ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 54–59
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-54-59

УДК 512.5

ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ ПОЛУГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ

© 2023 г. **О. В. ЛЮБИМЦЕВ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Для полугруппы S с сокращением и поля F доказано, что полугрупповая алгебра FS является центрально существенной в точности тогда, когда существует группа частных G_S полугруппы S и групповая алгебра FG_S группы G_S является центрально существенной групповой алгеброй. Полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом. Существуют некоммутативные центрально существенные полугрупповые алгебры над полями нулевой характеристики (при этом известно, что центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики 0 коммутативны).

Ключевые слова: полугруппа с сокращением, полугрупповое кольцо, центрально существенное кольцо.

CENTRALLY ESSENTIAL SEMIGROUP ALGEBRAS

© 2023 **O. V. LYUBIMTSEV, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. For a cancellative semigroup S and a field F, we prove that the semigroup algebra FS is centrally essential if and only if the group of fractions G_S of the semigroup S exists and the group algebra FG_S of G_S is centrally essential. The semigroup algebra of a cancellative semigroup is centrally essential if and only if it has the classical right ring of fractions, which is a centrally essential ring. There exist noncommutative, centrally essential semigroup algebras over fields of zero characteristic (this contrasts with the known fact that centrally essential group algebras over fields of zero characteristic are commutative).

***Keywords and phrases*:** cancellative semigroup, semigroup ring, centrally essential ring.

***AMS Subject Classification*:** 16R99, 20K30

1. Введение. Мы рассматриваем только ассоциативные, не обязательно унитальные кольца. Ассоциативное кольцо R называется *центрально существенным*, если R либо коммутативно, либо для каждого нецентрального элемента a существуют такие ненулевые центральные элементы x, y, что $ax = y$. Если кольцо R с центром $Z(R)$ имеет ненулевую единицу, то R центрально существенно в точности тогда, когда модуль $R_{Z(R)}$ является существенным расширением модуля $Z(R)_{Z(R)}$. Ясно, что любое коммутативное кольцо является центрально существенным. Каждое полупервичное или несингулярное справа центрально существенное кольцо коммутативно; см. [6, Theorem 1.5]. В [6, Proposition 2.4] доказано, что в центрально существенном кольце все идемпотенты центральны. Центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики 0 коммутативны; см. [5, Remark 1.2]. Однако центрально существенное кольцо может быть некоммутативным. Например, существуют конечные некоммутативные центрально существенные групповые алгебры над полями простой характеристики; см. [5]. Кроме того, существуют

Работа О. В. Любимцева выполнена в рамках государственного проекта FSWR-2023-0034. Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00052).

такие абелевы группы без кручения, что их кольца эндоморфизмов являются некоммутативными центрально существенными кольцами; см. [2]. В работе [4, Theorem 1] доказано, что групповая алгебра является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом.

В данной статье изучаются центрально существенные полугрупповые алгебры. Основным результатами работы являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1.

1. *Пусть S — полугруппа с сокращением и F — поле. Полугрупповая алгебра FS над полем F является центрально существенной тогда и только тогда, когда существует группа частных G_S полугруппы S и групповая алгебра FG_S группы G_S является центрально существенной групповой алгеброй.*
2. *Существуют некоммутативные центрально существенные полугрупповые алгебры над полями нулевой характеристики (при этом известно, что центрально существенные групповые алгебры над полями характеристики 0 коммутативны).*

Следующая теорема распространяет результат [4, Theorem 1] на полугрупповые алгебры полугрупп с сокращением.

Теорема 2. *Полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением является центрально существенной в точности тогда, когда она обладает классическим правым кольцом частных, которое является центрально существенным кольцом.*

Всюду далее F означает поле, S — полугруппу, FS — полугрупповую алгебру полугруппы S над полем F. Центр полугруппы S и полугрупповой алгебры FS обозначаются через $Z(S)$ и $Z(FS)$ соответственно. Если

$$a = \sum \alpha_s s \in FS,$$

то $\operatorname{supp}(a) = \{s \in S \mid \alpha_s \neq 0\}$. Для двух элементов a и b кольца обозначим $[a,b] = ab - ba$. Приведем некоторые используемые в работе определения.

Полугруппа S называется *полугруппой с левым сокращением*, если для любых $a, b, c \in S$ из $ca = cb$ следует $a = b$. Двойственно определяется *полугруппа с правым сокращением*. Полугруппа с левым и правым сокращением называется *полугруппой с сокращением*. Хорошо известно, что периодическая полугруппа с сокращением является группой; см., например, [1]. Полугруппа с сокращением вкладывается в группу правых частных в точности тогда, когда непусто пересечение любых двух главных правых идеалов полугруппы S, т. е. $sS \cap tS \neq \emptyset$ для всех $s, t \in S$ (правое условие Оре). Если S удовлетворяет и левому условию Оре, определяемом симметрично, то группа $G_S = SS^{-1} = S^{-1}S$ называется *группой частных* полугруппы S. Любой элемент группы G_S записывается как в виде $a^{-1}b$, так и в виде cd^{-1}; $a, b, c, d \in S$.

Если G — группа, то обозначим, как принято,

$$\Delta(G) = \{x \in G \mid |x^G| < \infty\} = \{x \in G \mid |G : C_G(x)| < \infty\}.$$

$\Delta(G)$ является характеристической подгруппой группы G. В работе [5, Lemma 2.1] доказано, что если групповое кольцо RG центрально существенно, то группа G является FC-группой, т. е. $G = \Delta(G)$.

Пусть S — полугруппа с сокращением и $s \in S$. Если для некоторого $x \in S$ существует такой $t \in S$, что $xs = tx$, то элемент t определен однозначно и обозначается s^x. Тогда $\Delta(S)$ — множество элементов $s \in S$, для которых элементы s^x определены для всех $x \in S$ и множество $\{s^x \mid x \in S\}$ конечно. Если $s \in \Delta(S)$, то полагают $D_S(s) = \{s^x \mid x \in S\}$. Ясно, что если S вкладывается в группу частных G_S, то для $s \in \Delta(S)$, множество $D_S(s)$ вкладывается во множество сопряженных элементов для s в G_S. Если S — полугруппа с сокращением, то $Z(FS)$ является F-подпространством в FS, порожденным элементами вида

$$\sum_{t \in D_S(s)} t,$$

где $s \in \Delta(S)$; см. [8, Theorem 9.10].

Элемент r кольца R называется *регулярным справа* или *левым неделителем нуля*, если из $rx = 0$ следует $x = 0$ для любого $x \in R$. Заметим, что в центрально существенном кольце односторонние делители нуля являются двусторонними; см. [7, Lemma 2.2]. Кольцо R имеет *правое (соотв., левое) классическое кольцо частных* $Q_{cl}(R_r)$ (соотв., $Q_{cl}(R_l)$) в точности тогда, когда для любых элементов $a, b \in R$, где b регулярен, существуют такие элементы $c, d \in R$, где d регулярен, что $bc = ad$ (соотв., $cb = da$). Если кольца $Q_{cl}(R_r)$ и $Q_{cl}(R_l)$ существуют, то они изоморфны над R. В этом случае говорят о существовании двустороннего классического кольца частных $Q_{cl}(R)$. Хорошо известно, что каждое коммутативное кольцо обладает коммутативным классическим кольцом частных.

2. Доказательство теоремы 1.1.

Предложение 1. *Пусть S — полугруппа с сокращением. Если полугрупповая алгебра FS является центрально существенным кольцом, то $S = \Delta(S)$.*

Доказательство. По условию для $s \in S$ имеем $0 \neq cs = d$, для некоторых $c, d \in Z(FS)$. Тогда для любого $y \in \operatorname{supp}(d)$ найдется такой $x \in \operatorname{supp}(c)$, что $xs = y$. Из [8, Proposition 9.2(iii)] следует, что $x, y \in \Delta(S)$. Кроме того, $\Delta(S)$ является правым и левым множеством Оре в S и $G_{\Delta(S)} = \Delta(S)^{-1}\Delta(S) = \Delta(S)\Delta(S)^{-1}$ — FC-группа; см. [8, Corollary 9.6, Proposition 9.8(iii)]. Следовательно, $s = x^{-1}y$, где $x^{-1} \in \Delta(S)^{-1}$, $y \in \Delta(S)$. Для любого $t \in S$ имеем $x^t \in \Delta(S)$. Таким образом, из $tx = x^t t$ следует $(x^t)^{-1}t = tx^{-1}$, т. е. $(x^t)^{-1} = (x^{-1})^t$ в группе $G_{\Delta(S)}$. Тогда элемент $s^t = (x^{-1}y)^t = (x^{-1})^t y^t$ существует для любого $t \in S$; см. [8, Basic property (a), P. 108]. Далее,

$$\begin{aligned}\{s^t \mid t \in S\} &= \{(x^{-1}y)^t \mid t \in S\} = \\ &= \{(x^{-1})^t \mid t \in S\} \cdot \{y^t \mid t \in S\} = \\ &= \{(x^t)^{-1} \mid t \in S\} \cdot \{y^t \mid t \in S\}.\end{aligned}$$

Первое множество конечно, так как конечно множество $\{x^t \mid t \in S\}$. Из $y \in \Delta(S)$ следует конечность второго множества. Таким образом, множество $D_S(s)$ конечно и $s \in \Delta(S)$. □

Следствие 1. *Если FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением, то S имеет группу частных G_S.*

Доказательство. По предложению 1 имеем $S = \Delta(S)$. Так как $\Delta(S)$ является правым и левым множеством Оре, то S имеет группу частных G_S. □

В силу следствия 1 при изучении центрально существенных полугрупповых алгебр полугрупп с сокращением достаточно ограничиться рассмотрением полугрупп S, которые имеют группу частных G_S.

Следствие 2. *Пусть F — поле и $\operatorname{char} F = 0$. Тогда любая центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы с сокращением над F коммутативна.*

Доказательство. Алгебра FS полупервична в точности тогда, когда полупервична алгебра FG_S; см. [8, Theorem 7.19]. Хорошо известно, что групповая алгебра над полем характеристики 0 полупервична; см., например, [9, Theorem 4.2.12]. В работе [5, Proposition 3.4] доказано, что центрально существенные полупервичные кольца коммутативны. □

Пример 1. Рассмотрим подкольцо $\mathcal{R}$ в кольце $M_7(F)$ всех матриц порядка 7 над полем F характеристики 0, состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{R}$ — некоммутативное центрально существенное кольцо; см. [3, Example 2.4]. Пусть $e_\alpha = E_7$, e_a, e_b, e_c, e_d, e_e, e_f — матрицы, у которых ненулевые позиции имеют значение 1 на местах α, a, b, c, d, e, f соответственно. Рассмотрим полугруппу $S = \{e_\alpha, e_a, e_b, e_c, e_d, e_e, e_f\} \cup \{\theta\}$, где $\{\theta\}$ действует как нуль. Тогда $\mathcal{R} \cong F_0S$, где F_0S — сжатая полугрупповая алгебра полугруппы S над полем F. Так как $FS \cong F \oplus F_0S$ (см., например, [8, Corollary 4.9]), то FS — центрально существенная полугрупповая алгебра как прямая сумма центрально существенных алгебр.

2.1. Окончание доказательства теоремы 1.

1. Пусть FS — центрально существенное кольцо и $0 \neq a \in FG_S$,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i,$$

где $\alpha_i \in F$, $g_i \in G_S$. Известно, что $G_S = SZ(S)^{-1}$; см. [8, Proposition 9.8(iv)]. Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i t_i^{-1}$$

для некоторых $s_i \in S, t_i \in Z(S)$, $i = 1, \dots, n$. Положим $a' = \alpha_1 s_1 t_2 \dots t_n + \dots + \alpha_n s_n t_1 \dots t_{n-1} \in FS$. Заметим, что $a' \neq 0$. Для этого достаточно проверить, что $s_1 t_2 \dots t_n, \dots, s_n t_1 \dots t_{n-1}$ — различные элементы в FS. Действительно, если $s_i t_1 \dots \widehat{t_i} \dots t_n = s_j t_1 \dots \widehat{t_j} \dots t_n$ для $i \neq j$, то, умножив это равенство на $(t_1 \dots t_n)^{-1}$, получим $s_i t_i^{-1} = s_j t_j^{-1}$, т. е. $g_i = g_j$. Противоречие. По условию $0 \neq a'c' = d'$ для некоторых $c', d' \in Z(FS)$. Тогда $0 \neq ac'' = d'$, где $c'' = t_1 \dots t_n c'$ и d' — центральные элементы в FS, которые остаются центральными в FG_S; см. [8, Corollary 9.11(i)].

Обратно, пусть $0 \neq a \in FS$,

$$a = \sum \alpha_i s_i,$$

где $\alpha_i \in F$, $s_i \in S$. По условию $0 \neq ac = d$ для некоторых $c, d \in Z(FG_S)$,

$$c = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i, \quad d = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j h_j,$$

где $g_i, h_j \in G_S$. Пусть $g_i = x_i y_i^{-1}$, $h_j = z_j t_j^{-1}$ и $x_i, z_j \in S$, $y_i, t_j \in Z(S)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Обозначим $y = y_1 \dots y_n$, $t = t_1 \dots t_m$. Положим $c' = cyt \in Z(FS)$. Тогда

$$ac' = (ac)yt = dyt \in Z(FS).$$

Осталось проверить, что $ac' \neq 0$. Имеем:

$$dyt = \gamma_1 z_1 y t_2 \dots t_m + \dots + \gamma_m z_m y t_1 \dots t_{m-1}.$$

Если $i \neq j$ и $z_i y t_1 \dots \widehat{t_i} \dots t_m = z_j y t_1 \dots \widehat{t_j} \dots t_m$, то $z_i t_i^{-1} = z_j t_j^{-1}$ и $g_i = g_j$, что приводит к противоречию.

2. Утверждение следует из примера 1.

Пример 2. Пусть $S = \langle x, y, z \mid z \in Z(S),\ z^2 = e,\ xy = zyx \rangle$. Непосредственно проверяется, что S — полугруппа с сокращением, имеющая группу частных $G_S = \langle x, y, z \mid z \in Z(G_S),\ z^2 = e,\ x^{-1}y^{-1}xy = z \rangle$. Так как z — центральная инволюция, $x^2, y^2 \in Z(G_S)$, то единственный нетривиальный коммутатор в G_S есть $x^{-1}y^{-1}xy$. Поэтому коммутант $G'_S = \langle z \rangle$. Имеем $Z(G_S) = \langle x^2, y^2, z \rangle$. Пусть $H = G'_S = \{e, z\}$, $\operatorname{char} F = 2$ и $\hat{H} = e + z$. Проверим, что для $0 \neq \alpha \in FG_S$ выполнено $\alpha \hat{H} = \beta \in Z(FG_S)$. Действительно, если

$$\alpha = \sum_{g \in \operatorname{supp}(\alpha)} a_g g,$$

то

$$\beta = \sum_{g \in \operatorname{supp}(\alpha)} a_g g \hat{H}.$$

Тогда для любого $x \in G_S$, $g \in \mathrm{supp}(\alpha)$ получим

$$[x, g\hat{H}] = [x, g]\hat{H} = xg(1 - g^{-1}x^{-1}gx)\hat{H} = 0,$$

так как $g^{-1}x^{-1}gx \in G' \subseteq Z(G_S)$. Если $\alpha\hat{H} = 0$, то $\alpha \in FG_S\hat{H}$; см. [9, Lemma 3.1.2]. В этом случае $\alpha \in Z(FG_S)$. Следовательно, групповая алгебра FG_S центрально существенна. По теореме 1 полугрупповая алгебра FS также является центрально существенной.

Пример 3. Пусть $S = \langle x, y, z \mid z \in Z(S),\ xy = zyx\rangle$. Полугруппа S имеет группу частных G_S, которая является свободной нильпотентной группой класса нильпотентности 2; см. [8, Example 21]. Известно, что если группа не содержит элементов порядка p, то центрально существенная групповая алгебра коммутативна; см. [4, Proposition 1]. Значит, групповая алгебра FG_S не является центрально существенной. По теореме 1 полугрупповая алгебра FS также не является центрально существенной.

3. Доказательство теоремы 2.

Лемма 1 (см. [4, Proposition 3])**.** *Пусть R — кольцо. Если для любого регулярного элемента b существует такой регулярный элемент x, что $bx \in Z(R)$, то R имеет правое кольцо частных.*

Лемма 2. *Пусть FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением. Тогда для каждого регулярного элемента $b \in FS$ существует такой регулярный элемент $z \in FS$, что $bz \in Z(FS)$.*

Доказательство. Из [9, Lemma 4.4.4] следует, что найдется такой регулярный элемент $x \in FG_S$, что $bx = y \in Z(FG_S)$. Если

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i t_i^{-1},$$

где $\alpha_i \in F$, $s_i \in FS$, $t_i \in Z(FS)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то элемент $z = xt_1 \ldots t_n$ регулярен в FS и $bz \in Z(FS)$. □

Замечание 1. Утверждения лемм 1 и 2 верны и для левых классических колец частных. В этом случае для регулярного элемента b найдется такой регулярный элемент x, что xb — центральный элемент.

Предложение 2. *Если FS — центрально существенная полугрупповая алгебра полугруппы S с сокращением, то FS имеет классическое кольцо частных.*

Доказательство. Следует из лемм 1, 2 и замечания 1. □

3.1. Окончание доказательства теоремы 2. Пусть FS — центрально существенное кольцо и $0 \neq as^{-1} \in Q_{cl}(FS)$, где s регулярен в FS. Пусть регулярный элемент $\gamma \in FS$ таков, что $s\gamma = t \in Z(FS)$. Тогда $s^{-1} = \gamma t^{-1}$ в кольце $Q_{cl}(FS)$. По условию для элемента $a\gamma \in FS$ существуют такие ненулевые элементы $c, d \in Z(FS)$, что $0 \neq (a\gamma)c = d \in Z(FS)$. Тогда

$$(as^{-1})c = (a\gamma t^{-1})c = (a\gamma c)t^{-1} = dt^{-1} \neq 0,$$

где $dt^{-1} \in Z(Q_{cl}(FS))$. Следовательно, $Q_{cl}(FS)$ — центрально существенное кольцо.

Обратно, пусть $0 \neq s \in FS$. По условию найдутся такие элементы $t, r \in Z(Q_{cl}(FS))$, что $0 \neq st = r$. Заметим, что $Z(Q_{cl}(FS)) \subseteq Q_{cl}(Z(FS))$; сравни [9, Theorem 4.4.5]. Действительно, пусть $\rho \in Z(Q_{cl}(FS))$, $\rho = \alpha\beta^{-1}$, где $\alpha, \beta \in FS$ и β регулярен. Тогда $\alpha\beta = \beta\alpha$ и $\alpha\beta^{-1} = \beta^{-1}\alpha$. По лемме 2 существует такой регулярный элемент $\gamma \in FS$, что $\beta\gamma \in Z(FS)$. Обозначив $\epsilon = \beta\gamma$, $\eta = \alpha\gamma$, получим:

$$\eta\epsilon^{-1} = \alpha\gamma\gamma^{-1}\beta^{-1} = \alpha\beta^{-1} = \rho.$$

При этом $\epsilon, \eta \in Z(Q_{cl}(FS))$. С учетом сказанного, имеем $t = cd^{-1}$, $r = mn^{-1}$ для некоторых $c, d, m, n \in Z(FS)$. Тогда

$$s(cn) = (sc)n = (mn^{-1}d)n = md \in Z(FS),$$

и $md \neq 0$, так как d регулярен в FS.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clifford A. H., Prieston G. B.* The Algebraic Theory of Semigroups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1961.
2. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential endomorphism rings of abelian groups// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 3. — P. 1249–1256.
3. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential torsion-free rings of finite rank// Beitr. Algebra Geom. — 2021. — *62*, № 3. — P. 615–622.
4. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras and classical rings of fractions// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 12. — P. 2890–2894.
5. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras// J. Algebra. — 2018. — *512*, № 15. — P. 109–118.
6. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings essential over their centers// Commun. Algebra. — 2019. — *47*, № 4. — P. 1642–1649.
7. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Uniserial Noetherian centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 149–153.
8. *Okniński J.* Semigroup Algebras. — New York–Basel: Marcel Dekker, 1991.
9. *Passman D. S.* The Algebraic Structure of Group Rings. — New York: Wiley, 1977.

Любимцев Олег Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: `oleg_lyubimcev@mail.ru`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`