_i\}$ всплесков $V_i=-\sigma_i\delta_{a_i}$ их вклад в спектр близок к сумме вкладов отдельных всплесков V_i (каждый всплеск вносит по одному собственному значению в каждую лакуну $(\varkappa^{m+1}, \varkappa^m)$ спектра оператора L). Разработка этой идеи приводит к рассмотрению класса *разреженных потенциалов*

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \delta_{a_i},$$

где расстояния между точками $\{a_i : i = 1, 2, \dots\}$ образуют бесконечно большую последовательность. В классической спектральной теории эта идея восходит к Д. Б. Пирсону, С. Молчанову, А. Киселеву, Дж. Ласту, С. Саймону и Б. Саймону.

Введем следующие обозначения: $\mathcal{I}_*$ — множество предельных точек последовательности $\{\sigma_i\}$,

$$1/\mathcal{I}_* := \{1/\sigma_* : \sigma_* \in \mathcal{I}_*\}, \quad \mathcal{R}^{-1}(1/\mathcal{I}_*) := \{\lambda : \mathcal{R}(\lambda, a, a) \in 1/\mathcal{I}_*\}.$$

Теорема 17. *Предположим, что $\alpha < \sigma_i < \beta$ при некоторых $\alpha, \beta > 0$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\geqslant n} \sum_{\substack{j\geqslant n: \\ j\neq i}} \frac{1}{\mathrm{d}(a_i, a_j)} = 0. \tag{4}$$

Тогда

$$\mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(H) = \mathrm{Spec}(L) \cup \mathcal{R}^{-1}(1/\mathcal{I}_*). \tag{5}$$

6. Спектральная локализация. Теорема 17 не содержит информации об абсолютно непрерывной $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ac}}(H)$ и сингулярно непрерывной $\mathrm{Spec}_{\mathrm{sc}}(H)$ частях спектра $\mathrm{Spec}(H)$. Следующая теорема показывает, что при более строгих предположениях $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ac}}(H) = \varnothing$ и $\mathrm{Spec}_{\mathrm{sc}}(H) = \varnothing$, т.е. $\mathrm{Spec}(H)$ является чисто точечным спектром. Более того, собственные функции H экспоненциально затухают на бесконечности в некоторой ультраметрике (это так называемое *свойство спектральной локализации*).

Рассмотрим оператор типа Шрёдингера со случайным потенциалом

$$H^\omega = L + V^\omega, \quad \omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Здесь детерминированная часть L оператора H^ω есть иерархический лапласиан и

$$V^\omega = \sum_{a\in\mathcal{I}} \sigma(a, \omega) 1_{B(a)}$$

представляет собой случайный потенциал, определяемый семейством открытых шаров $\{B(a) : a \in \mathcal{I}\}$ и семейством $\{\sigma(a, \omega) : a \in \mathcal{I}\}$ независимых и одинаково распределенных случайных величин. Поскольку множество всех открытых шаров счетно, множество $\mathcal{I}$ местоположений не более чем счетно.

В дальнейшем будем предполагать, что все $B(a)$, $a \in \mathcal{I}$б принадлежат одному и тому же орициклу (т.е. имеют одинаковый диаметр). Тогда лемма о расщеплении сводит исследование множества $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(H^\omega)$ к случаю, когда ультраметрическое пространство с мерой (X, d, m) *счетно*, а потенциал V^ω имеет вид

$$V^\omega = \sum_{a\in\mathcal{I}} \sigma(a, \omega) \delta_a.$$

Если $\mathcal{I} = X$, то оператор

$$H^\omega = L + \sum_{a\in X} \sigma(a, \omega) \delta_a$$

имеет чисто точечный спектр для P-почти наверное ω при условии, что функция распределения $\mathcal{F}_\sigma(\tau)$ удовлетворяет некоторым условиям регулярности. Это утверждение (*теорема о спектральной локализации*) впервые появилось в работе Молчанова ($\mathcal{F}_\sigma(\tau)$ — распределение Коши), а затем в более общем виде в двух работах Кричевского. Доказательство по существу основано на *самоподобии* H^ω.

Пусть $\sigma_i(\omega) := \sigma(a_i, \omega)$. Предположим, что функция распределения $\mathcal{F}_\sigma(x)$ абсолютно непрерывна и имеет ограниченную плотность, поддерживаемую конечным интервалом $\mathcal{I}$. Далее предположим, что

$$V^\omega = \sum_i \sigma_i(\omega)\delta_{a_i}$$

является разреженным потенциалом, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\geqslant n} \sum_{\substack{j\geqslant n:\\ j\neq i}} \frac{1}{\mathrm{d}(a_i, a_j)} = 0.$$

Следующая теорема о спектральной локализации дополняет теорему 17 о структуре множества $\mathrm{Spec}(H^\omega)$. Доказательство этой теоремы основано на абстрактной форме теоремы Саймона—Вольфа для чисто точечного спектра, технике дробных моментов, лемме Молчанова о расцеплении и рассуждениях типа Бореля—Кантелли.

Теорема 18. *Спектр* $\mathrm{Spec}(H^\omega)$ *является чисто точечным* ω*-почти наверное* (*т.е.* $\mathrm{Spec}_{\mathrm{ac}}(H)$ *и* $\mathrm{Spec}_{\mathrm{sc}}(H)$ *пустые множества* ω*-почти наверное*) *при условии, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\geqslant n} \sum_{\substack{j\geqslant n:\\ j\neq i}} \frac{1}{\mathrm{d}(a_i, a_j)^r} = 0 \tag{6}$$

для некоторого достаточно малого r (*скажем,* $0 < r < 1/3$). *Кроме того,*

$$\mathrm{Spec}_{\mathrm{ess}}(H^\omega) = \mathrm{Spec}(L) \cup \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \ldots,$$

где $\mathcal{I}_k$ *— интервалы* $\{\lambda \in (\lambda_{k+1}, \lambda_k) : \mathcal{R}(\lambda, a, a) \in 1/\mathcal{I}\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиков А. Д., Григорьян А. А., Питтэ К., Вёсс В.* Изотропные марковские полугруппы на ультраметрических пространствах// Усп. мат. наук. — 2014. — *69*, № 4 (418). — С. 3–102.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
3. *Bendikov A. D.* Heat kernels for isotropic-like Markov generators on ultrametric spaces: A survey// p-Adic Num. Ultrametr. Anal. Appl. — 2018. — *10*, № 1. — P. 1–11.
4. *Bendikov A., Grigor'yan A., Molchanov S.* Hierarchical Schrödinger-type operators: the case of locally bounded potentials// in: Operator Theory and Harmonic Analysis (*Karapetyants A. N. et al.*, eds.). — Springer. — P. 2021.
5. *Bendikov A., Grigor'yan A., Molchanov S.* On the spectrum of the hierarchical Schrödinger-type operators/ `arXiv: 2006.02263v1 [math.SP].`
6. *Bendikov A., Grigor'yan A., Molchanov S.* On the spectrum of hierarchical Schrödinger-type operators: the case of potentials with local singularities/ `arXiv: 2006.01821v1 [math.SP].`
7. *Bendikov A., Pittet C., Sauer R.* Spectral distribution and L^2-isoperimetric profile of Laplace operators on groups// Math. Ann. — 2012. — *354*. — P. 43–72.
8. *Dyson F. J.* Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet// Commun. Math. Phys.. — *12*. — P. 1969.
9. *Molchanov S. A.* Hierarchical random matrices and operators. Application to Anderson model// in: Multidimensional Statistical Analysis and Theory of Random Matrices. — Berlin: de Gruyter, 1996. — P. 179–194.

Бендиков Александр Давидович
Institute of Mathematics, Wrocław University, Wrocław, Poland
E-mail: `bendikov@math.uni.wroc.pl`