ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 64–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-64-68

УДК 514.765

О МЕТРИКАХ ЭЙНШТЕЙНА ТРЕХМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

© 2023 г. **А. А. ПАВЛОВА, О. П. ХРОМОВА**

Аннотация. В работе исследуются уравнения Эйнштейна на трехмерных унимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью.

Ключевые слова: метрика Эйнштейна, группа Ли, левоинвариантная лоренцева метрика, полусимметрическая связность.

ON THE EINSTEIN METRICS OF THREE-DIMENSIONAL LIE GROUPS WITH A SEMISYMMETRIC CONNECTION

© 2023 **A. A. PAVLOVA, O. P. KHROMOVA**

Abstract. In this paper, we study the Einstein equations on three-dimensional unimodular Lie groups with a left-invariant Lorentzian metric and a semisymmetric connection.

Keywords and phrases: Einstein metric, Lie group, left-invariant Lorentzian metric, semisymmetric connection.

AMS Subject Classification: 53B20, 53C30, 53C50

1. Предварительные сведения. Пусть (M,g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X, \tag{1}$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивиты. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [8], и называется полусимметрической связностью или связностью с векторным кручением (с точностью до направления).

Класс метрических связностей, определяемых данным образом, содержит связность Леви-Чивиты и играет важную роль в исследованиях по римановой геометрии (см. [4–6, 10, 13–17]).

Тензор кривизны и тензор Риччи связности ∇ определяются соответственно равенствами

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$
$$r(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y).$$

Отметим, что, в отличие от случая связности Леви-Чивиты, тензор Риччи полусимметрической связности, вообще говоря, не является симметрическим.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00111).

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) с полусимметрической связностью ∇ называется эйнштейновым, если тензор r_{ij} удовлетворяет одному из следующих уравнений (см. [11, 12]):

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij}; \tag{$\mathcal{A}$}$$

$$r_{ij} = \Lambda(x) g_{ij}; \tag{$\mathcal{B}$}$$

$$r_{(ij)} = \Lambda g_{ij}; \tag{$\mathcal{C}$}$$

$$r_{(ij)} = \Lambda(x) g_{ij}, \tag{$\mathcal{D}$}$$

где $r_{(ij)}$ — симметрическая часть тензора Риччи, Λ — константа, $\Lambda(x)$ — функция на многообразии.

Рассмотрим уравнение типа $(\mathcal{C})$ на группах Ли. Будем предполагать, что $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Фиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ левоинваринтных векторных полей в $\mathfrak{g}$ и положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли, g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на G полусимметрическую связность ∇.

Согласно (1) компоненты связности ∇ задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - g_{sj} V^s \delta_i^k,$$

где $(\Gamma^g)_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij})$ — компоненты связности Леви-Чивиты ∇^g, $\|g^{ks}\|$ — матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$, δ_i^k — символ Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r. В базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ их компоненты соответственно есть

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}.$$

Рассмотрим далее трехмерный случай. Переобозначим структурные константы алгебры Ли в соответствии со следующей теоремой [3, 7, 9].

Теорема 1. *Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке*:

1. *Случай $\mathcal{A}_1$*:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_1;

2. *Случай $\mathcal{A}_2$*:

$$[e_1, e_2] = (1 - \alpha_2) e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - (1 + \alpha_2) e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1,$$

с времениподобным e_3;

3. *Случай $\mathcal{A}_3$*:

$$[e_1, e_2] = e_1 - \alpha_1 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_1 e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + e_2 + e_3,$$

с времениподобным e_3;

4. *Случай $\mathcal{A}_4$*:

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

с времениподобным e_1 и $\alpha_2 \neq 0$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть (G, g, ∇) — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой g и полусимметрической связностью ∇, удовлетворяющая уравнению*

$$r_{ij} + r_{ji} = \Lambda g_{ij}. \tag{2}$$

Тогда константа Эйнштейна, полусимметрическая связность и структурные константы алгебры Ли группы Ли (G, g, ∇) входят в следующий список:

Случай $\mathcal{A}_1$:

$$\Lambda = -\alpha_3^2, \quad V = (0, 0, V^3), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha_3^2 - (V^3)^2}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad V^3 \in \mathbb{R}; \tag{$\mathcal{A}_{11}$}$$

$$\begin{gathered}\Lambda = \alpha_3\alpha_1 + (V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3^2 - 4(V^1)^2}, \\ \alpha_2 = \alpha_3, \quad |\alpha_3| \geqslant |V^1|;\end{gathered} \tag{$\mathcal{A}_{12}$}$$

$$\begin{gathered}\Lambda = -\alpha_3\alpha_2 - (V^2)^2, \quad V = (0, V^2, 0), \quad \alpha_1 = -\alpha_3, \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3^2 + 4(V^2)^2}, \quad \alpha_3, V^2 \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{$\mathcal{A}_{13}$}$$

Случай $\mathcal{A}_2$:

$$\Lambda = -\alpha_1^2, \quad V = (0, V^2, -V^2), \quad \alpha_2 = \alpha_1 \geqslant 0, \quad V^2 = \pm\sqrt{\alpha_1}; \tag{$\mathcal{A}_{21}$}$$

$$\Lambda = -4(V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad \alpha_1 = 2V^1, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}V^1 \in \mathbb{R}; \tag{$\mathcal{A}_{22}$}$$

$$\Lambda = -\frac{1}{4}(V^1)^2, \quad V = (V^1, V^2, -V^2), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}V^1 \leqslant 0, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2}V^1, \quad V^2 = \pm 3\sqrt{-\frac{V^1}{2}}. \tag{$\mathcal{A}_{23}$}$$

Случай $\mathcal{A}_3$:

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, 1, 1), \quad \alpha_1 = 0; \tag{$\mathcal{A}_{31}$}$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, -2, -2), \quad \alpha_1 = 0. \tag{$\mathcal{A}_{32}$}$$

Случай $\mathcal{A}_4$:

$$\Lambda = -4, \quad V = (0, 0, 0), \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}; \tag{$\mathcal{A}_{41}$}$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, 0, 1), \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}; \tag{$\mathcal{A}_{42}$}$$

$$\begin{gathered}\Lambda = 4\alpha_2, \quad V = (V^1, V^2, 0), \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha_2 V^1}{V^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4(V^2)^2} < 0, \\ \alpha_3 = 0, \quad V^1 = \pm\sqrt{-\alpha_2};\end{gathered} \tag{$\mathcal{A}_{43}$}$$

$$\Lambda = -8/9, \quad V = (\pm 2/3, 0, 1/3), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -2/3, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}. \tag{$\mathcal{A}_{44}$}$$

Обратное утверждение также справедливо.

2. Доказательство основной теоремы. Для доказательства теоремы 2 запишем систему уравнений (2) в базисе теоремы 1, используя формулы для нахождения компонент тензора Риччи через структурные константы алгебры Ли, которые представлены выше в случае произвольной группы Ли. Рассмотрим последовательно все случаи теоремы 1.

2.1. Случай $\mathcal{A}_1$. Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{gathered}2V^2V^3 + V^1(\alpha_2 - \alpha_3) = 0, \\ 2V^1V^3 - V^2(\alpha_1 + \alpha_3) = 0, \\ 2V^1V^2 + V^3(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \\ (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2(V^2)^2 - \alpha_3^2 + 2(V^1)^2 = \Lambda, \\ (\alpha_1 + \alpha_3)^2 - 2(V^3)^2 - \alpha_2^2 + 2(V^1)^2 = \Lambda, \\ (\alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(V^2)^2 - \alpha_1^2 - 2(V^3)^2 = \Lambda.\end{gathered}$$

Решая данную систему равенств, находим

$$\Lambda = -\alpha_3^2, \quad V = (0, 0, V^3), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha_3^2 - (V^3)^2}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad V^3 \in \mathbb{R};$$

$$\Lambda = \alpha_3\alpha_1 + (V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}\alpha_3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3^2 - 4(V^1)^2}, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad |\alpha_3| \geqslant |V^1|;$$

$$\Lambda = -\alpha_3\alpha_2 - (V^2)^2, \quad V = (0, V^2, 0), \quad \alpha_1 = -\alpha_3, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3^2 + 4(V^2)^2}, \quad \alpha_3, V^2 \in \mathbb{R}.$$

2.2. Случай $\mathcal{A}_2$. Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{gathered}
2\alpha_1 + 2V^1 - 4\alpha_2 - 2V^2V^3 = 0,\\
V^2(\alpha_2 - \alpha_1) - 2V^1V^3 - V^2 - V^3 = 0,\\
V^3(\alpha_1 - \alpha_2) + 2V^1V^2 - V^2 - V^3 = 0,\\
-\alpha_1^2 + 2(V^3)^2 - 2(V^2)^2 = \Lambda,\\
2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2V^1 - \alpha_1^2 + 2(V^2)^2 + 2\alpha_2\alpha_1 + 2(V^1)^2 = -\Lambda,\\
2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2V^1 + \alpha_1^2 + 2(V^3)^2 - 2\alpha_2\alpha_1 - 2(V^1)^2 = \Lambda.
\end{gathered}$$

Решая данную систему равенств, находим

$$\Lambda = -\alpha_1^2, \quad V = (0, V^2, -V^2), \quad \alpha_2 = \alpha_1 \geqslant 0, \quad V^2 = \pm\sqrt{\alpha_1};$$

$$\Lambda = -4(V^1)^2, \quad V = (V^1, 0, 0), \quad \alpha_1 = 2V^1, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}V^1 \in \mathbb{R};$$

$$\Lambda = -\frac{1}{4}(V^1)^2, \quad V = (V^1, V^2, -V^2), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}V^1 \leqslant 0, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2}V^1, \quad V^2 = \pm 3\sqrt{-\frac{V^1}{2}}.$$

2.3. Случай $\mathcal{A}_3$. Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{gathered}
-2\alpha_1 - V^1 + 2V^1V^2 = 0,\\
2\alpha_1 + V^1 - 2V^1V^3 = 0,\\
4 - V^2 - 2V^2V^3 - V^3 = 0,\\
-4 - \alpha_1^2 + 2(V^3)^2 + 2V^3 - 2(V^1)^2 = \Lambda,\\
-4 + \alpha_1^2 + 2(V^2)^2 + 2V^2 + 2(V^1)^2 = -\Lambda,\\
2V^2 - \alpha_1^2 + 2(V^3)^2 - 2V^3 - 2(V^2)^2 = \Lambda.
\end{gathered}$$

Решая данную систему равенств, находим

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, 1, 1), \quad \alpha_1 = 0;$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, -2, -2), \quad \alpha_1 = 0.$$

2.4. Случай $\mathcal{A}_4$. Система уравнений Эйнштейна (2) примет вид

$$\begin{gathered}
-V^1(\alpha_2 + V^3) - V^2\alpha_1 - V^1V^3 = 0,\\
V^2(-1 + V^3) + V^1\alpha_1 + V^2V^3 = 0,\\
2\alpha_1 + 2\alpha_2\alpha_1 - 2V^1V^2 - \alpha_3V^2 = 0,\\
-2\alpha_2 + 4V^3\alpha_2 - 2V^3 + 2(V^3)^2 + 2\alpha_2^2 + 2(V^2)^2 = -\Lambda,\\
2\alpha_2 - 2V^3\alpha_2 + 4V^3 - 2(V^3)^2 - 2 + 2(V^1)^2 = \Lambda,\\
-2\alpha_2^2 - 2V^3\alpha_2 - 2(V^2)^2 - 2 + 2V^3 + 2(V^1)^2 = \Lambda.
\end{gathered}$$

где $\alpha_2 \neq 0$. Решая данную систему равенств, находим

$$\Lambda = -4, \quad V = (0, 0, 0), \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R};$$

$$\Lambda = 0, \quad V = (0, 0, 1), \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R};$$

$$\Lambda = 4\alpha_2, \quad V = (V^1, V^2, 0), \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha_2 V^1}{V^2}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4(V^2)^2} < 0,$$
$$\alpha_3 = 0, \quad V^1 = \pm\sqrt{-\alpha_2};$$
$$\Lambda = -8/9, \quad V = (\pm 2/3, 0, 1/3), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -2/3, \quad \alpha_3 =\in \mathbb{R}.$$

Заметим, что уравнения Эйнштейна типа $(\mathcal{A})$ на локально однородных (псевдо)римановах многообразиях с полусиметрической связностью изучались в [1, 2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П.* Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых пространствах с векторным кручением// Мат. заметки СВФУ. — 2021. — *28*, № 4. — С. 30–47.
2. *Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П.* Уравнения Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *181.* — С. 41–53.
3. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства// Мат. тр. — 2006. — *9*, № 1. — С. 130–168.
4. *Agricola I., Kraus M.* Manifolds with vectorial torsion// Differ. Geom. Appl. — 2016. — *46.* — P. 130–147.
5. *Agricola I., Thier C.* The geodesics of metric connections with vectorial torsion// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2004. — *26.* — P. 321–332.
6. *Barua B., Ray A. Kr.* Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold// Indian J. Pure Appl. Math. — 1985. — *16*, № 7. — P. 736–740.
7. *Calvaruso G.* Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds// J. Geom. Phys. — 2007. — *57.* — P. 1279–1291.
8. *Cartan E.* Sur les variétés àconnexion affine et la théorie de la relativitégénéralisée (deuxième partie)// Ann. Ecole Norm. Sup. — 1925. — *42.* — P. 17–88.
9. *Cordero L. A., Parker P. E.* Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups// Rend. Mat. — 1997. — *17.* — P. 129–155.
10. *De U. C., De B. K.* Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold// Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. — 1995. — *54.* — P. 111–117.
11. *Klemm D. S., Ravera L.* Einstein manifolds with torsion and nonmetricity// Phys. Rev. D. — 2020. — *101.* — 044011.
12. *Maralbhavi Y. B., Muniraja G.* Semi-symmetric metric connections, Einstein manifolds and projective curvature tensor// Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2010. — *5*, № 20. — P. 991–999.
13. *Muniraja G.* Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur's theorem// Int. J. Contemp. Math. Sci. — 2008. — *3*, № 25. — P. 1223–1232.
14. *Murathan C., Özgür C.* Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions// Proc. Estonian Acad. Sci. — 2008. — *57*, № 4. — P. 210–216.
15. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection// Rev. Roum. Math. Pure Appl. — 1970. — *15.* — P. 1579–1586.
16. *Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., Uysal. S. A.* On a semi-symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold// Eur. J. Pure Appl. Math. — 2011. — *4*, № 2. — P. 152–161.
17. *Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal S. A., Yilmaz H. B.* Some vector fields on a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection// Bull. Iran. Math. Soc. — 2012. — *38*, № 2. — P. 479–490.

Павлова Анна Александровна
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: anya.0596@mail.ru

Хромова Олеся Павловна
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: khromova.olesya@gmail.com