ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 10–18
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-10-18

УДК 512.6

ГЕОМЕТРИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ И АНТИЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

© 2023 г. **Н. И. ГУСЕВА**

Аннотация. Рассматриваются пространства, геометрия которых определяется формами, не являющимися квадратичными. Эти формы связаны с циклическими и антициклическими линейными алгебрами. Приводятся линейные преобразования, сохраняющие такие формы, и указаны инварианты этих преобразований, аналогичные расстоянию между точками и углу между векторами.

Ключевые слова: пространство с полилинейной формой, циклическая алгебра, циклическое пространство, антициклическое пространство.

GEOMETRY OF CYCLIC AND ANTICYCLIC SPACES

© 2023 **N. I. GUSEVA**

Abstract. We consider spaces whose geometry is determined by forms that are not quadratic. These forms are related to cyclic and anticyclic linear algebras. We describe linear transformations that preserve these forms and indicate invariants of these transformations similar to the distance between points and the angle between vectors.

Keywords and phrases: space with a multilinear form, cyclic algebra, cyclic space, anticyclic space.
AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 16S38

Евклидовы и псевдоевклидовы пространства представляют собой аффинные пространства, снабжённые некоторой квадратичной формой, которая называется *фундаментальной* и задаёт метрическую структуру пространства. Движениями таких пространств являются линейные преобразования, сохраняющие фундаментальную форму.

Непосредственным обобщением евклидовых и псевдоевклидовых пространств будут аффинные пространства, с не квадратичными фундаментальными формами. Такие пространства естественно называть *почти евклидовыми.* Некоторые из них по своим свойствам напоминают евклидовы или псевдоевклидовы пространства, другие же имеют геометрию, которая кардинально отличается от привычных нам геометрических структур.

Геометрия пространств с неквадратичной фундаментальной формой не привлекала особого внимания геометров по двум причинам. Во-первых, из-за сложности определения в таких пространствах тех или иных геометрических величин, а во-вторых, пространства с не квадратичной фундаментальной формой не находили достаточно значимых приложений. На это указывал ещё Бернгард Риман, который первым допустил возможность изучения многообразий с не квадратичной фундаментальной формой. В своей знаменитой работе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» он писал: «Случай, который можно было бы назвать следующим по простоте, соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвёртой степени из дифференциального выражения четвёртой степени. Исследование этого более общего типа многообразий, правда, не потребовало бы введения каких-либо существенно новых принципов, но связано было бы со значительной потерей времени и едва ли позволило бы представить учение о многообразиях в особо своеобразном освещении; притом результаты не смогли бы быть сформулированы геометрически. Поэтому я позволю себе ограничиться многообразиями, для которых линейный элемент задаётся как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени» [8].

Между тем приложения геометрии к теоретической физике в XX веке поставило вопрос об изучении пространственно-временных многообразий, геометрия которых порождается не квадратичной фундаментальной формой, хотя такие исследования касались весьма ограниченного набора не квадратичных форм [4].

С точки зрения Ф. Клейна, геометрия на некотором множестве определяется какой-либо группой, действующей на этом множестве. И потому, чтобы на аффинном пространстве построить почти евклидову геометрию с той или иной не квадратичной формой, надо найти группу преобразований, сохраняющих эту форму. И задача отыскания таких групп преобразований далеко не тривиальная, а лучше сказать, в общем случае неподъёмная, в отличие от групп преобразований, сохраняющих квадратичные формы [6].

Однако есть обширный класс не квадратичных форм, для которых сравнительно просто найти группу сохраняющих их линейных преобразований. Такие формы связаны с некоторыми линейными алгебрами, а сохраняющие их преобразования ищутся среди линейных алгебраических функций.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — какой-либо базис линейного пространства алгебры $\mathbf{A}_n$ над полем $\mathbb{R}$, и пусть c^r_{kh} — структурные константы, вычисленные в этом базисе, т.е.

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h = c^r_{kh}\mathbf{e}_r.$$

Рассмотрим линейное алгебраическое уравнение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, которое в выбранном базисе будет иметь вид

$$\big(a^k\mathbf{e}_k\big) \cdot \big(x^h\mathbf{e}_h\big) = b^r\mathbf{e}_r \quad \text{или} \quad a^k x^h c^r_{kh}\mathbf{e}_r = b^r\mathbf{e}_r;$$

тогда определитель системы линейных уравнений

$$a^k c^r_{kh} x^h = b^r,$$

эквивалентных линейному алгебраическому уравнению $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, будем называть *левым детерминантом* элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_n$ и обозначать $\Delta_L(\mathbf{a})$.

Аналогично вводится в рассмотрение *правый детерминант* $\Delta_R(\mathbf{a})$ элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{A}_n$ — определитель системы линейных уравнений

$$a^h c^r_{kh} x^k = b^r,$$

эквивалентной линейному алгебраическому уравнению $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Для коммутативных алгебр справедливо равенство

$$\Delta_L(\mathbf{b}) = \Delta_R(\mathbf{b}) = \Delta(\mathbf{b}).$$

Пусть в алгебре $\mathbf{A}_n$ выполняется *условие мультипликативности детерминантов*, т.е.

$$\Delta_L(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \Delta_L(\mathbf{x})\Delta_L(\mathbf{y}) \quad \text{или} \quad \Delta_R(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \Delta_R(\mathbf{x})\Delta_R(\mathbf{y}). \tag{1}$$

Тогда $\Delta_L(\mathbf{x})$ или $\Delta_R(\mathbf{x})$ текущего элемента алгебры можно взять в качестве неквадратичной фундаментальной формы, а линейные алгебраические функции $\mathbf{x}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$ или $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$, где $\Delta_L(\mathbf{b}) = 1$ или $\Delta_R(\mathbf{b}) = 1$, дадут нам движения линейного пространства этой алгебры. В этом случае геометрия линейного пространства алгебры $\mathbf{A}_n$ будет называться *детерминантной.*

Покажем, что для ассоциативных алгебр детерминанты

$$\Delta_L(\mathbf{a}) = \det\big(a^k c^r_{kh}\big) \quad \text{и} \quad \Delta_R(\mathbf{a}) = \det\big(a^h c^r_{kh}\big)$$

произвольного элемента ассоциативной алгебры $\mathbf{A}_n$ являются мультипликативными функциями, т.е. для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}_n$

$$\Delta_L(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \Delta_L(\mathbf{a})\Delta_L(\mathbf{b}) \quad \text{и} \quad \Delta_R(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \Delta_R(\mathbf{a})\Delta_R(\mathbf{b}).$$

Для доказательства мультипликативного свойства левого детерминанта заметим, что в силу ассоциативности умножения в алгебре $\mathbf{A}_n$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}),$$

тогда, с одной стороны,

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{x} = \bigl(a^k b^h c^r_{kh}\mathbf{e}_r\bigr)\cdot\bigl(x^l\mathbf{e}_l\bigr) = a^k b^h c^r_{kh} c^m_{rl} x^l \mathbf{e}_m,$$

с другой стороны,

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}) = \bigl(a^k\mathbf{e}_k\bigr)\cdot\bigl(b^h c^r_{hl} x^l\mathbf{e}_r\bigr) = a^k b^h c^r_{hl} c^m_{kr} x^l \mathbf{e}_m,$$

то есть

$$\Delta_L(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \det\bigl(a^k b^h c^r_{kh} c^m_{rl}\bigr) = \det\bigl(a^k b^h c^r_{hl} c^m_{kr}\bigr) = \det\bigl(b^h c^r_{hl}\bigr)\det\bigl(a^k c^m_{kr}\bigr) = \Delta_L(\mathbf{b})\Delta_L(\mathbf{a}).$$

Аналогично доказывается мультипликативное свойство правых детерминантов элементов ассоциативной алгебры. Заметим ещё, что если ассоциативная алгебра к тому же коммутативна, то правый и левый детерминанты очевидно совпадают, и мы говорим просто о детерминанте элементов такой алгебры.

Таким образом, каждая ассоциативная алгебра на своём линейном пространстве порождает некоторую геометрию, в которой роль фундаментальной формы играет левый (правый) детерминант текущего элемента $\mathbf{x}\in\mathbf{A}_n$, а движениями будут линейные преобразования пространства алгебры, порождаемые линейными алгебраическими функциями $\mathbf{x}' = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}$, при условии, что $\Delta_L(\mathbf{a}) = \Delta_L(\mathbf{b}) = 1$ (или $\Delta_R(\mathbf{a}) = \Delta_R(\mathbf{b}) = 1$).

Это сразу следует из мультипликативности:

$$\Delta_L(\mathbf{x}') = \Delta_L(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}) = \Delta_L(\mathbf{a})\Delta_L(\mathbf{x}) = \Delta_L(\mathbf{x}).$$

При этом заметим, что множество элементов $\mathbf{a}\in\mathbf{A}_n$, для которых $\Delta_L(\mathbf{a}) = 1$, образуют подгруппу $\mathbf{G_L}(\mathbf{A}_n)$ группы всех обратимых элементов алгебры $\mathbf{A}_n$ и, следовательно, преобразования линейного пространства алгебры, порождаемые линейными функциями $\mathbf{x}' = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$ при условии $\Delta_L(\mathbf{a}) = 1$, образуют группу движений геометрической структуры с фундаментальной формой $\Delta_L(\mathbf{x})$.

Аналогично, на линейном пространстве ассоциативной алгебры $\mathbf{A}_n$ можно определить и геометрическую структуру, фундаментальной формой для которой будет правый детерминант $\Delta_R(\mathbf{x})$, а движения в этой геометрии будут определяться линейными алгебраическими функциями $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\cdot\mathbf{a}$, при условии, что $\Delta_R(\mathbf{a}) = 1$.

Заметим ещё, что линейные алгебры можно рассматривать и над полем комплексных чисел. При этом мультипликативность детерминантов остаётся справедливой (так как при доказательстве нигде не использовалось предположение, что $a^k, b^h, c^r_{kh}\in\mathbb{R}$). И для линейных пространств, получаемых овеществлением линейных комплексных пространств ассоциативных алгебр над полем комплексных чисел, в качестве фундаментальной формы можно принять модуль левого или правого детерминанта, поскольку модуль комплексного числа обладает свойством мультипликативности.

Детерминантную геометрию можно определить и на неассоциативных алгебрах, если детерминант элементов этих алгебр будет мультипликативной функцией. Примером этому служат алгебры октав и антиоктав.

Простейшие детерминантные геометрии реализуются на *циклических алгебрах* $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$, где $\mathbf{e}$ порождающий элемент группы $\mathbb{Z}_m$, т.е. $\mathbf{e}^m = 1$.

Каждому элементу $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{e} + x_2\mathbf{e}^2 + \ldots + x_{m-1}\mathbf{e}^{m-1}\in\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ ставится в соответствие вектор m-мерного линейного (или центроаффинного) пространства с координатами $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\in\mathbb{R}$, в качестве *фундаментальной формы* степени m взят *детерминант* этого элемента

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & \ldots & x_1 \\ x_1 & x_0 & \ldots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \ldots & x_0 \end{vmatrix}.$$

Такие определители называются *циркулянтами* и для них справедливо следующее тождество [7]

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \prod_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{n=0}^{m-1}\alpha_m^{nk}x_n\right) = \\ = \big(x_0+x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}\big)\big(x_0+\alpha_m x_1+\alpha_m^2 x_2+\ldots+\alpha_m^{m-1}x_{m-1}\big)\times \\ \times\big(x_0+\alpha_m^2 x_1+\alpha_m^4 x_2+\ldots+\alpha_m^{m-2}x_{m-1}\big), \quad (2)$$

где

$$\alpha_m = \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)\equiv\sqrt[m]{-1}$$

— комплексный примитивный корень m-й степени из минус единицы.

Для доказательства рассмотрим определитель Вандермонда, составленный из степеней комплексного числа α_m:

$$V(\alpha_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \ldots & \alpha_m^{m-2} & \alpha_m^{m-1} \\ 1 & \alpha_m^2 & \alpha_m^4 & \ldots & \alpha_m^{m-4} & \alpha_m^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_m^{m-2} & \alpha_m^{m-4} & \ldots & \alpha_m^4 & \alpha_m^2 \\ 1 & \alpha_m^{m-1} & \alpha_m^{m-2} & \ldots & \alpha_m^2 & \alpha_m \end{vmatrix}$$

и умножим его на детерминант произвольного элемента $\mathbf{x}\in\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$:

$$\Delta_m(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & x_{m-2} & \ldots & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{m-1} & \ldots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \ldots & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & x_{m-3} & \ldots & x_0 \end{vmatrix}.$$

В результате получим

$$V(\alpha_m)\Delta_m(\mathbf{x}) = \Delta_m(\mathbf{x}) = \\ = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m-1}x_k & \sum\limits_{k=0}^{m-1}x_k & \sum\limits_{k=0}^{m-1}x_k & \ldots & \sum\limits_{k=0}^{m-1}x_k \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^k x_k & \alpha_m\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^k x_k & \alpha_m^2\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^k x_k & \ldots & \alpha_m^{m-1}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^k x_k \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{2k} x_k & \alpha_m^2\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{2k} x_k & \alpha_m^4\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{2k} x_k & \ldots & \alpha_m^{m-2}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{2k} x_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{(m-1)k} x_k & \alpha_m^{m-1}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{(m-1)k} x_k & \alpha_m^{m-2}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{(m-1)k} x_k & \ldots & \alpha_m\sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{(m-1)k} x_k \end{vmatrix} = \\ = \left(\sum_{k=0}^{m-1}x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_m^k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{2k} x_k\right)\ldots\left(\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{(m-1)k} x_k\right)V\left(\alpha_m\right);$$

так как

$$V(\alpha_m) = \prod_{p>q}(\alpha_m^p-\alpha_m^q)\neq 0,$$

то

$$\Delta_m(x) = \left(\sum_{k=0}^{m-1}x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_m^k x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{2k} x_k\right)\ldots\left(\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_m^{(m-1)k} x_k\right).$$

Мультипликативность циркулянтов

$$\Delta_m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \Delta_m(\mathbf{a})\Delta_m(\mathbf{b})$$

можно проверить непосредственным перемножением. Действительно, для любых циклических чисел $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_m$ обозначим $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}$, т.е.

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 + a_{m-1} b_1 + a_{m-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{m-2} + a_1 b_{m-1},\\
c_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_{m-1} b_2 + \ldots + a_3 b_{m-2} + a_2 b_{m-1},\\
c_2 &= a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 + \ldots + a_4 b_{m-2} + a_3 b_{m-1}, \quad \ldots,\\
c_{m-2} &= a_{m-2} b_0 + a_{m-3} b_1 + a_{m-4} b_2 + \ldots + a_0 b_{m-2} + a_{m-1} b_{m-1},\\
c_{m-1} &= a_{m-1} b_0 + a_{m-2} b_1 + a_{m-3} b_2 + \ldots + a_1 b_{m-2} + a_0 b_{m-1}.
\end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\Delta_m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_0 & c_{m-1} & c_{m-2} & \ldots & c_1\\ c_1 & c_0 & c_{m-1} & \ldots & c_2\\ c_2 & c_1 & c_0 & \ldots & c_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_{m-1} & c_{m-2} & c_{m-3} & \ldots & c_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} a_0 b_0 + a_{m-1} b_1 + a_{m-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{m-2} + a_1 b_{m-1}\\ a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_{m-1} b_2 + \ldots + a_3 b_{m-2} + a_2 b_{m-1}\\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 + \ldots + a_4 b_{m-2} + a_3 b_{m-1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m-1} b_0 + a_{m-2} b_1 + a_{m-3} b_2 + \ldots + a_1 b_{m-2} + a_0 b_{m-1} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} a_{m-1} b_0 + a_{m-2} b_1 + a_{m-3} b_2 + \ldots + a_1 b_{m-2} + a_0 b_{m-1}\\ a_0 b_0 + a_{m-1} b_1 + a_{m-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{m-2} + a_1 b_{m-1}\\ a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_{m-1} b_2 + \ldots + a_3 b_{m-1} + a_2 b_{m-1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m-2} b_0 + a_{m-3} b_1 + a_{m-4} b_2 + \ldots + a_0 b_{m-2} + a_{m-1} b_{m-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a_{m-2} b_0 + a_{m-3} b_1 + a_{m-4} b_2 + \ldots + a_0 b_{m-2} + a_{m-1} b_{m-1} & \ldots\\ a_{m-1} b_0 + a_{m-2} b_1 + a_{m-3} b_2 + \ldots + a_1 b_{m-2} + a_0 b_{m-1} & \ldots\\ a_0 b_0 + a_{m-1} b_1 + a_{m-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{m-1} + a_1 b_{m-1} & \ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\\ a_{m-3} b_0 + a_{m-4} b_1 + a_{m-5} b_2 + \ldots + a_{m-1} b_{m-1} + a_{m-2} b_{m-1} & \ldots \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_{m-1} b_2 + \ldots + a_3 b_{m-2} + a_2 b_{m-1}\\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 + \ldots + a_4 b_{m-2} + a_3 b_{m-1}\\ a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_5 b_{m-1} + a_4 b_{m-1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_0 b_0 + a_{m-1} b_1 + a_{m-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{m-1} + a_1 b_{m-1} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_1\\ a_1 & a_0 & a_{m-1} & \ldots & a_2\\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & a_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \ldots & a_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_1\\ b_1 & b_0 & b_{m-1} & \ldots & b_2\\ b_2 & b_1 & b_0 & \ldots & b_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \ldots & b_0 \end{vmatrix} = \Delta_m(\mathbf{a})\Delta_m(\mathbf{b})$$

Таким образом, каждая детерминантная алгебра на своём линейном пространстве порождает некоторую геометрию, в которой роль фундаментальной формы играет левый (правый) детерминант текущего элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{A}_n$, а движениями будут линейные преобразования пространства алгебры, порождаемые линейными алгебраическими функциями $\mathbf{x}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$, при условии, что

$$\Delta_L(\mathbf{a}) = \Delta_L(\mathbf{b}) = 1 \quad (\text{или } \Delta_R(\mathbf{a}) = \Delta_R(\mathbf{b}) = 1).$$

Чтобы найти преобразование, сохраняющее форму $\Delta_m(\mathbf{x})$, рассмотрим экспоненту от элемента $\xi_1\mathbf{e} + \xi_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \xi_{m-1}\mathbf{e}^{m-1}$. Как показал М. П. Бурлаков [1], для

$$\Delta_m(\exp(\xi\mathbf{e})) = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{(\xi e)^n}{n!} = E_0^m(\xi) + \mathbf{e}E_1^m(\xi) + \mathbf{e}^2 E_2^m(\xi) + \ldots + \mathbf{e}^m E_m^m(\xi)$$

справедливо тождество:

$$\Delta_m(\exp(\xi\mathbf{e})) = \begin{vmatrix} E_0^m(\xi) & E_{m-1}^m(\xi) & E_{m-2}^m(\xi) & \ldots & E_1^m(\xi) \\ E_1^m(\xi) & E_0^m(\xi) & E_{m-1}^m(\xi) & \ldots & E_2^m(\xi) \\ E_2^m(\xi) & E_1^m(\xi) & E_0^m(\xi) & \ldots & E_3^m(\xi) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{m-1}^m(\xi) & E_{m-2}^m(\xi) & E_{m-3}^m(\xi) & \ldots & E_0^m(\xi) \end{vmatrix} = 1,$$

то есть

$$\Delta_m(\exp(\xi_1\mathbf{e} + \xi_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \xi_{m-1}\mathbf{e}^{m-1})) = 1, \tag{3}$$

и потому линейные преобразования

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \exp(\xi_1\mathbf{e} + \xi_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \xi_{m-1}\mathbf{e}^{m-1}) \tag{4}$$

сохраняют фундаментальную форму, т.е. $\Delta_m(\mathbf{x}') = \Delta_m(\mathbf{x})$.

Очевидно, величина

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt[m]{\Delta_m(\mathbf{x})} \tag{5}$$

инвариантна относительно преобразований (4). Её можно принять за *линейную меру* вектора $\mathbf{x}$, аналогичную длине вектора в евклидовой и псевдоевклидовой геометрии. Эту величину естественно назвать *циклической длиной* вектора $\mathbf{x}$, и при $m = 2$ она совпадает с псевдоевклидовой длиной.

Что касается угловой меры для пар векторов, то для того, чтобы её определить, надо рассмотреть аналог сферы в евклидовом пространстве. Гиперповерхность (в центроаффинном пространстве) с уравнением

$$\Delta_m(\mathbf{x}) \equiv \prod_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \alpha_m^{nk} x_n \right) = r^m$$

называется *циклическим сфероидом* радиуса r, и если $r = 0$, то сфероид будет называться *изотропным.*

Из (2) видно, что изотропный сфероид представляет собой некоторое объединение изотропных гиперплоскостей, назовём их *перегородками*, и изотропных плоскостей размерности $m - 2$, их будем назвать туннелями [2]. При этом перегородки делят пространство циклической алгебры на области, где детерминант вектора сохраняет свой знак. Количество перегородок и туннелей зависит от размерности циклических пространств. Пространства размерности $m = 2n + 1$ имеют одну перегородку и n туннелей; а пространства размерности $m = 2n$ имеют по две перегородки и $n - 1$ туннелей.

Например, при $m = 2$ будем иметь псевдоевклидову плоскость, для которой

$$\Delta_2(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2,$$

т.е. изотропный сфероид (псевдоевклидова окружность нулевого радиуса) представляет собой две пересекающиеся линии с уравнениями $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$, это и есть перегородки, которые всю псевдоевклидову плоскость делят на четыре квадранта. Туннелем будет нульмерная точка начала координат.

В случае $m = 3$

$$\Delta_3(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2 = (x_0 + x_1 + x_2)\frac{(x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_0)^2}{2},$$

поэтому в трёхмерном циклическом пространстве существует одна перегородка — плоскость с уравнением $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ и один туннель — прямая с уравнением $x_0 = x_1 = x_2$ и т. д.

Обозначим $\mathbb{R}_0(\mathbb{Z}_m)$ ту часть пространства циклической алгебры, в которой находится единица и детерминант сохраняет свой знак. Тогда любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0(\mathbb{Z}_m)$ можно *однозначно* записать так:

$$\mathbf{x} = \sqrt[m]{\Delta(\mathbf{x})}\exp(\xi_1\mathbf{e} + \xi_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \xi_{m-1}\mathbf{e}^{m-1}). \tag{6}$$

Такая запись векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0(\mathbb{Z}_m)$ аналогична *тригонометрической* записи комплексных чисел, и она даёт основание для определения *циклического угла* между векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_0(\mathbb{Z}_m)$: если

$$\mathbf{x} = \sqrt[m]{\Delta(\mathbf{x})}\exp(\xi_1\mathbf{e} + \xi_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \xi_{m-1}\mathbf{e}^{m-1}) \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \sqrt[m]{\Delta(\mathbf{y})}\exp(\eta_1\mathbf{e} + \eta_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \eta_{m-1}\mathbf{e}^{m-1}),$$

то в качестве циклического угла $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ берётся элемент

$$\eta - \xi \equiv (\eta_1 - \xi_1)\mathbf{e} + (\eta_2 - \xi_2)\mathbf{e}^2 + \ldots + (\eta_{m-1} - \xi_{m-1})\mathbf{e}^{m-1}. \tag{7}$$

Таким образом, движения циклических пространств, задаваемые линейными функциями

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \exp(\xi_1\mathbf{e} + \xi_2\mathbf{e}^2 + \ldots + \xi_{m-1}\mathbf{e}^{m-1}),$$

представляют собой *циклические повороты* на циклический угол ϕ.

Циклические углы можно определить в любых областях, на которые перегородки делят циклическое пространство, умножая векторы этих областей на базисные элементы алгебры.

Вещественные циклические алгебры $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ можно рассматривать как подалгебры комплексных циклических алгебр $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$. При этом формулы (2) и (3) остаются справедливыми и для комплексных циклических алгебр. Алгебра $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ помимо подалгебры $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ содержит ещё одну вещественную подалгебру $\widetilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m) \subset \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, порождённую элементом $\mathbf{i} = \alpha_{2m}\mathbf{e}$, где

$$\alpha_{2m} = \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{m}\right),$$

так что $\mathbf{i}^m = -1$. Алгебру $\widetilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ называют *антициклической*, и для неё естественно справедливы тождества (2) и (3). Поэтому на линейном пространстве алгебры $\widetilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ можно ввести геометрию, аналогичную циклической геометрии. При этом в такой *антициклической* геометрии длины и углы определяются по тем же формулам (5) и (7), как и в циклической геометрии.

Как показала Л. Б. Выжгина, для алгебр $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ и $\widetilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ имеют место следующие изоморфизмы (см. [3]):

$$\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}}_{k-1}, & \text{при } m = 2k, \\ \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}}_{k}, & \text{при } m = 2k+1; \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m) = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}}_{k}, & \text{при } m = 2k, \\ \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}}_{k}, & \text{при } m = 2k+1. \end{cases}$$

Поэтому имеет смысл отдельно от циклических геометрий рассматривать лишь чётномерные антициклические геометрии.

Как видно из (2), в антициклических алгебрах чётной размерности всегда $\Delta_{2n}(\mathbf{x}) \geqslant 0$, и потому в таких алгебрах нет перегородок, а «тригонометрическая» форма записи (6) в них едина сразу для всех неизотропных векторов.

Однако в этих пространствах имеется n туннелей, образующих изотропный сфероид. Например, в случае, когда $n = 1$, имеем евклидову плоскость с $\Delta_2(\mathbf{x}) = x_0^2 + x_1^2$, на которой нет ни перегородок, ни туннелей.

Если же $n = 2$ и $\mathbf{x} = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{i}^2 + x_3\mathbf{i}^3 = x_0 + x_1\alpha_8\mathbf{e} + x_2\alpha_8^2\mathbf{e}^2 + x_3\alpha_8^3\mathbf{e}^3$, а

$$\alpha_8 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \alpha_8\mathbf{e},$$

и тогда

$$\Delta_4(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & \alpha_8^3 x_3 & \alpha_8^2 x_2 & \alpha_8 x_1 \\ \alpha_8 x_1 & x_0 & \alpha_8^3 x_3 & \alpha_8^2 x_2 \\ \alpha_8^2 x_2 & \alpha_8 x_1 & x_0 & \alpha_8^3 x_3 \\ \alpha_8^3 x_3 & \alpha_8^2 x_2 & \alpha_8 x_1 & x_0 \end{vmatrix} =$$
$$= \Big(x_0 + \alpha_8 x_1 + \alpha_8^2 x_2 + \alpha_8^3 x_3\Big)\Big(x_0 + \alpha_4\alpha_8 x_1 + \alpha_4^2\alpha_8^2 x_2 + \alpha_4^3\alpha_8^3 x_3\Big)\times$$
$$\times\Big(x_0 + \alpha_4^2\alpha_8 x_1 + \alpha_4^4\alpha_8^2 x_2 + \alpha_4^6\alpha_8^3 x_3\Big)\Big(x_0 + \alpha_4^3\alpha_8 x_1 + \alpha_4^6\alpha_8^2 x_2 + \alpha_4^9\alpha_8^3 x_3\Big) =$$
$$= \Big(x_0 + \alpha_8 x_1 + \alpha_8^2 x_2 + \alpha_8^3 x_3\Big)\Big(x_0 + i\alpha_8 x_1 - \alpha_8^2 x_2 - i\alpha_8^3 x_3\Big)\times$$
$$\times\Big(x_0 - \alpha_8 x_1 + \alpha_8^2 x_2 - \alpha_8^3 x_3\Big)\Big(x_0 - i\alpha_8 x_1 - \alpha_8^2 x_2 + i\alpha_8^3 x_3\Big) =$$
$$= \Big((x_0 + \alpha_8^2 x_2)^2 - (\alpha_8 x + 1 + \alpha_8^2 x_3)^2\Big)\times$$
$$\times\Big(\big(x_0 - \alpha_8^2 x_2\big) + i\big(\alpha_8 x_1 - \alpha_8^3 x_3\big)\Big)\Big(\big(x_0 - \alpha_8^2 x_2\big) - i\big(\alpha_8 x_1 - \alpha_8^3 x_3\big)\Big) =$$
$$= \Big(\big(x_0 + \alpha_8^2 x_2\big)^2 - \big(\alpha_8 x_1 + \alpha_8^3 x_3\big)^2\Big)\Big(\big(x_0 - \alpha_8^2 x_2\big)^2 + \big(\alpha_8 x_1 - \alpha_8^3 x_3\big)^2\Big) =$$
$$= \Big((x_0 + ix_2)^2 - i(x_1 + ix_3)^2\Big)\Big((x_0 - ix_2)^2 + i(x_1 - ix_3)^2\Big) =$$
$$= \Big(x_0^2 - x_2^2 + 2ix_0x_2 - ix_1^2 + ix_3^2 + 2x_1x_3\Big)\Big(x_0^2 - x_2^2 - 2ix_0x_2 + ix_1^2 - ix_3^2 + 2x_1x_3\Big) =$$
$$= \Big((x_0^2 - x_2^2 + 2x_1x_3) - i(x_1^2 - x_3^2 - 2x_0x_2)\Big)\Big((x_0^2 - x_2^2 + 2x_1x_3) + i(x_1^2 - x_3^2 - 2x_0x_2)\Big) =$$
$$= (x_0^2 - x_2^2 + 2x_1x_3)^2 + (x_1^2 - x_3^2 - 2x_0x_2)^2,$$

здесь было учтено, что $\alpha_8^2 = i$.

Найдем туннели. Имеем

$$\Delta_4(\mathbf{x}) = ((x_0 + ix_2)^2 - i(x_1 + ix_3)^2)((x_0 - ix_2)^2 + i(x_1 - ix_3)^2) = 0,$$

но

$$((x_0 - ix_2)^2 + i(x_1 - ix_3)^2) = \overline{((x_0 + ix_2)^2 - i(x_1 + ix_3)^2)},$$

поэтому

$$\Delta_4(\mathbf{x}) = 0 \leftrightarrow ((x_0 + ix_2)^2 - i(x_1 + ix_3)^2) = 0,$$
$$(x_0 + ix_2)^2 - i(x_1 + ix_3)^2 = (x_0 + ix_2)^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 (x_1 + ix_3)^2 = 0,$$

или

$$\left[\begin{aligned} &(x_0 + ix_2) - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)(x_1 + ix_3) = 0, \\ &(x_0 + ix_2) + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)(x_1 + ix_3) = 0, \end{aligned}\right.$$

или

$$\left[\begin{aligned} &\sqrt{2}(x_0 + ix_2) - (1+i)(x_1 + ix_3) = 0, \\ &\sqrt{2}(x_0 + ix_2) + (1+i)(x_1 + ix_3) = 0, \end{aligned}\right.$$

то есть

$$(1+i)(x_1 + x_3) = (x_1 - x_3) + i(x_1 + x_3),$$

поэтому

$$\left[\begin{aligned} &\sqrt{2}x_0 + i\sqrt{2}x_2 - (x_1 - x_3) - i(x_1 + x_3) = 0, \\ &\sqrt{2}x_0 + i\sqrt{2}x_2 + (x_1 - x_3) + i(x_1 + x_3) = 0, \end{aligned}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{2}x_0-(x_1-x_3)=0,\\ \sqrt{2}x_0-(x_1+x_3)=0,\end{cases}\\[2ex] \begin{cases}\sqrt{2}x_0+(x_1-x_3)=0,\\ \sqrt{2}x_0+(x_1+x_3)=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отсюда видно, что в четырёхмерном антициклическом пространстве имеется два двумерных туннеля с уравнениями

$$\begin{cases}\sqrt{2}x_0-(x_1-x_3)=0,\\ \sqrt{2}x_2-(x_1+x_3)=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt{2}x_0+(x_1-x_3)=0,\\ \sqrt{2}x_2+(x_1+x_3)=0.\end{cases}$$

Циклические и антициклические геометрии можно считать обобщением евклидовой и псевдоевклидовой планиметрий, так как эти планиметрии реализуются на алгебрах двойных вещественных чисел и комплексных чисел, представляющих простейшие циклическую и антициклическую алгебры. Поэтому естественно, что в циклических и антициклических пространствах можно определить длину и угол, аналогично тому, как это происходит на псевдоевклидовой и евклидовой плоскости. Однако циклические и антициклические пространства, размерность которых больше двух, от евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей отличаются тем, что в этих пространствах возникают любопытные геометрии на сфероидах, а также на некоторых других поверхностях, например, на гиперплоскостях

$$x_0+x_1+\ldots+x_n=1 \quad \text{или} \quad x_0-x_1+\ldots+(-1)^n x_n=1.$$

Кроме геометрии вещественных циклических и антициклических пространств, можно рассматривать и геометрию на комплексных циклических алгебрах $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$. В этом случае фундаментальной формой на вещественном $2m$-мерном пространстве будет модуль детерминанта текущего элемента, который очевидно обладает *свойством мультипликативности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. Элементарный очерк. — М.: Граф Пресс, 2017.
2. *Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И.* Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Изд-во «Ким», 2020.
3. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Гамильтоновы алгебры. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985.
4. *Гарасько Г. И.* Начала финслеровой геометрии для физиков. — М.: ТЕТРА, 2009.
5. *Гусева Н. И., Бурлаков М. П., Бурлаков И. М.* Элементарная геометрия в пространствах над алгебрами. — М.: Интеллект-Центр, 2017.
6. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»)// в кн.: Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей (*Норден А. П.*, ред.). — М.: ГИТТЛ, 1950.
7. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Лань, 2010.
8. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии// в кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации (*Куранский Е.*, ред.). — М.: Мир, 1979. — С. 18–33.

Гусева Надежда Ивановна
Московский педагогический государственный университет,
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: `ngus12@mail.ru`