



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 100–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-100-114

УДК 514.76

О РАССЛОЕНИЯХ ВЕЙЛЯ

© 2023 г. А. Я. СУЛТАНОВ, О. А. МОНАХОВА, Г. А. СУЛТАНОВА

Аннотация. В статье рассмотрены некоторые лифты тензорных полей и линейных связностей, заданных на гладком классе C^∞ многообразии, в его расслоение Вейля M_n^A . Дан краткий обзор результатов по теории расслоений Вейля второго порядка, полученных за последние годы.

Ключевые слова: дифференцируемое многообразие, расслоение Вейля, вертикальный лифт тензорного поля, горизонтальный лифт тензорного поля, горизонтальный лифт линейной связности, полный лифт линейной связности.

ON WEIL BUNDLES

© 2023 А. Ya. SULTANOV, O. A. MONAKHOVA, G. A. SULTANOVA

ABSTRACT. In the paper, some lifts of tensor fields and linear connections given on a smooth manifold of the class C^∞ to its Weil bundle M_n^A are considered. A brief review of results on the theory of second-order Weil bundles obtained in recent years is given.

Keywords and phrases: differentiable manifold, Weil bundle, vertical lift of a tensor field, horizontal lift of a tensor field, horizontal lift of a linear connection, complete lift of a linear connection.

AMS Subject Classification: 53B05, 53A55

1. Введение. Линейная связность в геометрии была введена в 1918 году Г. Вейлем, а в общем виде пространство аффинной связности определено Э. Картаном. Одной из основных задач геометрии пространства, снабженного дифференциально-геометрической структурой, является изучение группы автоморфизмов этого пространства. Вопрос о движениях в евклидовых и неевклидовых пространствах был поставлен С. Ли. В конце XIX и начале XX века были опубликованы работы В. Киллинга, Г. Фубини, Л. Бианки, Г. Риччи и других авторов по группам движений в римановых пространствах.

В 1953 году А. Вейль построил расслоение A -близких точек, где A — локальная алгебра. К числу таких расслоений относятся касательные расслоения и расслоения p^v -скоростей Эресмана. А. П. Широков показал, что на расслоениях Вейля существует естественная A -гладкая структура. Этот факт позволил упростить построение лифтов с базовых многообразий на тотальные пространства этих расслоений. В. В. Вишневым изучались многообразия над алгеброй плюральных чисел, являющиеся полукасательными расслоениями высших порядков над ступенчато расслоенным многообразием.

В. В. Шурыгиным изучались категории многообразий над алгебрами, объектами которых являются многообразия над ассоциативными, коммутативными алгебрами, моделируемые произвольными модулями, функторы Вейля, связности в расслоениях Вейля.

Расслоения Вейля в настоящее время являются активно развивающейся областью геометрии. Отметим работы А. Моримото, И. Коларжа, Р. Алонсо, Г. Н. Бушуевой и В. В. Шурыгина,

Л. Б. Смоляковой и В. В. Шурыгина и других авторов. Подробная библиография работ по теории расслоенных пространств и многообразиям над алгебрами приведена в книге В. В. Вишневского, А. П. Широкова, В. В. Шурыгина [5], в статьях В. В. Вишневского, А. П. Широкова, В. В. Шурыгина, М. А. Малахальцева.

2. Алгебры Вейля. Алгебры А. Вейля лежат в основе определения расслоений Вейля, а также используются при построении лифтов геометрических объектов с базы в расслоение Вейля.

Приведем здесь определение алгебры Вейля над полем действительных чисел.

Определение 1. Линейная алгебра $\mathbb{A}$ конечного ранга над полем $\mathbb{R}$ называется алгеброй Вейля, если выполнены следующие условия:

- (i) $\mathbb{A}$ — коммутативна, ассоциативна, обладает единицей;
- (ii) существует идеал $\mathbb{I}$ такой, что $\mathbb{I}^p \neq \{0\}$, а $\mathbb{I}^{p+1} = \{0\}$;
- (iii) факторалгебра $\mathbb{A}/\mathbb{I}$ изоморфна $\mathbb{R}$.

Число p называется высотой алгебры $\mathbb{A}$, а число m , равное размерности факторалгебры $\mathbb{I}/\mathbb{I}^2$, называется шириной алгебры $\mathbb{A}$. В идеале $\mathbb{I}$, который будем обозначать также символом $\mathbb{A}^0$, можно выбрать m элементов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$, порождающие этот идеал. Одномерная подалгебра, порожденная единицей δ алгебры $\mathbb{A}$, изоморфна $\mathbb{R}$. отождествив δ с 1 поля действительных чисел $\mathbb{R}$, алгебру $\mathbb{A}$ можно представить в виде полупрямой суммы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{I}$: $\mathbb{A} = \mathbb{R} + \mathbb{I}$. Каждый элемент a алгебры $\mathbb{A}$ единственным образом представим в виде $a_0 + a_1 = a$; число a_0 назовем вещественной частью и обозначим $\text{Re } a$. Если $a_0 \neq 0$, то $a^k \neq 0$ при любом натуральном k . Отсюда следует, что все нильпотентные элементы алгебры $\mathbb{A}$ принадлежат идеалу $\mathbb{I}$. Идеал $\mathbb{I}$ называется радикалом и обозначается символом $\text{Rd } \mathbb{A}$. Базис в алгебре $\mathbb{A}$ можно построить из элементов $\varepsilon^0 = 1$ и $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} \dots \varepsilon_m^{\alpha_m}$, где α_i — неотрицательные целые числа и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \neq 0$. Для обозначения базисных элементов удобно использовать мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ с неотрицательными целыми составляющими α_i и $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leq p$. Тогда $\varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} \dots \varepsilon_m^{\alpha_m} = \varepsilon^\alpha$ мультииндекс $0 = (0, \dots, 0)$ соответствует 1. Количество всевозможных мультииндексов α таких, что $0 \leq |\alpha| \leq p$ равно C_{p+m}^m — числу сочетаний из $p + m$ элементов по m элементов. Если $|\alpha| > p$, то $\varepsilon^\alpha = 0$. Мультииндексы складываются как арифметические векторы. Ранг алгебры $\mathbb{A}$ не превосходит C_{p+m}^m . Если $\dim \mathbb{A} < C_{p+m}^m$, то не все мультииндексы будут соответствовать базисным элементам. Обозначим через Λ — множество мультииндексов, соответствующих базисным элементам алгебры $\mathbb{A}$, а через Λ^* — множество всех остальных мультииндексов α таких, что $|\alpha| \leq p$. Для каждого $\mu^* \in \Lambda^*$ имеем

$$\varepsilon^{\mu^*} = a_\lambda^{\mu^*} \varepsilon^\lambda, \quad (1)$$

где $a_\lambda^{\mu^*} \in \mathbb{R}$, а по мультииндексу $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ ведется суммирование.

Соотношения (1) называются определяющими соотношениями алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

Если $\dim \mathbb{A} = C_{p+m}^m$, то $\Lambda^* = \emptyset$. В этом случае алгебра $\mathbb{A}$ не имеет определяющих соотношений и называется свободной алгеброй Вейля.

В алгебре Вейля $\mathbb{A}$ можно выделить цепочку идеалов

$$\mathbb{A} \supset \mathbb{I} \supset \mathbb{I}^2 \supset \dots \supset \mathbb{I}^p \supset \{0\}. \quad (2)$$

Будем считать, что описанный выше базис $(\varepsilon^0, \varepsilon^\alpha)$, $\alpha \neq 0$, удовлетворяет условию: набор (ε^τ) является базисом идеала $\mathbb{I}^r$ при $|\tau| \geq r$. Тогда каждый набор элементов вида ε^α , где $|\alpha| < r$, не будет содержаться в $\mathbb{I}^r$. Такой базис будем называть подчиненным цепочке идеалов (2).

Пусть $\mathbb{A}$ — произвольная линейная алгебра над $\mathbb{R}$. Элемент $e \in \mathbb{A}$ называется идемпотентным, иначе идемпотентом, если $e^2 = e$. Во всякой унитарной алгебре имеются два идемпотента: δ и 0 , называемые тривиальными.

Предложение 1. В любой алгебре Вейля нет идемпотентов, отличных от 1 и 0.

Известно, что если в конечномерной коммутативной ассоциативной алгебре с единицей имеется делитель нуля, не принадлежащий радикалу, то в ней имеется нетривиальный идемпотент.

Из этого факта и предложения 1 получаем следующее утверждение.

Предложение 2.

1. В любой алгебре Вейля $\mathbb{A}$ каждый делитель нуля принадлежит радикалу алгебры $\mathbb{A}$.
2. Элемент a алгебры Вейля $\mathbb{A}$ обратим тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re} a \neq 0.$$

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — линейные алгебры над полем $\mathbb{R}$. Линейное отображение $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если для любых элементов x, y алгебры $\mathbb{A}$ выполняется условие $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Биактивный гомоморфизм называется изоморфизмом.

Предложение 3. Если $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ — изоморфизм, $\mathbb{A}$ — унитарная алгебра с единицей $\delta_{\mathbb{A}}$, то $\mathbb{B}$ также унитарна и $\varphi(\delta_{\mathbb{A}})$ — ее единица.

Используя две линейные алгебры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ над полем $\mathbb{R}$, можно построить стандартным образом их прямую сумму $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$. Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — унитарные алгебры, $\delta_{\mathbb{A}}, \delta_{\mathbb{B}}$ их единицы, соответственно, то $(\delta_{\mathbb{A}}, \delta_{\mathbb{B}})$ является единицей прямой суммы $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$.

Предложение 4. Если ассоциативная унитарная алгебра $\mathbb{A}$ изоморфна прямой сумме $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ алгебр $\mathbb{B} \neq \{0_{\mathbb{B}}\}, \mathbb{C} \neq \{0_{\mathbb{C}}\}$, то каждая из них является ассоциативной и унитарной.

Определение 2. Линейная алгебра $\mathbb{A}$, изоморфная прямой сумме $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ алгебр $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$, не сводящихся только к нулевому элементу, называется приводимой. В противном случае алгебра $\mathbb{A}$ называется неприводимой.

Имеет место следующее

Предложение 5. Любая алгебра Вейля является неприводимой алгеброй.

Доказательство. Пусть алгебра Вейля $\mathbb{A}$ — приводимая алгебра и изоморфна $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$, причем $\mathbb{B} \neq \{0_{\mathbb{B}}\}, \mathbb{C} \neq \{0_{\mathbb{C}}\}$. Тогда в силу предложения 4 $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$ — унитарные ассоциативные алгебры с единицами $\delta_{\mathbb{B}}$ и $\delta_{\mathbb{C}}$ соответственно. В силу нетривиальности алгебры $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ $\delta_{\mathbb{B}} \neq 0_{\mathbb{B}}$ и $\delta_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$, поэтому элементы $\delta_1 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})$ и $\delta_2 = (0_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}})$ отличны от единицы $(\delta_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}})$. Кроме того, эти элементы являются идемпотентами алгебры $\mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$, так как $\delta_1^2 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})^2 = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}}) = \delta_1$, аналогично $\delta_2^2 = \delta_2$. Прообразы этих элементов при изоморфизме $\varphi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B} \oplus \mathbb{C}$ являются идемпотентами алгебры $\mathbb{A}$. Действительно, если φ — изоморфизм, то φ^{-1} также является изоморфизмом и тогда

$$(\varphi^{-1}(\delta_i))^2 = \varphi^{-1}(\delta_i)\varphi^{-1}(\delta_i) = \varphi^{-1}(\delta_i^2) = \varphi^{-1}(\delta_i) \quad (i = 1, 2).$$

На основании предложения 1 заключаем, что $\varphi^{-1}(\delta_1)$ равен $0_{\mathbb{A}}$ либо $1_{\mathbb{A}}$. Если $\varphi^{-1}(\delta_1) = 0_{\mathbb{A}}$, то $\delta_1 = (0_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})$, т.е. $\delta_{\mathbb{B}} = 0_{\mathbb{B}}$, чего быть не может.

Если $\varphi^{-1}(\delta_1) = 1_{\mathbb{A}}$, то $\varphi(1_{\mathbb{A}}) = \delta_1$, т.е. $(\delta_{\mathbb{B}}, \delta_{\mathbb{C}}) = (\delta_{\mathbb{B}}, 0_{\mathbb{C}})$. Отсюда $\delta_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$. Противоречие. Таким образом, алгебра Вейля $\mathbb{A}$ не может быть приводимой. $\square$

Из этого предложения следует, что прямая сумма двух алгебр Вейля не является алгеброй Вейля.

В прямой сумме $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ алгебр Вейля можно выделить подалгебру, которая является алгеброй Вейля, порожденной алгебрами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$. Опишем способ построения этой подалгебры.

В определении алгебры Вейля есть условие (3) о существовании изоморфизма $\omega: \mathbb{A}/\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Будем обозначать элементы факторалгебры $\mathbb{A}/\mathbb{T}$ символами $\bar{a}$, где $a \in \mathbb{A}$. Тогда $\bar{a} = \bar{b}$ в том и только в том случае, когда $a \equiv b \pmod{\mathbb{T}}$. Определим отображение $\pi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ по правилу $\pi(a) = \omega(\bar{a})$. Оно является эпиморфизмом. Действительно, для любого элемента $a_0 \in \mathbb{R}$ имеем $\pi(a_0 1) = \omega(\overline{a_0 1}) = a_0 \omega(\bar{1}) = a_0 1 = a_0$, т.е. отображение π сюръективно. Для любых $a, b \in \mathbb{A}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \pi(a + b) &= \omega(\overline{a + b}) = \omega(\bar{a} + \bar{b}) = \omega(\bar{a}) + \omega(\bar{b}) = \pi(a) + \pi(b), \\ \pi(ta) &= \omega(\overline{ta}) = \omega(t\bar{a}) = t\pi(a), \quad \pi(ab) = \omega(\overline{ab}) = \omega(\bar{a}\bar{b}) = \pi(a)\pi(b), \end{aligned}$$

которые означают, что π — гомоморфизм.

Определение 3. Эпиморфизм $\pi_{\mathbb{A}}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$, определенный условием $\pi_{\mathbb{A}}(a) = \omega_{\mathbb{A}}(\bar{a})$, называется канонической проекцией алгебры Вейля $\mathbb{A}$ на алгебру действительных чисел $\mathbb{R}$.

Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — алгебры Вейля над $\mathbb{R}$, единицы которых отождествлены с единицей поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ — прямая сумма этих алгебр. Рассмотрим подмножество $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, состоящее из всевозможных пар $(a, b) \in \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, удовлетворяющих условию $\pi_{\mathbb{A}}(a) = \pi_{\mathbb{B}}(b)$.

Предложение 6. Подмножество $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$, снабженное ограничениями основных операций алгебры $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$, являются унитарной подалгеброй прямой суммы $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$.

Предложение 7. Прямая сумма $\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$ радикалов $\overset{0}{\mathbb{A}}$, $\overset{0}{\mathbb{B}}$ алгебр $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно, является радикалом алгебры $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$.

Предложение 8. Алгебра $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ является алгеброй Вейля.

Определение 4. Алгебра Вейля $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ называется суммой Уитни алгебр Вейля $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$.

Из рассмотренного выше следует, что сумма Уитни $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B}$ алгебр Вейля $\mathbb{A} = \overset{0}{\mathbb{R}} \oplus \overset{0}{\mathbb{A}}$, $\mathbb{B} = \overset{0}{\mathbb{R}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$ изоморфна алгебре Вейля с радикалом $\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}}$: $\mathbb{A} \oplus_W \mathbb{B} \cong \overset{0}{\mathbb{R}} + (\overset{0}{\mathbb{A}} \oplus \overset{0}{\mathbb{B}})$.

Введенная операция обладает следующим свойством: она не сохраняет свойство фробениусовости.

Определение 5. Унитарная алгебра $\mathbb{A}$ конечного ранга над полем $\mathbb{R}$ называется фробениусовой, если существует невырожденная билинейная форма q на $\mathbb{A}$ со значениями в $\mathbb{R}$ такая, что $q(a, bc) = q(ab, c)$ для любых $a, b, c \in \mathbb{A}$.

Определение 6. Сумма Уитни любого конечного числа фробениусовых алгебр Вейля не является фробениусовой.

Фробениусовы алгебры Вейля существуют. Например, любая алгебра плюралных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^{m+1})$ — фробениусова.

Известны следующие теоремы.

Теорема 1. Тензорное произведение фробениусовых алгебр является фробениусовой алгеброй [6].

Теорема 2. Тензорное произведение алгебр Вейля над полем $\mathbb{R}$ является алгеброй Вейля [13].

На основании этих теорем докажем следующее

Предложение 9. Пусть $\mathbb{A}$ — фробениусова алгебра Вейля ширины $m_{\mathbb{A}}$ и высоты $p_{\mathbb{A}}$, $\mathbb{B}$ — фробениусова алгебра Вейля ширины $m_{\mathbb{B}}$, высоты $p_{\mathbb{B}}$. Тогда тензорное произведение $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ — фробениусова алгебра Вейля ширины $m_{\mathbb{A}} + m_{\mathbb{B}}$ и высоты $p_{\mathbb{A}} + p_{\mathbb{B}}$.

Предложение 10. Для любых натуральных чисел m и p , удовлетворяющих условию $m \leq p$, существует фробениусова алгебра Вейля ширины m и высоты p .

Предложение 11.

- (1) Если $\dim \mathbb{A} = 2$, то алгебра Вейля $\mathbb{A}$ изоморфна алгебре дуальных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$.
- (2) Если $\dim \mathbb{A} = 3$, то $\mathbb{A}$ изоморфна одной из следующих алгебр:
 - (a) алгебре плюралных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^2) = \{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}, \varepsilon^3 = 0\}$;
 - (b) сумме Уитни $\mathbb{R}(\varepsilon_1) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon_2)$ алгебр дуальных чисел.
- (3) Если $\dim \mathbb{A} = 4$, то $\mathbb{A}$ изоморфна одной из следующих пяти алгебр Вейля:
 - (a) алгебре плюралных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^3) = \{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + d\varepsilon^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, \varepsilon^4 = 0\}$;
 - (b) сумме Уитни $\mathbb{R}(\varepsilon_1) \oplus_W \mathbb{R}(\varepsilon_2^2)$ алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon_1)$ дуальных чисел алгебры плюралных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon_2^2)$;
 - (c) сумме Уитни $\bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{R}(\varepsilon_i)$ алгебр дуальных чисел;
 - (d) Алгебре Вейля $\mathbb{A}$ ширины 2 и высоты 2 с псевдобазисом $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; базис алгебры $\mathbb{A}$ составляют элементы $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1^2$. Определяющие соотношения алгебры $\mathbb{A}$: $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_2^2 = q \varepsilon_1^2$ ($q = \pm 1$).

Доказательство опирается на классификацию неприводимых ассоциативных унитарных алгебр [5]. Поскольку всякая алгебра Вейля — ассоциативна, неприводима и унитарна, то из рассматриваемой классификации выделим алгебры Вейля.

Из приведенного предложения следует, что каждая алгебра Вейля размерности 2 или 3 является свободной. Среди алгебр Вейля, размерности которых больше трех, возможны как свободные, так и несвободные алгебры.

Среди алгебр Вейля размерности 4 алгебры (3a) и (3c) — свободные, а алгебры (3b), (3d) — несвободные. Определяющим соотношением алгебры (3b) является соотношение $\varepsilon_1^2 = 0$.

3. Расслоения Вейля. В основе определения расслоения Вейля лежат алгебры Вейля и гладкие многообразия. Обозначим через $\mathbb{A}$ — произвольную алгебру Вейля конечного ранга над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Будем считать, что единица δ алгебры $\mathbb{A}$ отождествлена с единицей 1 поля $\mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{A}$ как векторное пространство может быть представлено в виде прямой суммы $\mathbb{R}$ и идеала $\mathbb{T}$. Выберем какой-нибудь базис ε^α , $\alpha = 0, 1, \dots, \dim \mathbb{A} - 1$ алгебры $\mathbb{A}$, причем $\varepsilon^0 = 1$. Наряду с $\mathbb{A}$ будем использовать дуальное пространство $\mathbb{A}^*$ линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$, со значениями в $\mathbb{R}$. Обозначим через ε_α элементы дуального базиса к базису (ε^α) , тогда $\varepsilon_\alpha(\varepsilon^\beta) = \delta_\alpha^\beta$. Будем использовать также мультииндексы $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, где s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — целые неотрицательные числа. Введем обозначения

$$|s| = s_1 + s_2 + \dots + s_n; \quad s! = s_1!s_2!\dots s_n! \quad C_s^t = \frac{s!}{t!(s-t)!}.$$

Пусть M — n -мерное вещественное связное гладкое многообразие класса C^∞ , обозначим через $C^\infty(M)$ алгебру гладких класса C^∞ функций, заданных на M и принимающих значения в $\mathbb{R}$.

Определение 7. Точкой, $\mathbb{A}$ -близкой к точке $q \in M$, называется гомоморфизм $j_q: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{A}$, удовлетворяющий условию $j_q(f) \equiv f(q) \pmod{\mathbb{T}}$.

Множество точек, $\mathbb{A}$ -близких к точке $q \in M$, обозначим через $M_q^\mathbb{A}$. Объединение $\bigcup_{q \in M} M_q^\mathbb{A}$ обозначим через $M^\mathbb{A}$. Отображение $\pi: M^\mathbb{A} \rightarrow M$, определенное условием $\pi(j_q) = q$, называется канонической проекцией, а тройка $(M^\mathbb{A}, \pi, M)$ — расслоением Вейля.

На тотальном пространстве $M^\mathbb{A}$ возникают структуры гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ и над алгеброй $\mathbb{R}$. Прежде чем перейти к описанию этих структур, отметим некоторые свойства элементов пространства $M^\mathbb{A}$.

Предложение 12. Для любого элемента $j_q \in M^\mathbb{A}$ имеет место равенство $j_q(1) = 1$.

Следствие 1. Для любого элемента $j_q \in M^\mathbb{A}$ и постоянной функции $c: M \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место равенство $j_q(c) = c$.

Пусть $f \in C^\infty(M)$.

Определение 8.

1. Функция $f_{(0)}: M^\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная условием $f_{(0)} = f \circ \pi$, называется вертикальным лифтом функции f .
2. Функция $f^\mathbb{A}: M^\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, определенная условием $f^\mathbb{A}(j_q) = j_q(f)$ для всех $j_q \in M^\mathbb{A}$, называется естественным продолжением f с базы M в пространство $M^\mathbb{A}$.

Из определения следует $(f + g)^\mathbb{A} = f^\mathbb{A} + g^\mathbb{A}$, $(cf)^\mathbb{A} = cf^\mathbb{A}$ и $(fg)^\mathbb{A} = f^\mathbb{A}g^\mathbb{A}$, $c \in \mathbb{R}$.

Пусть на M выбран атлас гладкой структуры и (U, x^i) — произвольная карта этого атласа. Для координатных функций x^i построим их естественные продолжения $(x^i)^\mathbb{A} = X^i$.

Обозначим через $\pi^{-1}(U)$ — полный прообраз области U выбранной карты. Из определения естественного продолжения функций имеем

$$(x^i)^\mathbb{A}(j_q) = j_q(x^i)$$

для любого $j_q \in \pi^{-1}(U)$.

Так как $j_q(x^i) \equiv x^i(q) \pmod{\mathbb{T}}$, то

$$(x^i)^\mathbb{A}(j_q) = x_{(0)}^i(j_q) + x_\alpha^i(j_q)\varepsilon^\alpha \quad (\alpha \neq 0). \quad (3)$$

Из последних соотношений следует, что

$$(x^i)^\mathbb{A} = x_{(0)}^i + x_\alpha^i\varepsilon^\alpha.$$

Здесь $x_\alpha^i: M^\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ — функции, определенные соотношением (3).

Пусть q — произвольная точка окрестности U . Для каждой функции f существует окрестность точки q , содержащаяся в U , что в этой окрестности функция f может быть представлена формулой Тейлора

$$f = f(q) + \sum_{|s|=1}^p \frac{1}{s!} D_s f(q)(x-q)^s + \sum_{|s'|=p+1} \frac{1}{s'!} (D_{s'} f \circ \xi)(x-q)^{s'}. \quad (4)$$

Здесь p — высота алгебры Вейля $\mathbb{A}$, функция ξ определяется условием

$$\xi(q') = (q^i + \theta(q'^i - q^i)), \quad 0 < \theta < 1, \quad \text{а} \quad q^i = x^i(q), \quad q'^i = x^i(q').$$

Выражения $(x-q)^s$ означают кратную запись выражения $(x^1 - q^1)^{s_1}(x^2 - q^2)^{s_2} \dots (x^n - q^n)^{s_n}$. В формуле (4) $D_s f(q)$ определены так

$$D_s f(q) = \frac{\partial^{|s|} f}{(\partial x^1)^{s_1} (\partial x^2)^{s_2} \dots (\partial x^n)^{s_n}}(q).$$

Для каждой точки j_q , $\mathbb{A}$ -близкой к точке q на основании (4) имеем

$$j_q(f) = f(q) + \sum_{|s|=1}^p \frac{1}{s!} D_s f(q)(j_q(x) - q)^s. \quad (5)$$

В полученном равенстве имеем

$$(j_q(x) - q)^s = (j_q(x^1) - q^1)^{s_1} (j_q(x^2) - q^2)^{s_2} \dots (j_q(x^n) - q^n)^{s_n}.$$

Так как $j_q(x^i) - q^i = x^i(q) + q_\alpha^i \varepsilon^\alpha - q^i = q_\alpha^i \varepsilon^\alpha = Q^i$ ($\alpha \neq 0$), то (5) можно переписать в виде

$$j_q(f) = f(q) + \sum_{|s|=1}^p \frac{1}{s!} D_s f(q) Q^s, \quad (6)$$

Положим $D_0 f(q) = f(q)$, $Q^0 = 1$. Тогда равенство (6) можно представить следующим образом:

$$j_q(f) = \frac{1}{s!} D_s f(q) Q^s, \quad |s| \leq p. \quad (7)$$

В формуле (7) по мультииндексу s ведется суммирование.

Предложение 13. Если $j_q(x^i) = j_{q'}(x^i)$, то $j_q = j_{q'}$.

Следствием предложения является

Предложение 14. Если $(x^i)^\mathbb{A}(j_q) = (x^i)^\mathbb{A}(j_{q'})$, то $j_q = j_{q'}$, при этом $q = q'$.

Таким образом, отображение $\tilde{h}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{A}^n$, заданное по правилу

$$\tilde{h}(j_q) = (X^1(j_q), X^2(j_q), \dots, X^n(j_q)),$$

является инъективным. Здесь использовано обозначение $X^i = (x^i)^\mathbb{A}$.

Обозначим через $W \subset \mathbb{R}^n$ образ окрестности U при гомеоморфизме $h: U \rightarrow W$ по правилу $h(q) = (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q))$.

Предложение 15. Для каждого элемента $(A^1, A^2, \dots, A^n) \in \mathbb{A}^n$, где $A^i = a^i + A_1^i$, где $(a^1, a^2, \dots, a^n) \in W$, $A_1^i \in \mathbb{T}$, существует гомоморфизм j_a , $\mathbb{A}$ -близкий к точке $a \in U$ с координатами $a^i = x^i(a)$ такой, что $j_a(x^i) = A^i$.

Предложение 16. Для каждой функции $f \in C^\infty(M_n)$ ее естественное продолжение $f^\mathbb{A}$ является голоморфной над $\mathbb{A}$ [12].

Имеет место равенство

$$df^\mathbb{A} = (\partial_j f)^\mathbb{A} dX^j.$$

Отсюда получаем следующую формулу для вычисления частной производной по переменной X^j

$$\frac{\partial f^\mathbb{A}}{\partial X^j} = (\partial_j f)^\mathbb{A}.$$

Следствием этого предложения является

Предложение 17. Пусть $(U, x^i), (V, y^i)$ — две карты гладкой структуры на M и $U \cap V \neq \emptyset$, $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ — формулы перехода. Тогда $Y^i = Y^i(X^1, \dots, X^n)$ будут голоморфными функциями, где $X^i = (x^i)^\mathbb{A}$, $Y^i = (y^i)^\mathbb{A}$, причем

$$J\left(\frac{\partial Y^i}{\partial X^j}\right) \neq 0$$

и не является делителем нуля алгебры $\mathbb{A}$ в каждой точке $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$.

Доказательство. Так как формулы $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ обратимы, то $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$. Тогда $X^i = X^i(Y^1, Y^2, \dots, Y^n)$. Составим произведения якобиевых матриц с элементами $\partial Y^i / \partial X^j$ и $\partial X^i / \partial Y^j$:

$$\frac{\partial Y^i}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial Y^k} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)^\mathbb{A} \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right)^\mathbb{A} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right)^\mathbb{A} = (\delta_j^i)^\mathbb{A} = \delta_j^i.$$

Отсюда следует невырожденность якобиевых матриц. $\square$

В заключение этого параграфа заметим, что если $f^\mathbb{A} = 0$, то $f = 0$. Действительно, для произвольной точки $j_x \in M_n^\mathbb{A}$ имеем $f^\mathbb{A}(j_x) = j_x(f) \equiv f(x) \pmod{\mathbb{T}}$. Отсюда $0 \equiv f(x) \pmod{\mathbb{T}}$, значит, $f(x) = 0$ для любой точки $x \in M$.

4. Лифты тензорных полей и линейных связностей с базы M_n в расслоение Вейля. Рассмотрим расслоения Вейля $M_n^\mathbb{A}$, снабжённые гладкой класса C^∞ структурой над полем действительных чисел.

Определение 9. Естественным (δ) -лифтом тензорного поля типа $(1, s)$ или линейной связности с M_n в расслоение $M_n^\mathbb{A}$ называется (δ) -реализация их естественных $\mathbb{A}$ -продолжений.

Если в алгебре Вейля главная единица δ включена в базис, $\varepsilon^0 = 1 = \delta$, то (δ) -лифт будет обозначаться символом (0) вместо (ε^0) , (0) -лифт называется также полным лифтом тензорного поля типа $(1, s)$ или линейной связности. Будем считать, что $\varepsilon^0 = 1 = \delta$.

Сначала остановимся на лифтах функций с M_n в $M_n^\mathbb{A}$. Пусть $a^* \in \mathbb{A}^*$, $C^\infty(M_n)$, $C^\infty(M_n^\mathbb{A})$ — алгебры вещественных функций класса C^∞ на M_n и на $M_n^\mathbb{A}$, соответственно.

Определение 10. (a^*) -лифтом функций называется отображение

$$(a^*): C^\infty(M_n) \rightarrow C^\infty(M_n^\mathbb{A}),$$

определённое тождеством

$$f_{(a^*)} = a^* \circ f^\mathbb{A},$$

где $\circ$ означает композицию указанных отображений.

Предложение 18. (a^*) -Лифты функций удовлетворяют следующим тождествам:

- (a) $(tf + sg)_{(a^*)} = tf_{(a^*)} + sg_{(a^*)}$;
- (b) $f_{(ta^* + sb^*)} = tf_{(a^*)} + sf_{(b^*)}$;
- (c) $f_{((t+s)a^*)} = tf_{(a^*)} + sf_{(a^*)}$;
- (d) $(fg)_{(a^*)}^{(b)} = f_{(a^*)}^{(\alpha)} g_{(\alpha)}^{(b)}$;

здесь $t, s \in \mathbb{R}$, $f_{(a^*)}^{(\alpha)} = f_{(a^* \cdot \varepsilon^\alpha)}$, $g_{(\alpha)} = g_{(\varepsilon^\alpha)}$, ε^α — базисные элементы алгебры $\mathbb{A}$, ε_α — элементы дуального базиса к базису (ε^α) .

Предложение 19. Если элементы $a^1, \dots, a^l$ алгебры $\mathbb{A}$ линейно независимы и $(f_\alpha)_{(b^* \cdot a^\alpha)} = 0$ для всех $b^* \in \mathbb{A}^*$, то $f_\alpha = 0$.

Из определения 10 получим, что для векторного поля X , заданного на базе M_n , его (δ) -реализация определяется условием $X^{(0)} = (X^\mathbb{A})^{(\delta)}$. Для любого элемента $a \in \mathbb{A}$ положим $X^{(a)} = (aX^\mathbb{A})^{(\delta)}$. Векторное поле $X^{(a)}$ называется (a) -лифтом векторного поля X с M_n в $M_n^\mathbb{A}$.

Предложение 20. Векторное поле $X^{(a)}$ на $M_n^\mathbb{A}$ — единственное векторное поле, удовлетворяющее тождеству

$$X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)}.$$

Таким образом, (a) -реализация каждого голоморфного векторного поля $\tilde{X}$ на расслоении $M_n^\mathbb{A}$ является конечной суммой лифтов векторных полей, заданных на базе расслоения.

Предложение 21. Для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$, $a, b \in \mathbb{A}$ и $f \in C^\infty(M_n)$ имеют место следующие равенства:

- (a) $X^{(ta+sb)} = tX^{(a)} + sX^{(b)}$;
- (b) $(tX + sY)^{(a)} = tX^{(a)} + sY^{(a)}$;
- (c) $(fX)^{(a)} = f_{(\alpha)} X^{(a\varepsilon^\alpha)}$;
- (d) $[X^{(a)}, Y^{(b)}] = ([X, Y])^{(ab)}$.

Следствием предложения 19 является

Предложение 22. Если $a^1, a^2, \dots, a^l$ — $\mathbb{R}$ -линейно независимые элементы алгебры $\mathbb{A}$,

$$X_1, X_2, \dots, X_l$$

— векторные поля на M_n и сумма $X_\alpha^{(a^\alpha)} = 0$, то $X_\alpha = 0$ для каждого $\alpha = 1, 2, \dots, l$.

Это предложение позволяет доказать следующее

Предложение 23. Если $a^1, a^2, \dots, a^l$ — $\mathbb{R}$ -линейно независимые элементы алгебры $\mathbb{A}$,

$$K_1, K_2, \dots, K_l$$

— тензорные поля типа $(1, s)$ ($s \geq 1$) и $K_\alpha^{(a^\alpha)} = 0$, то $K_\alpha = 0$ для всех $\alpha = 1, 2, \dots, l$.

Как было сказано в начале параграфа, полный лифт тензорного поля K типа $(1, s)$ обозначается через $K^{(0)}$ вместо записи $K^{(\varepsilon^0)}$. Таким образом,

$$K^{(0)} = (K^\mathbb{A})^{(\delta)}.$$

В частности, для векторного поля $X \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$, полный лифт $X^{(0)}$ определяется условием

$$X^{(0)} = (X^\mathbb{A})^{(\delta)}.$$

Для каждого элемента $a \in \mathbb{A}$ положим

$$X^{(a)} = (aX^\mathbb{A})^{(\delta)}, \quad K^{(a)} = (aK^\mathbb{A})^{(\delta)}.$$

Эти лифты называются (a) -лифтами векторного поля X и тензорного поля K , соответственно.

Предложение 24. (a) -лифт $K^{(a)}$ тензорного поля K , заданного на M_n , является единственным, удовлетворяющим тождеству

$$K^{(a)}(X_1^{(b_1)}, \dots, X_s^{(b_s)}) = (K(X_1, \dots, X_s))^{(ab_1 \dots b_s)}.$$

Если $K = I$ — единичный аффи́нор на M_n , то его (a) -лифт определяется условием

$$I^{(a)}(X^{(b)}) = X^{(ab)}.$$

Полный лифт $I^{(0)} = I^{(\varepsilon^0)}$ определяется тождеством

$$I^{(0)}(X^{(b)}) = X^{(b)},$$

поэтому является единичным аффи́нором на M_n^A . (a) -лифты тензорных полей K типа $(1, s)$ обладают свойствами, аналогичными свойствам (a) -лифтов векторных полей.

Предложение 25. Пусть K, Q — тензорные поля типа $(1, s)$ на M_n , $t, s \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{A}$. Имеют место следующие тождества:

- (a) $K^{(ta+sb)} = tK^{(a)} + sK^{(b)}$;
- (b) $(tK + sQ)^{(a)} = tK^{(a)} + sQ^{(a)}$;
- (c) $(fK)^{(a)} = f_{(\alpha)}K^{(a\varepsilon^\alpha)}$;
- (d) $L_{X^{(b)}}K^{(b)} = (\mathcal{L}_X K)^{(ab)}$.

Предложение 26. Если $\tilde{\omega}$ — s -форма, заданная на $M_n^{\mathbb{A}}$ и

$$\tilde{\omega}(X_1^{(a_1)}, \dots, X_s^{(a_s)}) = 0$$

для произвольных векторных полей $X_1, \dots, X_s$ из $\mathcal{T}_0^1(M_n)$ и произвольных элементов $a_1, \dots, a_s$ алгебры $\mathbb{A}$, то $\tilde{\omega} = 0$.

Предложение 27. Пусть $a^* \in \mathbb{A}^*$, $\omega \in \mathcal{T}_s^0(M_n)$. Существует единственная s -форма $\tilde{\omega}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющая тождеству

$$\tilde{\omega}(X_1^{(a_1)}, \dots, X_s^{(a_s)}) = (\omega(X_1, \dots, X_s))_{(a^*)}^{(a_1 a_2 \dots a_s)}. \quad (8)$$

Определение 11. Отображение $(a^*): \mathcal{T}_s^0(M_n) \rightarrow \mathcal{T}_s^0(M_n^{\mathbb{A}})$, определённое тождеством

$$\tilde{\omega}_{(a^*)}(X_1^{(a_1)}, \dots, X_s^{(a_s)}) = (\omega(X_1, \dots, X_s))_{(a^*)}^{(a_1 \dots a_s)},$$

называется (a^*) -лифтом s -форм.

Предложение 28. Для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $a^*, b^* \in \mathbb{A}^*$, s -форм ω, θ , заданных на M_n , $a \in \mathbb{A}$ и функций $f \in C^\infty(M_n)$ выполняются следующие равенства:

- (a) $\omega_{(ta^*+sb^*)} = t\omega_{(a^*)} + s\omega_{(b^*)}$;
- (b) $(t\omega + s\theta)_{(a^*)} = t\omega_{(a^*)} + s\theta_{(a^*)}$;
- (c) $(f\omega)_{(a^*)} = f_{(\sigma)}\omega_{(a^* \cdot \varepsilon^\sigma)}$;
- (d) $(f\omega)_{(a^*)} = f_{(a^*)}^{(\sigma)}\omega_{(\sigma)}$.

Предложение 29. Если $\omega_1 \in \mathcal{T}_r^0(M_n)$, $\omega_2 \in \mathcal{T}_s^0(M_n)$ и $a^* = a^\alpha \varepsilon_\alpha \in \mathbb{A}^*$, то

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)_{(a^*)} = a^\alpha \gamma_\alpha^{\sigma_1 \sigma_2} (\omega_1)_{(\sigma_1)} \otimes (\omega_2)_{(\sigma_2)},$$

где $\gamma_\alpha^{\sigma_1 \sigma_2} = \varepsilon_\alpha(\varepsilon^{\sigma_1} \varepsilon^{\sigma_2})$ — структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$.

Предложение 30. Для любого векторного поля $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ и любой s -формы ω имеет место тождество

$$L_{X^{(a)}}\omega_{(b^*)} = (L_X \omega)_{(a^* \cdot b)},$$

$a \in \mathbb{A}$, $b^* \in \mathbb{A}^*$.

5. Лифты тензорных полей в координатах. Пусть (U, x^i) — произвольная карта гладкого атласа многообразия M_n , $(\pi^{-1}(U), x_\alpha^i)$ — карта гладкого атласа на $M_n^{\mathbb{A}}$. Сначала остановимся на координатном представлении функций $f_{(a^*)}$, где $f \in C^\infty(M_n)$. Из определения (a^*) -лифта функции следует, что

$$f_{(a^*)} = a^0 f_{(0)} + a^\vartheta ((\partial_{j_1} f)_{(0)} x_{\vartheta}^{j_1} + \frac{1}{2!} (\partial_{j_1 j_2} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} x_{\alpha_2}^{j_2} \gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \alpha_2} + \dots + \frac{1}{p!} (\partial_{j_1 j_2 \dots j_p} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} \dots x_{\alpha_p}^{j_p} \gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}),$$

где $f_{(0)} = f \circ \pi$ — вертикальный лифт функции f ,

$$\gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} = \varepsilon_{\vartheta}(\varepsilon^{\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2} \dots \varepsilon^{\alpha_s}) = \gamma_{\tau_1}^{\alpha_1 \alpha_2} \gamma_{\tau_2}^{\alpha_2 \alpha_3} \dots \gamma_{\vartheta}^{\alpha_{s-2} \alpha_{s-1}},$$

$\gamma_{\tau_1}^{\alpha_1 \alpha_2}$ — структурные постоянные алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

Если ковектор a^* совпадает с базисным ковектором ε_τ дуального базиса (ε_α) к базису (ε^α) алгебры $\mathbb{A}$, то получим, в силу принятых соглашений об обозначениях

$$f_{(\varepsilon_0)} = f_{(0)},$$

$$f_{(\varepsilon_\vartheta)} = f_{(\vartheta)} = (\partial_{j_1} f)_{(0)} x_{\vartheta}^{j_1} + \frac{1}{2!} (\partial_{j_1 j_2} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} x_{\alpha_2}^{j_2} \gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \alpha_2} + \dots + \frac{1}{p!} (\partial_{j_1 j_2 \dots j_p} f)_{(0)} x_{\alpha_1}^{j_1} \dots x_{\alpha_p}^{j_p} \gamma_{\vartheta}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \quad (9)$$

Используя представление функций $f_{(a^*)}$, можно получить локальное выражение лифтов $X^{(a)}$ векторного поля $X = X^i \partial_i$, заданного на M_n :

$$X^{(a)} = (X^i)_{(\alpha)} \partial_i^{(a \varepsilon^\alpha)}.$$

Для тензорного поля K типа $(1, s)$ ($s \geq 1$), положим

$$K^{(a)}(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}) = {}^a K_{i_1 i_2 \dots i_s \mu}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s i} \partial_i^\mu.$$

С другой стороны, по определению

$$\begin{aligned} K^{(a)}(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}) &= (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i \partial_i)^{(a \varepsilon^{\alpha_1} \dots \varepsilon^{\alpha_s})} = \\ &= a_\tau \gamma_{\vartheta}^{\tau \alpha_1 \dots \alpha_s} (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i)_{(\alpha)} \partial_i^{(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\vartheta)} = \\ &= a_\tau \gamma_{\mu}^{\tau \alpha_1 \dots \alpha_s \alpha} (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i)_{(\alpha)} \partial_i^\mu. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что

$${}^a K_{i_1 i_2 \dots i_s \mu}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s i} = a_\tau \gamma_{\mu}^{\tau \alpha_1 \dots \alpha_s \alpha} (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i)_{(\alpha)}.$$

Таким образом,

$$K^{(a)} = a_\tau \gamma_{\mu}^{\tau \alpha_1 \dots \alpha_s \alpha} (K_{i_1 i_2 \dots i_s}^i)_{(\alpha)} \partial_i^\mu \otimes dx_{\alpha_1}^i \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_s}^i.$$

Аналогичное координатное представление можно получить для (a^*) -лифтов s -форм ω , заданных на M_n .

Пусть $\omega = \omega_{i_1 i_2 \dots i_s} dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \dots \otimes dx^{i_s}$.

Для $\omega_{(a^*)}$ положим $\omega_{(a^*)} = \tilde{\omega}_{i_1 i_2 \dots i_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} dx_{\alpha_1}^{i_1} \otimes dx_{\alpha_2}^{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_s}^{i_s}$. Тогда

$$\omega_{(a^*)}(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}) = \tilde{\omega}_{i_1 i_2 \dots i_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}.$$

По определению (a^*) -лифтов левые части этих соотношений можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} \omega_{(a^*)}(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}) &= (\omega(\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_s}))_{(a^*)}^{(\varepsilon^{\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2} \dots \varepsilon^{\alpha_s})} = (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(a^*)}^{(\varepsilon^\vartheta)} \gamma_{\nu}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \\ &= (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(a^*)}^{(a^\tau \varepsilon_\tau \varepsilon^\vartheta)} \gamma_{\nu}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} = a^\tau \gamma_{\tau}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_s} (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(\mu)}. \end{aligned}$$

Таким образом, s -форму $\omega_{(a^*)}$ можно представить

$$\omega_{(a^*)} = a^\tau \gamma_{\tau}^{\mu \alpha_1 \dots \alpha_s} (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(\mu)} dx_{\alpha_1}^{i_1} \otimes dx_{\alpha_2}^{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_s}^{i_s}.$$

В частности, для 1-формы $\theta = \theta_i dx^i$, имеем

$$\theta_{(a^*)} = a^\tau \gamma_{\tau}^{\mu \alpha} (\theta_i)_{(\mu)} dx_{\alpha}^i.$$

Если в полученных соотношениях возьмем $a^* = \varepsilon_0$, то получим

$$\omega_{(\varepsilon_0)} = (\omega_{i_1 i_2 \dots i_s})_{(0)} dx_0^{i_1} \otimes dx_0^{i_2} \otimes \dots \otimes dx_0^{i_s}, \quad \theta_{(\varepsilon_0)} = (\theta_i)_{(0)} dx_0^i.$$

Эти лифты называются вертикальными лифтами и обозначаются символом $\omega_{(0)}$ и $\theta_{(0)}$, соответственно.

6. Горизонтальные лифты векторных полей и линейных связностей в расслоения Вейля второго порядка. Из определения 1 следует, что вещественной алгеброй А. Вейля $\mathbb{A}$ высоты 2 называется конечномерная, коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{R}$, обладающая идеалом $\mathbb{T}$, причем $\mathbb{T}^2 \neq \{0\}$, а $\mathbb{T}^3 = \{0\}$, факторалгебра $\mathbb{A}/\mathbb{T}$ изоморфна алгебре $\mathbb{R}$. В алгебре $\mathbb{A}$ выберем базис $\{e^0, e^1, \dots, e^m\}$, где $e^0 = 1, e^1, e^2, \dots, e^m$ составляют базис идеала $\mathbb{T}$. Из определения алгебры Вейля следует, что структурные постоянные $\gamma_{\sigma}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta, \sigma \neq 0$) удовлетворяют следующим соотношениям $\gamma_{\sigma}^{\alpha\beta} \gamma_{\mu}^{\sigma\tau} = 0$, где $\tau, \mu \neq 0$, а по индексу *sigma* ведется суммирование от 1 до m . На расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ возникает естественная гладкая класса C^{∞} структура. Пусть (U, x^i) — карта гладкой структуры на M_n , обозначим через x_0^i, x_{α}^i ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) координатные функции на $\pi^{-1}(U)$, где $\pi: M_n^{\mathbb{A}} \rightarrow M_n$ является канонической проекцией. Если ∇ — линейная связность, заданная на M_n , и Γ_{jk}^i — компоненты этой связности в карте (U, x^i) , то в области $\pi^{-1}(U)$ можно ввести новые координатные функции $x_{[0]}^i, x_{[\alpha]}^i$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) по формулам:

$$x_{[0]}^i = x_0^i, \quad x_{[\alpha]}^i = x_{\alpha}^i + \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i)_{(0)} x_{\sigma}^j x_{\tau}^k \gamma_{\alpha}^{\sigma\tau}.$$

Координатные окрестности $(\pi^{-1}(U), x_{[0]}^i, x_{[\alpha]}^i)$ составляют атлас суммы Уитни m экземпляров касательного расслоения первого порядка на $M_n^{\mathbb{A}}$. Сумма Уитни представляет собой расслоение А. Вейля над алгеброй m экземпляров алгебры дуальных чисел.

Пусть Q — тензорное поле типа $(1, 2)$ на M_n . На $M_n^{\mathbb{A}}$ возникает вертикальное векторное поле Q^V , определенное условием $Q^V = (Q_{jk}^i)_{(0)} x_{\sigma}^j x_{\tau}^k \gamma_{\alpha}^{\sigma\tau} \partial_i^{\alpha}$, где ∂_i^{α} — оператор частного дифференцирования по x_{α}^i , а по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до m . Векторное поле Q^V будем называть вертикальным лифтом тензорного поля Q . Для тензорного поля типа $(1, 1)$ определим вертикальное векторное поле $P^{V\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) (V_{α} -лифты) условиями $P^{V\alpha} = (P_j^i)_{(0)} x_{\sigma}^j \gamma_{\tau}^{\sigma\alpha} \partial_i^{\tau}$. Для векторного поля X , заданного на M_n , определим вертикальные векторные поля

$$X^{V(\alpha, \beta)} = (X^i)_{(0)} \gamma_{\sigma}^{\alpha\beta} \partial_i^{\sigma}.$$

Пусть X — векторное поле на M_n . На $M_n^{\mathbb{A}}$ построим горизонтальный лифт следующим образом: $X^{H_0} = X^{(0)} - \gamma(\hat{\nabla} X)$, где $\hat{\nabla} X$ — дифференциал векторного поля X относительно линейной связности $\hat{\nabla}$, которая определяется условием $\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + [X, Y]$, а векторное поле γP для тензорного поля типа $(1, 1)$ определяется условием

$$\gamma P = \left((P_j^i)_{(0)} x_{\alpha}^j + \frac{1}{2} (\partial_k T_j^i - \Gamma_{lj}^i T_k^l)_{(0)} x_{\sigma}^j x_{\tau}^k \gamma_{\alpha}^{\sigma\tau} \right) \partial_i^{\alpha}.$$

Действуя на векторное поле X^{H_0} структурным аффинором $\mathbb{J}^{(a)}$, получим (a) -горизонтальные лифты $X^{H\alpha} = \mathbb{J}^{(a)}(X^{H_0})$ векторного поля X . Горизонтальный лифт X^{H_0} соответствует единице ε^0 алгебры $\mathbb{A}$. В дальнейшем вместо X^{H_0} будем писать X^H . В локальных координатах имеем:

$$X^H = (X^i)_{(0)} \left(\left(\partial_i^0 - \left(\Gamma_{ij}^k \right)_{(0)} x_{\alpha}^j + \frac{1}{2} (\partial_j \Gamma_{is}^k - \Gamma_{ij}^t \Gamma_{ts}^k) x_{\sigma}^j x_{\tau}^s \gamma_{\alpha}^{\sigma\tau} \right) \partial_i^{\alpha} \right).$$

Отсюда следует $(X+Y)^H = X^H + Y^H$, $(fX)^H = f_{(0)} X^H$. Векторные поля $X^{H\alpha}$ для $\alpha \in \mathbb{T}$ являются вертикальными и имеют следующие локальные представления:

$$X^{H\alpha} = a_{\alpha}(X^i)_{(0)} (\partial_i^{\alpha} - \Gamma_{ij}^k x_{\sigma}^j \gamma_{\tau}^{\sigma\alpha} \partial_k^{\tau}).$$

Векторные поля $D_i = (\partial_i)^H$, $D_i^{\alpha} = (\partial_i)^{H\varepsilon^{\alpha}}$ образуют подвижной репер на $\pi^{-1}(U)$, называемый адаптированным репером к связности ∇ .

Пусть ∇ — произвольная линейная связность на M_n . При помощи связности ∇ построим горизонтальные лифты векторных полей с базы M_n в расслоение $M_n^{\mathbb{A}}$.

Теорема 3. Для каждой связности ∇ , заданной на M_n , существует, и притом единственная, линейная связность ∇^H на $M_n^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющая условиям

$$\nabla_{X^H}^H Y^{H_a} = (\nabla_X Y)^{H_a}, \quad \nabla_{X^{H_b}} Y^{H_a} = 0 \quad (10)$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $a, b \in \mathbb{A}$.

Доказательство. В каждой карте (U, x^i) атласа гладкой структуры многообразия найдем компоненты связности ∇ : $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$. В области $\pi^{-1}(U)$ карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_\alpha^i)$ определим линейную связность $\tilde{\nabla}$ следующим образом:

$$\tilde{\nabla}_{D_i} D_j = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} D_k, \quad \tilde{\nabla}_{D_i} D_j^\alpha = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} D_k^\alpha, \quad \tilde{\nabla}_{D_i^\alpha} D_j = 0, \quad \tilde{\nabla}_{D_i^\alpha} D_j^\beta = 0,$$

где $D_i = (\partial_i)^H$, $D_i^\alpha = (\partial_i)^{H_\alpha}$ — горизонтальные лифты векторных полей ∂_i относительно линейной связности ∇ . Непосредственные вычисления показывают, что $\tilde{\nabla}$ — связность, заданная на $M_n^{\mathbb{A}}$. Эта связность удовлетворяет условиям (10). Единственность $\tilde{\nabla}$ следует из того, что D_i, D_i^α образуют подвижной репер. $\square$

Аналогичным образом задается горизонтальный лифт линейной связности ∇ на $M^{\tilde{A}}$, где $\tilde{A}$ — алгебра m -дуальных чисел. Для этого в формулах (10) буквы H, H_α заменяются их строчными аналогами.

Пусть X — векторное поле на M_n . На $M_n^{\mathbb{A}}$ определим

$$X^H = (X^i)_{(0)} \left(\partial_i^0 - \left((\Gamma_{ij}^k)_{(0)} x_\alpha^j + \frac{1}{2} (\partial_j \Gamma_{is}^k - \Gamma_{ij}^t \Gamma_{ts}^k)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^s \gamma_{\alpha\sigma\tau} \right) \partial_k^\alpha \right),$$

$$X^{H_\tau} = (X^i)_{(0)} - (\Gamma_{ij}^k)_{(0)} x_\sigma^j \gamma_{\alpha\sigma\tau} \partial_k^\alpha.$$

Горизонтальные лифты, заданные на сумме Уитни m экземпляров касательного расслоения TM , задаются равенствами

$$X^h = (X^i)_{[0]} (\partial_i^{[0]} - (\Gamma_{ij}^k)_{[0]} x_\alpha^j \partial_k^{[\alpha]}), \quad X^{h_\tau} = (X^i)_{[0]} \partial_i^{[\tau]}.$$

Здесь по индексу α ведется суммирование от 1 до m , а τ принимает значения от 1 до m . Имеют место следующие тождества:

$$[X^H, Q^V] = (\nabla_X Q)^V, \quad [X^{H_\alpha}, Q^V] = (Q(X, \cdot) + Q(\cdot, X))^{V_\alpha},$$

$$X^h = X^H - \frac{1}{2} (R(X, \cdot))^{V_\alpha}, \quad X^{h_\alpha} = X^{H_\alpha} + \frac{1}{2} (T(X, \cdot))^{V_\alpha},$$

где T, R — тензорные поля кручения и кривизны, соответственно, линейной связности ∇ . Используя эти тождества, можно доказать следующие тождества:

$$[X^H, Y^H] = [X, Y]^H - (R(X, Y))^\nu + \frac{1}{2} (\nabla_X R_Y - \nabla_Y R_X - R_{[X, Y]})^V,$$

$$[X^H, Y^{H_\alpha}] = (\nabla_X Y)^{H_\alpha} + \frac{1}{2} (R(X, Y) + \hat{R}(X, Y) - \nabla_X T(Y, \cdot))^{V_\alpha},$$

$$[X^{H_\alpha}, Y^{H_\beta}] = (T(X, Y))^{V_{(\alpha, \beta)}},$$

где тензорные поля $R_X, \hat{R}$ определены условиями

$$R_X(Z_1, Z_2) = R(X, Z_1)Z_2, \quad \hat{R}(X, Y)Z = R(X, Z)Y,$$

$$(R(X, Y))^\nu = ((R(X, Y))_j^i)_{(0)} x_{[\alpha]}^j \partial_i^{[\alpha]}.$$

7. Расслоения Вейля второго порядка. В основе построения таких расслоений лежат гладкое многообразие M_n класса C^∞ и алгебры A Вейля высоты 2.

Наиболее простым расслоением A Вейля второго порядка является касательное расслоение второго порядка. Определение касательного расслоения второго порядка T^2M дано в [14]. В этой книге авторы не связывают касательные расслоения второго порядка с алгеброй плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$ высоты 2. В силу этого обозначения в указанной книге, используемые для описания объектов на касательных расслоениях второго порядка, оказались достаточно громоздкими.

Используя эти обозначения, Осьминина Н. А. изучает лифты некоторых типов тензорных полей на T^2M , а также инфинитезимальные аффинные преобразования полного лифта линейной связности. Она получила каноническое разложение произвольного инфинитезимального преобразования $\tilde{X}$ полного лифта $\nabla^{(0)}$ линейной связности ∇ , заданного на базе M_n касательного расслоения T^2M [11].

Используя это каноническое разложение, она исследует строение алгебры Ли всех инфинитезимальных преобразований. В связи с этим ею была проведена большая работа по вычислению коммутаторов различных векторных полей, входящих в каноническое разложение инфинитезимального аффинного преобразования [10].

Горизонтальный лифт ∇^H линейной связности ∇ , заданной на базе M_n расслоения T^2M был построен Н. И. Маниной в [7]. Она доказала, что линейная связность ∇^H является единственной линейной связностью на T^2M , удовлетворяющей следующим условиям

$$\nabla_{X^H}^H Y^H = (\nabla_X Y)^H, \quad \nabla_{X^{H_b}}^H Y^{H_a} = 0, \quad a = 0, 1, 2, \quad b = 1, 2,$$

где X, Y — произвольные векторные поля на базе M_n касательного расслоения второго порядка T^2M . Горизонтальные лифты $X^H = X^{H_0}$, X^{H_1} , X^{H_2} задаются в естественных координатах x_α^i ($\alpha = 0, 1, 2$) следующим образом:

$$\begin{aligned} X^H &= (X^m)_{(0)} \left(\partial_m^0 - (\Gamma_{jm}^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1 - (\Gamma_{jm}^i)_{(0)} x_2^j \partial_i^2 + \frac{1}{2} (\Gamma_{ks}^i \Gamma_{jm}^s - \partial_j \Gamma_{km}^i)_{(0)} x_1^j x_1^k \partial_i^2 \right), \\ X^{H_1} &= (X^i)_{(0)} (\partial_i^1 - \Gamma_{mi}^t x_1^m \partial_t^2), \quad X^{H_2} = (X^i)_{(0)} \partial_i^2. \end{aligned}$$

В [9] Н. И. Манина получила каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка над гладким многообразием со связностью горизонтального лифта и нашла необходимые и достаточные условия, при которых векторное поле является инфинитезимальным аффинным преобразованием. В этой же работе Н. И. Манина произвела перевод обозначений лифтов векторных полей, приведенных в [14], на обозначения, согласованные с алгеброй плюральных чисел высоты 2:

$$X^{II} = X^{(0)}, \quad X^I = X^{(1)}, \quad X^0 = X^{(2)}.$$

В [8] она изучила инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения T^2M над гладким класса C^∞ многообразием M_n , снабженным линейной связностью ∇ с нулевым тензорным полем кручения T и с ненулевым тензорным полем проективной кривизны Γ . Вейля W и построила пример линейной связности ∇^H , для которой все составляющие канонического разложения инфинитезимального аффинного преобразования $\tilde{X}$ являются ненулевыми.

Расслоения А. Вейля над фробениусовыми алгебрами высоты 2 и ширины 2 изучались в работах Буданова К. М. [1–4]. Существует только две алгебры А. Вейля с указанными числовыми характеристиками. Базис этих алгебр составляют элементы $e^0 = 1$, e^1 , e^2 , e^3 , удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} e^0 e^\alpha &= e^\alpha e^0 = e^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \\ e^1 e^2 &= e^2 e^1 = 0, \quad e^1 e^3 = e^3 e^1 = 0, \quad e^2 e^2 = q e^3, \quad q = \pm 1. \end{aligned}$$

Им построены естественные лифты функций, векторных полей с базы M_n в расслоение А. Вейля M_n^A . Эти лифты задаются в локальных координатах формулами:

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_l X^i)_{(0)} x_\alpha^l \partial_i^\alpha + \frac{1}{2} (\partial_i \partial_s X^i)_{(0)} (x_1^i x_1^s + q x_2^i x_2^s) \partial_i^3 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \\ X^{(1)} &= (X^i)_{(0)} (\partial_i^1 + (\partial_l X^i)_{(0)} x_1^l \partial_i^3), \\ X^{(2)} &= (X^i)_{(0)} (\partial_i^2 + q (\partial_l X^i)_{(0)} x_2^l \partial_i^3), \\ X^{(3)} &= (X^i)_{(0)} \partial_i^3. \end{aligned}$$

Для линейной связности *nabla* без кручения на расслоении M_n^A существует единственная линейная связность ∇^C , удовлетворяющая условию $\nabla_{X^{(a)}}^C Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}$ для любых векторных

полей X, Y и любых элементов a, b алгебры A Вейля. Если a, b являются базисными элементами e^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), то лифты $X^{(e^\alpha)}$ обозначаются X^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$). В работе [3] приведены соотношения, определяющие полный лифт ∇^C линейной связности ∇ , использующие таблицу умножения базисных элементов алгебры A Вейля, приведенную выше. В силу коммутативности алгебры A Вейля A , имеют место равенства $\nabla_{X^{(a)}}^C Y^{(b)} = \nabla_{X^{(b)}}^C Y^{(a)}$. Учитывая эти соотношения, приведём только сокращённый вариант основных соотношений, определяющих ∇^C :

$$\begin{aligned}\nabla_{X^{(0)}}^C Y^{(0)} &= (\nabla_X Y)^{(0)}, & \nabla_{X^{(0)}}^C Y^{(1)} &= (\nabla_X Y)^{(1)}, \\ \nabla_{X^{(0)}}^C Y^{(2)} &= (\nabla_X Y)^{(2)}, & \nabla_{X^{(0)}}^C Y^{(3)} &= (\nabla_X Y)^{(3)}, \\ \nabla_{X^{(1)}}^C Y^{(1)} &= (\nabla_X Y)^{(3)}, & \nabla_{X^{(2)}}^C Y^{(2)} &= q(\nabla_X Y)^{(3)}, \\ \nabla_{X^{(1)}}^C Y^{(2)} &= \nabla_{X^{(1)}}^C Y^{(3)} = \nabla_{X^{(2)}}^C Y^{(3)} = \nabla_{X^{(3)}}^C Y^{(3)} = 0.\end{aligned}$$

Используя эти соотношения, можно получить компоненты линейной связности ∇^C в координатах и записать дифференциальные уравнения для компонент инфинитезимального аффинного преобразования $\tilde{X} = \tilde{X}_\alpha^\alpha \partial_i^\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$; $i = 1, 2, \dots, n$):

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta \tilde{X}_\sigma^i + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} \partial_j^\alpha \tilde{X}_\tau^m + \Gamma_{jm\sigma}^{\alpha\tau i} \partial_k^\beta \tilde{X}_\tau^m - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} \partial_m^\tau \tilde{X}_\sigma^i + \tilde{X}_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0.$$

В этой системе дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных функции $\Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta i}$ являются компонентами линейной связности в карте $(\pi^{-1}(U), x_\alpha^i)$. При интегрировании этой системы в [4] Будановым К. М. получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования. В этой же работе приведены уравнения движений в расслоениях A Вейля со связностью полного лифта над произвольной алгеброй A Вейля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буданов К. М. Лифты функций и векторных полей в расслоение Вейля над алгеброй высоты // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2006. — № 37. — С. 12–16.
2. Буданов К. М. Лифты линейной связности и функций в расслоение Вейля над специальной алгеброй Вейля // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2007. — № 38. — С. 12–16.
3. Буданов К. М. О лифтах тензорных полей типа $(1, 1)$ в расслоение Вейля над специальной алгеброй Вейля // Изв. Пензенск. гос. пед. ун-та. Физ.-мат. и техн. науки. — 2012. — № 30. — С. 28–32.
4. Буданов К. М., Султанов А. Я. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта // Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3–13.
5. Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985.
6. Кертис И., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.
7. Манина Н. И. Некоторые свойства горизонтального лифта линейной связности в касательное расслоение второго порядка // Мат. Всерос. науч.-практ. конф. «Фундаментальные науки и образование». — Бийск: БПГУ, 2006. — С. 39–44.
8. Манина Н. И. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью горизонтального лифта над непроективно-плоским пространством // Мат. VII Междунар. симп. «Фундаментальные и прикладные проблемы науки». Т. 1. — М., 2012. — С. 23–31.
9. Манина Н. И., Султанов А. Я. Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью горизонтального лифта // Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 9. — С. 62–69.
10. Осъминина Н. А. Об алгебре инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта // в кн.: Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза: ПГПУ, 1999. — С. 102–106.
11. Секачева Н. А. О каноническом разложении произвольного инфинитезимального преобразования в касательном расслоении второго порядка // в кн.: Математика и информатика: Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза: ПГПУ, 1996. — С. 24–26.

12. *Шурыгин В. В.* Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй// Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 2 (290). — С. 75–106.
13. *Morimoto A.* Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent bundles of p^v -velocities// Nagoya Math. J. — 1970. — 40. — P. 13–31.
14. *Yano K.* Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry. — New York: Marcel Dekker, 1973.

Султанов Адгам Яхиевич

Пензенский государственный университет

E-mail: sultanovaya@rambler.ru

Монахова Оксана Александровна

Пензенский государственный университет

E-mail: oxmonakh@mail.ru

Султанова Галия Алиевна

Филиал Военной Академии материально-технического обеспечения

имени генерала армии А. В. Хрулева, Пенза

E-mail: sultgaliya@yandex.ru