ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 219 (2023). С. 3–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-219-3-15

УДК 512.541

УМНОЖЕНИЯ НА ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

© 2023 г. **Е. И. КОМПАНЦЕВА, А. А. ТУГАНБАЕВ**

Аннотация. Умножением на абелевой группе G называется любой гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$. Множество $\operatorname{Mult} G$ всех умножений на абелевой группе G само является абелевой группой относительно сложения. В работе описаны группы умножений групп из класса $\mathcal{A}_0$ всех абелевых блочно-жестких почти вполне разложимых групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Показано, что для любой группы G из класса $\mathcal{A}_0$ группа $\operatorname{Mult} G$ также принадлежит этому классу. Описаны ранг, регулятор, регуляторный индекс, инварианты почти изоморфизма, главное разложение и стандартное представление группы $\operatorname{Mult} G$ для $G\in\mathcal{A}_0$.

***Ключевые слова*:** абелева группа, почти вполне разложимая абелева группа, кольцо на абелевой группе, группа умножений абелевой группы.

MULTIPLICATIONS ON TORSION-FREE GROUPS OF FINITE RANK

© 2023 **E. I. KOMPANTSEVA, A. A. TUGANBAEV**

Abstract. A multiplication on an Abelian group G is an arbitrary homomorphism $\mu\colon G\otimes G\to G$. The set $\operatorname{Mult} G$ of all multiplications on an Abelian group G is itself an Abelian group with respect to addition. In this paper, we discuss the multiplication groups of groups from the class $\mathcal{A}_0$ of all Abelian block-rigid, almost completely decomposable groups of ring type with cyclic regulatory factors. We show that for any group G from the class $\mathcal{A}_0$, the group $\operatorname{Mult} G$ also belongs to this class. The rank, regulator, regulator index, almost isomorphism invariants, principal decomposition, and standard representation of the group $\operatorname{Mult} G$ for $G\in\mathcal{A}_0$ are described.

***Keywords and phrases*:** Abelian group, almost completely decomposable Abelian group, ring on an Abelian group, multiplication group of an Abelian group.

***AMS Subject Classification*:** 20K30, 20K99, 16B99

1. Введение. *Умножением* на абелевой группе G называется гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$. Множество всех умножений на абелевой группе G само является абелевой группой относительно сложения и обозначается $\operatorname{Mult} G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G. Проблема изучения взаимосвязи между строением абелевой группы и свойствами кольцевых структур на ней весьма многогранна и имеет долгую историю в алгебре; см. [1, 2, 6, 7, 10, 11, 13, 14].

В настоящей работе рассматриваются только аддитивно записанные абелевы группы и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа».

Работа посвящена изучению групп умножений почти вполне разложимых абелевых групп.

Группа без кручения G конечного ранга называется *почти вполне разложимой* группой (ACD-*группой*) если G содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. ACD-группы изучались в [3–5, 12, 18, 19] и других работах. Достигнутый уровень развития теории ACD-групп зафиксирован в книге [19].

Любая ACD-группа G содержит особую однозначно определенную вполне разложимую (см. [9]) подгруппу $\operatorname{Reg} G$ конечного индекса, которая является ее вполне инвариантной подгруппой и называется *регулятором* группы G. Регулятор ACD-группы можно определить как пересечение всех ее вполне разложимых подгрупп наименьшего индекса [4]. Фактор-группа $G/\operatorname{Reg} G$ называется *регуляторным фактором* группы G, а индекс подгруппы $\operatorname{Reg} G$ в группе G называется *регуляторным индексом* и обозначается $n(G)$. ACD-группы с циклическим регуляторным фактором часто называют *CRQ-группами.*

Пусть G — почти вполне разложимая группа. Тогда группа $\operatorname{Reg} G$ однозначно, с точностью до изоморфизма, представима в виде прямой суммы групп без кручения ранга 1 (см. [8, Proposition 86.1]). Для каждого типа τ обозначим через $\operatorname{Reg}_\tau G$ сумму прямых слагаемых ранга 1 и типа τ в прямом разложении группы $\operatorname{Reg} G$. Множество типов

$$T(G) = T(\operatorname{Reg} G) = \Big\{\tau\text{-тип} \mid \operatorname{Reg}_\tau G \neq 0\Big\}$$

называется *множеством критических типов* групп G и $\operatorname{Reg} G$. Если $T(G)$ состоит из попарно не сравнимых типов, то группы G и $\operatorname{Reg} G$ называются *блочно-жесткими* группами. Если, к тому же, для любого $\tau \in T(G)$ группа $\operatorname{Reg}_\tau G$ имеет ранг 1, то G и $\operatorname{Reg} G$ называются *жесткими* группами. Если все типы из $T(G)$ идемпотентны, то G называется группой *кольцевого типа.*

Отметим, что блочно-жесткая ACD-группа либо делима, либо редуцирована. Группа умножений делимой группы без кручения описана в [8, Sec. 121], поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только редуцированные группы.

Обозначим через $\mathcal{A}_0$ класс всех редуцированных блочно-жестких CRQ-групп кольцевого типа. В разделе 2 описана группа $\operatorname{Mult} G$ для $G \in \mathcal{A}_0$ (теорема 2.8). Цель раздела 3 — изучить свойства групп умножений групп из класса $\mathcal{A}_0$. Доказано (теорема 3.3), что если G — блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа, то $\operatorname{Mult} G$ — также блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа. Описаны ранг, регулятор, регуляторный индекс, инварианты почти изоморфизма, главное разложение и стандартное представление группы $\operatorname{Mult} G$ для $G \in \mathcal{A}_0$.

Умножение $\mu\colon G \otimes G \to G$ часто обозначается знаком $\times$, т.е. $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Умножение $\times$ на группе G задает кольцо на этой группе, которое обозначается $(G, \times)$. Пусть G — группа и $g \in G$. Характеристика и порядок элемента g обозначаются $\chi(g)$ и $o(g)$ соответственно. Через $r(G)$ обозначается ранг группы G, $\tilde{G}$ — делимая оболочка группы G. Если $S \subseteq G$, то $|S|$ — мощность множества S, $\langle S\rangle$ подгруппа группы G, порожденная множеством S. Если H — подгруппа группы G, то $[G : H]$ — индекс подгруппы H в G. Элемент прямого произведения $\prod\limits_{i\in I} G_i$ групп будем записывать в виде $(g_i)_{i\in I}$. Если $I_1 \subseteq I$, то для простоты подгруппу

$$\left\{(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \mid g_i = 0 \text{ при всех } i \notin I_1\right\}$$

группы $\prod\limits_{i\in I} G_i$ будем отождествлять с группой $\prod\limits_{i\in I_1} G_i$, а ее элементы записывать в виде $(g_i)_{i\in I_1}$.

Как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ — множества натуральных и всех простых чисел соответственно, $\mathbb{Z}$ — группа (кольцо) целых чисел, $\mathbb{Q}$ — группа (поле) рациональных чисел. Если R — кольцо с 1, то Re — циклический модуль над R, порожденный элементом e. Если S — конечное подмножество в $\mathbb{Z}$, то $\gcd(S)$ — наибольший общий делитель всех чисел из S, $\operatorname{lcm}(S)$ — наименьшее общее кратное чисел из S. Если $P_1 \subseteq \mathbb{P}$, то P_1-*числом* мы будем называть целое число, любой простой делитель которого (если он существует) содержится в P_1. Из определения следует, что 1 является P_1-числом при любом $P_1 \subseteq \mathbb{P}$.

Для любого типа τ обозначим

$$P_\infty(\tau) = \big\{p \in \mathbb{P} \mid \tau(p) = \infty\big\}, \quad P_0(\tau) = \mathbb{P} \setminus P_\infty(\tau).$$

За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к книгам [8, 9, 17].

2. Группа умножений блочно-жесткой CRQ-группы кольцевого типа. *Везде в этом разделе G — редуцированная блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа с регулятором A, регуляторным фактором $G/A = \langle d+A\rangle$, регуляторным индексом n и множеством критических типов $T(G) = T(A)$.*

Обозначив $\operatorname{Reg}_\tau G = A_\tau$, группу A можно представить в виде

$$A = \bigoplus_{\tau\in T(G)} A_\tau.$$

Согласно [19, Proposition 2.4.11], такое разложение вполне разложимой группы однозначно в точности тогда, когда A — блочно-жесткая группа. Для делимых оболочек $\tilde{G}$, $\tilde{A}$ и $\tilde{A}_\tau$ групп G, A и A_τ соответственно имеют место равенства

$$\tilde{G} = \tilde{A} = \bigoplus_{\tau\in T(G)} \tilde{A}_\tau.$$

Для $\tau \in T(G)$ обозначим через π_τ проекцию группы $\tilde{G}$ на $\tilde{A}_\tau$.

В [5] определены натуральные числа $m_\tau = m_\tau(G)$ $(\tau \in T(G))$, которые являются инвариантами почти изоморфизма группы G и не зависят от выбора элемента d, удовлетворяющего условию $\langle d + A\rangle = G/A$. Числа m_τ $(\tau \in T(G)$ можно определить следующим образом. Возьмем элемент $d \in G/A$, для которого $\langle d+A\rangle = G/A$. Пусть $d_\tau = \pi_\tau(d) \in \tilde{A}_\tau$, положим $m_\tau = o(d_\tau + A)$ — порядок элемента $d_\tau + A$ в периодической группе $\tilde{A}/A$. Отметим, что $n = o(d + A) = \operatorname{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T(G)\}$.

Замечание 2.1. Пусть T — конечное множество попарно не сравнимых типов, $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ — некоторое множество натуральных чисел. Будем говорить, что множество $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ удовлетворяет *условию* (m), если для любых $p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in T$ из того, что p^k делит m_τ, следует, что p^k делит m_σ при некотором $\sigma \in T \setminus \{\tau\}$. Отметим, что множество $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ удовлетворяет условию (m) в точности тогда, когда условию (m) удовлетворяет множество $\{m_\tau \mid \tau \in T,\, m_\tau > 1\}$.

Согласно [19, Theorem 13.1.2], множество $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ является системой инвариантов почти изоморфизма некоторой блочно-жесткой CRQ-группы G с $T(G) = T$ в точности тогда, когда это множество удовлетворяет условию (m) и m_τ являются $P_0(\tau)$-числами при всех $\tau \in T$. $\triangleright$

В [3, Theorem 3.5] показано, что для любой группы $G \in \mathcal{A}_0$ существует прямое разложение

$$G = G_1 \oplus C, \tag{1}$$

где C — вполне разложимая группа, G_1 — жесткая CRQ-группа, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\tau \in T(G_1) \text{ в точности тогда, когда } m_\tau(G) > 1, \tag{$1'$}$$

$$m_\tau(G_1) = m_\tau(G) \text{ для всех } \tau \in T(G_1). \tag{$1''$}$$

Разложение (1), удовлетворяющее условиям ($1'$) и ($1''$), называется *главным разложением* группы G. Группа G_1 в главном разложении группы G не содержит вполне разложимых прямых слагаемых; такие группы называются *усеченными*. Отметим, что главное разложение CRQ - группы определяется неоднозначно, так как оно зависит от выбора элемента d, участвующего в задании группы. Далее везде считаем главное разложение группы G фиксированным. Положим $T_0(G) = \{\tau \in T(G) \mid m_\tau > 1\}$. Тогда $T_0(G)$ — множество критических типов усеченного прямого слагаемого в любом главном разложении группы G.

Введем обозначение

$$D = \{d \in G_1 \mid G/A = \langle d + A\rangle\}.$$

Пусть B — регулятор группы G_1; тогда $T(G_1) = T(B) = T_0(G)$ и $\tilde{G}_1 = \tilde{B}$. Пусть $d \in D$; тогда существует такая система

$$E_0 = \{e_0^{(\tau)} \in B_\tau \mid \tau \in T(B)\},$$

что

$$B = \bigoplus_{\tau\in T(B)} R_\tau e_0^{(\tau)}, \tag{2}$$

где R_τ — унитарное подкольцо поля рациональных чисел, тип аддитивной группы которого равен τ, характеристики $\chi(e_0^{(\tau)}) \in \tau$ содержат только нули и символы ∞ ($\tau \in T(B)$), при этом элемент $d \in \tilde{B}$ можно представить в виде

$$d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{r_\tau} e_0^{(\tau)},$$

где $s_\tau \in \mathbb{Z}$, $r_\tau \in \mathbb{N}$, $\gcd(s_\tau, r_\tau) = 1$. Без потери общности можно считать, что s_τ, r_τ являются $P_0(\tau)$-числами (в противном случае можно заменить систему E_0).

Пусть $\tau \in T(B)$. Так как по определению числа m_τ в группе $\tilde{A}/A$ выполняется соотношение

$$o\left(\frac{s_\tau}{r_\tau} e_0^{(\tau)} + A\right) = m_\tau,$$

r_τ — $P_0(\tau)$-число и $\gcd(s_\tau, r_\tau) = 1$, то $r_\tau = m_\tau$. Следовательно, элемент d в группе $\tilde{A}$ имеет вид

$$d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}, \tag{3}$$

и числа n, m_τ и s_τ удовлетворяют следующим условиям:

$$n = \operatorname{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T(B)\}, \tag{$3'$}$$

$$\gcd(s_\tau, m_\tau) = 1 \text{ для всех } \tau \in T(B), \tag{$3''$}$$

$$s_\tau \text{ и } m_\tau \text{ являются } P_0(\tau)\text{-числами при любом } \tau \in T(B). \tag{$3'''$}$$

Система $E_0 = \{e_0^{(\tau)} \in B_\tau \mid \tau \in T(B)\}$, удовлетворяющая условиям (2) и (3), называется *B-базисом* группы G, определяемым элементом d. Отметим, что пара (d, E_0) однозначно определяет числа s_τ ($\tau \in T(B)$). Равенство (3) называется *стандартным представлением* блочно-жесткой CRQ-группы G, связанным с парой (d, E_0).

Замечание 2.2. Отметим, что B-базис E_0 может определяться не одним элементом $d \in D$.

Действительно, пусть задано стандартное представление (3) группы G. Пусть γ — целое число, взаимно простое с регуляторным индексом n, $d_1 = \gamma d \in G_1$. Тогда $G/A = \langle d + A\rangle = \langle d_1 + A\rangle$, т.е. $d_1 \in D$. При этом

$$d_1 = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{\gamma s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}. \tag{4}$$

Если γ является $P_0(\tau)$-числом, то равенство (4) — стандартное представление группы G. Следовательно, B-базис E_0 определяется каждым из элементов d и d_1.

Отметим, что если γ не является $P_0(\tau)$-числом, то равенство (4) не является стандартным представлением группы G.

Для B-базиса E_0 введем обозначение

$$D(E_0) = \{d \in D \mid B\text{-базис } E_0 \text{ определяется элементом } d\}.$$

Из определения B-базиса следует, что $D(E_0) \neq \varnothing$, а из замечания 2.2 следует, что $D(E_0)$ может содержать более одного элемента.

При подходящем выборе элементов $e_i^{(\tau)} \in C_\tau$ ($i = 0, 1, \ldots, k_\tau$) группа C может быть записана в виде

$$C = \bigoplus_{\tau \in T(C)} C_\tau = \bigoplus_{\tau \in T(C)} \bigoplus_{i=1,\ldots,k_\tau} R_\tau e_i^{(\tau)},$$

где R_τ — унитарное подкольцо поля рациональных чисел, тип аддитивной группы которого равен τ, и характеристики $\chi(e_i^{(\tau)}) \in \tau$ содержат только нули и символы ∞.

Для $\tau \in T(G)$ определим следующие множества:

$$I_\tau(B) = \begin{cases} \{0\} & \text{при } \tau \in T(B), \\ \emptyset & \text{при } \tau \notin T(B), \end{cases} \qquad I_\tau(C) = \begin{cases} \{1, \ldots, k_\tau\} & \text{при } \tau \in T(C),\ k_\tau \in \mathbb{N}, \\ \emptyset & \text{при } \tau \notin T(C), \end{cases}$$

$$I_\tau = I_\tau(B) \cup I_\tau(C).$$

Тогда $A_\tau = \bigoplus_{i\in I_\tau} R_\tau e_i^{(\tau)}$ при любом $\tau \in T(G)$ и

$$A = \bigoplus_{\tau\in T(G)} \bigoplus_{\tau\in I_\tau} R_\tau e_i^{(\tau)}. \tag{5}$$

Система $E = \left\{e_i^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G), i \in I_\tau\right\}$ называется A-*базисом* группы G, если E удовлетворяет (5) и ее подсистема $E_0 = \left\{e_0^{(\tau)} \in B_\tau \mid \tau \in T(B)\right\}$ является B-базисом.

Пусть $(G, \times)$ — кольцо на группе $G \in \mathcal{A}_0$. Так как A — вполне инвариантная подгруппа группы G, то A — идеал кольца $(G, \times)$, являющийся прямой суммой идеалов A_τ ($\tau \in T(G)$). Таким образом, каждое умножение на G индуцирует умножение на A, откуда $\operatorname{Mult} G \subseteq \operatorname{Mult} A$, однако обратное не верно.

Пусть $E = \left\{e_i^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G), i \in I_\tau\right\}$ — A-базис группы G. Тогда для любого множества $\left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i,j \in I_\tau\right\}$ существует единственное кольцо $(A, \times)$, в котором $e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} = u_{ij}^{(\tau)}$ для всех $\tau \in T(G)$ и $i, j \in I_\tau$. Умножение $\times$ единственным образом продолжается до умножения на $\tilde{A} = \tilde{G}$, где оно определяется следующим образом:

$$\sum_{i\in I_\tau} r_i e_i^{(\tau)} \times \sum_{i\in I_\tau} r_i' e_i^{(\tau)} = \sum_{i,j\in I_\tau} r_i r_j' (e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)}) \tag{6}$$

для всех $\tau \in T(G)$, $r_i, r_j' \in \mathbb{Q}$; и $\tilde{A}_\tau \times \tilde{A}_\sigma = 0$ при $\tau \neq \sigma$. Однако G не обязательно является подкольцом кольца $(\tilde{A}, \times)$. Другими словами, существует такое множество

$$\left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i,j \in I_\tau\right\},$$

что в любом кольце $(G, \times)$ при некоторых $\tau \in T(G)$, $i, j \in I_\tau$ выполняется $e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} \neq u_{ij}^{(\tau)}$. Будем говорить, что множество $\left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i,j \in I_\tau\right\}$ *определяет умножение* на G относительно A-базиса E, если существует кольцо $(G, \times)$, в котором $e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} = u_{ij}^{(\tau)}$ для всех $\tau \in T(G)$ и $i, j \in I_\tau$. Отметим, что любое множество $\left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i,j \in I_\tau\right\}$ определяет умножение на группе G относительно A-базиса E не более, чем одним способом.

Пусть $G \in \mathcal{A}_0$, для описания множеств, задающих умножения на группе G, определим следующие группы.

Для любого $\tau \in T(G)$ обозначим $n_\tau = |I_\tau|$, $M_\tau^{(0)} = M_{n_\tau}(A_\tau)$ — аддитивная группа квадратных матриц порядка n_τ с элементами из A_τ,

$$M_\tau^{(1)} = \begin{bmatrix} m_\tau A_\tau & m_\tau A_\tau & \dots & m_\tau A_\tau \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \end{bmatrix},$$

где запись $[\dots]$ означает множество матриц определенной формы, m_τ — инварианты почти изоморфизма группы G,

$$M_\tau^{(2)} = \begin{bmatrix} m_\tau^2 A_\tau & m_\tau A_\tau & \dots & m_\tau A_\tau \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \end{bmatrix} \subseteq M_\tau^{(1)}.$$

Положим

$$M^{(0)} = \prod_{\tau\in T(G)} M_\tau^{(0)}, \quad M^{(1)} = \prod_{\tau\in T(G)} M_\tau^{(1)}, \quad M^{(2)} = \prod_{\tau\in T(G)} M_\tau^{(2)}.$$

Тогда

$$M^{(2)} \subseteq M^{(1)} \subseteq M^{(0)}, \quad M^{(2)} \cong M^{(1)} \cong M^{(0)} \cong \operatorname{Mult} A.$$

Для стандартного представления (3) группы G, связанного с парой (d, E_0), и каждого $\tau \in T(G)$ рассмотрим элементы

$$X^{(\tau)} = X^{(\tau)}(d, E_0) = \begin{pmatrix} m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in M_\tau^{(1)}, \quad \text{если } \tau \in T(B),$$

где s_τ^{-1} — целое число, обратное к s_τ по модулю m_τ,

$$X^{(\tau)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in M_\tau^{(1)}, \quad \text{если } \tau \notin T(B).$$

Положим

$$X = X(d, E_0) = \left(X^{(\tau)}\right)_{\tau \in T(G)} = \left(X^{(\tau)}\right)_{\tau \in T(B)} \in M^{(1)}, \quad M(d, E_0) = \langle X, M^{(2)} \rangle \subseteq M^{(1)}.$$

Отметим, что целые решения сравнения $s_\tau x \equiv 1 \pmod{m}_\tau$ образуют класс вычетов по модулю m_τ. Поэтому множество $M(d, E_0)$ не зависит от выбора чисел s_τ^{-1} при определении X.

Также отметим, что если $\tau \in T(C) \setminus T(B)$, то $m_\tau = 1$ в силу $(1')$. Поэтому в этом случае

$$M_\tau^{(2)} = M_\tau^{(1)} = M_\tau^{(0)}.$$

Для каждого множества $U = \{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\}$ и каждого $\tau \in T(G)$ рассмотрим матрицу

$$U^{(\tau)} = \begin{pmatrix} u_{i_1,i_1}^{(\tau)} & u_{i_1,i_2}^{(\tau)} & \ldots & u_{i_1,i_{n_\tau}}^{(\tau)} \\ u_{i_2,i_1}^{(\tau)} & u_{i_2,i_2}^{(\tau)} & \ldots & u_{i_2,i_{n_\tau}}^{(\tau)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i_{n_\tau},i_1}^{(\tau)} & u_{i_{n_\tau},i_2}^{(\tau)} & \ldots & u_{i_{n_\tau},i_{n_\tau}}^{(\tau)} \end{pmatrix} \in M_\tau^{(0)},$$

где $i_k \in I_\tau$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n_\tau}$. Положим $\overline{U} = \left(U^{(\tau)}\right)_{\tau \in T(G)} \in M^{(0)}$.

Замечание 2.3. Пусть $G \in \mathcal{A}_0$, $G = G_1 \oplus C$ — главное разложение группы G, $\operatorname{Reg} G = A$, $\operatorname{Reg} G_1 = B$. В [12] доказано, что при любом умножении $\times$ на группе G имеем

$$B_\tau \times A \subseteq m_\tau A_\tau \quad \text{и} \quad A \times B_\tau \subseteq m_\tau A_\tau \quad \text{для всех} \ \ \tau \in T(B).$$

Теорема 2.4. *Пусть G — блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа с A-базисом E, содержащим B-базис E_0. Пусть $U = \{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\}$. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *U задает умножение на G относительно A-базиса E*;
(2) *$\overline{U} \in M(d, E_0)$ при любом $d \in D(E_0)$*;
(3) *$\overline{U} \in M(d, E_0)$ при некотором $d \in D(E_0)$.*

Доказательство. (1) ⇒ (2). Пусть задано стандартное представление (3) группы G и пусть множество

$$U = \left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\right\}$$

задает умножение $\times$ на G относительно A-базиса

$$E = \left\{e_i^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i \in I_\tau\right\}.$$

В силу замечания 2.3 имеем $u_{0i}^{(\tau)}, u_{i0}^{(\tau)} \in m_\tau A_\tau$ и $u_{00}^{(\tau)} = m_\tau v_{00}^{(\tau)}$ $(v_{00}^{(\tau)} \in A_\tau)$ при всех $\tau \in T(B)$, $i \in I_\tau$.

Пусть $d \in D(E_0)$ и стандартное представление, связанное с парой (d, E_0), имеет вид

$$d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}.$$

Так как $d \times d \in G$, то $d \times d = \alpha d + a$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $a \in A$. Тогда

$$d \times d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{\alpha s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} + a. \tag{7}$$

С другой стороны, из (6) вытекает, что

$$d \times d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} \times \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau^2}{m_\tau^2} u_{00}^{(\tau)} = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau^2}{m_\tau} v_{00}^{(\tau)}. \tag{8}$$

Пусть $\tau \in T(B)$. Из (7) и (8) получаем

$$\pi_\tau(d \times d) = \frac{s_\tau^2}{m_\tau} v_{00}^{(\tau)} = \frac{\alpha s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} + a_\tau, \text{ где } a_\tau = \pi_\tau(a) \in A_\tau.$$

Следовательно, $s_\tau^2 v_{00}^{(\tau)} = \alpha s_\tau e_0^{(\tau)} + m_\tau a_\tau$, откуда $v_{00}^{(\tau)} = \alpha s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} + m_\tau a'_\tau$ для некоторого $a'_\tau \in A_\tau$, где s_τ^{-1} — целое число, обратное к s_τ по модулю m_τ. Значит,

$$u_{00}^{(\tau)} = m_\tau v_{00}^{(\tau)} = \alpha m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} + m_\tau^2 a'_\tau.$$

Следовательно, $\overline{U} \in \alpha X + M^{(2)} \subseteq M(d, E_0)$.

Импликация (2) ⇒ (3) очевидна.

(3) ⇒ (1). Пусть $\overline{U} \in M(d, E_0)$ при некотором $d \in D(E_0)$. Тогда $\overline{U} = \alpha X + Y$ при некоторых $\alpha \in \mathbb{Z}$, $Y \in M^{(2)}$. Отсюда для всех $\tau \in T(B)$ и $i \in I_\tau$ имеем

$$u_{0i}^{(\tau)} = m_\tau v_{0i}^{(\tau)}, \quad u_{i0}^{(\tau)} = m_\tau v_{i0}^{(\tau)}, \quad u_{00}^{(\tau)} = \alpha m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} + m_\tau^2 a_\tau,$$

где $v_{0i}^{(\tau)}, v_{i0}^{(\tau)}, a_\tau \in A_\tau$ и целые числа s_τ^{-1} удовлетворяют условиям $s_\tau s_\tau^{-1} = 1 + m_\tau x_\tau$ при некоторых $x_\tau \in \mathbb{Z}$.

Существует кольцо $(A, \times)$, в котором $e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} = u_{ij}^{(\tau)}$ для всех $\tau \in T(G)$, $i, j \in I_\tau$; и $A_\tau \times A_\sigma = 0$ при $\tau \neq \sigma$. Это умножение продолжается до умножения на делимой оболочке $\tilde{A} = \tilde{G}$ группы A. Покажем, что G — подкольцо кольца $(\tilde{A}, \times)$.

Пусть стандартное представление, связанное с (d, E_0), имеет вид

$$d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}.$$

Тогда из (6) вытекает, что

$$\begin{aligned} d \times d &= \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau^2}{m_\tau^2} u_{00}^{(\tau)} = \alpha \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau^2 s_\tau^{-1}}{m_\tau} e_0^{(\tau)} + \sum_{\tau \in T(B)} s_\tau^2 a_\tau = \alpha \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau}(1 + m_\tau x_\tau) e_0^{(\tau)} + \sum_{\tau \in T(B)} s_\tau^2 a_\tau = \\ &= \alpha \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} + \sum_{\tau \in T(B)} (\alpha s_\tau x_\tau) e_0^{(\tau)} + \sum_{\tau \in T(B)} s_\tau^2 a_\tau = \alpha d + \sum_{\tau \in T(B)} (\alpha s_\tau x_\tau e_0^{(\tau)} + s_\tau^2 a_\tau) \in G. \end{aligned}$$

Кроме того, если $\sigma \in T(B)$ и $i \in I_\sigma$, то

$$d \times e_i^{(\sigma)} = \left(\sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} \right) \times e_i^{(\sigma)} = \frac{s_\sigma}{m_\sigma} u_{0i}^{(\sigma)} = \frac{s_\sigma}{m_\sigma} m_\sigma v_{0i}^{(\sigma)} = s_\sigma v_{0i}^{(\sigma)} \in A.$$

Аналогично имеем $e_i^{(\sigma)} \times d \in A$.

Если $\sigma \notin T(B)$, то $d \times e_i^{(\sigma)} = e_i^{(\sigma)} \times d = 0$ при любом $i \in I_\sigma$. Так как $G = \langle d, A \rangle$, то G — подкольцо кольца $(\tilde{A}, \times)$. Значит, множество U определяет умножение на G. □

Из теоремы 2.4 следует, что группа $M(d, E_0)$ не зависит от выбора элемента $d \in D(E_0)$. В следующем утверждении рассмотрим связь между элементами групп $M(d_1, E_0)$ и $M(d_2, E_0)$ при $d_1, d_2 \in D(E_0)$. Заметим, что если $d_1, d_2 \in D$, то $\langle d_1 + A \rangle = \langle d_2 + A \rangle = G/A$, откуда $d_1 = \gamma d_2 + b$ при некотором целом γ, взаимно простом с n, и некотором $b \in B$.

Предложение 2.5. *Пусть G — группа из $\mathcal{A}_0$ с главным разложением* (1), *B-базисом E_0 и регуляторным индексом n. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $M(d_1, E_0) = M(d_2, E_0)$ *при любых* $d_1, d_2 \in D(E_0)$;
(2) *если* $d_1, d_2 \in D(E_0)$ *и* $d_1 = \gamma d_2 + b$, *где* $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{lcd}(\gamma, n) = 1$, $b \in B$, $X_1 = X(d_1, E_0) \in M(d_1, E_0)$, $X_2 = X(d_2, E_0) \in M(d_2, E_0)$, *то* $X_1 + M^{(2)} = \gamma^{-1} X_2 + M^{(2)}$, *где* γ^{-1} — *целое число, обратное к* γ *по модулю* n.

Доказательство. Пусть $d_1, d_2 \in D(E_0)$, $d_1 = \gamma d_2 + b$, где $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{lcd}(\gamma, n) = 1$ и $b = \sum\limits_{\tau \in T(B)} b_\tau e_0^{(\tau)}$ $(b_\tau \in R_\tau)$. Пусть

$$d_1 = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}, \quad d_2 = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{t_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)}$$

— стандартные представления группы G, связанных с (d_1, E_0) и (d_2, E_0) соответственно. В делимой оболочке $\tilde{G}$ группы G верны соотношения

$$\sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)} = d_1 = \gamma d_2 + b = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{\gamma t_\tau + m_\tau b_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)},$$

откуда

$$s_\tau = \gamma t_\tau + m_\tau b_\tau \ \text{ при всех } \ \tau \in T(B). \tag{9}$$

Пусть $\tau \in T(B)$, γ^{-1} — целое число, обратное к γ по модулю n, t_τ^{-1} — целое число, обратное к t_τ по модулю m_τ. Тогда число γ^{-1} обратно к γ по модулю m_τ в силу $(3')$, откуда следует, что число $\gamma^{-1} t_\tau^{-1}$ обратно к s_τ по модулю m_τ в силу (9).

Пусть $a_\tau \in A_\tau$. Тогда

$$s_\tau^{-1} m_\tau e_0^{(\tau)} + m_\tau^2 a_\tau = \gamma^{-1} t_\tau^{-1} m_\tau e_0^{(\tau)} + m_\tau^2 a'_\tau, \text{ где } a'_\tau \in A_\tau.$$

Следовательно,

$$X_1 + M^{(2)} \subseteq \gamma^{-1} X_2 + M^{(2)}. \tag{10}$$

Так как $d_2 = \gamma^{-1} d_1 + b'_1$, где $b'_1 \in B$, то

$$\gamma^{-1} X_2 + M^{(2)} \subseteq \gamma^{-1}(\gamma X_1 + M^{(2)}) + M^{(2)} = X_1 + M^{(2)}$$

в силу (10). $\square$

В силу предложения 2.5 можем обозначать $M(d, E_0) = M(E_0)$, однако часто будем писать $M(d, E_0)$, если хотим указать, какое стандартное представление мы используем в определении группы $M(d, E_0)$.

Замечание 2.6. Пусть для множества $U = \left\{u_{ij}^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\right\}$ имеем $\overline{U} \in M^{(2)}$. Из теоремы 2.4 следует, что относительно любого A-базиса E группы G множество U определяет умножение $\times_{U,E}$ на G, при этом $G \times_{U,E} G \subseteq A$. Такое умножение будем называть *регуляторным*.

Пример 2.7. Множество $U = \left\{u_{ij}^{(\tau)} \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\right\}$ может определять умножение на G относительно одного A-базиса и не определять ни одного умножения на G относительно другого A-базиса даже при неизменном главном разложении. Более того, возможна ситуация, когда существуют два A-базиса E и F такие, что любое множество U, определяющее не регуляторное умножение относительно E, не определяет ни одного умножения относительно F. Это значит, что

$$M(E_0) \cap M(F_0) = M^{(2)}.$$

Пусть s_1 и s_2 — взаимно простые целые числа, $s_1 > 1$ и $s_2 > 1$, и пусть m — простое число, не делящее ни одно из чисел s_1, s_2, $s_1^2 - s_2^2$.

Пусть τ_i — такой идемпотентный тип, что $P_0(\tau_i)$ — множество всех простых делителей чисел m и s_i соответственно $(i = 1, 2)$. Тогда типы τ_1 и τ_2 не сравнимы.

Рассмотрим группу $B = R_1 e_1 \oplus R_2 e_2$, где R_1 и R_2 — подкольца с единицей поля $\mathbb{Q}$, аддитивные группы которых имеют типы τ_1 и τ_2 соответственно.

В силу замечания 2.1 существует CRQ-группа $G = \langle d, B\rangle$ с регулятором B и инвариантами квазиизоморфизма $m_{\tau_1} = m_{\tau_2} = m$. Группу G можно выбрать так, что ее стандартное представление имеет вид

$$d = \frac{s_1}{m}e_1 + \frac{s_2}{m}e_2.$$

Тогда система $E_0 = \{e_1, e_2\}$ является B-базисом группы G, определяемым элементом d (в данном случае B-базис совпадает с A-базисом).

Введем обозначения

$$B_1 = B_{\tau_1} = R_1e_1, \quad B_2 = B_{\tau_2} = R_2e_2.$$

Рассмотрим $d_1 = d + (e_1 + e_2) \in G$. Тогда $d_1 \in D$, и в $\tilde{G}$ имеем

$$d_1 = \frac{s_1 + m}{m}e_1 + \frac{s_2 + m}{m}e_2. \tag{11}$$

Так как $s_i + m$ взаимно просто с каждым из чисел s_i и m, то $s_i + m$ является $P_\infty(\tau_i)$-числом при $i = 1, 2$. Следовательно, (11) не является стандартным представлением группы G. Положим $f_1 = (s_1+m)e_1$ и $f_2 = (s_2+m)e_2$. Тогда система $F_0 = \{f_1, f_2\}$ является B-базисом, определяемым элементом d_1. Стандартное представление группы G, связанное с парой (d_1, F_0), имеет вид

$$d_1 = \frac{1}{m}f_1 + \frac{1}{m}f_2.$$

Пу сть множество $U = \{u_i \in B_i \mid i = 1, 2\}$ определяет не регуляторное умножение на G относительно B-базиса $E_0 = \{e_1, e_2\}$. Тогда по теореме 2.4 имеем $(u_1, u_2) \in M(d, E_0) \setminus M^{(2)}$. Следовательно,

$$u_1 \in \alpha m s_1^{-1}e_1 + m^2B_1, \quad u_2 \in \alpha m s_2^{-1}e_2 + m^2B_2, \tag{12}$$

при некотором целом числе α, не делящемся на простое число m.

Допустим, что множество U определяет умножение относительно B-базиса $F_0 = \{f_1, f_2\}$. Тогда в силу теоремы 2.4 при некотором $\beta \in \mathbb{Z}$ имеем

$$u_1 \in \beta m f_1 + m^2B_1, \quad u_2 \in \beta m f_2 + m^2B_2. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем

$$\alpha m s_1^{-1}e_1 \in \beta m f_1 + m^2B_1 = \beta m s_1 e_1 + m^2B_1,$$
$$\alpha m s_2^{-1}e_2 \in \beta m f_2 + m^2B_2 = \beta m s_2 e_2 + m^2B_2,$$

откуда

$$\alpha = \beta s_1^2 + m x_1, \quad \alpha = \beta s_2^2 + m x_2 \tag{14}$$

при некоторых $x_1 \in R_1$, $x_2 \in R_2$. Так как

$$x_i = \frac{\alpha - \beta s_i^2}{m} \in R_i$$

и m является $P_0(\tau_i)$-числом, то $x_i \in \mathbb{Z}$ при $i = 1, 2$. Следовательно, из (14) получаем

$$\beta(s_1^2 - s_2^2) = my \quad \text{при} \quad y = x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}.$$

Так как простое число m не делит $s_1^2 - s_2^2$, то m делит β, откуда m делит α в силу (14). Это противоречит тому, что $(u_1, u_2) \notin M^{(2)}$. Следовательно, множество $U = \{u_1, u_2\}$ не определяет ни одного умножения относительно B-базиса F_0.

Пусть $\times$ — умножение на группе $G \in \mathcal{A}_0$, $E = \{e_i^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i \in I_\tau\}$ — A-базис группы G,

$$U_\times = U_\times(E) = \Big\{u_{ij}^{(\tau)} = e_i^{(\tau)} \times e_j^{(\tau)} \in A_\tau \mid \tau \in T(G),\ i, j \in I_\tau\Big\}.$$

Нетрудно видеть, что в силу теоремы 2.4 соответствие $\times \mapsto \overline{U}_\times$ определяет изоморфизм группы $\operatorname{Mult} G$ на $M(E_0)$.

Теорема 2.8. *Если $G \in \mathcal{A}_0$ и E_0 — B-базис группы G, то* $\operatorname{Mult} G \cong M(E_0)$.

Отметим, что из теоремы 2.8 следует, что с точностью до изоморфизма группа $M(E_0)$ не зависит от выбора B-базиса E_0.

Замечание 2.9. Пусть $G = \langle d, A\rangle \in \mathcal{A}_0$, E — A-базис группы G, содержащий B-базис E_0.

1. В силу теоремы 2.8 будем отождествлять группу $\operatorname{Mult} G$ с группой $M(E_0) = \langle X, M^{(2)}\rangle$, а умножение $\times$ отождествлять с $\overline{U}_\times \in M(E_0)$.
2. Пусть $\overline{U}_\times = \overline{U}_\times(E) \in \operatorname{Mult} G = M(E_0)$, $X = X(d, E_0) \in M(E_0)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Из доказательства теоремы 2.4 следует, что $\overline{U}_\times \in \alpha X + M^{(2)}$ в точности тогда, когда $d \times d \in \alpha d + A$.
3. Из п. 2 следует, что $\overline{U}_\times \in M^{(2)}$ в точности тогда, когда $G \times G \subseteq A$. Это значит, что в группе $\operatorname{Mult} G$ подгруппа $\operatorname{Hom}(G \otimes G, A)$ всех регуляторных умножений совпадает с группой $M^{(2)}$.

3. Свойства групп умножения блочно-жестких CRQ-групп кольцевого типа. Цель этого раздела — показать, что для любой группы G из класса $\mathcal{A}_0$ группа $\operatorname{Mult} G$ тоже принадлежит этому классу. Мы также опишем ранг, множество критических типов, инварианты почти изоморфизма, регулятор, главное разложение и стандартного представления группы $\operatorname{Mult} G$, где $G \in \mathcal{A}_0$.

Замечание 3.1. Пусть A — вполне разложимая блочно-жесткая группа конечного ранга и $G = \langle d, A\rangle$, где $d \in \tilde{A}$. Пусть в группе $\tilde{A}/A$ имеем $o(d_\tau + A) = m_\tau$, где $d_\tau = \pi_\tau(d)$ при $\tau \in T(A)$. Тогда множество $\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ удовлетворяет условию (m) (см. замечание 2.1) в точности тогда, когда при любом $\tau \in T(A)$ подгруппа A_τ сервантна в G.

Действительно, пусть множество $\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ удовлетворяет условию (m), $\sigma \in T(A)$, $a \in A_\sigma$ и $a = k(td + x)$ при некоторых $k, t \in \mathbb{Z}$ и $x \in A$. Пусть $\tau \neq \sigma$, тогда

$$ktd_\tau + kx_\tau = 0, \quad \text{где } x_\tau = \pi_\tau(x) \in A_\tau.$$

Отсюда $td_\tau \in A_\tau$ и, значит, m_τ делит t. Так как множество $\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ удовлетворяет условию (m), то

$$\operatorname{lcm}\Big\{m_\tau \mid \tau \in T(A), \tau \neq \sigma\Big\} = \operatorname{lcm}\Big\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\Big\} = n.$$

Следовательно, n делит t, откуда $td + x \in A$. Так как тип элемента $td + x$ равен σ, то $td + x \in A_\sigma$.

Обратно, пусть подгруппа A_τ сервантна в G при любом $\tau \in T(A)$. Допустим, что множество $\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ не удовлетворяет условию (m). Тогда найдется тип $\sigma \in T(A)$ такой, что m_σ не делит $n_1 = \operatorname{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T(A), \tau \neq \sigma\}$. Следовательно, для $n = \operatorname{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T(A)\}$ выполняется $n = n_1 n_2$ при некотором натуральном числе $n_2 > 1$. Следовательно, $n_1 d_\sigma \notin A_\sigma$ и $n_2(n_1 d_\sigma) \in A_\sigma$. Значит, подгруппа A_σ не сервантна в G.

Замечание 3.2. Пусть A — редуцированная блочно-жесткая (жесткая) вполне разложимая группа конечного ранга, $d \in \tilde{A} \setminus A$ и $G = \langle d, A\rangle$. Тогда A — подгруппа конечного индекса группы G, и $T(G) = T(A)$. Значит, по определению G является блочно-жесткой (жесткой) ACD-группой. Отметим, что если A — группа кольцевого типа, то и G — группа кольцевого типа. Так как $G/A = \langle d + A\rangle$ — циклическая группа, то, согласно [3, Sec. 2], G является CRQ-группой. При этом $A = \operatorname{Reg} G$ в точности тогда, когда подгруппа A_τ сервантна в G при любом $\tau \in T(G)$ (см. [3, Sec. 2]).

Пусть $G \in \mathcal{A}_0$, в следующей теореме описаны свойства группы $\operatorname{Mult} G$. Далее везде $G \in \mathcal{A}_0$, $T(G) = T$, $T_0(G) = T_0$, $m_\tau(G) = m_\tau$ $(\tau \in T)$, $n(G) = n$, $G = G_1 \oplus C$ — главное разложение группы G, $\operatorname{Reg} G_1 = B$, $\operatorname{Reg} G = A = B \oplus C$, $G = \langle d, A\rangle$ и стандартное представление группы G имеет вид

$$d = \sum_{\tau \in T_0} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_0^{(\tau)},$$

где s_τ^{-1} — целое число, обратное к s_τ по модулю m_τ. Отметим, что во множестве целых решений сравнения $s_\tau x \equiv 1 \pmod{m}_\tau$ всегда есть $P_0(\tau)$-число $s_\tau^{\varphi(m_\tau)-1}$, где $\varphi(x)$ — функция Эйлера. Поэтому в качестве целого числа s_τ^{-1}, обратного к s_τ по модулю m_τ, всегда можно взять это $P_0(\tau)$-число.

Теорема 3.3. *Пусть $G \in \mathcal{A}_0$. Тогда для группы* $\operatorname{Mult} G$ *выполняются следующие условия.*

1. *Группа* $\operatorname{Mult} G$ *является блочно-жесткой* CRQ*-группой кольцевого типа с регулятором* $M^{(2)} = \operatorname{Hom}(G \otimes G, A)$.
2. $T(\operatorname{Mult} G) = T(G)$ *и, как следствие,* $T_0(\operatorname{Mult} G) = T_0(G)$.
3. $m_\tau(\operatorname{Mult} G) = m_\tau(G)$ *для любого* $\tau \in T(G)$, $\quad n(\operatorname{Mult} G) = n(G)$.
4. $r(\operatorname{Reg}_\tau(\operatorname{Mult} G)) = (r(\operatorname{Reg}_\tau G))^3$ *для любого* $\tau \in T(G)$.
5. *Одно из главных разложений группы* $\operatorname{Mult} G$ *имеет вид* $\operatorname{Mult} G = M' \oplus M''$, *где*

$$M' = \langle X, K\rangle, \quad K = \prod_{\tau \in T_0(G)} K_\tau, \quad K_\tau = \begin{bmatrix} m_\tau^2 B_\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \subseteq M_\tau^{(2)},$$

$$X = \left(X^{(\tau)}\right)_{\tau \in T_0(G)}, \quad X^{(\tau)} = \begin{pmatrix} m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_\tau^{(1)} \text{ при } \tau \in T_0(G),$$

$$M'' = \prod_{\tau \in T(G)} M''_\tau, \quad M''_\tau = \begin{bmatrix} m_\tau^2 C_\tau & m_\tau A_\tau & \dots & m_\tau A_\tau \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \end{bmatrix} \subseteq M_\tau^{(2)}.$$

При этом $T(M') = T_0(G)$, $\operatorname{Reg} M' = K$.
6. *Для каждого* $\tau \in T_0(G)$ *через* s_τ^{-1} *обозначим* $P_0(\tau)$*-число, обратное к* s_τ *по модулю* m_τ,

$$E_0^{(\tau)} = \begin{pmatrix} m_\tau^2 e_0^{(\tau)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in K_\tau.$$

Тогда система $\left\{E_0^{(\tau)} \mid \tau \in T_0(G)\right\}$ *является одним из* B*-базисов группы* $\operatorname{Mult} G$. *Одно из стандартных представлений группы* $\operatorname{Mult} G$ *имеет вид*

$$X = \left(\frac{s_\tau^{-1}}{m_\tau} E_0^{(\tau)}\right)_{\tau \in T_0(G)}.$$

Доказательство. 1. В силу теоремы 2.8 имеем $\operatorname{Mult} G = \langle X, M^{(2)}\rangle$, где

$$X = \left(X^{(\tau)}\right)_{\tau \in T_0}, \quad X^{(\tau)} = \begin{pmatrix} m_\tau s_\tau^{-1} e_0^{(\tau)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M^{(1)} \quad \text{при } \tau \in T_0.$$

Так как $\gcd(s_\tau^{-1}, m_\tau) = 1$ при $\tau \in T_0$, то в группе $\tilde{M}^{(2)}/M^{(2)}$ имеем $o(X_\tau + M^{(2)}) = m_\tau$.

Согласно замечанию 2.1 множество $\{m_\tau \mid \tau \in T\}$ удовлетворяет условию (m). Поэтому в силу замечания 3.1 подгруппы $M_\tau^{(2)}$ сервантны в $\operatorname{Mult} G$ при любом $\tau \in T$. Так как $M^{(2)}$ — блочно-жесткая вполне разложимая группа кольцевого типа, то $\operatorname{Mult} G$ — блочно-жесткая CRQ-группа кольцевого типа с регулятором $M^{(2)}$ по замечанию 3.2. В силу замечания 2.9(3) имеем

$$M^{(2)} = \operatorname{Hom}(G \otimes G, A).$$

2. В силу п. 1 и определения группы $M^{(2)}$ имеем

$$T(\operatorname{Mult} G) = T(M^{(2)}) = T(G) = T.$$

3. Имеем $\operatorname{Mult} G = \langle X, M^{(2)}\rangle$ и $\operatorname{Reg}(\operatorname{Mult} G) = M^{(2)}$ в силу п. 1. Пусть $\tau \in T$; тогда

$$m_\tau(\operatorname{Mult} G) = o(X_\tau + M^{(2)}) = m_\tau = m_\tau(G).$$

Значит, $n(\operatorname{Mult} G) = \operatorname{lcm}\{m_\tau \mid \tau \in T\} = n(G)$.

4. Пусть $\tau \in T$. В силу п. 1 имеем

$$\mathrm{Reg}_\tau(\mathrm{Mult}\, G) = M_\tau^{(2)} = \begin{bmatrix} m_\tau^2 A_\tau & m_\tau A_\tau & \dots & m_\tau A_\tau \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \dots & A_\tau \end{bmatrix} \cong M_{n_\tau}(A_\tau),$$

где $n_\tau = r(A_\tau)$. Следовательно,

$$r(\mathrm{Reg}_\tau(\mathrm{Mult}\, G)) = n_\tau^3 = (r(\mathrm{Reg}_\tau\ G))^3.$$

5. В разложении $\mathrm{Mult}\, G \cong M' \oplus M''$ группа M'' вполне разложима, а $M' = \langle X, K\rangle$. По определению группы K имеем $T(K) = T(M') = T_0$. Как нетрудно видеть, в группе $\widetilde{K}/K$ выполняется $o(X^{(\tau)} + K) = m_\tau$ при всех $\tau \in T_0$. Так как $\{m_\tau \mid \tau \in T_0\}$ удовлетворяет условию (m) по замечанию 2.1 и K — жесткая вполне разложимая группа, то M' является жесткой группой из $\mathcal{A}_0$ с $\mathrm{Reg}\, M' = K$ в силу замечаний 3.1 и 3.2.

Так как $T(M') = T_0$, то $\tau \in T(M')$ в точности тогда, когда $m_\tau(\mathrm{Mult}\, G) = m_\tau > 1$. При этом

$$m_\tau(M') = o(X^{(\tau)} + K) = m_\tau = m_\tau(\mathrm{Mult}\, G)$$

в силу п. 3. Из $(1')$, $(1'')$ получаем, что разложение $\mathrm{Mult}\, G = M' \oplus M''$ является главным разложением группы $\mathrm{Mult}\, G$.

6. Пусть $\tau \in T_0$, s_τ^{-1} — $P_0(\tau)$-число, обратное к s_τ по модулю m_τ,

$$E_0^{(\tau)} = \begin{pmatrix} m_\tau^2 e_0^{(\tau)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in K_\tau.$$

Тогда $K = \prod\limits_{\tau \in T_0} R_\tau E_0^{(\tau)}$. При этом

$$X = \left(\frac{s_\tau^{-1}}{m_\tau} E_0^{(\tau)}\right)_{\tau \in T_0}. \tag{15}$$

Так как s_τ^{-1} $(\tau \in T_0)$ является $P_0(\tau)$-числом, то равенство (15) — стандартное представление группы $\mathrm{Mult}\, G$. Значит, $\{E_0^{(\tau)} \mid \tau \in T_0(G)\}$ — B-базис группы $\mathrm{Mult}\, G$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andruszkiewicz R. R., Woronowicz M.* On additive groups of associative and commutative rings// Quaest. Math. — 2017. — *40*, № 4. — P. 527–537.
2. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Torsion-free rings// Ill. J. Math. — 1961. — *5*. — P. 61–98.
3. *Blagoveshchenskaya E. A., Mader A.* Decompositions of almost completely decomposable groups// Contemp. Math. Am. Math. Soc. — 1994. — *171*. — P. 21–36.
4. *Burkhardt R.* On a special class of almost completely decomposable groups// CISM Courses Lect. Notes. — 1984. — *287*. — P. 141–150.
5. *Dugas M., Oxford E.* Near isomorphism invariants for a class of almost completely decomposable groups// Proc. Curacao Conf. “Abelian Groups-1991”. — Marcel Dekker, 1993. — P. 129–150.
6. *Feigelstock S.* Additive groups of rings whose subrings are ideals// Bull. Austr. Math. Soc. — 1997. — *55*. — P. 477–481.
7. *Feigelstock S.* Additive groups of commutative rings// Quaest. Math. — 2000. — *23*. — P. 241–245.
8. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. Vol. 2. — New York–London: Academic Press, 1973.
9. *Fuchs L.* Abelian Groups. — Springer, 2015.
10. *Gardner B. J.* Rings on completely decomposable torsion-free Abelian groups// Comment. Math. Univ. Carol. — 1974. — *15*, № 3. — P. 381–392.
11. *Jackett D. R.* Rings on certain mixed Abelian groups// Pac. J. Math. — 1982. — *98*, № 2. — P. 365–373.
12. *Kompantseva E. I.* Rings on almost completely decomposable abelian groups// J. Math. Sci. — 2009. — *163*, № 6. — P. 688–693.
13. *Kompantseva E. I.* Torsion-free rings// J. Math. Sci. — 2010. — *171*, № 2. — P. 213–247.

14. *Kompantseva E. I.* Abelian *dqt*-groups and rings on them// J. Math. Sci. — 2015. — *206*, № 5. — P. 494–504.
15. *Kompantseva E. I., Tuganbaev A. A.* Rings on Abelian torsion-free groups of finite rank// Beitr. Algebra Geom. — 2022. — *63*. — P. 267–285.
16. *Kompantseva E. I., Tuganbaev A. A.* Absolute ideals of Murley groups// Beitr. Algebra Geom. — 2022. — *63*. — P. 853–866.
17. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht—Boston—London: Springer, 2003.
18. *Lady E. L.* Almost completely decomposable torsion-free abelian groups// Proc. Am. Math. Soc. — 1974. — *45*. — P. 41–47.
19. *Mader A.* Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 2000.

Компанцева Екатерина Игоревна
Московский педагогический государственный университет;
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: `kompantseva@yandex.ru`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`