ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 89–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-89-96

УДК 519.1, 519.2

ДВЕ СХЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ С ЭФФЕКТОМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

© 2023 г. **Н. А. КОЛОКОЛЬНИКОВА**

Аннотация. Описаны два варианта урновой схемы с эффектом последействия. С помощью А- и Ф-схем последовательных испытаний найден явный вид распределения числа вынутых шаров определенного цвета, получены числовые характеристики, доказаны предельные теоремы.

Ключевые слова: урновая схема, А-схема последовательных испытаний, Ф-схема последовательных испытаний, вероятность, распределение, предельная теорема.

TWO SEQUENTIAL TEST SCHEMES WITH AFTEREFFECT

© 2023 **N. A. KOLOKOLNIKOVA**

Abstract. Two variants of the urn scheme with aftereffect are described. Using A- and Φ-schemes of sequential tests, we find an explicit distribution of the number of removed balls of a certain color, obtain numerical characteristics of the distribution, and prove limit theorems.

Keywords and phrases: urn scheme, A-scheme of sequential tests, Φ-scheme of sequential tests, probability, distribution, limit theorem.

AMS Subject Classification: 60E05, 60C05, 60E10

1. Введение. При проведении последовательных испытаний (наблюдений) достаточно часто приходится сталкиваться с так называеым эффектом последействия. Например, если рассматривать испытания типа «успех-неуспех», то встречаются ситуации, когда после появления успеха вероятность следующего успеха возрастает, а после неуспеха — уменьшается. Иногда происходит наоборот: после успеха вероятность следующего успеха уменьшается; встречаются и другие варианты. Различные схемы проведения испытаний могут быть использованы при решении задач о случайных размещениях (см. [2, 3, 6, 10, 13]), при построении различных моделей, например, вероятностных моделей теории страхования (см. [7]) и др. Среди большого количества урновых схем, используемых в дискретной терии вероятностей, важное место занимают схемы, в которых наблюдается эффект последействия как эффект «заражения». Одна из подобных схем — урновая схема Маркова—Пойа (см. [4, 8, 11]). В книге В. Феллера [14] отмечено, что данная схема может быть использована при описании явлений, подобных эпидемиям. В этой схеме предполагается, что урна содержит шары двух цветов. Случайным образом шары извлекаются по одному, причём каждый вынутый шар возвращается в исходную урну с определённым числом шаров того же цвета. Иными словами, если рассматривать некоторую популяцию, в которой имеются есть заражённые индивиды, то эти индивиды будут заражать здоровых, так что количество заражённых будет возрастать. Очевидным недостатком использования схемы Маркова—Пойа для построения моделей «типа эпидемий» является то, что количество шаров в урне возрастает с каждым испытанием, причём шары добавляются после извлечения шара любого цвета.

В данной работе предлагаются две урновые схемы «с перекрашиванием». В первой из этих схем общее количество шаров в урне остаётся неизменным, но после извлечения шара заданного цвета, например, белого, происходит «перекрашивание» определенного числа шаров этого цвета. Это можно интерпретировать как заражение определенного числа индивидов. При извлечении шара другого цвета «перекрашивания» не происходит. Кроме того, рассматривается схема «с перекрашиванием», в которой общее число шаров возрастает на единицу при каждом извлечении шара.

Для описания вероятностных распределений используются специальные комбинаторные схемы: так называемые A- и Ф-схемы последовательных испытаний. Применение этих схем позволяет записать в явном виде возникающие распределения, найти их числовые характеристики и исследовать асимптотику (см. [1, 5, 9]). Рассмотрим упомянутые схемы.

2. A-схема последовательных испытаний. Предположим, что проводятся испытания типа «успех-неуспех», и после каждого успеха вероятность следующего успеха (а значит, и неуспеха) может меняться. После неуспеха изменения вероятностей не происходит. Такая схема называется A-схемой последовательных испытаний.

Пусть ξ_n — число успехов в n испытаниях, проводимых в условиях A-схемы, p_i — вероятность $(i+1)$-го успеха, т.е.

$$p_i = P\big\{\xi_{n+1} = i+1 \bigm| \xi_n = i\big\}, \quad i = \overline{0,n.}$$

Введем обозначение

$$q_i = P\big\{\xi_{n+1} = i \bigm| \xi_n = i\big\} = 1 - p_i.$$

Теорема 1 (см. [1]). *Если последовательные испытания проводятся в условиях A-схемы, то*

$$P\{\xi_n = 0\} = A^n_{0,}\ , \quad P\{\xi_n = k\} = A^n_k \cdot \prod_{i=0}^{k-1} p_i, \quad k = \overline{1,n}, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{1}$$

Здесь A^n_k — обобщенные числа Стирлинга 2-го рода, построенные на базе $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$. Эти числа могут быть определены рекуррентным соотношением

$$A^n_k = A^{n-1}_{k-1} + q_k A^{n-1}_k, \quad n = \overline{1,\infty}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Кроме того, положим

$$A^n_n = 1,\ n = \overline{0,\infty}; \qquad A^n_k = 0,\ \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

3. Ф-схема последовательных испытаний. Ф-Схема последовательных испытаний такова. Проводятся испытания типа «успех-неуспех». Обозначим через ξ_n число успехов в n испытаниях. Предполагаем, что условные вероятности успехов имеют такую структуру:

$$p_{ni} = P\big\{\xi_n = i+1 \bigm| \xi_{n-1} = i\big\} = \alpha_{n-1}\beta_i,$$
$$q_{ni} = 1 - p_{ni} = P\big\{\xi_n = i \bigm| \xi_{n-1} = i\big\} = \alpha_{n-1}(\delta_{n-1} + \gamma_i), \quad i = \overline{0,n-1}, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Теорема 2 (см. [1]). *Если последовательные испытания проводятся в условиях Ф-схемы, то распределение случайной величины ξ_n может быть записано в виде*

$$\begin{aligned} P\{\xi_n = 0\} &= \Phi^n_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i, \\ P\{\xi_n = k\} &= \Phi^n_k \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \beta_j, \quad k = \overline{1,n}, \quad n = \overline{1,\infty}. \end{aligned} \tag{2}$$

Распределение (2) называется Ф-распределением.

Комбинаторные числа Φ^n_k, участвующие в распределении (2), могут быть представлены в виде

$$\Phi^n_k = \sum_{i=k}^{n} B^n_i A^i_k,$$

где B_i^n — обобщённые числа Стирлинга 1-го рода, построенные на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$, A_k^i — обобщённые числа Стирлинга 2-го рода, построенные на базе $\{\gamma_i\}_{i=0}^{k-1}$. Имеем

$$\Phi_n^n = 1,\ \text{если}\ n = \overline{0,\infty}, \qquad \Phi_k^n = 0,\ \text{если}\ n < k\ \text{или}\ k < 0. \tag{3}$$

Заметим, что числа B_i^n, построенные строящиеся на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$, могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения

$$B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \alpha_{n-1} B_k^{n-1}, \quad n = \overline{1,\infty}, \quad k = \overline{0,n},$$

а также дополнительных условий

$$B_n^n = 1,\ \text{если}\ n = \overline{0,\infty}, \qquad B_k^n = 0,\ \text{если}\ n < k\ \text{или}\ k < 0.$$

Рассмотрим следующий вариант Ф-распределения. Пусть $\beta_k = C + k$, $\gamma_k = -k$, где C, как и ранее, — натуральное число. Тогда

$$\delta_{n-1} = \frac{1}{\alpha_{n-1}} + C,$$

а распределение (2) запишется в виде

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i [C]_k, \quad k = \overline{0,n}, \quad n = \overline{1,\infty}, \tag{4}$$

где

$$[C]_0 = 1, \quad [C]_k = \prod_{j=0}^{k-1} (C + j), \quad k \geqslant 1;$$

Φ_k^n — комбинаторные числа, удовлетворяющие рекуррентной формуле

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - C + k \right) \Phi_k^{n-1}, \quad k = \overline{0,n}, \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{5}$$

При этом, естественно, выполняется условие (3).

Пример 1 (см. [8]). Рассмотрим упомянутую выше урновую схему Маркова—Пойа. Урна содержит a белых и b чёрных шаров. Произвольно вынимается шар, фиксируется его цвет, а потом шар возвращается в урну вместе с d дополнительными шарами того же цвета. Описанная процедура осуществляется последовательно n раз.

Пусть ξ_n — число вынутых белых шаров. Считая успехом при каждом испытании извлечение белого шара, а неуспехом — черного, имеем

$$p_{nk} = \frac{a + kd}{a + b + (n-1)d}, \quad q_{nk} = \frac{b + (n-1-k)d}{a + b + (n-1)d}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Полагаем

$$\alpha_{n-1} = \frac{d}{a + b + (n-1)d}, \quad \beta_k = \frac{a}{d} + k, \quad \delta_{n-1} = \frac{b}{d} + n - 1, \quad \gamma_k = -k.$$

Видим, что структура элементов α_{n-1}, β_k, δ_{n-1}, γ_k соответствует рассматриваемому варианту Ф-распределения, $C = a/d$. Формула (4) принимает вид

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \frac{[a/d]_k}{[(a+b)/d]_n}, \quad k = \overline{0,n}, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Итак, распределение Маркова—Пойа является частным случаем указанного варианта Ф-распределения.

3.1. Моменты Ф*-распределения.* Будем использовать производящую функцию распределения (4):

$$\Phi_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \sum_{k=0}^{n} \Phi_k^n [C]_k x^k. \tag{6}$$

Теорема 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ факториальный момент порядка $1 \leqslant r \leqslant n$ имеет вид*

$$m_r = \Phi_n^{(r)}(1) = r![C]_r \sum_{i=r}^{n} a_r^i B_{n-i}^n, \tag{7}$$

где $\Phi_n^{(r)}(x)$ — производная r-го порядка от производящей функции (6), $[C]_k$ — k-я возрастающая факториальная степень, a_r^i — числа Стирлинга 2-го рода, B_{n-i}^n — обобщённые числа Стирлинга 1-го рода, построенные на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$.

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 1$ имеем очевидное равенство

$$m_1 = \Phi_1'(1) = \alpha_0 C = 1!\,[C]_1 \alpha_0.$$

Предположим, что равенство (6) выполняется при некотором натуральном $n \geqslant 1$ и всех факториальных моментов порядка $\leqslant r$. Тогда

$$\begin{aligned}
m_r = m_r(n+1) = \Phi_{n+1}^{(r)}(1) = (1 + r\alpha_n)\Phi_n^{(r)}(1) + r\alpha_n(C + r - 1)\Phi_n^{(r-1)}(1) = \\
= (1 + r\alpha_n)\, r!\,[C]_r \sum_{i=r}^{n} a_r^i B_{n-i}^n + r\alpha_n(C + r - 1)(r-1)!\,[C]_r \sum_{i=r-1}^{n} a_{r-1}^i B_{n-i}^n = \\
= r!\,[C]_r \left(\sum_{i=r}^{n} a_r^i B_{n-i}^n + \alpha_n \sum_{i=r}^{n+1} a_r^i B_{n-i+1}^n \right) = r!\,[C]_r \left(\sum_{i=r}^{n+1} a_r^i (B_{n-i}^n + \alpha_n B_{n-i+1}^n) \right) = \\
= r!\,[C]_r \sum_{i=r}^{n+1} a_r^i B_{n-i+1}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Если $r = n + 1$, то

$$m_{n+1} = m_{n+1}(n+1) = \Phi_{n+1}^{(n+1)}(1) = (n+1)! \prod_{i=0}^{n} \alpha_i\, [C]_{n+1} \Phi_{n+1}^{n+1} = (n+1)!\,[C]_{n+1} B_0^{n+1}.$$

Теорема доказана. □

Используя (7), получим формулы для математического ожидания и дисперсии величины ξ_n:

$$E\xi_n = \Phi_n'(1) = C \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - 1 \right), \quad D\xi_n = \Phi_n''(1) + \Phi_n'(1) - (\Phi_n'(1))^2.$$

На основании формулы (6),

$$\begin{aligned}
D\xi_n = C(C+1) \left(1 - 2 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) + \prod_{i=0}^{n-1} (1 + 2\alpha_i) \right) + C \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - 1 \right) - \\
- C^2 \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - 1 \right)^2 = C(C+1) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + 2\alpha_i) + C \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - C^2 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i)^2.
\end{aligned}$$

Перейдем теперь к рассмотрению урновых схем «с перекрашиванием».

4. Урновая схема с постоянным общим числом шаров. Урна содержит M белых и M черных шаров. Последовательно по одному шары извлекаются из урны. Извлечение каждого шара равновозможно. Если был вынут белый шар, то его возвращают в урну и при этом d черных шаров перекрашивают в белый цвет; если же был вынут черный шар, то его возвращают в урну, не изменяя цветов находящихся в урне шаров.

Предположим, что произведено n извлечений шаров из урны. Пусть ξ_n — число извлеченных белых шаров. Найдем распределение этой величины, её числовые характеристики и укажем некоторые предельные распределения.

Для нахождения явного вида распределения величины ξ_n будет использована описанная выше А-схема последовательных испытаний.

При решении этой задачи используем схему испытаний типа «успех-неуспех». Считаем успехом извлечение белого шара, неуспехом — черного. С учетом принятых обозначений,

$$p_i = \frac{M+id}{M+N}, \quad q_i = 1 - \frac{M+id}{M+N} = \frac{N-id}{M+N}.$$

Следовательно, в силу формул (1),

$$\begin{aligned} P\{\xi_n = 0\} &= A_0^n = q_0^n = \left(\frac{N}{M+N}\right)^n, \qquad && n = \overline{1,\infty}, \\ P\{\xi_n = k\} &= A_k^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{M+id}{M+N} = \frac{[M]_{kd}}{(M+N)^n} A_k^n, \qquad && k = \overline{1,n}, \quad n = \overline{1,\infty}. \end{aligned} \tag{8}$$

Обобщенные числа Стирлинга 2-го рода A_k^n строятся на базе $\left\{\dfrac{N-id}{M+N}\right\}_{i=0}^{\min(n,[N/d])}$, где $[N/d]$ — целая часть числа N/d и

$$[M]_{kd} = M(M+d)(M+2d)\dots(M+(k-1)d).$$

Для нахождения числовых характеристик будем использовать производящую функцию распределения (8):

$$P_n(x) = \frac{1}{(M+N)^n} \sum_{k=0}^{n} [M]_{kd} A_k^n x^k. \tag{9}$$

Найдем факториальные моменты этого распределения.

Теорема 4. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ факториальный момент порядка $1 \leqslant r \leqslant n$ имеет вид*

$$m_r = P_n^{(r)}(1) = r! \left[\frac{M}{d}\right]_r \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{d}{M+N}\right)^i a_r^i.$$

где a_r^i — числа Стирлинга 2-го рода.

Следствие 1. *Математическое ожидание величины ξ_n имеет вид*

$$E\xi_n = \frac{M}{d}\left(\left(1 + \frac{d}{M+N}\right)^n - 1\right).$$

Следствие 2. *Дисперсия величины ξ_n находится по формуле*

$$D\xi_n = \frac{M\,(M+d)}{d^2}\left(1 + \frac{2d}{M+N}\right)^n + \frac{M}{d}\left(1 + \frac{d}{M+N}\right)^n - \frac{M^2}{d^2}\left(1 + \frac{d}{M+N}\right)^{2n}.$$

Приведем некоторые предельные теоремы, для доказательства которых были использованы результаты работы [9]. Считаем, что $d = \mathrm{const}$.

Теорема 5. *Если при $n,\ M \to \infty$ выполняются условия*

$$\frac{n}{M+N} \to 0, \quad \frac{Mn}{M+N} \to \lambda < \infty,$$

то

$$P\{\xi_n = k\} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Теорема 6. *Если при $n, M, N \to \infty$ выполняются условия*

$$\frac{n^2}{M} \to 0, \quad \frac{Nn^2}{M} \to \mu < \infty,$$

то

$$P\{n - \xi_n = k\} \to \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Теорема 7. *Если при $n, M, N \to \infty$, выполняются условия*

$$\frac{n}{M+N} \to 0, \quad \frac{N}{M} \to 0, \quad \frac{n^2}{M+N} \to \infty,$$

то равномерно по $x \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость

$$P\left\{\frac{\xi_n - E\xi_n}{\sqrt{D\xi_n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

Заметим, что при доказательстве последней теоремы была использована следующая теорема, доказанная Бендером (см. [15]) и процитированная в [12, с. 57].

Теорема 8. *Если производящая функция $P_n(x)$ случайной величины ξ_n при $n \to \infty$ удовлетворяет равенству*

$$P_n(x) = x^{\nu_n} e^{h_n(x)}(1 + o(1))),$$

где функция $h_n(x)$ обладает первыми тремя непрерывными производными в $W = [1-\theta,\ 1+\theta]$, $\theta > 0$, $\{\nu_n\}$ — числовая последовательность и $o(1) \to 0$, $h_n(1) \to 0$ при $n \to \infty$,

$$\frac{h_n'''(x)}{\bigl(h_n'(1) + h_n''(1)\bigr)^{3/2}} \to 0$$

равномерно для всех $x \in W$ и $\bigl(h_n'(1) + h_n''(1)\bigr)^{3/2} \to \infty$, то случайная величина

$$\frac{\xi_n - \nu_n - h_n'(1)}{\bigl(h_n'(1) + h_n''(1)\bigr)^{1/2}}$$

в пределе имеет нормальное распределение.

5. Урновая схема с увеличивающимся числом шаров. Урна содержит M белых и M черных шаров. Последовательно по одному шары извлекаются из урны. Извлечение любого шара равновозможно. Если был вынут белый шар, то его возвращают в урну и при этом d черных шаров перекрашивают в белый цвет; если же был вынут черный шар, то его возвращают в урну, не меняя цветов находящихся там шаров, и добавляют в урну один черный шар. Таким образом, общее число шаров в урне увеличивается на единицу после каждого испытания.

Пусть ξ_n — число извлеченных белых шаров в n-м испытании. Считаем успехом извлечение белого шара, а неуспехом — черного. Тогда условная вероятность успеха в n-м испытании, если до этого реализовалось i успехов, имеет вид

$$p_{ni} = P\bigl\{\xi_n = i+1 \bigm| \xi_{n-1} = i\bigr\} = \frac{M + id}{M + N + n - 1},$$

а соответствующая вероятность неуспеха —

$$q_{ni} = P\bigl\{\xi_n = i \bigm| \xi_{n-1} = i\bigr\} = \frac{N + n - 1 - id}{M + N + n - 1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Введем обозначения

$$\alpha_{n-1} = \frac{d}{M + N + n - 1}, \quad \beta_i = \frac{M}{d} + i, \quad \delta_{n-1} = \frac{M + n - 1}{d}, \quad \gamma_i = -i.$$

Тогда, на основании изложенного в п. 3,

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left[\frac{M}{d}\right]_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty}, \tag{10}$$

где

$$\left[\frac{M}{d}\right]_0 = 1, \quad \left[\frac{M}{d}\right]_k = \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{M}{d} + j\right), \quad k \geqslant 1;$$

Φ_k^n — комбинаторные числа, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - \frac{M}{d} + k\right) \Phi_k^{n-1}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

На основании теоремы 3, можем утверждать, что для случайной величины ξ_n, имеющей распределение (10), факториальный момент порядка r определяется формулой

$$m_r = r! \left[\frac{M}{d}\right]_r \sum_{i=r}^{n} a_r^i B_{n-i}^n, \quad 1 \leqslant r \leqslant n, \tag{11}$$

где B_{n-i}^n — обобщённые числа Стирлинга 1-го рода, построенные на базе $\{d/(M+N+i)\}_{i=0}^{n-1}$.

Используя формулу (11), приходим к следующему утверждению.

Теорема 9. *Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ_n задаются соответственно формулами*

$$E\xi_n = \frac{M}{d}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(1+\alpha_i) - 1\right),$$

$$D\xi_n = \frac{M}{d}\left(\frac{M}{d}+1\right)\prod_{i=0}^{n-1}(1+2\alpha_i) + \frac{M}{d}\prod_{i=0}^{n-1}(1+\alpha_i) - \left(\frac{M}{d}\right)^2 \prod_{i=0}^{n-1}(1+\alpha_i)^2,$$

где $\alpha_i = d/(M+N+i)$.

Следует заметить, что достаточные условия для сходимости распределения (10) к нормальному те же, что в теореме 7. Также справедлива теорема 5. А вот утверждение теоремы 6 в данном случае места не имеет.

Таким образом, рассмотрены два варианта размещения шаров, позволяющие использовать схемы последовательных испытаний, если эти испытания проводятся в переменных условиях.

Замечание 1. Условия, описанные в п. 5, могут быть обобщены. Использованный метод применим и в том случае, когда число добавляемых шаров различно в каждый момент времени (определенным образом зависит от номера испытания). Тогда также применима Ф-схема последовательных испытаний. Отличие будет лишь в виде последовательности $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В., Платонов М. Л.* Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. — Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
2. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. А.* Процесс последовательного заполнения ячеек в схеме размещения частиц как марковская цепь// Обозр. прикл. пром. мат. — 1996. — *3*, № 4. — С. 512–529.
3. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. А.* Исследование процесса заполнения ячеек в схеме размещения с отражением// Дискр. мат. — 1994. — *6*, № 1. — С. 40–52.
4. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Об урновой схеме Маркова—Пойа: от 1917 г. до наших дней// Обозр. прикл. пром. мат. — 1996. — *3*, № 4. — С. 484–511.
5. *Имыхелова В. П., Колокольникова Н. А.* Одна схема случайного размещения частиц («скользящий комплект»)// в кн.: Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа. — Изд-во Иркут. ун-та, 1997. — С. 43–53.

6. *Колокольникова Н. А., Котоманова Д. В.* А-схема последовательных испытаний и случайные размещения с отражением// в кн.: Труды ИМЭИ ИГУ. Математика и информатика. Т. 1. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2011. — С. 69–72.
7. *Колокольникова Н. А.* Вероятностные модели теории страхования, использующие схемы случайного размещения частиц// в кн.: Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. — Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2015. — С. 59–65.
8. *Колокольникова Н. А.* Одно обобщение урновой схемы Маркова—Пойа// в кн.: Прикладные проблемы дискретного анализа. — Изд-во Иркут. ун-та, 2021. — С. 59–65.
9. *Колокольникова Н. А.* Предельные теоремы для числа успехов в одной схеме зависимых испытаний. Деп. № 649. В92. — М.: ВИНИТИ РАН, 1992.
10. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. — М.: Наука, 1975.
11. *Марков А. А.* О некоторых предельных формах исчисления вероятностей// Изв. АН. — 1917. — *11*, № 3. — С. 177–186.
12. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — Наука, 1978.
13. *Севастьянов Б. А.* Об одной схеме зависимых размещений// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. — 1981. — № 2. — С. 37–41.
14. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — Мир, 1984.
15. *Bender E. A.* Central and local limit theorems applied to asimptotic enumeration// J. Comb. Theory. — 1973. — *15*, № 1. — P. 91–111.

Колокольникова Наталья Арсеньевна
Иркутский государственный университет
E-mail: k_n_a_05@mail.ru