ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 82–97
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-82-97

УДК 517.957

О РАЗРЕШИМОСТИ ДРОБНО-НАГРУЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2022 г. **М. Т. КОСМАКОВА, Л. Ж. КАСЫМОВА**

Аннотация. В работе исследуется краевая задача для нагруженного дробного уравнения теплопроводности; нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной Капуто по временной производной.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, дробное уравнение, дробная производная.

ON THE SOLVABILITY OF A FRACTIONAL LOADED HEAT CONDUCTION PROBLEM

© 2022 **M. T. KOSMAKOVA, L. Zh. KASYMOVA**

Abstract. In this paper, we study a boundary-value problem for the loaded fractional heat equation; the loaded term is represented as the fractional Caputo derivative with respect to the time derivative.

Keywords and phrases: heat equation, fractional equation, fractional derivative.

AMS Subject Classification: 35G30

1. Введение. Исследования по дробным дифференциальным уравнениям активно проводились в предыдущие десятилетия (см. [8, 9, 12, 17]); в настоящее время интерес к этой области не ослабевает (см. [14, 21]). Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и ее приложениями в различных областях науки. Важный раздел теории дифференциальных уравнений составляют нагруженные уравнения, в которых нагруженное слагаемое содержит дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомой функции на многообразиях размерности, меньшей размерности области определения искомой функции. В [7] на многочисленных примерах А. М. Нахушев показал практическую и теоретическую важность исследований нагруженных уравнений. В работах М. Т. Дженалиева и учеников его научной школы теория нагруженных уравнений получила дальнейшее развитие (см. [2–4]).

Интерес представляют краевые задачи для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной. В [5] нагруженное слагаемое — след производной дробного порядка на многообразии $x = t$, а именно, нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной Римана—Лиувилля. Возникающее сингулярное интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при определенных значениях порядка дробной производной. В [6, 20] нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто по временной переменной и пространственной переменной, причем порядок

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP08955795, 2020-2021).

производной в нагруженном слагаемом меньше порядка дифференциальной части. В [6] доказано, что существует непрерывность справа по порядку дробной производной. Непрерывность слева нарушена. В [20] имеет место непрерывность по порядку производной в нагруженном слагаемом задачи.

В данной работе исследуется краевая задача для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности: нагруженное слагаемое уравнения представлено в виде дробной производной Капуто по временной производной, причем, в отличие от работы [6], порядок дробной производной выше порядка по временной переменной в дифференциальной части уравнения. В разделе 2 приведены некоторые понятия и ранее известные результаты из теории дробного исчисления, а также даны определения и некоторые из наиболее полезных свойств некоторых специальных функций, которые будут использоваться на протяжении всей статьи. В разделе 3 дана постановка неоднородной краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой в естественных для исследования функциональных классах. Раздел 4 посвящен редукции поставленной краевой задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядром, содержащим специальную функцию, а именно, вырожденную гипергеометрическую функцию Трикоми. В разделе 5 рассмотрены предельные случаи для порядка дробной производной слагаемого с нагрузкой в уравнении и показана непрерывность по порядку дробной производной. В разделе 6 установлена разрешимость интегрального уравнения в зависимости от порядка дробной производной в нагруженном члене в уравнении краевой задачи и характера линии, на которой задана нагрузка, при малых значениях времени.

2. Необходимые сведения по дробным производным и специальным функциям.

Приведем некоторые известные понятия и результаты.

Определение 1 (см. [12])**.** Пусть $f(t) \in L_1[a,b]$. Производная Римана—Лиувилля порядка β, где $n-1 < \beta < n$, определяется равенством

$$ {}_rD^{\beta}_{a,t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dt^n}\int\limits_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}}d\tau, \quad \beta, a \in \mathbb{R}. \tag{1} $$

Для практических приложений важно определение дробной производной Капуто. Оно получается перестановкой операций дифференцирования и интегрирования в (1).

Определение 2 (см. [15])**.** Пусть $f(t) \in \mathrm{AC}^n[a,b]$ (т.е. $f^{(n-1)}(t)$ — абсолютно непрерывная функция). Производная Капуто порядка β, $n-1 < \beta < n$, определяется равенством

$$ {}_cD^{\beta}_{a,t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int\limits_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}}d\tau; \quad \beta, a \in \mathbb{R}. \tag{2} $$

Из формулы (1) следует, что

$$ {}_rD^{0}_{a,t}f(t) = f(t), \quad {}_rD^{n}_{a,t}f(t) = f^{(n)}(t), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3} $$

Производные, определенные формулами (1) и (2), связаны соотношением (см., например, [16])

$$ {}_cD^{\beta}_{a,t}f(t) = {}_rD^{\beta}_{a,t}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]. \tag{4} $$

Дробное дифференцирование по Капуто может быть приложено не для всех функций, в отличие от дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля. Известно, что основные соотношения, определенные при помощи дробных производных Капуто, обладают преимуществом при моделировании вязкоупругости. При этом упрощается понимание физического смысла поставленной задачи, поскольку начальные условия можно записать, ограничившись классическими производными целого порядка. Другими словами, производная по Капуто более практична и удобна в использовании, но применима к меньшему количеству функций.

Дробное исчисление можно рассматривать как «лабораторию» для специальных функций. Laдим определения и некоторые свойства специальных функций, которые понадобятся нам на протяжении всей работы.

Интеграл ошибок и дополнительный интеграл ошибок имеют вид:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z \exp(-\zeta^2) d\zeta, \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_z^\infty \exp(-\zeta^2) d\zeta = 1 - \operatorname{erf}(z).$$

Линейно независимыми решениями уравнениями

$$[zD^2 + (c-z)D - a]\omega(z) = 0, \quad D = \frac{d}{dz},$$

являются функции $\Phi(a, c; z)$ и $\Psi(a, c; z)$, где $\Phi(a, c; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция

$$\Phi(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

и $\Psi(a, c; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми

$$\Psi(a, c; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c; z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; z)$$

(см. [18, с. 119], [1, с. 1072]). Вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми может быть представлена в виде интеграла (см. [11, с. 365, формула 72.2(7)]):

$$\Psi(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_0^\infty \xi^{a-1} (1+\xi)^{c-a-1} e^{-z\xi} d\xi, \quad \operatorname{Re} a > 0. \tag{5}$$

Для больших значений z имеет место асимптотическое представление

$$\Psi(a, c; z) \sim z^{-a} {}_2F_0\left(a, 1+a-c; -\frac{1}{z}\right), \quad |z| \to \infty, \quad |\arg z| \leqslant \frac{3\pi}{2} - \epsilon, \quad \epsilon > 0, \tag{6}$$

(см. [18, с. 127, формула 4.7 (1)]), где ${}_2F_0\big(a, 1+a-c; -1/z\big)$ — обобщенный гипергеометрический ряд, определяемый формулой

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q;) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

(см. [18, с. 136]), где $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ — символ Похгаммера.

Вырожденные гипергеометрические функции при некоторых значениях своих аргументов связаны с функцией параболического цилиндра (функцией Вебера) $D_\nu(z)$

$$D_\nu(z) = 2^{(\nu-1)/2} e^{-z^2/4} \Psi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) =$$
$$= 2^{\nu/2} e^{-z^2/4} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \Phi\left(-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2\pi} z}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right\} \tag{7}$$

(см. [18, с. 212]). Формула (7) является определением функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$. Имеет место также представление вырожденной гипергеометрической функции Трикоми через функцию Уиттекера $W_{\lambda,\mu}(z)$ (см. [11, с. 264, формула 2.20]):

$$\Psi(a, b; z) = z^{-b/2} e^{z/2} W_{b/2-a, (b-1)/2}(z). \tag{8}$$

Точка $z = 0$ является для функции $W_{\lambda,\mu}(z)$ точкой ветвления, а $z = \infty$ — существенно особой точкой (см. [1, с. 1074]). Поэтому будем рассматривать эту функцию только для $|\arg z| < \pi$.

Естественным развитием дробного исчисления и теории нагруженных уравнений является теория дробно-нагруженных дифференциальных уравнений. На первом этапе исследования воспользуемся методом интегральных уравнений, в котором краевая задача сводится к решению соответствующего интегрального уравнения, с дальнейшим преобразованием ядра полученного уравнения. Такие методы позволяют ставить краевые задачи более компактно, чем дифференциальные уравнения, с учетом всех условий задачи.

Рассматриваемая задача сводится к интегральному уравнению путем обращения дифференциальной части уравнения.

Известно (см. [19, с. 57]), что в области $Q = \{(x,t) \mid x > 0,\ t > 0\}$ решение краевой задачи теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x,t), \quad u\big|_{t=0} = f(x), \quad u\big|_{x=0} = g(x),$$

описывается формулой

$$u(x,t) = \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t) f(\xi) d\xi + \int\limits_0^t H(x,t-\tau) g(\tau) d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) F(\xi,\tau) d\xi d\tau, \tag{9}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4at} \right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4at} \right) \right\}, \quad H(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at} \right).$$

Функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) d\xi = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right). \tag{10}$$

3. Постановка граничной задачи Дирихле для уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой. Итак, в области $Q = \{(x,t) \mid x > 0,\ t > 0\}$ рассматривается задача

$$u_t - u_{xx} + \lambda \{ {}_cD_{0,t}^{\beta} u(x,t) \}|_{x=\gamma(t)} = f(x,t), \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \tag{11}$$

где λ — комплексный параметр, ${}_cD_{0,t}^{\beta} u(x,t)$ — производная Капуто порядка β, $1 < \beta < 2$; $\gamma(t)$ — непрерывная возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$. Задача исследуется в классе функций $u(x,t) \in AC^2(0,+\infty) \cap C^1$ по переменной t, $t \in [0,T]$. Классы определяются из естественного требования существования и сходимости несобственных интегралов, возникающих в ходе исследования.

4. Сведение задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Лемма 1. *Краевая задача* (11) *сводится к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядром, содержащим специальную функцию.*

Доказательство. Обратим дифференциальную часть задачи (11) по формуле (9):

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) \mu(\tau) d\xi d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

где

$$\mu(t) = \{ {}_cD_{0,t}^{\beta} u(x,t) \}|_{x=\gamma(t)} = \left\{ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^t \frac{u_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau \right\} \Bigg|_{x=\gamma(t)}. \tag{12}$$

С учетом соотношения (10), вводя обозначение

$$f_1(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\tau, \tag{13}$$

получим следующее представление решения задачи (11):

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau + f_1(x,t). \tag{14}$$

Подействуем оператором дробного дифференцирования по формуле (2) на полученное представление (14), а именно, от представления (14) найдем производную Капуто порядка β по t при $1<\beta<2$ и затем положим $x=\gamma(t)$. Предварительно вычислим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau = \mu(t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\mu(\tau)d\tau;$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau =$$
$$= \mu'(t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t x\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\left[-\frac{3}{2(t-\tau)^{5/2}} + \frac{x^2}{4(t-\tau)^{7/2}}\right]\mu(\tau)d\tau.$$

Согласно формуле производной Капуто порядка β при $1<\beta<2$ имеем

$${}_cD_{0,t}^{\beta}\left[\int\limits_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}}\times$$
$$\times\left\{\mu'(\tau) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\tau x\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)}\right)\left[-\frac{3}{2(t-\theta)^{5/2}} + \frac{x^2}{4(\tau-\theta)^{7/2}}\right]\mu(\theta)d\theta\right\}d\tau =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\left[\int\limits_0^t \frac{\mu'(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}}d\tau + \frac{3x}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{5/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)}\right)\mu(\theta)d\theta d\tau-\right.$$
$$\left.-\frac{x^3}{8\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{7/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)}\right)\mu(\theta)d\theta d\tau\right].$$

Первый интеграл вычисляем интегрированием по частям, во втором и третьем интегралах меняем порядок интегрирования:

$${}_cD_{0,t}^{\beta}\left[\int\limits_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\times\left[\lim_{\tau\to t-0}\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} - (\beta-1)\int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau+\right.$$
$$+\frac{3x}{4\sqrt{\pi}}\mu(\theta)\left(\int\limits_\theta^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{5/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)}\right)d\tau\right)d\theta-$$
$$\left.-\frac{x^3}{8\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\mu(\theta)\left(\int\limits_\theta^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{7/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)}\right)d\tau\right)d\theta\right].$$

Потребуем выполнения условия

$$\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} \sim (t-\tau)^{\varepsilon} \quad \text{при } \tau\to t-0, \quad \varepsilon>0.$$

Тогда

$$
{}_cD^{\beta}_{0,t}\left[\int\limits_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(t)d\tau\right] = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\left[\frac{3x}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \mu(\theta)I_1(x,t,\theta,\beta)d\theta - \right.
$$

$$
\left. - \frac{x^3}{8\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \mu(\theta)I_2(x,t,\theta,\beta)d\theta\right] - \frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)}\int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau, \quad (15)
$$

где

$$
I_1(x,t,\theta,\beta) = \int\limits_\theta^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{5/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)}\right)d\tau,
$$

$$
I_2(x,t,\theta,\beta) = \int\limits_\theta^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-\theta)^{7/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)}\right)d\tau.
$$

Выполняя замену

$$
z = \frac{\tau-\theta}{t-\tau} \;\Rightarrow\; \tau = \frac{\theta+zt}{z+1}; \quad 0 \leqslant z < +\infty;
$$

$$
d\tau = \frac{t-\theta}{(z+1)^2}dz; \quad t-\tau = t-\frac{\theta+zt}{z+1} = \frac{t-\theta}{z+1}; \quad \tau-\theta = \frac{\theta+zt}{z+1}-\theta = \frac{z(t-\theta)}{z+1},
$$

получим

$$
I_1(x,t,\theta,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(z+1)^{\beta-1}(z+1)^{5/2}(t-\theta)}{(t-\theta)^{\beta-1}z^{5/2}(\tau-\theta)^{5/2}(z+1)^2}\exp\left(-\frac{x^2(z+1)}{4z(\tau-\theta)}\right)dz =
$$

$$
= \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+1/2}}\int\limits_0^{+\infty}(z+1)^{\beta-1/2}z^{-5/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)dz =
$$

$$
= \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\right)\int\limits_0^{\infty}(z+1)^{\beta-1/2}\cdot z^{-5/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\frac{1}{z}\right)dz
$$

После замены переменной $\upsilon = 1/z$ последнее выражение примет вид

$$
I_1(x,t,\theta,\beta) = \frac{1}{(\tau-\theta)^{\beta+1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)}\right)\int\limits_0^{\infty}\frac{(\upsilon+1)^{\beta-1/2}\upsilon^{5/2}}{\upsilon^{\beta-1/2}\upsilon^2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\upsilon\right)d\upsilon =
$$

$$
= \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\right)\int\limits_0^{\infty}(\upsilon+1)^{\beta-1/2}\upsilon^{1-\beta}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\upsilon\right)d\upsilon.
$$

Интеграл в последнем выражении вычисляем по формуле 2.3.6(9) из [10, с. 286]:

$$
I_1(x,t,\theta,\beta) = \frac{\Gamma(2-\beta)}{(\tau-\theta)^{\beta+1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\theta)}\right)\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};\frac{x^2}{4(t-\theta)}\right). \quad (16)
$$

Аналогично получим

$$
I_2(x,t,\theta,\beta) = \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\right)\int\limits_0^{+\infty}(z+1)^{\beta+1/2}z^{-7/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\frac{1}{z}\right)dz =
$$

$$
= \frac{1}{(t-\theta)^{\beta+3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\right)\int\limits_0^{\infty}(\upsilon+1)^{\beta+1/2}\upsilon^{1-\beta}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\upsilon\right)d\upsilon,
$$

или
$$I_2(x,t,\theta,\beta)=\frac{\Gamma(2-\beta)}{(t-\theta)^{\beta+3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\theta)}\right)\Psi\left(2-\beta;\frac{7}{2};\frac{x^2}{4(t-\theta)}\right). \quad (17)$$
Здесь $\Psi(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми.

Подставив выражения (16) и (17) в (15), находим:
$$
\begin{aligned}
{}_cD^{\beta}_{0,t}\left[\int\limits_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau\right] &=\\
&=\frac{3x}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+1/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau-\\
&-\frac{x^3}{8\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\Psi\left(2-\beta;\frac{7}{2};\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau-\\
&-\frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau. \quad (18)
\end{aligned}
$$
С учетом (18) при $x=\gamma(t)$ из (14) получим:
$$
\begin{aligned}
\mu(t)=-\lambda&\left[\frac{3\gamma(t)}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+1/2}}\exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau}\right)-\right.\\
&-\frac{\gamma^3(t)}{8\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+3/2}}\exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)\Psi\left(2-\beta;\frac{7}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)d\tau-\\
&\left.-\frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)}\int\limits_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau\right]+f_2(t),
\end{aligned}
$$
где
$$f_2(t)=\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int\limits_0^t\frac{\partial^2 f_1(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}\frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}}d\tau\Bigg|_{x=\gamma(t)}, \quad (19)$$
или
$$\mu(t)-\lambda\int\limits_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_2(t), \quad (20)$$
где
$$
\begin{aligned}
K(t,\tau)=&\left[\frac{\gamma^3(t)}{8\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+3/2}}\Psi\left(2-\beta;\frac{7}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)-\frac{3\gamma(t)}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+1/2}}\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)\right]\times\\
&\times\exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)-\frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)(t-\tau)^{\beta}}. \quad (21)
\end{aligned}
$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках в равенстве (21), обозначив его через $A(t,\tau,\beta)$. Введем обозначение
$$z=\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\quad\Rightarrow\quad t-\tau=\frac{\gamma^2(t)}{4z}.$$

Тогда

$$\frac{\gamma^3(t)}{8(t-\tau)^{\beta+3/2}} = \frac{\gamma^3(t)4^{\beta+3/2}z^{\beta+3/2}}{8(\gamma^2(t))^{\beta+3/2}} = \left(\frac{2}{\gamma(t)}\right)^{2\beta} z^{\beta+3/2};$$
$$\frac{3\gamma(t)}{4(t-\tau)^{\beta+1/2}} = \frac{3\gamma(t)4^{\beta+1/2}z^{\beta+1/2}}{4(\gamma^2(t))^{\beta+1/2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\gamma(t)}\right)^{2\beta} z^{\beta+1/2}.$$

Отсюда получим

$$A(t,\tau,\beta) = \frac{\gamma^3(t)}{8\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+3/2}}\Psi\left(2-\beta;\frac{7}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) - \frac{3\gamma(t)}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+1/2}}\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\gamma(t)}\right)^{2\beta} z^{\beta+1/2}\left[z\Psi\left(2-\beta;\frac{7}{2};z\right) - \frac{3}{2}\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};z\right)\right]\Bigg|_{z=\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}}. \quad (22)$$

Согласно [13] введем обозначения

$$\Psi(a+) = \Psi(a+1;c;z), \quad \Psi(c+) = \Psi(a;c+1;z),$$
$$\Psi(a-) = \Psi(a-1;c;z), \quad \Psi(c-) = \Psi(a;c-1;z).$$

Тогда согласно формулам (7) и (6) из [13, с. 246] имеем

$$z\Psi\left(2-\beta;\frac{7}{2};z\right) - \frac{3}{2}\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};z\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}+\beta\right)\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};z\right) + \Psi\left(1-\beta;\frac{5}{2};z\right) - \frac{3}{2}\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};z\right) =$$
$$= (\beta-1)\Psi\left(2-\beta;\frac{5}{2};z\right) + \Psi\left(1-\beta;\frac{5}{2};z\right) =$$
$$= (\beta-1)\left(\frac{1}{1-\beta}\Psi\left(1-\beta;\frac{5}{2};z\right) - \frac{1}{1-\beta}\Psi\left(1-\beta;\frac{3}{2};z\right)\right) + \Psi\left(1-\beta;\frac{5}{2};z\right) =$$
$$= \Psi\left(1-\beta;\frac{3}{2};z\right).$$

Теперь выражение (22) примет вид с учетом обозначения для z

$$A(t,\tau,\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\gamma(t)}\right)^{2\beta}\left(\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)^{\beta+1/2}\Psi\left(1-\beta;\frac{3}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) =$$
$$= \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+1/2}}\Psi\left(1-\beta;\frac{3}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right).$$

Ядро (21) можно переписать в виде

$$K_\beta(t,\tau) = \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+1/2}}\Psi\left(1-\beta;\frac{3}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)\exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) - \frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)(t-\tau)^\beta}. \quad (23)$$

Итак, краевая задача (11) сведена к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра (21) с правой частью (19) и ядром (23). Лемма доказана. □

5. Исследование на непрерывность по порядку производной в нагруженном слагаемом краевой задачи.

Лемма 2. *Для граничной задачи* (11) *имеет место непрерывность ядра редуцированного интегрального уравнения по порядку* β *производной в нагруженном слагаемом уравнения* (11).

Доказательство. Рассмотрим предельные случаи для порядка дробной производной члена с нагрузкой в уравнении (11).

I. $\beta = 1$. Тогда из формул (3), (4) и краевых условий (11) имеем

$$D_{0,t}^1 u(x,t) = u_t(x,t).$$

Введя обозначение $\mu(t) = u_t(x,t)|_{x=\gamma(t)}$, из задачи (11) при $\beta = 1$ получим граничную задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda\mu(t) = f(x,t), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0.$$

Запишем ее решение, обращая дифференциальную часть по формуле (9) и учитывая (10):

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau + f_1(x,t). \tag{24}$$

Поскольку

$$ {}_cD_{0,t}^1 \left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau \right\} = \frac{d}{dt}\left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau \right\} =$$
$$= \mu(t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\mu(\tau)d\tau,$$

то, дифференцируя (24) по t и подставляя $x = \gamma(t)$, получим

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{1+\lambda}\int_0^t K_1(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t), \tag{25}$$

где

$$f_2(t) = \frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial t}\bigg|_{x=\gamma(t)}, \quad K_1(t,\tau) = \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right). \tag{26}$$

С другой стороны, найдём предел при $\beta \to 1_+0$ от (23). Функция под знаком предела определена и непрерывна при $\beta = 1$, следовательно, можно совершить предельный переход:

$$\lim_{\beta\to 1+0} K_\beta(t,\tau) = \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\Psi\left(0; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)\cdot \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) =$$
$$= \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right).$$

Полученное выражение совпадает с ядром (26), так как $\Psi(0, b, z) = 1$. Итак,

$$\lim_{\beta\to 1+0} K_\beta(t,\tau) = K_1(t,\tau).$$

II. $\beta = 2$. Тогда из формул (3), (4) имеем $D_{0,t}^2 u(x,t) = u_{tt}(x,t)$. Из задачи (11) при $\beta = 2$ получим граничную задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda\mu(t) = f(x,t), \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0,$$

где $\mu(t) = u_{tt}(x,t)|_{x=\gamma(t)}$. Запишем ее решение, обращая дифференциальную часть по формуле (9) и учитывая формулу (10):

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau + f_1(x,t), \tag{27}$$

где функция $f_1(x,t)$ определяется формулой (13). Так как

$$ {}_cD_{0,t}^2 \left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau \right\} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{ \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau \right\} =$$

$$= \mu'(\tau) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t x \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) \left[-\frac{3}{2(t-\tau)^{5/2}} + \frac{x^2}{4(t-\tau)^{7/2}}\right] \mu(\tau) d\tau,$$

то из (27) получим

$$\mu(t) = -\lambda \left\{ \mu'(t) - -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \left[-\frac{3\gamma(t)}{2(t-\tau)^{5/2}} + \frac{\gamma^3(t)}{4(t-\tau)^{7/2}}\right] \mu(\tau) d\tau \right\} + f_2(t),$$

где

$$f_2(t) = \left. \frac{\partial^2 f_1(x,t)}{\partial t^2} \right|_{x=\gamma(t)}.$$

Здесь использовано равенство (4):

$${}_cD_{0,t}^2 f(t) = {}_rD_{0,t}^2 \big[f(t) - f(0) - f'(0)t\big], \quad f|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad {}_cD_{0,t}^2 f(t) = {}_rD_{0,t}^2 f(t) = f''(t).$$

Получим интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра второго рода

$$\lambda\mu'(t) + \mu(t) - \lambda \int\limits_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \left[\frac{\gamma^3(t)}{4(t-\tau)^{7/2}} - \frac{3\gamma(t)}{2(t-\tau)^{5/2}}\right] \mu(\tau) d\tau = f_2(t). \tag{28}$$

С другой стороны, найти предел при $\beta \to 2-0$ от (23), как в случае I, мы не можем, так как $a < 0$ для функции Трикоми $\Psi(a,c,z)$. Возьмём предел при $\beta \to 2-0$ от эквивалентного выражения (21), учитывая, что $\Psi(0,c,z) = 1$:

$$\lim_{\beta\to 2-0} K_\beta(t,\tau) = \left(\frac{\gamma^3(t)}{8\sqrt{\pi}(t-\tau)^{7/2}} - \frac{3\gamma(t)}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{5/2}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right).$$

Это выражение совпадает с ядром в уравнении (28), но при $\beta = 2$ исходная задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению. Лемма 2 доказана. □

6. Исследование интегрального уравнения (20) **на разрешимость. Основной результат.** Ядро (23) интегрального уравнения (20) имеет особенности при $\tau = t$ и $t = 0$. Непосредственное исследование уравнения (20) затруднительно, так как его ядро содержит вырожденную гипергеометрическую функцию Трикоми. Найдем интеграл

$$\int\limits_0^t K_\beta(t,\tau) d\tau$$

и исследуем поведение полученной функции при малых значениях t.

Теорема. *Интегральное уравнение* (20) *с ядром и правой частью, определяемыми формулами* (23) *и* (19) *соответственно, для* $\gamma(t) \sim t^\omega$, $\omega > 0$ *при* $t \to +0$ *однозначно разрешимо в классе непрерывных функций при любой непрерывной правой части, если* $0 < \omega < 1/2$ *при* $1 \leqslant \beta < 2$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл от (23):

$$\int\limits_0^t K_\beta(t,\tau) d\tau = \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\Psi\left(1-\beta; \frac{3}{2}; \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)}{(t-\tau)^{\beta+1/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) d\tau - \frac{\beta-1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\beta}. \tag{29}$$

Поскольку второй интеграл в (29)

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\beta} = -\lim_{\tau\to t-0} \frac{1}{(\beta-1)(t-\tau)^{\beta-1}} + \frac{t^{1-\beta}}{\beta-1}$$

расходится при $1 < \beta < 2$, то для сходимости интеграла (29) необходимо (но не достаточно), чтобы первый интеграл был равен $-\infty$. Далее, применяя правило Лопиталя для вычисления предельных значений $\tau \to t-0$, найдем достаточные условия для выполнения предельного соотношения

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t K_\beta(t,\tau)d\tau = 0.$$

Вычислим интеграл

$$\mathrm{I}(t,\beta) = \int_0^t \frac{\Psi\left(1-\beta;\frac{3}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)}{(t-\tau)^{\beta+1/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) d\tau; \tag{30}$$

для этого воспользуемся представлением функции Трикоми через функцию Уиттекера по формуле (8):

$$\Psi\left(1-\beta;\frac{3}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) = \left(\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)^{-3/4} \exp\left(\frac{\gamma^2(t)}{8(t-\tau)}\right) W_{\beta-\frac{1}{4};\frac{1}{4}}\left(\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right).$$

Тогда интеграл (30) принимает вид

$$I(t,\beta) = \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \Psi\left(1-\beta;\frac{3}{2};\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= \frac{2^{3/2}}{(\gamma(t))^{3/2}} \int_0^t (t-\tau)^{1/4-\beta} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{8(t-\tau)}\right) W_{\beta-1/4;1/4}\left(\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= \frac{2^{2\beta-1}}{(\gamma(t))^{2\beta-1}} \int_{\gamma^2(t)/(4t)}^{+\infty} z^{\beta-9/4} e^{-z/2} W_{\beta-1/4;1/4}(z)dz =$$

$$= \frac{2^{3/2}t^{5/4-\beta}}{(\gamma(t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{8t}\right) W_{\beta-5/4;1/4}\left(\frac{\gamma^2(t)}{4t}\right). \tag{31}$$

Здесь введена замена $z = \gamma^2(t)/(4(t-\tau))$ и использована формула 2.19.5(13) из [11, с. 217].

Пусть $\gamma(t) \sim t^\omega$ при $t \to +0$. Тогда в окрестности точки $t = 0$ выражение (31) можно переписать в виде

$$I(t;\beta) = 2^{3/2} t^{5/4-\beta-\frac{3}{2}\omega} \exp\left(-\frac{1}{8}t^{2\omega-1}\right) W_{\beta-5/4;1/4}\left(\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right).$$

Для функции Уиттекера применим формулу 7.2.2(5) из [11, с. 366]:

$$W_{\beta-5/4;1/4}\left(\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) = 2^{-3/2} t^{\omega/2-3/4} \exp\left(-\frac{1}{8}t^{2\omega-1}\right) \Psi\left(2-\beta;\frac{3}{2};\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right).$$

Тогда

$$I(t;\beta) = t^{1/2-\beta-\omega} \exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) \Psi\left(2-\beta;\frac{3}{2};\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right).$$

Для функции Трикоми $\Psi(a,b,z)$ используем представление (5) и затем применим формулу (12) из [10, с. 262]:

$$I(t;\beta) = \frac{t^{1/2-\beta-\omega}}{\Gamma(2-\beta)} \exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) \times \int_0^\infty \xi^{1-\beta}(1+\xi)^{\beta-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\xi\right) d\xi =$$

$$= 2^{5/2-\beta} t^{1-2\beta-2\omega} \exp\left(-\frac{1}{8}t^{2\omega-1}\right) D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t^{\omega-1/2}\right). \tag{32}$$

Таким образом, подставляя выражение (32) в (29), получим:

$$\int_0^t K_\beta(t,\tau)d\tau = \lim_{\tau\to t-0}\frac{1}{\beta-1}\left[\frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}}-\frac{1}{t^{\beta-1}}\right]-$$
$$-\frac{2^{3/2-\beta}}{\sqrt{\pi}}t^{1-2\beta-\omega}\exp\left(-\frac{1}{8}t^{2\omega-1}\right)D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t^{\omega-1/2}\right), \quad (33)$$

где $D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра. Далее,

$$\frac{1}{(t-\tau)^{\beta-1}}-\frac{1}{t^{\beta-1}}=\frac{1}{t^{\beta-1}}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\beta-1}}-1\right]=\frac{1}{t^{\beta-1}}\left[\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{1-\beta}-1\right].$$

Поскольку $0<\tau<t$, то $0<\tau/t<1$. Тогда

$$\lim_{\substack{\tau\to t-0\\ t\to+0}}\frac{\tau}{t}=0.$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{\tau\to t-0\\ t\to+0}}\frac{1}{t^{\beta-1}}\left(\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{1-\beta}-1\right)=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Введём замену $x=\tau/t$. Вместо последнего предела можно рассматривать

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-x)^{1-\beta}-1}{x^{1-\beta}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(1-\beta)(1-x)^{-\beta}}{(1-\beta)x^{-\beta}}=\lim_{x\to0}\frac{x^\beta}{(1-x)^\beta}=0,$$

так как $1<\beta<2$. Тогда из (33) имеем:

$$\lim_{t\to0+0}\int_0^t K_\beta(t,\tau)d\tau=-\lim_{t\to+0}\left\{\frac{t^{1-2\beta-\omega}}{2^{\beta-3/2}\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{8}t^{2\omega-1}\right)D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t^{\omega-1/2}\right)\right\}. \quad (34)$$

Здесь $-1<2\beta-3<1$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $2\omega-1>0$. Применяя формулу (4) из [13, с. 120] при $z=0$ и формулу 2.3.3(1) из [10, с. 259], получим

$$D_{2\beta-3}(0)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int^\infty e^{-t^2/2}t^{2\beta-3}\cos(\beta\pi)dt=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\beta\pi\int_0^\infty e^{-t^2/2}t^{2\beta-3}dt=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos\beta\pi\int_0^\infty x^{\beta-2}e^{-x/2}dx=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cos\beta\pi\cdot\Gamma(\beta-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}=-\frac{\cos\beta\pi\cdot\Gamma(\beta-1)}{2^{\beta-1/2}\sqrt{\pi}}.$$

Тогда при $2\omega-1>0$ из (34) имеем:

$$\lim_{t\to0+0}\int_0^t K_\beta(t,\tau)d\tau=\frac{\cos\beta\pi}{2^{2\beta-2}\pi}\lim_{t\to0+0}t^{1-2\beta-\omega}=\infty. \quad (35)$$

2. $0<\omega<1/2$, $1<\beta<2$. В этом случае в (34) аргумент функции параболического цилиндра будет неограниченно расти при $t\to+0$. Поскольку имеет место асимптотическое разложение функции согласно формуле 9.246(1) из [1, с. 1079], то из (34) имеем

$$\lim_{t\to+0}\int_0^t K_\beta(t,\tau)d\tau=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{t\to+0}t^{7/2-3\beta-\omega+2\beta\omega}\exp\left(-\frac{1}{4t^{1/2-\omega}}\right)=0. \quad (36)$$

3. $\omega = 1/2$. Из (34) следует

$$\lim_{t\to 0+0}\int\limits_0^t K_\beta(t,\tau)d\tau = -e^{-1/8}D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2^{\beta-3/2}\sqrt{\pi}}\cdot\lim_{t\to 0+0} t^{1/2-2\beta}.$$

Вычислим $D_{2\beta-3}(1/\sqrt{2})$, используя формулу 9.241(1) из [1, с. 1078]:

$$D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2\beta-\frac{1}{2}}e^{-\pi(2\beta-1)i/2}e^{1/8}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2\beta-1}e^{-2x^2+xi/\sqrt{2}}dx.$$

Для вычисления интеграла

$$J(\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2\beta-1}e^{-2x^2+xi\sqrt{2}}dx$$

используем формулу 3.462(3) из [1, с. 352]:

$$J(\beta) = \frac{1}{i^{2\beta-1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(ix)^{2\beta-1}e^{-2x^2-xi/\sqrt{2}}dx = \frac{2^{1/2-2\beta}}{i^{2\beta-1}}\sqrt{\pi}e^{-1/32}D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Тогда

$$D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{i^{2\beta-2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi\beta\right)D_{2\beta-3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Заметим, что аргумент функции параболического цилиндра убывает в геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$, оставаясь положительным.

Вычислим $D_{2\beta-3}(0)$ с помощью формул 8.3 (1) из [13, с. 125] и 3.194(3) из [1, с. 299]:

$$D_{2\beta-3}(0) = \frac{2^{\beta-3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)}\int\limits_0^\infty t^{1/2-\beta}(1+t)^{\beta-2}dt = \frac{2^{\beta-3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)}B\left(\frac{3}{2}-\beta;\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{\beta-3/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(2-\beta)}.$$

Отсюда следует, что $D_{2\beta-3}(1/\sqrt{2})$ — ограниченная функция аргумента β. Тогда при $\omega = 1/2$ имеем

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_0^t K_\beta(t,\tau)d\tau = \infty, \quad 1<\beta<2. \tag{37}$$

Рассмотрим предельные случаи β.

I. $\beta = 1$. Используем формулу (26), где $\gamma(t)\sim t^\omega$ при $t\to +0$, и $\omega > 0$:

$$\int\limits_0^t K_1(t,\tau)d\tau = -\int\limits_0^t \frac{t^\omega}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}\right)d\tau. \tag{38}$$

После замены

$$z = \sqrt{\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}};\quad t-\tau = \frac{t^{2\omega}}{4z^2};\quad d\tau = \frac{t^{2\omega}}{2z^3}dz;$$

$$\tau = 0 \ \Rightarrow\ z = \frac{1}{2}t^{(2\omega-1)/2},\quad \tau = t\ \Rightarrow\ z\to +\infty$$

интеграл (38) примет вид:

$$\int\limits_0^t K_1(t,\tau)d\tau = -\frac{t^\omega}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{t^{(2\omega-1)/2}/2}^{+\infty}\frac{2^3z^3}{t^{3\omega}}\frac{t^{2\omega}}{2z^3}\exp\left(-z^2\right)dz = -\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}t^{(2\omega-1)/2}\right).$$

Тогда

$$\lim_{t\to 0+0}\int\limits_0^t K_1(t,\tau)d\tau = \begin{cases} -1, & \text{если } \omega > 1/2; \\ \ \ 0, & \text{если } 0 < \omega < 1/2. \end{cases}.$$

По условию $x = \gamma(t)$ возрастает в области Q^- и $\gamma(0) = 0$. Поэтому случай $\omega \leqslant 0$ мы не рассматриваем.

Теперь рассмотрим случай при $\gamma(t) = \sqrt{t}$ и $\beta = 1$:

$$\int\limits_0^t K_1(t,\tau)d\tau = -\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{t}{4(t-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{z^2}e^{-t/(4z^2)}dz = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi = -\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\right).$$

При вычислении интеграла использована замена $z = \sqrt{t-\tau}$. Итак,

$$\lim_{t\to +0}\int\limits_0^t K_1(t,\tau)d\tau = \begin{cases} -1, & \text{если } \omega > 1/2; \\ \ \ 0, & \text{если } 0 < \omega < 1/2; \\ -\operatorname{erfc}(1/2) \neq 0, & \text{если } \omega = 1/2. \end{cases}. \tag{39}$$

II. $\beta = 2$. Используем формулу ядра в уравнении (28) при $\gamma(t) \sim t^\omega$, если $t \to +0$, $\omega > 0$:

$$\int\limits_0^t K_2(t,\tau)d\tau = \int\limits_0^t \left(\frac{t^{2\omega}}{8\sqrt{\pi}(t-\tau)^{7/2}} - \frac{3t^\omega}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{5/2}}\right)\exp\left(-\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}\right)d\tau. \tag{40}$$

После замен

$$z = \sqrt{\frac{t^{2\omega}}{4(t-\tau)}}, \quad t-\tau = \frac{t^{2\omega}}{4z^2}, \quad d\tau = \frac{t^{2\omega}}{2z^3}dz, \quad z^2 = x$$

интеграл (40) примет вид:

$$\int\limits_0^t K_2(t,\tau)d\tau = \frac{4}{t^{2\omega}\sqrt{\pi}}\int\limits_{t^{2\omega-1}/4}^{+\infty} x^{3/2}e^{-x}dx - \frac{6}{t^{2\omega}\sqrt{\pi}}\int\limits_{t^{2\omega-1}/4}^{+\infty} z^{1/2}e^{-x}dx.$$

Применив формулу 2.3.6(6) из [10, с. 261], получим

$$\int\limits_0^t K_2(t,\tau)d\tau = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}t^{3\omega-5/2}\exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right)\Psi\left(1;\frac{7}{2};\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) -$$

$$-\frac{3}{4\sqrt{\pi}}t^{\omega-3/2}\exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right)\Psi\left(1;\frac{5}{2};\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right)$$

или

$$\int\limits_0^t K_2(t,\tau)d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{\omega-3/2}\exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right)\left[\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\Psi\left(1;\frac{7}{2};\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right) - \frac{3}{2}\Psi\left(1;\frac{5}{2};\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right)\right]. \tag{41}$$

Введя согласно [13] обозначения

$$\Psi(a,c,x) = \Psi\left(1;\frac{5}{2};\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right), \quad \Psi(0,c+,x) = \Psi\left(1;\frac{7}{2};\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right), \quad \Psi(a-,c,x) = \Psi\left(0;\frac{5}{2};\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right),$$

из формулы (7) (см. [13, с. 246]) получим

$$x\Psi\left(1;\frac{7}{2};x\right)-\frac{3}{2}\Psi\left(1;\frac{5}{4};x\right)=\Psi\left(0;\frac{5}{2};x\right)\equiv 1.$$

Тогда (41) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^t K_2(t,\tau)d\tau=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{\omega-3/2}\cdot\exp\left(-\frac{1}{4}t^{2\omega-1}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t K_2(t,\tau)d\tau=\begin{cases}\infty, & \text{если } 1/2\leqslant\omega<3/2;\\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}, & \text{если } \omega=3/2;\\ 0, & \text{если } 0<\omega<1/2 \text{ или } \omega>3/2.\end{cases}.$$

Суммируя результаты (35), (36), (37), (39), получаем основной результат. Теорема доказана. □

Замечание. Случай $\beta=2$ в основной результат не включатся, так как при $\beta=2$ граничная задача (11) сводится к интегро-дифференциальному уравнению (28).

7. Заключение. В условиях теоремы ядро (23) интегрального уравнения обладает слабой особенностью. Следовательно, можно применить метод последовательных приближений для нахождения единственного решения уравнения (21). Тогда соответствующие краевые задачи корректны в естественных классах функций, т.е. нагруженное слагаемое поставленной граничной задачи является слабым возмущением дифференциального уравнения.

Если же линия, на которой дается нагрузка в поставленной задаче, удовлетворяет условию $\gamma(t)\sim t^{\omega}$ при $t\to+0$ и определяется при $\omega\geqslant 1/2$, и порядок дробной производной $1\leqslant\beta<2$, то интегральное уравнение (21) не разрешимо методом последовательных приближений. Можно показать, что соответствующее однородное уравнение при некоторых значениях параметра λ будет иметь ненулевые решения. Если единственность решения первой краевой задачи нарушается, то в этом случае нагрузку можно интерпретировать как сильное возмущение. Таким образом, существование и единственность решений возникающего интегрального уравнения зависит от порядка дробной производной в нагруженном члене поставленной краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
2. *Дженалиев М. Т.* Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями// Диффер. уравн. — 1991. — *27*, № 10. — С. 1825–1827.
3. *Дженалиев М. Т.* О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями// Диффер. уравн. — 2001. — *37*, № 1. — С. 48–54.
4. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Гылым, 2010.
5. *Искаков С. А., Рамазанов М. И., Иванов И. А.* Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка, II// Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Мат. — 2015. — № 2 (78). — С. 25–30.
6. *Космакова М. Т., Касымова Л. Ж.* К решению уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой// Вестн. КазНУ. Сер. мат. мех. информ. — 2019. — *104*, № 4. — С. 50–62.
7. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
8. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их приложения. — Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000.
9. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
10. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. — М.: Физматлит, 2002.

11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. — М.: Физматлит, 2003.
12. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
13. *Bateman H., Erdélyi A.* Higher Transcendental Functions. — New York: McGraw-Hill, 1953.
14. *Cao Labora D., Rodriguez-Lopez R., Belmekki M.* Existence of solutions to nonlocal boundary value problems for fractional differential equations with impulses// Electron. J. Differ. Equations. — 2020. — *15.* — P. 1–16.
15. *Caputo M.* Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent, II// Geophys. J. Astronom. Soc. — 1967. — *13.* — P. 529–539.
16. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 2010.
17. *Le Mehaute A., Tenreiro Machado J. A., Trigeassou J. C., Sabatier J. (eds.)* Fractional Differentiation and Its Applications. — Bordeaux: Bordeaux Univ., 2003.
18. *Luke Y. L.* The Special Functions and Their Approximations. — Academic Press, 1969.
19. *Polyanin A. D.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. — New York–London: Chapman & Hall, 2002.
20. *Ramazanov M.I., Kosmakova M. T., Kasymova L. Zh.* On a problem of heat equation with fractional load// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 9. — P. 1873–1885.
21. *Yusuf A., Qureshi S., Inc M., Aliyu A. I., Baleanu D., Shaikh A. A.* Two-strain epidemic model involving fractional derivative with Mittag-Leffler kernel// Chaos. — 2018. — *28.* — 123121.

Космакова Минзиля Тимербаевна
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова
E-mail: `svetlanamir578@gmail.com`

Касымова Лайла Жумажановна
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова
E-mail: `l.kasymova2017@mail.ru`