ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 68–81
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-68-81

УДК 517.95

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2022 г. **В. Л. КАМЫНИН**

Аннотация. Доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи определения зависящего от x коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении с двумя независимыми переменными. В качестве дополнительного условия задается условие интегрального наблюдения. Приведены примеры обратных задач, для которых выполняются условия доказанных в работе теорем.

***Ключевые слова*:** обратная задача, интегральное наблюдение, вырождающееся параболическое уравнение.

ON THE INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE LOWEST COEFFICIENT DEPENDING ON THE SPACE VARIABLE IN A PARABOLIC EQUATION WITH WEAK DEGENERACY

© 2022 **V. L. KAMYNIN**

Abstract. In this paper, we prove existence and uniqueness theorems for solutions of the inverse problem of determining the x-dependent absorption coefficient in a degenerate parabolic equation. As an additional condition, the integral observation condition is specified. Also, we give examples of inverse problems satisfying the conditions of the theorems proved in the paper.

***Keywords and phrases*:** inverse problem, integral observation, degenerate parabolic equation.

***AMS Subject Classification*:** 35K20, 35R30

1. Введение. В работе изучаются вопросы однозначной разрешимости обратной задачи определения коэффициента $\gamma(x)$ в параболическом уравнении

$$u_t - a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(t,x)u + \gamma(x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

граничными условиями

$$u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ (проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013).

и дополнительным условием интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t,x)\chi(t)dt = \varphi(x), \quad x \in [0,l]. \tag{4}$$

Здесь $Q = [0,T] \times [0,l]$, T, l — некоторые числа, $a(x)$, $b(x)$, $c(t,x)$, $f(t,x)$, $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\chi(t)$, $\varphi(x)$ — известные функции.

Особенностью постановки обратной задачи в данной работе является предположение о том, что уравнение (1) является вырождающимся, а именно, выполнены условия

$$0 \leqslant a(x) \leqslant a_1, \quad x \in [0,l], \quad 1/a(x) \in L_q(0,l), q > 1. \tag{5}$$

Для случая равномерно параболических уравнений обратные задачи восстановления коэффициента поглощения $\gamma(x)$ с интегральным наблюдением вида (4) при различных предположениях о входных данных рассматривались в работах ряда авторов (см. [2, 4, 6, 11–13] и др.). Что касается вырождающихся параболических уравнений с условием слабого вырождения вида (5), то укажем работы [16, 18], где при дополнительном условии (4) были доказаны теоремы существования и единственности решений обратных задач восстановления неизвестной правой части уравнения, а также работы [3, 17], где были исследованы обратные задачи нахождения младшего коэффициента, но зависящего от времени, и при дополнительном условии наблюдения, отличном от (4).

Отметим, что изучение как прямых, так и обратных задач для вырождающихся параболических уравнений имеет важные применения в различных прикладных задачах гидродинамики, климатологии, задачах изучения пористых сред, а также в финансовой математике (см., например, [14, 15] и дальнейшие ссылки в [15]).

Все равенства и неравенства предполагаются выполненными почти всюду, все рассматриваемые в работе функции предполагаются, как минимум, измеримыми, производные понимаются в обобщенном смысле по Соболеву. Перейдем к точным формулировкам.

Используемые в работе пространства Лебега и Соболева с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см, например, [7, 9]). При этом для удобства будем использовать обозначения норм: $\|\cdot\|_{L_\infty(0,l)} \equiv \|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_{L_2(0,l)} \equiv \|\cdot\|_2$.

Через $C^{0,\alpha}(Q)$, $\alpha = \mathrm{const} \in (0,1)$, будем обозначать пространство Гельдера непрерывных в Q функций, имеющих конечную норму

$$|u|_{C^{0,\alpha}(Q)} = \max_Q |u(t,x)| + \sup_{\substack{(t_1,x_1),(t_2,x_2)\in Q\\ (t_1,x_1)\neq(t_2,x_2)}} \frac{|u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^{\alpha/2}}.$$

Положим

$$Q_\tau = [0,\tau] \times [0,l], \quad \tau \in (0,T], \quad Q_T \equiv Q, \quad F(x) = \int_0^T f(t,x)\chi(t)dt,$$

$$L^+_\infty(0,l) = \{z(x) \in L_\infty(0,l) : z(x) \geqslant 0\}, \quad B^+_R = \{z(x) \in L^+_\infty(0,l) : \|z\|_\infty \leqslant R\}.$$

Нам понадобятся хорошо известные неравенства: неравенство Коши

$$|ab| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{6}$$

и неравенство Пуанкаре—Стеклова, которое при $n = 1$ может быть записано в виде

$$\|z\|_2 \leqslant \frac{l}{\pi}\|z_x\|_2, \quad z \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l). \tag{7}$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи (1)—(4), измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \leqslant a(x) \leqslant a_1, \quad x \in (0,l); \quad \frac{1}{a(x)} \in L_q(0,l), \quad q > 1, \quad \left\|\frac{1}{a}\right\|_{L_q(0,l)} \leqslant a_2; \tag{A}$$

$$\begin{cases} \dfrac{b(x)}{a(x)} \in L_\infty(0,l), \quad \dfrac{c^2(t,x)}{a(x)}, f(t,x) \in L_\infty(Q), \\ \left\|\dfrac{b}{a}\right\|_{L_\infty(0,l)} \leqslant K_{b,a}, \quad \left\|\dfrac{c^2}{a}\right\|_{L_\infty(Q)} \leqslant K_{c,a}, \quad \|f\|_{L_\infty(Q)} \leqslant K_f; \end{cases} \tag{B}$$

$$\begin{cases} u_0(x) \in W_2^1(0,l), \quad \mu_1(t), \mu_2(t) \in W_\infty^1(0,T), \quad u_0(0) = \mu_1(0), \quad u_0(l) = \mu_2(0), \\ |u_0(x)| \leqslant M_0, \quad x \in [0,l], \quad |\mu_1(t)| \leqslant M_0, \quad |\mu_2(t)| \leqslant M_0, \quad t \in [0,T]; \end{cases} \tag{C}$$

$$\begin{cases} \varphi(x) \in W_q^2(0,l) \quad (q > 1 \text{ — та же, что и в условии (A)}), \quad a(x)\varphi''(x) \in L_\infty(0,l), \\ \varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0, \quad \varphi_1 \leqslant a(x)\varphi''(x) \leqslant \varphi_2, \quad |\varphi'(x)| \leqslant K_\varphi^*, \quad x \in (0,l); \end{cases} \tag{D}$$

$$\begin{cases} \chi(t) \in W_1^1(0,T), \quad \|\chi\|_{L_1(0,T)} \leqslant K_\chi, \quad \|\chi'\|_{L_1(0,T)} \leqslant K_\chi^*, \\ F_1 \leqslant F(x) \leqslant F_2, \quad \varphi(0) = \displaystyle\int_0^T \mu_1(t)\chi(t)dt, \quad \varphi(l) = \displaystyle\int_0^T \mu_2(t)\chi(t)dt. \end{cases} \tag{E}$$

Здесь $a_1, a_2, M_0, K_\chi, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, K_\varphi^* = \mathrm{const} > 0$, $K_{b,a}, K_{c,a}, K_f, K_\chi^* = \mathrm{const} \geqslant 0$, $F_1, F_2 = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^1$.

Замечание 1. Из условий (8) следует, что $b(x) \in L_\infty(0,l)$, $c(t,x) \in L_\infty(Q)$, причем

$$\|b\|_\infty \leqslant K_b \equiv a_1 K_{b,a}, \quad \|c\|_{L_\infty(Q)} \leqslant K_c \equiv \sqrt{a_1 K_{c,a}}.$$

Определение 1. Обобщенным решением обратной задачи (1)—(4) будем называть пару функций $\{u(t,x), \gamma(x)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$u(t,x) \in L_\infty(0,T; W_2^1(0,l)) \cap W_s^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q), \quad s > 1, \quad \alpha \in (0,1),$$
$$u_t \in L_2(Q), \quad a u_{xx}^2 \in L_1(Q), \quad \gamma(x) \in L_\infty^+(0,l),$$

эти функции удовлетворяют уравнению (1) п.в. в Q, а функция $u(t,x)$ удовлетворяет условиям (2)—(4) в классическом смысле.

Структура работы следующая. В разделе 2 рассматривается прямая задача (1)—(3) (функция $\gamma(x) \in L_\infty^+(0,l)$ в уравнении (1) предполагается известной) и доказываются теоремы существования и единственности обобщенного решения этой задачи, а также устанавливаются некоторые оценки этого решения с явно выписанными константами.

Полученные в разделе 2 результаты применяются в разделе 3, где устанавливаются теоремы существования и единственности решения обратной задачи (1)—(4).

Наконец, в разделе 4 приводятся примеры обратных задач, для которых справедливы доказанные в разделе 3 теоремы.

2. Исследование прямой задачи.

Рассмотрим прямую задачу (1)—(3). Будем предполагать, что коэффициент $\gamma(x) \in L_\infty^+(0,l)$ известен и

$$\|\gamma\|_\infty \leqslant K_\gamma, \quad K_\gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Решение $u(t,x)$ прямой задачи будем понимать в смысле определения 1.

Докажем теоремы существования и единственности решения задачи (1)—(3), при этом воспользуемся идеями доказательства аналогичных теорем из работ [16, 18].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A)—(C) *и* (8). *Тогда существует не более одного обобщенного решения задачи* (1)—(3).

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u^{(1)}(t,x)$ и $u^{(2)}(t,x)$ этой задачи. Положим $v(t,x) = u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)$. Тогда функция $v(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{1}{a(x)} v_t - v_{xx} + \frac{b(x)}{a(x)} v_x + \frac{c(t,x)}{a(x)} v + \frac{\gamma(x)}{a(x)} v = 0, \tag{9}$$

с однородными краевыми условиями

$$v(0,x) = 0, \quad x \in [0,l], \quad v(t,0) = v(t,l) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Умножим уравнение (9) на $e^{-\lambda t}v$ (где $\lambda = \mathrm{const} > 0$ будет выбрана ниже) и проинтегрируем получившееся равенство по прямоугольнику Q. Учитывая условие (10) и предположение, что $\gamma(x) \geqslant 0$, после интегрирования по частям приходим к неравенству

$$\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int\limits_0^l \frac{v^2(T,x)}{a(x)}dx + \frac{\lambda}{2}\int\limits_Q e^{-\lambda t}\frac{v^2}{a(x)}dxdt + \int\limits_Q e^{-\lambda t}v_x^2 dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_Q e^{-\lambda t}|c(t,x)|\frac{v^2}{a(x)}dxdt + \int\limits_Q (e^{-\lambda t/2}|v_x|)\left(e^{-\lambda t/2}\left|\frac{b(x)}{a(x)}\right||v|\right)dxdt.$$

Для оценки второго слагаемого в правой части данного неравенства применим неравенство (6), отнеся множитель $\varepsilon = 1/2$ к слагаемому

$$\int\limits_Q e^{-\lambda t}v_x^2 dxdt.$$

Тогда приходим к соотношению

$$\frac{\lambda}{2}\int\limits_Q e^{-\lambda t}\frac{v^2}{a(x)}dxdt \leqslant \int\limits_Q e^{-\lambda t}|c(t,x)|\frac{v^2}{a(x)}dxdt + \int\limits_Q e^{-\lambda t}\left|\frac{b^2(x)}{a(x)}\right|\frac{v^2}{a(x)}dxdt.$$

Учитывая условие (D), получаем неравенство

$$\frac{\lambda}{2}\int\limits_Q e^{-\lambda t}\frac{v^2}{a(x)}dxdt \leqslant (K_c + K_{b,a}^2 a_1)\int\limits_Q e^{-\lambda t}\frac{v^2}{a(x)}dxdt.$$

Выбирая теперь $\lambda > 2(K_c + K_{b,a}^2 a_1)$, из последнего неравенства получаем, что

$$\int\limits_Q e^{-\lambda t}\frac{v^2}{a(x)}dxdt = 0.$$

Учитывая оценку $1/a(x) \geqslant 1/a_1 > 0$ (см. условие (A)), приходим к выводу, что $v(t,x) = 0$ в Q, т.е. $u^{(1)}(t,x) = u^{(2)}(t,x)$ в Q. Теорема доказана. □

Теперь докажем теорему существования обобщенного решения задачи (1)—(3) и установим ряд оценок для такого решения, которые будут использованы в разделе 3 при исследовании обратной задачи (1)—(4). В этих оценках через C с индексом будем обозначать положительные константы, зависящие только от l, T, a_1, a_2, $K_{b,a}$, $K_{c,a}$, K_γ, K_f, M_0, $\|u_0'\|_2$, $\|\mu_1'\|_{L_\infty(0,T)}$, $\|\mu_2'\|_{L_\infty(0,T)}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A)–(C) *и* (8). *Положим*

$$q^* = \frac{2q}{q+1}. \tag{11}$$

Тогда существует обобщенное решение задачи (1)–(3) *при* $s = q^*$ *и имеют место оценки*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(t,\cdot)\|_2^2 + \|au_{xx}^2\|_{L_1(Q)} + \|u_{xx}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 + \|u_t\|_{L_2(Q)}^2 \leqslant C_1, \tag{12}$$

$$|u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)| \leqslant C_2|x_1 - x_2|^{1/2} + C_3|t_1 - t_2|^{1/6}, \quad (t_1,x_1),(t_2,x_2) \in Q, \tag{13}$$

$$|u(t,x)| \leqslant (M_0 + K_f T)e^{K_c T} \equiv M, \quad (t,x) \in Q. \tag{14}$$

Доказательство. Будем использовать схему доказательства теоремы 2 из [16] с некоторыми модификациями. Положим $a_n = a(x) + 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим в Q краевую задачу для уравнения

$$u_t^n - a_n(x)u_{xx}^n + \sqrt{a_n(x)}\frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}}u_x^n + c(t,x)u^n + \gamma(x)u^n = f(t,x) \tag{15}$$

с краевыми условиями (2), (3).

Уравнение (15) является равномерно параболическим с ограниченными коэффициентами, поэтому в силу результатов работы [7] данная краевая задача имеет единственное решение

$$u^n(t,x) \in L_\infty(0,T; W_2^1(0,l)) \cap W_2^{1,2}(Q)$$

и для него справедлива равномерная по n оценка (см., например, [8]):

$$|u^n(t,x)| \leqslant (M_0 + K_f T)e^{K_c T}, \quad (t,x) \in Q. \tag{16}$$

Положим

$$\psi(t,x) = \frac{l-x}{l}\mu_1(t) + \frac{x}{l}\mu_2(t), \quad z^n(t,x) = u^n(t,x) - \psi(t,x), \quad z_0(x) = u_0(x) - \psi(0,x),$$

$$g_n(t,x) = f(t,x) - \sqrt{a_n(x)}\frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}}\psi_x(t,x) - c(t,x)\psi(t,x) - \gamma(x)\psi(t,x) - \psi_t(t,x).$$

Заметим, что в силу условий (B) и (C)

$$z_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l), \quad g_n(t,x) \in L_\infty(Q), \quad \|g_n\|_{L_\infty(Q)} \leqslant C_4,$$

где C_4 не зависит от n. Кроме того, для $z^n(t,x)$ в силу (16) справедлива равномерная по n оценка

$$|z^n(t,x)| \leqslant (M_0 + K_f T)e^{K_c T} + M_0, \quad (t,x) \in Q. \tag{17}$$

Функция $z^n(t,x)$ является решением краевой задачи

$$z_t^n - a_n(x) z_{xx}^n + \sqrt{a_n(x)}\frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}} z_x^n + c(t,x) z^n + \gamma(x) z^n = g_n(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{18}$$

$$z^n(0,x) = z_0(x), \quad x \in [0,l], \quad z^n(t,0) = z^n(t,l) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{19}$$

Выведем для $z^n(t,x)$ ряд равномерных по n оценок. Для этого умножим уравнение (18) на $-e^{-\lambda t} z_{xx}^n$ (где $\lambda = \mathrm{const} > 0$ будет выбрана ниже) и проинтегрируем получившееся равенство по прямоугольнику Q_τ, $0 \leqslant \tau \leqslant T$. После интегрирования по частям получим соотношение

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda\tau}\int_0^l |z_x^n(\tau,x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_{Q_\tau} e^{-\lambda t}|z_x^n|^2 dxdt + \int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} a_n(x)|z_{xx}^n|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|z_0'\|_2^2 + \int_{Q_\tau} (e^{-\lambda t/2}\sqrt{a_n(x)}|z_{xx}^n|)\left(e^{-\lambda t/2}\left|\frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}}\right| |z_x^n|\right) dxdt +$$

$$+ \int_{Q_\tau} (e^{-\lambda t/2}\sqrt{a_n(x)}|z_{xx}^n|)\left(e^{-\lambda t/2}|c(t,x)|\frac{|z^n|}{\sqrt{a_n(x)}}\right) dxdt +$$

$$+ \int_{Q_\tau} (e^{-\lambda t/2}\sqrt{a_n(x)}|z_{xx}^n|)\left(e^{-\lambda t/2}\gamma(x)\frac{|z^n|}{\sqrt{a_n(x)}}\right) dxdt +$$

$$+ \int_{Q_\tau} (e^{-\lambda t/2}\sqrt{a_n(x)}|z_{xx}^n|)\left(e^{-\lambda t/2}\frac{|g_n(t,x)|}{\sqrt{a_n(x)}}\right) dxdt.$$

Для оценки второго, третьего, четвертого и пятого слагаемых в правой части этого неравенства применим неравенство (6), относя множитель $\varepsilon = 1/4$ к слагаемым

$$\int_{Q_\tau} e^{-\lambda t} a_n(x)|z_{xx}^n|^2 dxdt.$$

В результате получим

$$e^{-\lambda\tau}\|z_x^n(\tau,\cdot)\|_2^2+\lambda\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}|z_x^n|^2dxdt+\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}a_n(x)|z_{xx}^n|^2dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_5+4\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}\frac{b^2(x)}{a(x)}|z_x^n|^2dxdt+4\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}c^2(t,x)\frac{|z^n|^2}{a_n(x)}dxdt+$$
$$+4\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}\gamma^2(x)\frac{|z^n|^2}{a_n(x)}dxdt+4\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}\frac{g^2(t,x)}{a_n(x)}dxdt,\quad(20)$$

где константа C_5 не зависит от n. С учетом условий (A), (B), оценки (17) и определения функции $a_n(t,x)$ из (20) вытекает неравенство

$$e^{-\lambda\tau}\|z_x^n(\tau,\cdot)\|_2^2+\lambda\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}|z_x^n|^2dxdt+\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}a_n(x)|z_{xx}^n|^2dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_5+C_6\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}|z_x^n|^2dxdt+C_7\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}\frac{1}{a_n(x)}dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_5+C_6\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}|z_x^n|^2dxdt+C_7\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}\frac{1}{a(x)}dxdt\leqslant C_6\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda t}|z_x^n|^2dxdt+C_8,\quad(21)$$

где константы C_6, C_7, C_8 не зависят от n. Положим в (21) $\lambda=2C_6$. Тогда из (21) вытекает равномерная по n оценка

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|z_x^n(t,\cdot)\|_2^2+\int\limits_Q a_n(x)|z_{xx}^n|^2dxdt\leqslant C_9.\quad(22)$$

Применяя неравенство Гельдера, с учетом определения q^* в (11), условия (A) и уже доказанной оценки (22) получаем (подробнее см. [5]) равномерную по n оценку

$$\|z_{xx}^n\|_{L_{q^*}(Q)}^2=\left(\int\limits_Q\left(\frac{1}{\sqrt{a_n(x)}}\right)^{q^*}|\sqrt{a_n(x)}z_{xx}^n|^{q^*}dxdt\right)^{2/q^*}\leqslant$$
$$\leqslant\left\|\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right\|_{L_q(Q)}\int\limits_Q\sqrt{a_n(x)}|z_{xx}^n|^2dxdt\leqslant C_{10}.\quad(23)$$

В силу уравнения (18) с учетом оценок (17), (22) получаем также равномерную по n оценку

$$\|z_t^n\|_{L_2(Q)}^2\leqslant C_{11}.\quad(24)$$

Наконец, на основании оценок (22), (24) и оценки (2.9) из [9, с. 79] получаем равномерную по n оценку (подробнее см. доказательство теоремы 2.3 в [18]):

$$|z^n(t_2,x_2)-z^n(t_1,x_1)|\leqslant C_{12}|x_2-x_1|^{1/2}+C_{13}|t_2-t_1|^{1/6},\quad(t_2,x_2),(t_1,x_1)\in Q.\quad(25)$$

Но тогда для функции $u^n(t,x)\equiv v^n(t,x)+\psi(t,x)$ — решения задачи (15), (2), (3) — справедливы равномерные по n оценки

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x^n(t,\cdot)\|_2^2+\|\sqrt{a_n}u_{xx}^n\|_{L_2(Q)}^2+\|u_{xx}^n\|_{L_{q^*}(Q)}^2+\|u_t^n\|_{L_2(Q)}^2\leqslant C_{14},$$
$$|u^n(t_2,x_2)-u^n(t_1,x_1)|\leqslant C_{15}|x_2-x_1|^{1/2}+C_{16}|t_2-t_1|^{1/6},\quad(t_2,x_2),(t_1,x_1)\in Q.$$

Повторяя теперь доказательство теоремы 2 из [16], получаем, что существует решение

$$u(t,x)\in L_\infty(0,T;W_2^1(0,l))\cap W_{q^*}^{1,2}(Q)\cap C^{0,1/3}(Q),\quad u_t\in L_2(Q),\quad au_{xx}^2\in L_1(Q),$$

задачи (1)—(3), причем для $u(t,x)$ справедливы оценки (12), (13). Поскольку в силу доказательства теоремы 2 из [16] функция $u(t,x)$ есть равномерный на Q предел подпоследовательности $u^{n_k}(t,x)$ при $k\to\infty$, то из оценки (16) следует оценка (14). Теорема 2 доказана. $\square$

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия* (A), (B), *число* q^* *определено в* (11). *Пусть* $h(t,x)\in L_\infty(Q)$ — *некоторая функция, удовлетворяющая оценке*

$$\|h\|_{L_\infty(Q)}\leqslant K_h. \tag{26}$$

Пусть $v(t,x)\in L_\infty(0,T;W_2^1(0,l))\cap W_{q^*}^{1,2}(Q)\cap C^{0,\alpha}(Q)$, $v_t\in L_2(Q)$, $av_{xx}^2\in L_1(Q)$ — *решение в* Q *краевой задачи для уравнения*

$$v_t-a(x)v_{xx}+b(x)v_x+c(t,x)v+\gamma(x)v=h(t,x) \tag{27}$$

с однородными краевыми условиями (10). (*Заметим, что в силу доказанных выше теорем* 1 *и* 2 *такое решение существует и единственно.*) *Положим*

$$\lambda_0=3\left(K_{b,a}a_1+\frac{l^2}{\pi^2}K_{c,a}\right). \tag{28}$$

Тогда для функции $v(t,x)$ *справедлива оценка*

$$|v(t,x)|\leqslant(3lTa_2e^{\lambda_0T})^{1/2}l^{\frac{q-1}{2q}}K_h,\quad (t,x)\in Q. \tag{29}$$

Доказательство. Как и в теореме 2, положим $a_n=a(x)+1/n$, $n=1,2,\ldots$, и рассмотрим в Q краевую задачу для уравнения

$$v_t^n-a_n(x)v_{xx}^n+\sqrt{a_n(x)}\frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}}v_x^n+c(t,x)v^n+\gamma(x)v^n=h(t,x) \tag{30}$$

с краевыми условиями (10). В силу теоремы 2

$$v^n(t,x)\rightrightarrows v(t,x),\quad n\to\infty,\ \text{равномерно на } Q. \tag{31}$$

Умножим уравнение (30) на $e^{-\lambda_0t}v_t^n/a_n(x)$, где λ_0 определено формулой (28), и проинтегрируем результат по прямоугольнику Q_τ, $\tau\in[0,T]$. Тогда после интегрирования по частям с учетом условий (10), придем к соотношению

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda_0t}\frac{|v_t^n|^2}{a_n(x)}dxdt+\frac12e^{-\lambda_0\tau}\|v_x^n(\tau,\cdot)\|_2^2+\frac{\lambda_0}{2}\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda_0t}|v_x^n|^2dxdt+\\+\frac12e^{-\lambda_0\tau}\int\limits_0^l\frac{\gamma(x)}{a_n(x)}|v^n(\tau,x)|^2dx+\frac{\lambda_0}{2}\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda_0t}\frac{\gamma(x)}{a_n(x)}|v^n|^2dxdt\leqslant\\\leqslant\int\limits_{Q_\tau}\left(e^{-\lambda_0t/2}\frac{|v_t^n|}{\sqrt{a_n(x)}}\right)\left(e^{-\lambda_0t/2}\frac{|b(x)|}{\sqrt{a(x)}}|v_x^n|\right)dxdt+\\+\int\limits_{Q_\tau}\left(e^{-\lambda_0t/2}\frac{|v_t^n|}{\sqrt{a_n(x)}}\right)\left(e^{-\lambda_0t/2}\frac{|c(t,x)|}{\sqrt{a_n(x)}}|v^n|\right)dxdt+\\+\int\limits_{Q_\tau}\left(e^{-\lambda_0t/2}\frac{|v_t^n|}{\sqrt{a_n(x)}}\right)\left(e^{-\lambda_0t/2}\frac{|h(t,x)|}{\sqrt{a_n(x)}}\right)dxdt.\end{aligned}$$

Для оценки слагаемых в правой части этого неравенства применим неравенство (6), относя множитель $\varepsilon=1/3$ к слагаемым

$$\int\limits_{Q_\tau}e^{-\lambda_0t}\frac{|v_t^n|^2}{a_n(x)}dxdt.$$

С учетом того, что $\gamma(x) \geqslant 0$ на $[0, l]$, получим:

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda_0\tau}\|v_x^n(\tau,\cdot)\|_2^2 + \frac{\lambda_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t}|v_x^n|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\int\limits_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t}\frac{b^2(x)}{a(x)}|v_x^n|^2 dxdt + \frac{3}{2}\int\limits_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t}\frac{c^2(t,x)}{a_n(x)}|v^n|^2 dxdt + \frac{3}{2}\int\limits_{Q_\tau} e^{-\lambda_0 t}\frac{h^2(t,x)}{a_n(x)}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\left(K_{b,a}a_1 + K_{c,a}\frac{l^2}{\pi^2}\right)\int\limits_{Q_\tau}|v_x^n|^2 dxdt + \frac{3}{2}K_h^2\int\limits_{Q_\tau}\frac{1}{a(x)}dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\left(K_{b,a}a_1 + K_{c,a}\frac{l^2}{\pi^2}\right)\int\limits_{Q_\tau}|v_x^n|^2 dxdt + \frac{3}{2}TK_h^2 l^{\frac{q-1}{q}}a_2; \quad (32)$$

здесь использовано неравенство (6), условия (A), (B), оценка (26) а в последнем переходе еще неравенство Гельдера. В силу условия (28) из (32) вытекает оценка

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_x^n(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant 3TK_h^2 e^{\lambda_0 T} l^{\frac{q-1}{q}}a_2.$$

Поскольку $v(t,0) = 0$, отсюда следует, что

$$|v^n(t,x)| \leqslant \int\limits_0^l |v_y(t,y)|dy \leqslant l^{1/2}\cdot\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v_x^n(t,\cdot)\|_2^2 \leqslant (3lTa_2e^{\lambda_0 T})^{1/2} l^{\frac{q-1}{2q}}K_h, \quad (t,x)\in Q,$$

а значит, в силу соотношения (31) справедлива оценка (29). Теорема доказана. □

3. Исследование обратной задачи. Рассмотрим обратную задачу (1)—(4) и выведем операторное уравнение для нахождения неизвестной функции $\gamma(x) \in L_\infty^+(0,l)$. Для этого умножим уравнение (1) на $\chi(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Учитывая условие наблюдения (4) и предположения (D), (E), после интегрирования по частям получим равенство

$$\gamma(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\Bigg[F(x) + a(x)\varphi''(x) - b(x)\varphi'(x) - u(T,x)\chi(T) + u_0(x)\chi(0) + \int\limits_0^T(\chi'(t) - c(t,x)\chi(t))u\,dt\Bigg]. \quad (33)$$

Введем оператор $\mathcal{A}\colon L_\infty^+(0,l) \to L_\infty(0,l)$ по формуле

$$\mathcal{A}(\gamma)(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\Bigg[F(x) + a(x)\varphi''(x) - b(x)\varphi'(x) - u(T,x)\chi(T) + u_0(x)\chi(0) + \int\limits_0^T(\chi'(t) - c(t,x)\chi(t))u\,dt\Bigg], \quad (34)$$

где $\gamma(x)$ — произвольная функция из $L_\infty^+(0,l)$, а $u(t,x) \equiv u(t,x;\gamma)$ — решение прямой задачи (1)—(3) с данной $\gamma(x)$ в уравнении (1). Такое решение существует и единственно в силу теорем 1 и 2 из предыдущего раздела. Тогда соотношение (33) может быть записано в виде

$$\gamma = \mathcal{A}(\gamma). \quad (35)$$

Замечание 2. В силу условий (A)—(E) и теорем 1, 2 оператор $\mathcal{A}$ определен корректно и действует из $L_\infty^+(0,l)$ в $L_\infty(0,l)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (A)—(E). *Тогда операторное уравнение* (35) *эквивалентно обратной задаче* (1)—(4) *в следующем смысле. Если пара* $\{u(t,x),\gamma(x)\}$ *является решением обратной задачи, то* $\gamma(x)$ *удовлетворяет уравнению* (35). *Обратно, если* $\gamma^*(x)\in L^+_\infty(0,l)$ *является решением операторного уравнения* (35), *а* $u^*(t,x)$ — *решение прямой задачи* (1)—(3) *с данной* $\gamma^*(x)$ *в уравнении* (1), *то пара* $\{u^*(t,x),\gamma^*(x)\}$ *является обобщенным решением обратной задачи* (1)—(4).

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано выше при выводе соотношения (33). Докажем второе утверждение. Пусть $\gamma^*(x)\in L^+_\infty(0,l)$ является решением уравнения (35). Рассмотрим функцию $u^*(t,x)$ как единственное обобщенное решение прямой задачи (1)—(3) с выбранной функцией $\gamma(x)\equiv\gamma^*(x)$ в правой части уравнения (1). Положим

$$\varphi^*(x)=\int\limits_0^T u^*(t,x)\chi(t)dt. \tag{36}$$

Тогда

$$\varphi^*(x)\in W^2_{q^*}(0,l),\quad a(x)\varphi''(x)\in L_2(0,l). \tag{37}$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше при выводе (33) (в этих рассуждениях достаточно, чтобы было выполнено условие (37)), приходим к соотношению

$$\gamma^*(x)\varphi^*(x)=\Bigg[F(x)+a(x)\varphi^{*''}(x)-b(x)\varphi^{*'}(x)-u^*(T,x)\chi(T)+u_0(x)\chi(0)+\\+\int\limits_0^T(\chi'(t)-c(t,x)\chi(t))u^*dt\Bigg]. \tag{38}$$

Отметим, что из (38) вытекает, что $a(x)\varphi^{*''}(x)\in L_\infty(0,l)$, откуда $\varphi^{*''}(x)\in L_q(0,l)$.

С другой стороны, $\gamma^*(x)$ является решением уравнения (35), поэтому, учитывая определение оператора $\mathcal{A}$ в (34), имеем

$$\gamma^*(x)\varphi(x)=\Bigg[F(x)+a(x)\varphi''(x)-b(x)\varphi'(x)-u^*(T,x)\chi(T)+u_0(x)\chi(0)+\\+\int\limits_0^T(\chi'(t)-c(t,x)\chi(t))u^*dt\Bigg]. \tag{39}$$

Заметим, что из определения $\varphi^*(x)$ в (36) и условия (E) следует, что

$$\varphi^*(0)=\int\limits_0^T\mu_1(t)\chi(t)dt=\varphi(0),\quad \varphi^*(l)=\int\limits_0^T\mu_2(t)\chi(t)dt=\varphi(l). \tag{40}$$

Положим $z(x)=\varphi(x)-\varphi^*(x)$. Тогда $z(x)\in W^2_q(0,l)$, $a(x)z''(x)\in L_\infty(0,l)$. Вычитая (39) из (38) и учитывая соотношения (40), получаем, что $z(x)$ является обобщенным решением краевой задачи

$$-z''+\frac{b(x)}{a(x)}z'+\frac{\gamma^*(x)}{a(x)}z=0,\quad x\in(0,l), \tag{41}$$

$$z(0)=z(l)=0. \tag{42}$$

Пусть $v(x)\in W^1_2(0,l)$ — произвольная функция, для которой выполнены условия $v(x)\geqslant0$, $z(x)v(x)\geqslant0$ на $[0,l]$. Тогда из (41), (42) следует, что

$$\int\limits_0^l z'v'dx+\int\limits_0^l\frac{b(x)}{a(x)}z'vdx+\int\limits_0^l\frac{\gamma^*(x)}{a(x)}zvdx=0.$$

Учитывая, что $\gamma^*(x) \geqslant 0$, $a(x) \geqslant 0$, $z(x)v(x) \geqslant 0$ на $[0, l]$, получаем отсюда неравенство

$$\int_0^l z'v'dx + \int_0^l \frac{b(x)}{a(x)} z'vdx \leqslant 0.$$

Повторяя теперь рассуждения, проведенные в доказательстве теоремы 8.1 из [1, с. 173] после формулы (8.10), получаем, что $z(x) = 0$ на $[0, l]$, т.е. $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ на $[0, l]$, а следовательно, пара $\{u^*(t, x), \gamma^*(x)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1)—(4). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (A)$-$(E)*, константа* M *определена в формуле* (14)*. Предположим, что выполнено неравенство*

$$F_1 + \varphi_1 \geqslant K_{b,a} a_1 K^*_\varphi + M_0|\chi(0)| + M(|\chi(T)| + K^*_\chi + K_c K_\chi). \tag{43}$$

Тогда для всех $\gamma(x) \in L^+_\infty(0, l)$ *имеем* $\mathcal{A}(\gamma)(x) \geqslant 0$.

Доказательство. Из (43) в силу условий (A)—(E) и оценки (14) вытекает неравенство

$$F(x) + a(x)\varphi''(x) - b(x)\varphi'(x) - u(T, x)\chi(T) + u_0(x)\chi(0) + \int_0^T (\chi'(t) - c(t, x)\chi(t))udt \geqslant 0,$$

из которого в силу определения оператора $\mathcal{A}$ следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2*. Тогда для всех* $\gamma(x) \in L^+_\infty(0, l)$ *справедлива оценка*

$$\|\mathcal{A}(\gamma)\|_\infty \leqslant R_0, \tag{44}$$

где

$$R_0 = \frac{1}{\varphi_0}\Big[F_2 + \varphi_2 + K_{b,a} a_1 K^*_\varphi + M_0|\chi(0)| + M(|\chi(T)| + K^*_\chi + K_c K_\chi)\Big]. \tag{45}$$

Доказательство. Оценка (44) есть непосредственное следствие определения оператора $\mathcal{A}$, условий (A)—(E) и оценки (14). $\square$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 2*. Тогда оператор* $\mathcal{A}$ *отображает множество* $L^+_\infty(0, l)$ *в* $B^+_{R_0}$*, где* R_0 *определено в* (45)*.*

Лемма 4 непосредственно следует из лемм 2 и 3.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы* 2*. Тогда оператор* $\mathcal{A}$ *непрерывен на множестве* B^+_R *при всех* $R > 0$*.*

Доказательство. Пусть $\gamma^{(1)}(x), \gamma^{(2)}(x) \in B^+_R$, а $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ — соответствующие обобщенные решения прямой задачи (1)—(3). Положим

$$v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x), \quad \sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x).$$

Тогда для данных функций выполняется уравнение

$$v_t - a(x)v_{xx} + b(x)v_x + c(t, x)v + \gamma^{(1)}(x)v = -\sigma(x)u^{(2)}(t, x) \tag{46}$$

и краевые условия (10). Заметим, что уравнение (46) совпадает с уравнением (27) при $h(t, x) = -\sigma(x)u^{(2)}(t, x)$, а следовательно, в силу теоремы 3 с учетом оценки (14) имеем

$$|v(t, x)| \leqslant (3lTa_2 e^{\lambda_0 T})^{1/2} l^{\frac{q-1}{2q}} M\|\sigma\|_\infty, \quad (t, x) \in Q, \tag{47}$$

где λ_0 определена в (28). Но тогда в силу определения оператора $\mathcal{A}$ в (34) получаем

$$\|\mathcal{A}(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})\|_\infty \leqslant |\chi(T)|\|v(T, \cdot)\|_\infty + (K^*_\chi + K_c K_\chi)\|v\|_{L_\infty(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant (|\chi(T)| + K^*_\chi + K_c K_\chi)(3lTa_2 e^{\lambda_0 T})^{1/2} l^{\frac{q-1}{2q}} M\|\sigma\|_\infty,$$

откуда следует, что $\|\mathcal{A}(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})\|_\infty \to 0$, если $\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_\infty \to 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Пусть* $R > 0$ *произвольно. Тогда оператор* $\mathcal{A}$ *является вполне непрерывным оператором на множестве* B_R^+.

Доказательство. Утверждение леммы есть прямое следствие оценки (13), компактности вложения пространства $C^{0,1/3}(Q)$ в пространство $C(Q)$ и леммы 5. □

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (A)—(E) *и неравенство* (43). *Тогда существует обобщенное решение* $\{u(t,x),\gamma(x)\}$ *обратной задачи* (1)—(4), *причем для* $\gamma(x)$ *справедлива оценка*

$$0 \leqslant \gamma(x) \leqslant R_0, \tag{48}$$

где R_0 *определено в* (45), *а для функции* $u(t,x)$ *справедливы оценки* (12), (13) *с константами* C_1, C_2, C_3, *зависящими от* $K_\gamma \equiv R_0$, *а также оценка* (14).

Доказательство. В силу лемм 2—6 оператор $\mathcal{A}$ является вполне непрерывным оператором, переводящим замкнутое выпуклое множество $B_{R_0}^+$ на свою часть. Поэтому по теореме Шаудера о неподвижной точке (см. [10, с. 193]) существует решение $\gamma(x)$ уравнения (35), принадлежащее множеству $B_{R_0}^+$, так что для $\gamma(x)$ выполнена оценка (48).

Пусть $u(t,x)$ — решение прямой задачи (1)—(3) с данным $\gamma(x)$ в уравнении (1). Такое решение существует и единственно в силу теорем 1 и 2. Кроме того, в силу теоремы 2 и оценки (48) для $u(t,x)$ справедливы оценки (12), (13), в которых константы C_1, C_2, C_3, зависят от $K_\gamma \equiv R_0$, а также оценка (14). Применяя лемму 1, получаем, что пара $\{u(t,x),\gamma(x)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1)—(4). Теорема доказана. □

Докажем теперь теорему единственности решения обратной задачи (1)—(4).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (A)—(E). *Предположим, что справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\varphi_0}(|\chi(T)| + K_\chi^* + K_c K_\chi)(3lTa_2e^{\lambda_0 T})^{1/2} l^{\frac{q-1}{2q}} M < 1, \tag{49}$$

где M *из* (14), *а* λ_0 *из* (28). *Тогда обратная задача* (1)—(4) *не может иметь более одного обобщенного решения.*

Доказательство. Предположим, что существуют два различных решения $\{u^{(1)},\gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)},\gamma^{(2)}\}$ этой обратной задачи. Положим

$$v(t,x) = u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x), \quad \sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x).$$

Тогда для пары $\{v,\sigma\}$ справедливы соотношения (46), (10), а также соотношение

$$\int_0^T v(t,x)\chi(t)dt = 0. \tag{50}$$

Умножим (46) на $\chi(t)$ и проинтегрируем результат по $[0,T]$. Учитывая соотношения (50) и (4), после интегрирования по частям получим, что

$$\sigma(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\left[\int_0^T (\chi'(t) - c(t,x)\chi(t))v(t,x)dt - \chi(T)v(T,x)\right]. \tag{51}$$

Заметим, что при доказательстве леммы 5 для функции $v(t,x)$ — решения задачи (46), (10) — была получена оценка (47), где константа M из (14), а λ_0 из (28). Но тогда из соотношения (51) получаем неравенство

$$\|\sigma\|_\infty \leqslant \frac{1}{\varphi_0}(|\chi(T)| + K_\chi^* + K_c K_\chi)(3lTa_2e^{\lambda_0 T})^{1/2} l^{\frac{q-1}{2q}} M\|\sigma\|_\infty,$$

откуда в силу условия (49) вытекает, что $\sigma(x) = 0$ на $[0,l]$, т.е. $\gamma^{(1)}(x) = \gamma^{(2)}(x)$. Но тогда и $u^{(1)}(t,x) = u^{(2)}(t,x)$ в Q в силу единственности решения прямой задачи (1)—(3) (см. теорему 1). Таким образом, решения $\{u^{(1)},\gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)},\gamma^{(2)}\}$ обратной задачи (1)—(4) совпадают. Теорема 5 доказана. □

4. Некоторые примеры. В данном разделе приведем примеры конкретных обратных задач, для которых применимы доказанные в разделе 3 теоремы существования и единственности.

Пример 1. Рассмотрим в Q обратную задачу

$$u_t - x^{1/2}u_{xx} + \gamma(x)u = 0, \tag{52}$$

$$u(0,x) = \frac{6}{T^3}(l^{1/2}x + l), x \in [0,l], \tag{53}$$

$$u(t,0) = \frac{6l}{T^3}, \quad u(t,l) = \frac{6}{T^3}(l^{3/2} + l), \quad t \in [0,T], \tag{54}$$

$$\int\limits_0^T u(t,x)t(T-t)dt = x^{3/2} + l, \quad x \in [0,l]. \tag{55}$$

Для обратной задачи (52)—(55) имеем

$$a(x) = x^{1/2}, \quad b(x) = 0, \quad c(t,x) = f(t,x) = 0, \quad u_0(x) = \frac{6}{T^3}(l^{1/2}x + l), \quad \mu_1(t) = \frac{6l}{T^3},$$

$$\mu_2(t) = \frac{6}{T^3}(l^{3/2} + l), \quad \chi(t) = t(T-t), \quad \varphi(x) = x^{3/2} + l.$$

Нетрудно проверить, что для задачи (52)—(55) выполнены условия (A)—(E). Кроме того, константы, входящие в условие (43) из теоремы 4 и в условие (49) из теоремы 5, могут быть выбраны следующими:

$$F_1 = F_2 = 0, \quad \varphi_0 = l, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{3}{4}, \quad K_\varphi^* = \frac{3l^{1/2}}{2}, \quad q = \frac{3}{2}, \quad a_1 = l^{1/2}, \quad a_2 = 16^{1/3}l^{1/6},$$

$$K_\chi = \frac{T^3}{6}, \quad K_\chi^* = \frac{T^2}{2}, \quad K_{b,a} = K_c = 0, \quad M_0 = M = \frac{6}{T^3}(l^{3/2} + l).$$

Тогда условие (43) имеет вид

$$1 \geqslant \frac{4l}{T}(l^{1/2} + 1), \tag{56}$$

а условие (49) — вид

$$6^{3/2}2^{1/6}\frac{l^{3/4}}{2T^{1/2}}(l^{1/2} + 1) < 1. \tag{57}$$

Таким образом, условия (56) и (57) будут выполнены либо при достаточно большом T (и фиксированном l), либо при достаточно малом l (и фиксированном T). В обоих этих случаях для задачи (52)—(55) выполняются условия теорем 4 и 5, а следовательно, обратная задача (52)—(55) имеет решение, которое будет единственным.

Пример 2. Рассмотрим в Q обратную задачу для уравнения (52), но с краевыми условиями

$$u(0,x) = l^{1/2}x + l, \quad x \in [0,l], \tag{58}$$

$$u(t,0) = l, \quad u(t,l) = l^{3/2} + l, \quad t \in [0,T], \tag{59}$$

и дополнительным условием наблюдения

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t,x)dt = x^{3/2} + l, \quad x \in [0,l]. \tag{60}$$

Заметим, что условие наблюдения (60) имеет простой физический смысл: это взятие среднего по времени от функции $u(t,x)$ на промежутке $[0,T]$.

Для обратной задачи (52), (58)—(60) имеем

$$a(x) = x^{1/2}, \quad b(x) = 0, \quad c(t,x) = f(t,x) = 0, \quad u_0(x) = l^{1/2}x + l, \quad \mu_1(t) = l,$$

$$\mu_2(t) = l^{3/2} + l, \quad \chi(t) = \frac{1}{T}, \quad \varphi(x) = x^{3/2} + l.$$

Нетрудно проверить, что для задачи (52), (58)—(60) выполнены условия (A)—(E), при этом константы, входящие в условие (43) из теоремы 4 и в условие (49) из теоремы 5, могут быть выбраны следующими:

$$F_1 = F_2 = 0, \quad \varphi_0 = l, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{3}{4}, \quad K^*_\varphi = \frac{3l^{1/2}}{2}, \quad q = \frac{3}{2}, \quad a_1 = l^{1/2}, \quad a_2 = 16^{1/3} l^{1/6},$$
$$K_\chi, \quad K^*_\chi = 0, \quad K_{b,a} = K_c = 0, \quad M_0 = M = (l^{3/2} + l).$$

Поэтому условие (43) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{3}{4} \geqslant \frac{2l}{T}(l^{1/2} + 1), \tag{61}$$

а условие (49) — вид

$$6^{1/2} 2^{1/6} \frac{l^{3/4}}{T^{1/2}}(l^{1/2} + 1) < 1. \tag{62}$$

Как и в примере 1, эти условия будут выполнены либо при достаточно большом T (l фиксировано), либо при достаточно малом l (T фиксировано). В обоих случаях для задачи (52), (58)—(60) будут выполнены условия теорем 4 и 5, а следовательно, обратная задача (52), (58)—(60) имеет решение, которое будет единственным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
2. *Камынин В. Л., Костин А. Б.* Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении// Диффер. уравн. — 2010. — *46*, № 3. — С. 372—383.
3. *Камынин В. Л.* Обратная задача определения коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении в классе L_∞// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — *61*, № 3. — С. 413—427.
4. *Камынин В. Л.* Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 2. — С. 207—217.
5. *Камынин В. Л.* Обратная задача определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с неограниченными коэффициентами// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 5. — С. 832–841.
6. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном уравнении и о связанной с ним обратной задаче// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 6. — С. 840—853.
7. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 1979. — № 5. — С. 217–272.
8. *Кружков С. Н.* Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1969.
9. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982.
11. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении, I// Сиб. мат. ж. — 1992. — *33*, № 3. — С. 146—155.
12. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении, II// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 5. — С. 147—162.
13. *Прилепко А. И., Тихонов И. В.* Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности// Докл. РАН. — 1999. — *394*, № 1. — С. 21—23.
14. *Bouchouev I., Isakov V.* Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets// Inv. Probl. — 1999. — *15*, № 3. — P. 95–116.
15. *Cannarsa P., Martinez P., Vancostenoble J.* Global Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications// Mem. Am. Math. Soc. — 2016. — *239*, № 1133. — P. 1–207.
16. *Hussein M. S., Lesnic D., Kamynin V. L., Kostin A. B.* Direct and inverse source problem for degenerate parabolic equations// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2020. — *28*, № 3. — P. 425–448.

17. *Kamynin V. L.* Inverse problem of determining the absorption coefficient in a degenerate parabolic equation in the class of L_2-functions// J. Math. Sci. — 2020. — *250*, № 2. — P. 322–336.
18. *Prilepko A. I, Kamynin V. L., Kostin A. B.* Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2018. — *26*, № 4. — P. 523–539.

Камынин Виталий Леонидович
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва
E-mail: vlkamynin2008@yandex.ru