ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 44–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-44-49

УДК 512.541

ЦЕНТРАЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ ПОЛУКОЛЬЦА

© 2023 г. **О. В. ЛЮБИМЦЕВ, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Полукольцо называется центрально существенным, если для каждого ненулевого элемента x существуют такие ненулевые центральные элементы y, z, что $xy = z$. Мы приводим несколько примеров некоммутативных центрально существенных полуколец и описываем некоторые свойства аддитивно сократимых центрально существенных полуколец.

Ключевые слова: центрально существенное полукольцо, аддитивно сократимое полукольцо.

CENTRALLY ESSENTIAL SEMIRINGS

© 2023 **O. V. LYUBIMTSEV, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. A semiring is said to be centrally essential if, for every nonzero element x, there exist nonzero central elements y and z such that $xy = z$. We give several examples of noncommutative centrally essential semirings and describe some properties of additively cancellative, centrally essential semirings.

Keywords and phrases: centrally essential semiring, additively cancellative semiring.

AMS Subject Classification: 16R99, 16D10

1. Введение. Под *полукольцом* мы понимаем структуру, отличающуюся от ассоциативного кольца, возможно, необратимостью аддитивной операции. Нуль полукольца S мультипликативен по определению: для любого $s \in S$ имеем $0s = s0 = 0$. В нашей работе будут рассматриваться только полукольца с единицей, отличной от нуля. *Центр* полукольца S есть множество $C(S) = \{s \in S : ss' = s's$ для всех $s' \in S\}$. Это множество непусто, так как содержит 0 и 1, и является подполукольцом в S. Полукольцо называется *центрально существенным*, если для каждого ненулевого элемента x существуют такие ненулевые центральные элементы y, z, что $xy = z$.

Центрально существенные кольца с ненулевой единицей изучались, например, в работах [1, 10–13]. Каждое центрально существенное полупервичное кольцо с $1 \neq 0$ коммутативно; см. [10, Proposition 3.3]. Если F — поле из двух элементов и Q_8 — группа кватернионов порядка 8, то групповая алгебра FQ_8 является конечным некоммутативным центрально существенным кольцом; см. [10]. В работе [13] построено центрально существенное кольцо R, такое, что факторкольцо $R/J(R)$ по радикалу Джекобсона не является PI-кольцом (в частности, кольцо $R/J(R)$ не коммутативно). Матричные центрально существенные алгебры изучались в [8]. Абелевы группы с центрально существенными кольцами эндоморфизмов рассматривались в работах [7] и [9].

Пример 1. Рассмотрим полугруппу $(M, \cdot)$, заданную таблицей умножения:

Работа О. В. Любимцева выполнена в рамках государственного проекта FSWR-2023-0034. Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00052).

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	a	a	c
b	b	b	b	c
c	c	c	c	c

Для быстрой проверки ассоциативности удобно использовать тест ассоциативности по Лайту; см. [3].

Множество $S = \mathrm{Sub}(M)$ всех подмножеств в M вместе с операциями $A + B = A \cup B$ и $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$, где $A, B \in S$, образует полукольцо с нулем $\emptyset$ и единицей $1 = \{1_M\}$; см. [4, Example 1.10]. Имеем $|S| = 2^4 = 16$. Заметим, что S свободно от нулевых сумм, т. е. из $A + B = \emptyset$ следует, что $A = B = \emptyset$. Кроме этого, S аддитивно и мультипликативно идемпотентно. Запишем центр $C(S)$:

$$C(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{c\}, \{1, c\}\}.$$

Если $A \in S \setminus C(S)$, то $\emptyset \neq A \cdot \{c\} \in C(S)$. Следовательно, S — некоммутативное центрально существенное полукольцо.

Полукольцо S называется *редуцированным*, если для любых $x, y \in S$ выполняется $x = y$, как только $x^2 + y^2 = xy + yx$; см. [2]. В случае колец это определение дает в точности класс редуцированных колец, т. е. колец без ненулевых нильпотентных элементов. Полукольцо S называется *аддитивно сократимым*, если $x+z = y+z \Rightarrow x = y$ для любых $x, y, z \in S$. Кольцо $D(S)$ называется *кольцом разностей* полукольца S, если S есть подполукольцо в $D(S)$ и каждый элемент $a \in D(S)$ является разностью некоторых элементов $x, y \in S$: $a = x - y$. Класс аддитивно сократимых полуколец содержит все кольца. Кольцо разностей единственно с точностью до изоморфизма над S; подробнее см. [6, Chapter II]. Ненулевой элемент a полукольца R называется *левым делителем нуля*, если выполнено $ab = 0$ для некоторого $0 \neq b \in S$. Так же как в работе [12, Lemma 2.2] можно доказать, что в центрально существенном полукольце односторонние делители нуля являются двусторонними. Другие теоретико-полукольцевые понятия и обозначения могут быть найдены в [4, 6].

В статье изучаются свойства аддитивно сократимых центрально существенных полуколец. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Существует некоммутативное аддитивно сократимое редуцированное центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Аддитивно сократимое редуцированное полукольцо коммутативно тогда и только тогда, когда его кольцо разностей является центрально существенным кольцом.*

2. Аддитивно вычисляемые центрально существенные полукольца. Полукольцо называется *полупервичным*, если оно не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Полукольцо S называется *полувычитаемым*, если для любых $a, b \in S$, $a \neq b$, найдется $x \in S$, такой, что $a + x = b$ или $b + x = a$.

Предложение 1. *Пусть S — аддитивно сократимое полувычитаемое центрально существенное полукольцо с центром C. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *S — полупервичное полукольцо;*
2. *C — полупервичное полукольцо;*
3. *S не имеет ненулевых нильпотентных элементов;*
4. *S — коммутативное полукольцо без ненулевых нильпотентных элементов.*

Доказательство. Хорошо известно, что полукольцо S вложимо в кольцо разностей $D(S)$ тогда и только тогда, когда S является аддитивно сократимым. Кроме этого, равенство $D(S) = -S \cup S$ выполнено в точности тогда, когда S — полувычитаемое полукольцо; см. [6, Chapter II, Remark 5.12]. Тогда утверждение следует из [11, Proposition 2.8]. $\square$

Замечание 1. Пример 1 показывает, что предложение 1 перестает быть верным без предположения аддитивной сократимости и полувычитаемости. В примере 4 (см. ниже) построено некоммутативное центрально существенное полукольцо без делителей нуля, которое аддитивно сократимо, но не является полувычитаемым.

Известно, что всякий идемпотент центрально существенного кольца является центральным; см. [10, Lemma 2.3]. Для полуколец это уже не так (см. пример 1). Идемпотент e полукольца S назовем *дополняемым*, если существует идемпотент $f \in S$, такой что $e + f = 1$.

Предложение 2. *В аддитивно сократимом центрально существенном полукольце S любой дополняемый идемпотент является центральным.*

Доказательство. Пусть $e^2 = e$ и $e + f = 1$ для некоторого $f \in S$. Так как S — аддитивно сократимое полукольцо, то из $e = e + fe$ следует $fe = 0$. Аналогично находим $ef = 0$. Пусть $x \in S$. Тогда $x = ex + fx$ и $xe = exe + fxe$.

Предположим сначала, что $fxe = 0$, т. е. $xe = exe$. Так как $x = xe + xf$, то $ex = exe + exf$. Если $exf \neq 0$, то существуют такие $c, d \in C(S)$, что $(exf)c = d \neq 0$. Так как $d = (exf)c$ — центральный элемент и e — идемпотент, то $ed = d = de$. Тогда

$$0 \neq d = ed = de = (exfc)e = (exc)fe = 0,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, $exf = 0$ и $ex = xe = exe$.

Пусть теперь $fxe \neq 0$. Тогда $0 \neq (fxe)c = d$ для некоторых ненулевых $c, d \in C(S)$. В этом случае

$$0 \neq d = de = ed = ef(xec) = 0.$$

Вновь получено противоречие. □

Следствие 1. *Если S — аддитивно сократимое полукольцо, то полукольцо $M_n(S)$ всех матриц и полукольцо $T_n(S)$ верхнетреугольных матриц над S при $n \geqslant 2$ не являются центрально существенными.*

Доказательство. Для единичной матрицы указанных полуколец имеем: $E = E_{11} + \ldots + E_{nn}$, где $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ — матричные единицы. Из [4, Example 4.19] следует, что $M_n(S)$ является аддитивно сократимым полукольцом. Идемпотенты $E_{11}, \ldots, E_{nn}$ дополняемы и не центральны. Следовательно, полукольца $M_n(S)$ и $T_n(S)$ не являются центрально существенными. □

Как было отмечено выше, аддитивно сократимое полукольцо S, и только оно, вложимо в кольцо разностей $D(S)$, элементы которого имеют вид $x - y$, где $x, y \in S$.

Пример 2. Рассмотрим полукольцо S, порожденное матрицами

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & \alpha & c \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ таковы, что $a_{12} = b_{23} = a$, $b_{12} = a_{23} = c$, $a \neq c$, а остальные компоненты совпадают. Тогда $AB \neq BA$, т. е. S — некоммутативное полукольцо. Непосредственно проверяется, что центр $C(S)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & b \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, b \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Так как $0 \neq AD \in C(S)$, где $0 \neq A \in S \setminus C(S)$, $0 \neq D \in C(S)$ с $\alpha = 0$, то S — некоммутативное центрально существенное полукольцо. Однако кольцо разностей $D(S) = M_3(\mathbb{Z})$ не является центрально существенным кольцом, так как имеет нецентральные идемпотенты. Более того, в [8] доказано, что любая центрально существенная подалгебра в локальной треугольной матричной алгебре 3×3 коммутативна.

Приведем пример центрально существенного кольца, которое служит кольцом разностей для двух своих собственных полуколец S_1 и S_2, одно из которых является центрально существенным полукольцом, а другое — нет.

Пример 3. Пусть кольцо R состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & a & b & c & d & e & f \\ 0 & \alpha & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{1}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. В работе [8] доказано, что R — некоммутативное центрально существенное кольцо.

Пусть S_1 — полукольцо, порожденное матрицами вида (1) над $\mathbb{Z}^+$ и скалярными матрицами с $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ и нулями на остальных местах. Так как $C(S_1)$ состоит из скалярных матриц, то S_1 не является центрально существенным полукольцом. Заметим, что S_1 — полукольцо без делителей нуля. В тоже время полукольцо S_2 матриц вида (1) над полукольцом $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ является центрально существенным полукольцом.

Лемма 1 (см. [6, Chapter II, Theorem 5.13])**.** *Центральный элемент полукольца S принадлежит центру $C(D(S))$ его кольца разностей.*

Предложение 3. *Пусть S — центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Если кольцо $D(S)$ не содержит делителей нуля, то полукольцо S — коммутативно.*

Доказательство. Пусть $0 \neq a = x - y \in D(S)$. По условию $0 \neq xc = d$, $0 \neq yf = g$ для некоторых $c, d, f, g \in C(S)$. Тогда

$$a(cf) = (x-y)cf = (xc)f - (yf)c = df - gc.$$

Из леммы 1 следует, что $c, d, f, g \in C(D(S))$ и $ac' \in C(D(S))$, где $c' = cf$. Кроме того, $ac' \neq 0$, поскольку $D(S)$ не содержит делителей нуля. Тогда $D(S)$ — коммутативное кольцо; см. [10, Proposition 3.3]. □

3. Доказательство теоремы 1.

Напомним, что для группы G *верхний центральный ряд* есть цепь подгрупп

$$\{e\} = C_0(G) \subseteq C_1(G) \subseteq \dots,$$

где $C_i(G)/C_{i-1}(G)$ есть центр группы $G/C_{i-1}(G)$, $i \geqslant 1$. *Класс нильпотентности* группы G — наименьшее положительное целое n, такое, что $C_n(G) = G$ (если такое n существует).

Предложение 4 (Сравни [10, Proposition 2.6])**.** *Пусть G — конечная группа класса нильпотентности $n \leqslant 2$, S — коммутативное полукольцо без делителей нуля и свободное от нулевых сумм. Тогда SG — центрально существенное групповое полукольцо.*

Доказательство. Если $n = 1$, то группа G абелева и SG — центрально существенное групповое полукольцо; см. [10, Lemma 2.2].

Пусть $n = 2$. Так же, как в групповых кольцах (см., например, [14, Part 2]) центр $C(SG)$ есть свободный S-полумодуль с базисом

$$\left\{ \sum_K : K \text{ — класс сопряженных элементов в группе } G \right\}.$$

Достаточно проверить, что

$$SG \sum_{C(G)} \subseteq C(SG),$$

где $C(G)$ — центр группы G. Действительно, если $g, h \in G$, то

$$(gh)^{-1}hg \sum_{C(G)} = \sum_{C(G)},$$

так как $h^{-1}g^{-1}hg \in G' \subseteq C(G)$. □

Приведем пример некоммутативного аддитивно сократимого редуцированного централько существенного полукольца без делителей нуля.

Пример 4. Пусть Q_8 — группа кватернионов, т. е. группа с двумя образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4 = 1$, $a^2 = b^2$ и $aba^{-1} = b^{-1}$; см., например, [5, Section 4.4]. Имеем:

$$Q_8 = \{e, a, a^2, b, ab, a^3, a^2b, a^3b\},$$

с классами сопряженности

$$K_e = \{e\}, \quad K_{a^2} = \{a^2\}, \quad K_a = \{a, a^3\}, \quad K_b = \{b, a^2b\}, \quad K_{ab} = \{ab, a^3b\}$$

и центром $C(Q_8) = \{e, a^2\}$. Рассмотрим групповое полукольцо SQ_8, где $S = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Так как Q_8 — группа класса нильпотентности 2, то по предложению 4 SQ_8 — центрально существенное групповое полукольцо. Проиллюстрируем вышесказанное:

$$a \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_a}, \quad b \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_b}, \quad ab \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_{ab}}, \quad a^3 \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_a}, \quad a^2b \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_b}, \quad a^3b \sum_{C(Q_8)} = \sum_{K_{ab}}.$$

Групповое кольцо разностей $\mathbb{Q}Q_8$ является редуцированным кольцом; см. [15, Theorem 3.5]. Тогда SQ_8 — редуцированное полукольцо. Действительно, если $x^2 + y^2 = xy + yx$ и $x \neq y$, то $x^2 + y^2 - xy - yx = (x - y)^2 = 0$ в кольце $\mathbb{Q}Q_8$, что не так. Таким образом, SQ_8 — некоммутативное редуцированное центрально существенное полукольцо без делителей нуля. Заметим, что $\mathbb{Q}Q_8$ не является центрально существенным кольцом, поскольку центрально существенные редуцированные кольца коммутативны.

3.1. Окончание доказательства теоремы 1. Существование некоммутативного аддитивно сократимого редуцированного центрально существенного полукольца без делителей нуля следует из примера 4.

Если полукольцо S коммутативно, то $D(S)$ — коммутативное кольцо, т. е. является центрально существенным. Обратно, пусть $D(S)$ — центрально существенное кольцо. Так как S — редуцированное полукольцо, то $D(S)$ — редуцированное кольцо. Действительно, пусть $0 \neq a = x - y \in D(S)$. Если $a^2 = 0$, то $x^2 + y^2 = xy + yx$. Откуда $x = y$ и $a = 0$. Противоречие. Тогда кольцо $D(S)$ коммутативно как редуцированное центрально существенное кольцо. Следовательно, S также коммутативное полукольцо.

4. Замечания и открытые вопросы. Элемент x полукольца S называется *мультипликативно сократимым слева (справа)*, если импликация $xy = xz (yx = zx) \Rightarrow y = z$ выполнена для всех $y, z \in S$. Полукольцо S называется *мультипликативно сократимым слева (справа)*, если каждый $x \in S \setminus \{0\}$ мультипликативно сократим слева (справа). Мультипликативно сократимое слева и справа полукольцо называется *мультипликативно сократимым*; см., например. [6, Chapter I].

Замечание 2. Мультипликативно сократимое слева (справа) центрально существенное полукольцо коммутативно.

Действительно, пусть a и b — ненулевые элементы полукольца S. Так как S — центрально существенное полукольцо, то существует такой $c \in C(S)$, что $0 \neq ac \in C(S)$. Мультипликативно сократимое слева полукольцо не содержит левых делителей нуля; см. [6, Chapter I, Theorem 4.4]. Поэтому $acb \neq 0$. Тогда

$$(ac)b = c(ab) = (ca)b = b(ca) = c(ba),$$

откуда $ab = ba$. Аналогичные рассуждения проходят в случае мультипликативно сократимых справа полуколец.

Полукольцо с делением, не являющееся кольцом, называется *полутелом*. Коммутативное полутело называется *полуполем*. Из замечания 2 следует, что центрально существенное полутело является полуполем. В самом деле, из [6, Chapter I, Theorem 5.5] следует, что полутело, содержащее не менее двух элементов, мультипликативно сократимо.

Открытый вопрос 1. Существуют ли некоммутативные полувычитаемые центрально существенные полукольца без ненулевых нильпотентных элементов (см. предложение 1)?

Открытый вопрос 2. Существуют ли некоммутативные центрально существенные групповые полукольца без делителей нуля для групп класса нильпотентности $n > 2$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марков В. Т., Туганбаев А. А.* Центрально существенные кольца// Дискр. мат. — 2018. — *30*, № 2. — С. 55–61.
2. *Чермных В. В.* Пучковые представления полуколец// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 5 (293). — С. 185–186.
3. *Clifford A. H., Prieston G. B.* The Algebraic Theory of Semigroups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1961.
4. *Golan J. S.* Semirings and Their Applications. — Dordrecht–Boston–London: Springer, 1999.
5. *Hall M.* The Theory of Groups. — New York: MacMillan, 1959.
6. *Hebisch U., Weinert H. J.* Semirings: Algebraic Theory and Application in Computer Science. — Singapore: World Scientific.
7. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential endomorphism rings of abelian groups// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 3. — P. 1249–1256.
8. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Local centrally essential subalgebras of triangular algebras// Lin. Multilin. Algebra. — 2022. — *70*, № 13. — P. 2415–2424.
9. *Lyubimtsev O. V., Tuganbaev A. A.* Centrally essential torsion-free rings of finite rank// Beitr. Algebra Geom. — 2021. — *62*, № 3. — P. 615–622.
10. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Centrally essential group algebras// J. Algebra. — 2018. — *512*, № 15. — P. 109–118.
11. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Rings essential over their centers// Commun. Algebra. — 2019. — *47*, № 4. — P. 1642–1649.
12. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Uniserial Noetherian centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 149–153.
13. *Markov V. T., Tuganbaev A. A.* Constructions of centrally essential rings// Commun. Algebra. — 2020. — *48*, № 1. — P. 198–203.
14. *Passman D. S.* The Algebraic Structure of Group Rings. — New York: Wiley, 1977.
15. *Sehgal S. K.* Nilpotent elements in group rings// Manuscr. Math. — 1975. — *15*, № 1. — P. 65–80.

Любимцев Олег Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: `oleg_lyubimcev@mail.ru`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`