



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 19–27
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-19-27

УДК 517.977

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© 2023 г. А. С. БУЛДАЕВ, И. Д. КАЗЬМИН

Аннотация. В классе билинейных управляемых систем с квадратичным по состоянию критерием оптимальности рассматриваются новые методы поиска экстремальных управлений. Предлагаемый подход основывается на специальных формах принципа максимума, имеющих вид операторных задач о неподвижной точке в пространстве управлений, которые эквивалентны известному условию принципа максимума в рассматриваемом линейно-квадратичном классе задач оптимального управления. Рассматриваемые операторные формы условий оптимальности позволяют конструировать новые итерационные алгоритмы для поиска управлений, удовлетворяющих условию принципа максимума. Сравнительная эффективность предлагаемых операторных методов иллюстрируется численными расчетами известной модельной задачи оптимизации квантовой системы, характеризующейся особыми экстремальными управлениями.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимального управления, экстремальное управление, неподвижная точка, итерационный алгоритм.

OPERATOR METHODS OF THE SEARCH FOR EXTREMAL CONTROLS IN LINEAR-QUADRATIC OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© 2023 A. S. BULDAEV, I. D. KAZMIN

ABSTRACT. In the class of bilinear control systems with a state-quadratic optimality criterion, new methods of the search for extremal controls are considered. The approach proposed is based on special versions of the maximum principle that have the form of operator fixed-point problems in the space of controls, which are equivalent to the well-known condition of the maximum principle in the class of linear-quadratic optimal control problems. The operator forms of optimality conditions allows one to construct new iterative algorithms for finding controls satisfy the maximum principle. The comparative efficiency of the operator methods is illustrated by numerical simulations of a well-known model optimization problem for a quantum system characterized by degenerate extremal controls.

Keywords and phrases: linear-quadratic optimal control problem, extremal control, fixed point, iterative algorithm.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. Класс линейно-квадратичных задач оптимального управления по-прежнему является актуальным как в теории оптимизации управляемых систем, так и для практики моделирования управляемых процессов в различных приложениях. Математические постановки линейно-квадратичных задач оптимального управления рассматривались во многих работах, в частности, в [5, 7, 8].

Традиционным подходом к решению рассматриваемого класса задач является поиск экстремального управления, т. е. удовлетворяющего известному принципу максимума (см. [4, 6]). При этом возникают существенные трудности при поиске особых экстремальных управлений [4], характеризующихся существованием интервалов времени ненулевой меры, на которых условию принципа максимума удовлетворяет любое допустимое управление.

В [6] в классе линейно-квадратичных задач разработаны эффективные методы улучшения управления, которые основаны на решении специальных сопряженных и фазовых задач Коши в пространстве состояний. В данной работе разрабатываются и апробируются модельно-ориентированные алгоритмы поиска экстремальных управлений в классе линейно-квадратичных задач, основанные на специальных операторных условиях принципа максимума в форме задач о неподвижной точке в пространстве управлений, предложенных в [3] в общем классе нелинейных задач оптимального управления.

2. Операторные методы принципа максимума. Рассматривается класс линейно-квадратичных задач оптимального управления:

$$\Phi(u) = \langle x(t_1), Lx(t_1) \rangle + \langle c, x(t_1) \rangle \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в котором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния системы, L — вещественная симметричная матрица, c — вещественный вектор, функция $f(x, u, t)$ линейна по переменной x , линейна по переменной u и непрерывна по переменной t на множестве $\mathbb{R}^n \times U \times T$. Допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, является кусочно непрерывной функцией со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$. Множество V обозначает соответствующее множество допустимых управлений. Временной интервал T и начальное состояние x^0 заданы. Используется общее обозначение билинейной функции $f(x, u, t)$ для удобства и простоты представления конструкций рассматриваемых операторных методов принципа максимума.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной ψ в задаче (1), (2) представляется в следующей форме:

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t) \rangle, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Стандартная сопряженная система принимает вид:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -2Lx(t_1) - c. \quad (3)$$

Обозначим $x(t, v)$, $t \in T$, — решение системы (2) для допустимого управления $v \in V$; $\psi(t, v)$, $t \in T$, — решение стандартной сопряженной системы (3) при $x(t) = x(t, v)$, $u(t) = v(t)$.

Известное (см. [4, 6]) необходимое условие оптимальности (принцип максимума) для управления $u \in V$ в классе линейно-квадратичных задач (1), (2) можно представить в следующей форме:

$$u(t) = \arg \max_{w \in U} \langle H_u(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), w \rangle, \quad t \in T. \quad (4)$$

С помощью отображения u^* , определяемого соотношением

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} H(\psi, x, w, t), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T,$$

условие (4) можно записать в следующем виде:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T.$$

В рассматриваемом классе задач условие (4) можно представить в эквивалентной форме с параметром $\alpha > 0$ на основе операции проектирования:

$$u(t) = P_U \left(u(t) + \alpha H_u(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) \right), \quad t \in T. \quad (5)$$

Определим отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ на основе соотношения

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha H_u(\psi, x, w, t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad w \in U, \quad t \in T.$$

С помощью отображения u^α принцип максимума в проекционной форме (5) можно записать следующим образом:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T.$$

Особые экстремальные управления определяются наличием особого интервала времени $[\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $H_u(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t) \equiv 0$.

В соответствии с [3] определим отображения $X, \Psi, V^*, V^\alpha, \alpha > 0$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X(u) &= x, \quad u \in V, \quad x(t) = x(t, u), \quad t \in T; \quad \Psi(u) = \psi, \quad u \in V, \quad \psi(t) = \psi(t, u), \quad t \in T; \\ V^*(\psi, x) &= v^*, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v^*(t) = u^*(\psi(t), x(t), t), \quad t \in T; \\ V^\alpha(\psi, x, u) &= v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad u \in V, \quad v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \end{aligned}$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций.

Рассмотрим оператор

$$X^*(\psi) = x, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad t \in T,$$

где $x(t), t \in T$, — решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(\psi(t), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Введем оператор

$$\Psi^\alpha(x, u) = \psi^\alpha, \quad x \in C(T), \quad u \in V, \quad \psi^\alpha \in C(T), \quad \alpha > 0$$

где $\psi^\alpha(t), t \in T$, — решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -2Lx(t_1) - c.$$

В соответствии с [3] следующие операторные задачи о неподвижной точке являются эквивалентными условию принципа максимума (4):

$$u = V^*(\Psi(u), X^*(\Psi(u))), \quad (6)$$

$$u = V^*(\Psi^*(X(u)), X(u)), \quad (7)$$

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u), \quad (8)$$

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u). \quad (9)$$

Для поиска экстремальных управлений рассмотрим соответствующие итерационные процессы метода простой итерации с индексом $k \geq 0$ для численного решения задач о неподвижной точке (6)–(9):

$$u^{k+1} = V^*(\Psi(u^k), X^*(\Psi(u^k))), \quad (10)$$

$$u^{k+1} = V^*(\Psi^*(X(u^k)), X(u^k)), \quad (11)$$

$$u^{k+1} = V^\alpha(\Psi(u^k), X^\alpha(\Psi(u^k), u^k), u^k), \quad (12)$$

$$u^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u^k), u^k), X(u^k), u^k). \quad (13)$$

Процесс (10) в поточечной форме имеет вид

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, u^k), x(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t), t \in T$, — решение специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(\psi(t, u^k), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Процесс (10) можно также записать в эквивалентной неявной поточечной форме:

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, u^k), x(t, u^{k+1}), t), \quad t \in T.$$

Процесс (11) в поточечной форме имеет вид

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t), x(t, u^k), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решение специальной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x\left(\psi(t), x(t, u^k), u^*(\psi(t), x(t, u^k), t), t\right), \quad \psi(t_1) = -2Lx(t_1, u^k) - c.$$

Процесс (12) в поточечной форме принимает вид

$$u^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, u^k), x(t), u^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, — решение специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u^\alpha(\psi(t, u^k), x(t), u^k(t), t), t\right), \quad x(t_0) = x^0.$$

Процесс (12) можно также записать в неявной поточечной форме:

$$u^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, u^k), x(t, u^{k+1}), u^k(t), t), \quad t \in T.$$

Процесс (13) в поточечной форме можно представить в виде

$$u^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u^k), u^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решение специальной сопряженной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x\left(\psi(t), x(t, u^k), u^\alpha(\psi(t), x(t, u^k), u^k(t), t), t\right), \quad \psi(t_1) = -2Lx(t_1, u^k) - c.$$

В процессах (12) и (13) параметр проектирования $\alpha > 0$ фиксируется и подбирается экспериментально для обеспечения сходимости процессов. Анализ сходимости итерационных процессов (10)–(13) можно исследовать на основе известного принципа сжимающих отображений.

Отметим, что в классе билинейных задач оптимального управления, в которых матрица $L = 0$, процессы (11) и (13) в поточечной форме можно соответственно также записать в неявном виде:

$$\begin{aligned} u^{k+1}(t) &= u^*(\psi(t, u^{k+1}), x(t, u^k), t), & t \in T, \\ u^{k+1}(t) &= u^\alpha(\psi(t, u^{k+1}), x(t, u^k), u^k(t), t), & t \in T. \end{aligned}$$

При этом в указанном классе билинейных задач оптимального управления процессы (10) и (11) становятся эквивалентными известным (см. [6]) итерационным процессам x -метода нелокального улучшения управления и ψ -метода нелокального улучшения управления соответственно. Проекционные процессы (12) и (13) также становятся эквивалентными известным (см. [6]) проекционным нелокальным методам улучшения управления.

В классе задач (1), (2) с матрицей $L \neq 0$ итерационные процессы (10)–(13) являются новыми для поиска экстремальных управлений. При этом на каждой итерации этих процессов улучшение управления не гарантируется.

Трудоемкость реализации одной итерации процессов (10)–(13) составляет две задачи Коши. Последовательные приближения итерационных процессов (10)–(13) характеризуются нелокальностью приближений управления и отсутствием трудоемкой операции варьирования управления для достижения строгого улучшения по функционалу на каждой итерации. Указанные свойства итерационных процессов (10)–(13) являются важными для повышения эффективности поиска экстремальных управлений.

3. Вычислительные эксперименты. Сравнительная эффективность предлагаемых операторных методов принципа максимума в рассматриваемом классе задач оптимального управления иллюстрируется на примере известной модельной задачи управления системой спинов квантовых

частиц (см. [2]), характеризующейся особыми экстремальными управлениями:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= 1 - \langle x(t_1), Lx(t_1) \rangle \rightarrow \inf, \\ L &= \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 & 0 & a_1b_2 - b_1a_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2^2 + b_2^2 & a_2b_1 - b_2a_1 & 0 \\ 0 & a_2b_1 - b_2a_1 & b_1^2 + a_1^2 & b_1b_2 + a_1a_2 \\ a_1b_2 - b_1a_2 & 0 & b_1b_2 + a_1a_2 & b_2^2 + a_2^2 \end{pmatrix}, \\ \dot{x}_1(t) &= u(t)x_3(t) + x_4(t), & \dot{x}_2(t) &= x_3(t) - u(t)x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) &= -u(t)x_1(t) - x_2(t), & \dot{x}_4(t) &= -x_1(t) + u(t)x_2(t), \\ x_1(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & x_2(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & x_3(0) &= 0, & x_4(0) &= 0, & t \in T = [0, t_1], & t_1 &= 1,5, \\ a_1 &= 0,6, & b_1 &= -0,3, & a_2 &= 0,1, & b_2 &= \sqrt{0,54}.\end{aligned}$$

Вектор $x(t)$ описывает состояние квантовой системы, функция $u(t) \in U = [-30, 30]$, $t \in T$, характеризует воздействие внешним полем.

Функция Понтрягина в задаче имеет вид

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1(ux_3 + x_4) + \psi_2(x_3 - ux_4) + \psi_3(-ux_1 - x_2) + \psi_4(-x_1 + ux_2).$$

Запишем стандартную сопряженную систему:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1(t) &= u(t)\psi_3(t) + \psi_4(t), & \dot{\psi}_2(t) &= \psi_3(t) - u(t)\psi_4(t), & t \in T, \\ \dot{\psi}_3(t) &= -u(t)\psi_1(t) - \psi_2(t), & \dot{\psi}_4(t) &= u(t)\psi_2(t) - \psi_1(t), & t \in T, \\ \psi_1(t_1) &= 2(a_1^2 + b_1^2)x_1(t_1) + 2(a_1a_2 + b_1b_2)x_2(t_1) + 2(a_1b_2 - b_1a_2)x_4(t_1), \\ \psi_2(t_1) &= 2(a_1a_2 + b_1b_2)x_1(t_1) + 2(a_2^2 + b_2^2)x_2(t_1) + 2(a_2b_1 - b_2a_1)x_3(t_1), \\ \psi_3(t_1) &= 2(a_2b_1 - b_2a_1)x_2(t_1) + 2(b_1^2 + a_1^2)x_3(t_1) + 2(b_1b_2 + a_1a_2)x_4(t_1), \\ \psi_4(t_1) &= 2(a_1b_2 - b_1a_2)x_1(t_1) + 2(b_1b_2 + a_1a_2)x_3(t_1) + 2(b_2^2 + a_2^2)x_4(t_1).\end{aligned}$$

Условие принципа максимума (4) имеет вид:

$$\begin{aligned}u(t) &= u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), & t \in T, \\ u^*(\psi, x, t) &= \begin{cases} +30, & g(\psi, x) > 0, \\ -30, & g(\psi, x) < 0, \\ w \in U, & g(\psi, x) = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

где $g(\psi, x) = \psi_1x_3 - \psi_2x_4 - \psi_3x_1 + \psi_4x_2$. Особые интервалы экстремальных управлений определяются тождеством $g(\psi(t, u), x(t, u)) \equiv 0$.

В работе [2] для расчета рассматриваемой задачи оптимального управления применялся глобальный метод Кротова, эффективность которого сравнивалась с известным градиентным методом. В качестве стартового начального приближения управления для метода Кротова выбиралось управление, определяемое из физических соображений:

$$u(t) = \operatorname{tg}(2\gamma(2t - 1,5)), \quad t \in T, \quad \gamma = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg}(-30).$$

При этом было получено расчетное приближение особого экстремального управления с значением целевого функционала $\Phi^* \approx 0,000952$. Особый интервал расчетного управления равен $[0,0667, t_1]$. Равенство нулю функции переключения $g(\psi, x)$ на итерационных приближениях методов понималось в смысле принадлежности некоторой достаточно малой окрестности нуля:

$$|g(\psi, x)| \leq \varepsilon_v, \quad \varepsilon_v = 10^{-3}.$$

В рассматриваемых операторных методах принципа максимума численное решение фазовых и сопряженных задач Коши осуществлялось с помощью модуля DIVPRK из библиотеки IMSL языка программирования FortranPowerStation 4.0 (см. [1]). Данный модуль реализует метод Рунге—

Кутта—Вернера пятого-шестого порядка точности. Значения фазовых, сопряженных и управляемых переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 10^{-5}$. В промежутках между соседними узлами сетки T_h значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле.

Итерационные процессы последовательных приближений управления осуществлялись до выполнения следующего критерия остановки:

$$\max \{|u^{k+1}(t) - u^k(t)|, t \in T_h\} \leq \varepsilon_m,$$

где $\varepsilon_m = 10^{-3}$ — заданная точность расчета операторной задачи о неподвижной точке.

3.1. Операторный метод (10). Итерационный процесс (10) в поточечной форме при $k \geq 0$ имеет вид:

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, u^k), x(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, — решение специальной фазовой задачи Коши, полученной при замене переменной управления на выражение $u^*(\psi(t, u^k), x(t), t)$ в правой части фазовой системы в модельной задаче.

Для адекватного сравнения эффективности результатов итерационного процесса (10) с результатами, полученными в [2], равенство нулю функции переключения $g(\psi(t, u^k), x)$ на итерационных приближениях также оценивалась с точностью $\varepsilon_v = 10^{-3}$. При этом значение управления $u^{k+1}(t)$ на особом интервале определялось по правилу дифференцирования тождества $g(\psi(t, u^k), x(t, u)) \equiv 0$.

На рис. 1 представлено конечное расчетное управление $v1(t)$, $t \in T$, полученное методом (10) из указанного выше стартового начального управления $u(t)$ с количеством итераций улучшения, равным 24, и значением функционала $\Phi^* \approx 0,000552$. Особый интервал конечного расчетного управления приближенно равен $[0,0857, 1,4463]$.

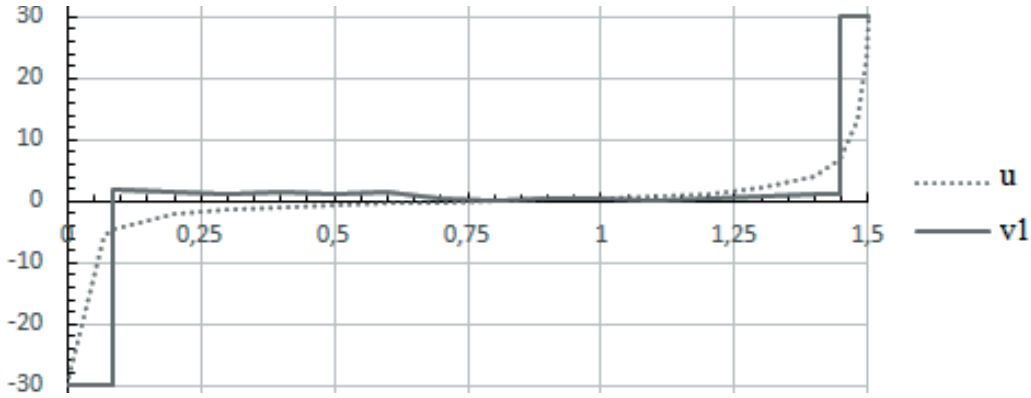


Рис. 1. u — стартовое управление, $v1$ — расчетное управление, полученное методом (10).

3.2. Операторный метод (11). Итерационный процесс (11) в поточечной форме при $k \geq 0$ имеет вид:

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi(t), x(t, u^k), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решение специальной сопряженной задачи Коши, полученной при замене переменной управления на выражение $u^*(\psi(t), x(t, u^k), t)$ в правой части сопряженной системы и переменной $x(t_1)$ на выражение $x(t_1, u^k)$ в правой части начального условия в момент времени t_1 в модельной задаче. Равенство нулю функции переключения $g(\psi, x(t, u^k))$ на итерационных приближениях также оценивалась с точностью $\varepsilon_v = 10^{-3}$. Значение управления $u^{k+1}(t)$ на особом интервале определялось по правилу дифференцирования тождества $g(\psi(t, u), x(t, u^k)) \equiv 0$.

На рис. 2 представлено конечное расчетное управление $u1(t)$, $t \in T$, полученное методом (11) с начального управления $u(t)$. Получено значение функционала $\Phi^* \approx 0,000567$ с количеством

итераций улучшения, равным 22. Особый интервал конечного управления приближенно равен $[0,0831, 1,4476]$.

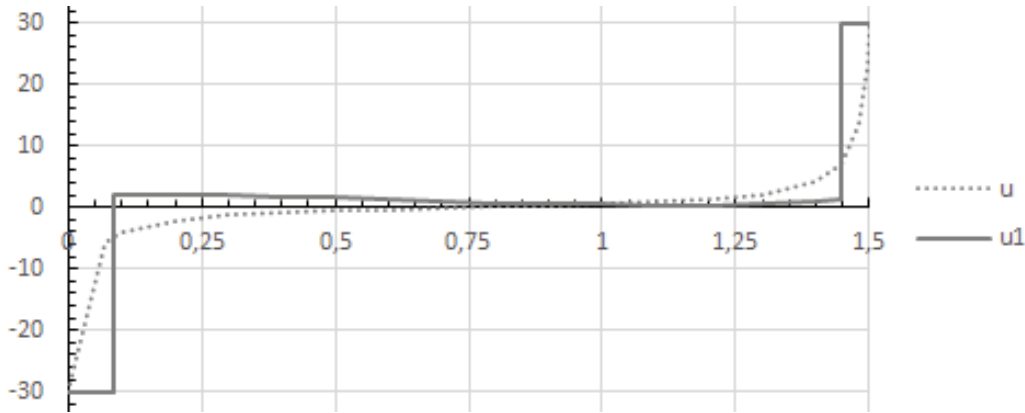


Рис. 2. u — стартовое управление, $u1$ — расчетное управление, полученное методом (11).

3.3. *Проекционный операторный метод* (12). Для заданного $\alpha > 0$ итерационный процесс (12) в поточечной форме при $k \geq 0$ принимает вид:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha g(\psi(t, u^k), x(t))), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, — решение специальной фазовой задачи Коши, полученной при замене переменной управления на выражение $P_U(u^k(t) + \alpha g(\psi(t, u^k), x(t)))$ в правой части фазовой системы.

На рис. 3 представлено конечное расчетное управление $v4(t)$, $t \in T$, полученное методом (12) из указанного выше начального управления $u(t)$ при $\alpha = 10^{-2}$ с количеством итераций улучшения, равным 26, и значением функционала $\Phi^* \approx 0,000704$. Особый интервал конечного управления, определяемый значениями функции переключения $g(\psi(t, u^k), x)$, равен $[0,0751, 1,4512]$.

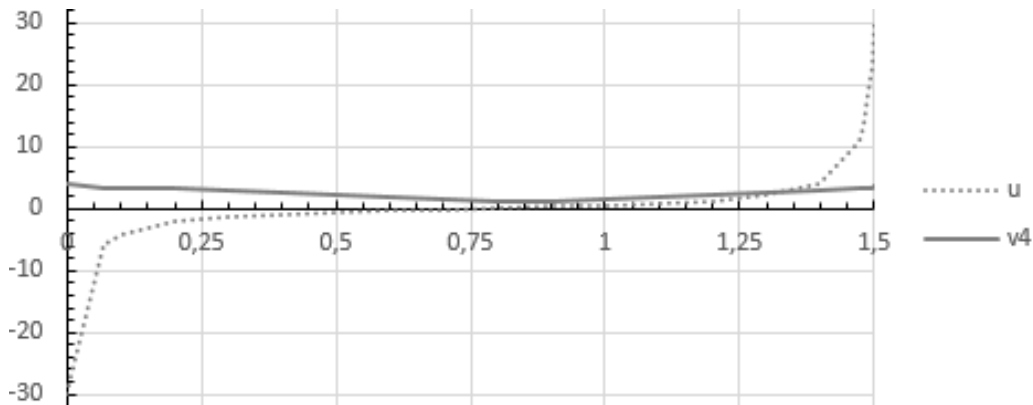


Рис. 3. u — стартовое управление, $v4$ — расчетное управление, полученное методом (12).

3.4. *Проекционный операторный метод* (13). Для заданного $\alpha > 0$ итерационный процесс (13) в поточечной форме при $k \geq 0$ принимает вид:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha g(\psi(t), x(t, u^k))), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решением специальной сопряженной задачи Коши, полученной при замене переменной управления на выражение $P_U(u^k(t) + \alpha g(\psi(t), x(t, u^k)))$ в правой части сопряженной системы и переменной $x(t_1)$ на выражение $x(t_1, u^k)$ в правой части начального условия в момент времени t_1 .

На рис. 4 представлено конечное расчетное управление $v_5(t)$, $t \in T$, полученное методом (13) из указанного выше начального управления $u(t)$, с $\alpha = 10^{-2}$ и количеством итераций улучшения, равным 17, и значением функционала $\Phi^* \approx 0,000676$. Особый интервал конечного управления, определяемый значениями функции переключения $g(\psi, x(t, u^k))$, равен $[0,0799, 1,4485]$.

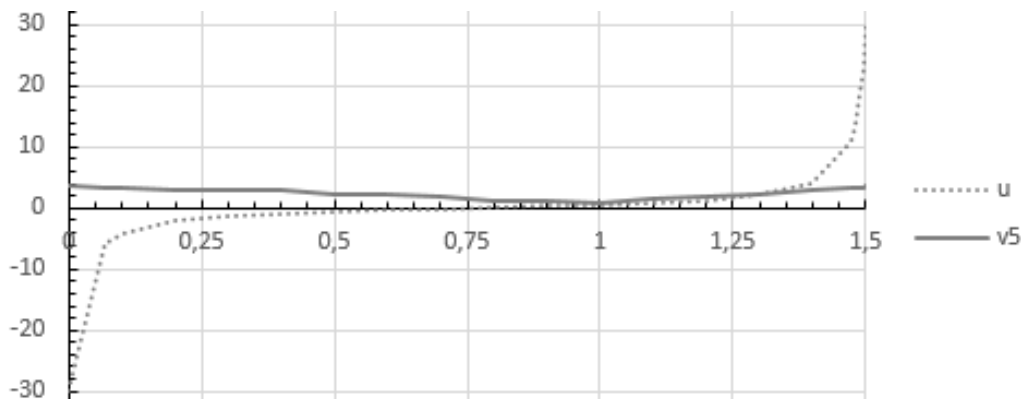


Рис. 4. u — стартовое управление, v_5 — расчетное управление, полученное методом (13).

3.5. Комбинированный операторный метод. В соответствии с принципом максимума оптимальное управление в модельной задаче вне особых интервалов обязано принимать граничные значения. Расчетные приближения экстремальных управлений, полученные проекционными операторными методами, не принимают граничных значений управления. Поэтому указанные расчетные приближения можно уточнять операторными методами (10) и (11), позволяющими получать граничные значения управления вне особых интервалов.

На рис. 5 представлено конечное расчетное управление $v_6(t)$, $t \in T$, полученное методом (10) из указанного выше расчетного управления $v_5(t)$, $t \in T$, с количеством итераций улучшения, равным 3, и значением функционала $\Phi^* \approx 0,000598$. Особый интервал конечного управления равен $[0,0799, 1,4485]$.

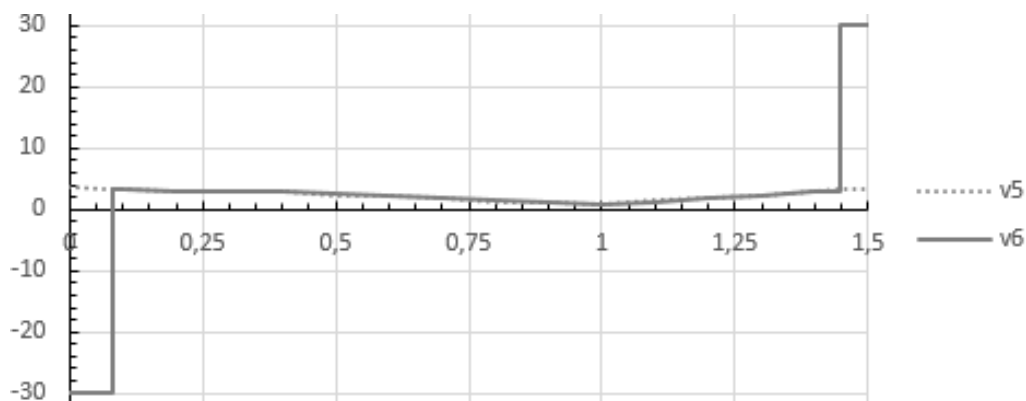


Рис. 5. v_5 — стартовое управление, v_6 — расчетное управление, полученное методом (11).

В результате вычислительного эксперимента получаем, что особые интервалы расчетных управлений v_5 и v_6 совпадают и на особом интервале уточненное расчетное управление v_6 практически не отличается от расчетного приближения v_5 экстремального управления, полученного проекционным методом.

Проведенные расчеты в рамках модельной задачи показывают высокую эффективность рассматриваемых операторных методов принципа максимума для поиска особых экстремальных

управлений, позволяющих получать лучшие значения критерия оптимальности по сравнению с известным глобальным методом Кротова. При этом существенно более простые по аналитической и практической реализации проекционные операторные методы позволяют достаточно точно вычислять особые интервалы экстремальных управлений. Полученные с помощью проекционных операторных методов (12) и (13) приближенные особые экстремальные управления могут эффективно использоваться в качестве стартовых управлений для операторных методов (10) и (11) на основе операции максимизации, позволяющих получать граничные значения управления вне особых интервалов.

4. Заключение. В классе линейно-квадратичных задач оптимального управления на основе операторных форм принципа максимума рассмотрены новые модельно-ориентированные итерационные алгоритмы, позволяющие находить экстремальные управления, в том числе особые экстремальные управления. Разработанные операторные методы поиска экстремальных управлений характеризуются следующими свойствами:

- (1) нелокальность последовательных приближений управления, получаемых расчетом двух задач Коши для фазовых и сопряженных переменных на каждой итерации;
- (2) вычислительная устойчивость в отличие от стандартных методов решения краевой задачи принципа максимума;
- (3) отсутствие трудоемкой процедуры игольчатого или выпуклого варьирования управления в малой окрестности рассматриваемого приближения управления на каждой итерации в отличие от градиентных методов;
- (4) отсутствие процедуры построения и анализа специальных вспомогательных функций переключения Кротова на каждой итерации в отличие от известного глобального метода Кротова.

Указанные свойства предлагаемых операторных методов принципа максимума являются важными для повышения эффективности поиска экстремальных управлений в рассматриваемом классе линейно-квадратичных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бартенев О. В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. — М.: Диалог-МИФИ, 2001.
2. *Батурина О. В., Моржин О. В.* Оптимальное управление системой спинов на основе метода глобального улучшения// Автомат. телемех. — 2011. — № 6. — С. 79–86.
3. *Булдаев А. С.* Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2020. — № 1. — С. 35–53.
4. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск, 1994.
5. *Киселев Ю. Н.* Линейно-квадратичная задача оптимального управления: анализ с помощью принципа максимума// в кн.: Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. Вып. 1. — М.: Изд-во МГУ, 2005. — С. 166–182.
6. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
7. *Хлебников М. В., Щербakov П. С., Честнов В. Н.* Задача линейно-квадратичного управления: I. Новое решение// Автомат. телемех. — 2015. — № 12. — С. 65–79.
8. *Trentelman H.* Linear quadratic optimal control// in: Encyclopedia of Systems and Control (*Baillieul J., Samad T.*, eds.). — London: Springer, 2013. — P. 1–8.

Булдаев Александр Сергеевич

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

E-mail: buldaev@mail.ru

Казьмин Иван Дмитриевич

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

E-mail: kazminvanya@mail.ru