ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 35–41
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-35-41

УДК 511.84

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ—РИМАНА

© 2022 г. **Ю. А. ГЛАДЫШЕВ, Е. А. ЛОШКАРЕВА**

Аннотация. В работе продолжается изучение полученных ранее обобщений условий Коши—Римана (УКР), которые при определенных предположениях могут быть интерпретированы как уравнения электромагнитного поля Максвелла. Основным математическим аппаратом, использованным в работе, является аппарат двух кватернионных переменных. Работа не содержит каких-либо физических утверждений, а является теоретическим анализом, который можно провести для систем обобщенных УКР.

Ключевые слова: кватернион, спинор, система Коши—Римана, уравнение Лапласа, система Максвелла, закон сохранения электрического заряда.

THE LAW OF CONSERVATION OF ELECTRIC CHARGE AND THE PHYSICAL INTERPRETATION OF THE GENERALIZED CAUCHY–RIEMANN SYSTEM

© 2022 **Yu. A. GLADYSHEV, E. A. LOSHKAREVA**

Abstract. In this paper, we continue the study of generalizations of the Cauchy–Riemann (CR) conditions obtained earlier, which, under certain assumptions, can be interpreted as Maxwell's equations of electromagnetic field. The main mathematical tools used in the work is the technique of two quaternion variables. This work does not contain any physical statements, but is a theoretical analysis that can be carried out for systems of generalized CR conditions.

Keywords and phrases: quaternion, spinor, Cauchy–Riemann system, Laplace equation, Maxwell system, law of conservation of electric charge.

AMS Subject Classification: 46S05, 47S05

1. Введение. Кватернионный аппарат. В целом ряде работ сделаны попытки использовать аппарат кватернионных функций [3] для формулировки законов, решений конкретных задач классической электродинамики и получения новых результатов. Можно указать направление, которое использует симметрию законов электродинамики относительно взаимной замены электрических и магнитных полей, а следовательно, относительно электрических и гипотетических магнитных зарядов [5, 9].

Другое направление изучает сходство уравнений Максвелла и Дирака [11] и устанавливает ряд интересных возможных явлений [5, 6, 9–11, 13]. Следует обратить внимание на использование кватернионных методов для решений конкретных задач, например, задачи о вибраторе [5, 9, 11]. Чисто математическая постановка задачи связана не только с кватернионами и с их различными обобщениями [7, 12]. В настоящем сообщении рассматриваются только тело кватернионов.

В восьмимерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^{(8)}$ выделим два подпространства X и Y размерности $k = 4$, определив их точки наборами координат x_i, y_i, где $i = \overline{0,3}$. Следовательно, пространство $\mathbb{R}^{(8)}$ следует рассматривать как декартово произведение пространств X, Y.

Введем два координатных кватерниона x, y

$$x = \sum_{i=0}^{3} e_i x_i, \quad y = \sum_{i=0}^{3} e_i y_i. \tag{1}$$

Здесь e_i единицы системы кватернионов с обычными для них свойствами [2].

Предположим, что заданы две кватернионные функции χ, ψ с компонентами χ_i, ψ_i вида

$$\chi = \sum_{i=0}^{3} e_i \chi_i, \quad \psi = \sum_{i=0}^{3} e_i \psi_i. \tag{2}$$

Для дальнейшего предположим, что функции χ_i, ψ_i от всех восьми переменных имеют вторые непрерывные производные.

Будем использовать хорошо известные [8] кватернионные операторы

$$D_1 = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D_2 = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{3}$$

а также их кватернионные сопряженные.

В работе [1] обобщенные условия Коши—Римана (УКР) были введены как система линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$D_1\chi - \psi D_2 = 0, \quad \chi \bar{D}_2 + \bar{D}_1 \psi = 0. \tag{4}$$

Действительно, если предположить, что функции χ, ψ зависят только от x_0, y_0, то имеем

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_0} - \frac{\partial \psi}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y_0} + \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = 0; \tag{5}$$

таким образом, набор четырех систем для пар (χ_0, ψ_0), (χ_1, ψ_1), (χ_2, ψ_2), (χ_3, ψ_3), совпадающих по конструкции с системой Коши—Римана.

В случае, когда операторы D_1, D_2 включают только переменные x_0, y_0, y_1, имеем систему

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial}{\partial y_0} + e_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\right)\psi = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_0} - e_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\right)\chi + \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = 0 \tag{6}$$

для так называемого гармонического вектора [2].

Если χ, ψ зависят от x_0, x_1, y_0, y_1, то получаем систему Мойсила—Теодореску [8] и в другом смысле систему для спинорного поля. Авторами было показано, что при определенном отождествлении компонент функций χ, ψ с физическими параметрами электромагнитного поля приходим к системе уравнений Максвелла [4].

2. Основные операторы A, $\tilde{A}$ системы уравнений электромагнитного поля. Введем преобразование пары кватернионных функций χ, ψ с указанными выше свойствами в пару кватернионных функций μ, ν вида

$$\mu = D_1\chi - \psi D_2, \quad \nu = \chi \bar{D}_2 + \bar{D}_1 \psi. \tag{7}$$

По данным χ, ψ кватернионные функции μ, ν определены однозначно. Однако обратная задача нахождения χ, ψ по заданным μ, ν определена неоднозначно, а именно с точностью до пары χ_u, ψ_u кватернионных функций, удовлетворяющих системе

$$D_1\chi_u - \psi_u D_2 = 0, \quad \chi_u \bar{D}_2 + \bar{D}_1 \psi_u = 0. \tag{8}$$

Введем наряду с преобразованием (7) так называемое присоединенное преобразование

$$\varepsilon = \bar{D}_1\alpha + \beta D_2, \quad \delta = -\alpha \bar{D}_2 + D_1 \beta \tag{9}$$

упорядоченных пар кватернионов α, β и ε, δ. Относительно этого преобразования можно высказать те же замечания, что и ранее о (7). При однозначности преобразования (9) обратное преобразование определено с точностью до набора (α_u, β_u), где α_u, β_u удовлетворяют системе

$$\bar{D}_1\alpha_u + \beta_u D_2 = 0, \quad -\alpha_u \bar{D}_2 + D_1\beta_u = 0, \tag{10}$$

которую назовем присоединенной к (8). В дальнейшем, чтобы подчеркнуть двойственный характер этой операции, применим обозначение

$$\alpha_u = \tilde{\chi}_u, \quad \beta_u = \tilde{\psi}_u. \tag{11}$$

Рассмотрим применение преобразования (9) к случаю, когда $\varepsilon = \chi$, $\delta = \psi$. Получим

$$\begin{aligned} \mu &= D_1(\bar{D}_1\alpha + \beta D_2) - (-\alpha\bar{D}_2 + D_1\beta)D_2 = D_1\bar{D}_1\alpha + \bar{D}_2 D_2\beta = \Delta(8)\alpha, \\ \nu &= +(\bar{D}_1\alpha + \beta D_2)\bar{D}_2 + \bar{D}_1(-\alpha\bar{D}_2 + D_1\beta) = D_2\bar{D}_2\alpha + \bar{D}_1 D_1\beta = \Delta(8)\beta. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь через $\Delta(8)$ обозначен оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{(8)}$.

Введем более общую запись, определив оператор A, который упорядоченной паре кватернионов (χ, ψ) ставит в соответствие пару (μ, ν):

$$(\mu, \nu) = A(\chi, \psi). \tag{13}$$

Аналогично, имеем присоединенный оператор $\tilde{A}$ со свойством

$$(\varepsilon, \delta) = \tilde{A}(\alpha, \beta). \tag{14}$$

Тогда полученный выше результат запишем в виде

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \Delta(8). \tag{15}$$

Формула (15) показывает, что оператор $\Delta(8)$ Лапласа можно представить как произведение двух операторов A, $\tilde{A}$.

Обратим внимание, что обобщенные УКР, т.е. формулы (8), (10) определяют линейное пространство функций, составляющих ядро операторов A, $\tilde{A}$:

$$A(\chi_u, \psi_u) = 0, \quad \tilde{A}(\tilde{\chi}_u, \tilde{\psi}_u) = 0. \tag{16}$$

Отметим, что процесс представления операторов Лапласа как произведения $A\tilde{A}$ напоминает метод Дирака «извлечения корня» из оператора

$$\Delta(3) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2$$

для получения системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Приведем важное для дальнейшего соотношение

$$\tilde{A}(\mu, \nu) = \Delta(8)(\chi, \psi), \tag{17}$$

полученное действием оператора $\tilde{A}$ на основное преобразование (7); или в развернутом виде

$$\bar{D}_1\mu + \nu D_2 = \Delta(8)\chi, \quad -\mu\bar{D}_2 + D_1\nu = \Delta(8)\psi, \tag{18}$$

3. Физическая интерпретация основных преобразований A, $\tilde{A}$. Сделаем следующее предположение о зависимости χ, ψ от координат. Положим, что χ, ψ, μ, ν зависят только от переменных x_1, x_2, x_3, y_0. Тогда имеем для D_1, $\bar{D}_1$, D_2, $\bar{D}_2$ операторы, выраженные в понятиях векторного анализа следующим образом:

$$\left.\begin{matrix} D_1 \\ \bar{D}_1 \end{matrix}\right\} q = \mp \operatorname{div}(x)\boldsymbol{q} \pm \operatorname{rot}(x)\boldsymbol{q} \pm \operatorname{grad}(x)q_0, \tag{19}$$

$$\left.\begin{matrix} D_2 \\ \bar{D}_2 \end{matrix}\right\} q = \frac{\partial q_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial y_0}. \tag{20}$$

В данном случае $q(x_1, x_2, x_3, y_0)$ — произвольная кватернионная функция от набора x_1, x_2, x_3, y_0, а q_0 и $\boldsymbol{q}$ — соответственно скалярная и векторная часть кватерниона.

Предложенный выбор набора координат, который назовем физическим, отражает тот экспериментальный факт, что для непротиворечивого и полного описания явлений макроскопического мира достаточно четырёх исходных параметров.

По (19) построим систему (7) в кватернионной форме:

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}\boldsymbol{\chi} + \operatorname{rot}\boldsymbol{\chi} + \operatorname{grad}\chi_0 - \frac{\partial\psi_0}{\partial y_0} - \frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial y_0} = \mu_0 + \boldsymbol{\mu}, \\ \frac{\partial\chi_0}{\partial y_0} + \frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial y_0} + \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} - \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi} - \operatorname{grad}\psi_0 = \nu_0 + \boldsymbol{\nu}. \end{gathered} \tag{21}$$

Напомним, что y_0 — так называемое «время Вика», т.е. $y_0 = ict$. Отделяя скалярную и векторную часть кватернионов в (21) придем к системе восьми уравнений для восьми неизвестных функций

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\boldsymbol{\chi} - \frac{\partial\psi_0}{\partial y_0} &= \mu_0, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{\chi} + \operatorname{grad}\chi_0 - \frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial y_0} &= \boldsymbol{\mu}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} + \frac{\partial\chi_0}{\partial y_0} &= \nu_0, \\ -\operatorname{rot}\boldsymbol{\psi} - \operatorname{grad}\psi_0 + \frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial y_0} &= \boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \tag{22}$$

4. Получение основной системы уравнений электромагнитного поля. Вид системы (22) указывает на то, что при соответствующем отождествлении величин χ_0, $\boldsymbol{\chi}$, ψ_0, $\boldsymbol{\psi}$, μ, ν имеем систему Максвелла. Для общности и большей симметрии и чтобы полностью использовать все величины μ, ν введем гипотетические магнитные заряды с плотностями m, $\boldsymbol{j}_m$, разумеется сохранив электрические заряды ρ и токи $\boldsymbol{j}_e$.

В (22) положим

$$\begin{aligned} \chi &= H_0 + \boldsymbol{H}, & \psi &= i(E_0 + \boldsymbol{E}), \\ \mu &= -4\pi m + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_e, & \nu &= \left(4\pi\rho + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_m\right) i. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ — напряженности магнитного и электрического поля, а H_0, E_0 — скалярные поля.

При этом принято, что ρ, m — объемные плотности электрических и магнитных зарядов, а $\boldsymbol{j}_e$, $\boldsymbol{j}_m$ — соответственно поверхностные плотности токов. Выбор знаков электрических величин совпадает с общепринятым. Гипотетические магнитные заряды и токи выбраны исходя из двух требований: во-первых, единство знаков при переходе к уравнениям для потенциалов и во-вторых, выполнение закона сохранения магнитного заряда.

Системе (23) в реальном времени следует придать вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t} &= -4\pi m, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \operatorname{grad}H_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_e, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial H_0}{\partial t} &= 4\pi\rho, \\ -\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}E_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_m. \end{aligned} \tag{24}$$

Если в данной области зарядов и токов нет, то имеем однородную систему при наличии двух скалярных полей H_0, E_0. Это соответствует обобщенной УКР (23). Если дополнительно потребовать, что $H_0 = E_0 = 0$, то возвращаемся к общеизвестной системе Максвелла в области без зарядов и токов.

Перенесем в (24) производные по времени t от скалярных полей H_0, E_0 направо:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 4\pi m - \frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t}. \tag{25}$$

Следовательно, временное изменение E_0 равносильно некоторому магнитному заряду, так что можно положить, что условный магнитный заряд m' равен

$$m' = m - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial E_0}{\partial t}. \tag{26}$$

Таким образом, за плотности внутренних магнитных зарядов следует взять

$$m_i = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial E_0}{\partial t}. \tag{27}$$

Проведя аналогичную операцию с третьим уравнением (24), имеем для полной плотности электрических зарядов

$$\rho' = \rho + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial H_0}{\partial t}. \tag{28}$$

Поэтому для плотности внутренних электрических зарядов примем

$$\rho_i = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial H_0}{\partial t}. \tag{29}$$

Эти заряды определены самой системой (24) и не являются внешне заданными. Они могут определяться подстановкой конкретной краевой задачи.

Обратимся к градиентным слагаемым и запишем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_e - \operatorname{grad} H_0. \tag{30}$$

Введем полный ток $\boldsymbol{j}'_e$

$$\boldsymbol{j}'_e = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{c}{4\pi}\operatorname{grad} H_0 + \boldsymbol{j}_e. \tag{31}$$

Первое слагаемое уже давно известно как «ток смещения», третье — это «обычный» электрический ток; наконец, второе слагаемое назовем градиентным (внутренним) током. Внутренний (фиктивный) ток $\boldsymbol{j}_{ie}\partial t$ равен

$$\boldsymbol{j}_{ie}\partial t = -\frac{c}{4\pi}\operatorname{grad} H_0. \tag{32}$$

Наконец, обращаясь к закону Фарадея, введем токи $\boldsymbol{j}'_m$ вида

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \operatorname{grad} E_0 - \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_m. \tag{33}$$

Уравнение (33) позволяет ввести полный магнитный ток $\boldsymbol{j}'_m$ по формуле

$$\boldsymbol{j}'_m = \boldsymbol{j}_m + \frac{c}{4\pi}\operatorname{grad} E_0. \tag{34}$$

Внутренний (градиентный) ток магнитных зарядов равен

$$\boldsymbol{j}_{im} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{grad} E_0. \tag{35}$$

5. Введение потенциалов электромагнитного поля. Легко видеть, что соотношения (9), описывающие присоединенное преобразование, определяют введение электромагнитных потенциалов: достаточно принять

$$\alpha = \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha} = +b - \boldsymbol{A}, \quad \beta = \beta_0 + \boldsymbol{\beta} = -i\varphi - i\boldsymbol{B}. \tag{36}$$

В развернутом виде имеем

$$\begin{aligned} H_0 &= -\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, & \boldsymbol{H} &= \operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \operatorname{grad} b - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\\ E_0 &= \operatorname{div}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial b}{\partial t}, & \boldsymbol{E} &= -\operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi. \end{aligned} \tag{37}$$

Поскольку нет определенности в выборе знаков скалярного и векторного потенциалов, определенных магнитными зарядами, то за основу принято единство операторных видов уравнений для потенциалов после подстановки (37) в систему Максвелла (24).

$$\Delta_b(4)b = -4\pi m, \quad \Delta_b(4)\boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_e,$$
$$\Delta_b(4)\varphi = -4\pi\rho, \quad \Delta_b(4)\boldsymbol{B} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_m.$$

Здесь $\Delta_b(4)$ — волновой оператор Даламбера.

Если гипотетических магнитных зарядов и токов нет ($m = 0, \boldsymbol{j}_m = 0$), то остается возможность, что b, $\boldsymbol{B}$ удовлетворяют волновому уравнению и функции b, $\boldsymbol{B}$ входят в определение (37) полей.

6. Система уравнений Максвелла и закон сохранения электрического заряда. Приступим к изучению физического смысла соотношения (34)

$$\tilde{A}(\mu,\nu) = \Delta_b(8)(\chi,\psi), \tag{38}$$

полученного ранее в развернутом виде:

$$\bar{D}_1\mu + \nu D_2 = \Delta_b(4)\chi, \quad -\mu\bar{D}_2 + D_1\nu = \Delta_b(4)\psi. \tag{39}$$

Переходя к записи в операциях векторного анализа согласно (19), (20) запишем

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\boldsymbol{\mu} - \operatorname{rot}\boldsymbol{\mu} - \operatorname{grad}\mu_0 + \frac{\partial\nu_0}{\partial y_0} + \frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial y_0} = \Delta_b(4)\chi,\\ -\frac{\partial\mu_0}{\partial y_0} - \frac{\partial\boldsymbol{\mu}}{\partial y_0} - \operatorname{div}\boldsymbol{\nu} + \operatorname{rot}\boldsymbol{\nu} + \operatorname{grad}\nu_0 = \Delta_b(4)\psi.\end{gathered} \tag{40}$$

Подставим все величины μ, ν согласно (23):

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_e - \operatorname{rot}\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_e + \operatorname{grad}4\pi m + \frac{1}{c}\frac{\partial 4\pi\rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\boldsymbol{j}_m}{\partial t} = \Delta_b(4)(H_0 + \boldsymbol{H}),\\ \frac{1}{c}\frac{\partial 4\pi m}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial\left(\boldsymbol{j}_e\frac{4\pi}{c}\right)}{\partial t} - \operatorname{div}\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_m + \operatorname{rot}\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_m + 4\pi i\operatorname{grad}\rho = \Delta_b(4)[E_0 + \boldsymbol{E}].\end{gathered} \tag{41}$$

Отделим скалярные части в уравнениях

$$\frac{4\pi}{c}\left[\operatorname{div}\boldsymbol{j}_e + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right] = \Delta_b(4)H_0, \quad \frac{4\pi}{c}\left[-\frac{\partial m}{\partial t} - \operatorname{div}\boldsymbol{j}_m\right] = \Delta_b(4)E_0. \tag{42}$$

Левая часть первого уравнения (42) представляет известное уравнение непрерывности, а следовательно, закон сохранения электрического заряда. Если считать закон сохранения строго доказанным экспериментально, то H_0 — решение волнового уравнения

$$\Delta_b(4)H_0 = 0.$$

Рассмотрим смысл этого уравнения, исходя из понятия «внутреннего» заряда и тока, рассмотренного ранее. Действительно, согласно (31), (29) имеем

$$\Delta_b(4)H_0 = -\frac{4\pi}{c}\left[\frac{\partial\rho_{ie}}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j}_{ie}\right].$$

Интерпретация второго соотношения (42) неоднозначна. Выбор, сделанный в работе, приводит к закону сохранения магнитного заряда. Считаем, что возможен и другой результат.

7. Заключение. В работе показано, что существуют операторы A, $\tilde{A}$, которые позволяют записать уравнение электромагнитного поля как действие оператора A на упорядоченную пару кватернионов (χ, ψ)

$$(\mu, \nu) = A(\chi, \psi).$$

Здесь χ включает вектор напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$ и некоторое скалярное поле H_0. Аналогично ψ включает вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ и соответствующее скалярное поле E_0. Кватернионы μ, ν определены как плотности зарядов и токов электрических и магнитных. Введение электромагнитных потенциалов соответствует оператору $\tilde{A}$ и $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \Delta_b(4)$, где $\Delta_b(4)$ — оператор Даламбера. Применение оператора $\tilde{A}$ позволяет получить закон сохранения электрического заряда при определенных предположениях о скалярном поле H_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А.* Кватернионные методы в электродинамике// Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2019. — *57.* — С. 111–115.
2. *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами—Берса и его приложения в математической физике. — Калуга: Изд-во КГПУ, 1997.
3. *Кострикин А. И.* Линейная алгебра и геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1980.
4. *Ландау Л. Д.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
5. *Arbab I. A.* Maxwellian quantum mechanics// Int. J. Light Electron Optics. — 2017. — *136.* — P. 382–389.
6. *Dovlatova A., Yerchuck D.* Concept of fully dually symmetric electrodynamics// J. Phys. Conf. Ser. — 2012. — *343.* — 012133.
7. *Mingjie Li, Peng Shi, Luping Du, Xiaocong Yuan* Electronic Maxwell's equations// New J. Phys. — 2020. — *22*, № 11. — 113019.
8. *Moisil M. G.* Sur los quaternions monogènes// Bull. Sci. Math. — 1931. — *55.* — P. 168–174.
9. *Praveen S. B., Negi O. P. S.* Revisiting quaternion dual electrodynamics// Int. J. Theor. Phys. — 2008. — *47*, № 12. — P. 3108–3120.
10. *Red'kov V., Tolkachev E.* Quaternions and small Lorentz groups in moncommutative electrodynamics// Adv. Appl. Clifford Algebras. — 2010. — *20*, № 2. — P. 393–400.
11. *Virchenko V. L., Derkach V. N.* To the theory of electromagnetic field in potentials// Int. J. Infrared Millimeter Waves. — 1999. — *20*, № 7. — P. 1327–1337.
12. *Wang H., Ren G.* Octonion analysis of several variables// Commun. Math. Stat. — 2014. — *2*, № 2. — P. 163–185.
13. *Yerchuck D., Dovlatova A., Alexandrov A.* Symmetry of differential equations and quantum theory// J. Phys. Conf. Ser. — 2013. — *490*, № 1. — 012233.

Гладышев Юрий Александрович
Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского
E-mail: `losh-elena@yandex.ru`

Лошкарева Елена Анатольевна
Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского
E-mail: `losh-elena@yandex.ru`