



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 69–78
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-69-78

УДК 514.13

ЗАДАЧА О ТЕНИ И ИЗОМЕТРИЧЕСКОЕ ВЛОЖЕНИЕ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2023 г. А. В. КОСТИН

Аннотация. Задача о тени для оришаров оказывается некоторым образом связанной с задачей глобального изометрического вложения поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны в трехмерное евклидово пространство. Евклидовы поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны глобально изометричны частям касательных конусов к орисферам в трехмерном пространстве Лобачевского. В работе меридианы евклидовых псевдосферических поверхностей вращения выражаются через метрические характеристики в гиперболическом пространстве, а именно через расстояние от вершины касательного конуса до орисферы или через расстояние от полюса вершины до орисферы.

Ключевые слова: задача о тени, поверхность постоянной кривизны, псевдосфера, орисфера, пространство Лобачевского.

SHADOW PROBLEM AND ISOMETRIC EMBEDDINGS OF PSEUDOSPHERICAL SURFACES

© 2023 А. V. KOSTIN

ABSTRACT. The shadow problem for horospheres is related to the problem of global isometric embedding of surfaces of revolution of constant negative curvature into the three-dimensional Euclidean space. Euclidean surfaces of revolution of constant negative curvature are globally isometric to parts of tangent cones of horospheres in the three-dimensional Lobachevsky space. In this work, meridians of Euclidean pseudospherical surfaces of revolution are expressed in terms of metric characteristics in the hyperbolic space, namely, in terms of the distance from the vertex of the tangent cone to the horosphere or through the distance from the polar of the vertex to the horosphere.

Keywords and phrases: shadow problem, surface of constant curvature, pseudosphere, horosphere, Lobachevsky space.

AMS Subject Classification: 53A35, 53B30

1. Введение. Задача о тени была поставлена Г. Худайбергановым в 1982 г. в следующей формулировке (см. [8]): какое минимальное число шаров с центрами на сфере n -мерного евклидова пространства и радиусами, меньшими радиуса сферы, достаточно для того, чтобы каждая прямая, проходящая через центр сферы, пересекалась хотя бы с одним из этих шаров?

В двумерном случае Г. Худайберганов доказал, что для решения задачи достаточно двух кругов. В [8] также было высказано предположение, что в n -мерном случае «для создания тени в центре сферы» будет достаточно n шаров. Это предположение оказалось ошибочным. В 2015 г. в [1] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская и М. В. Стефанчук решили задачу о тени в постановке Худайберганова в n -мерном случае. Они доказали, что в n -мерном евклидовом пространстве

Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета.

при $n > 2$ минимальное число шаров с центрами на евклидовой сфере и радиусами, меньшими радиуса сферы, обеспечивающих создание тени в центре сферы, равно $n + 1$. Идея доказательства существования набора из $n + 1$ шаров, обеспечивающего создание тени, следующая. В сферу вписывается правильный симплекс и рассматриваются шары с центрами в его вершинах и радиусами, равными половине ребра. Замкнутые шары создают тень в центре сферы, но имеют общие точки касания. После этого берётся достаточно малое ε . Пусть a — длина ребра. Заменяем радиусы шаров на $a/2 + \varepsilon$, $a/2 - \varepsilon/2$, ..., $a/2 - \varepsilon/2^n$, и добьёмся, чтобы шары снова касались друг друга. Исходный правильный симплекс немного деформируется и перейдёт в симплекс с вершинами, близкими к исходному. Конфигурация шаров с разными радиусами обеспечит создание тени в центре сферы, описанной около нового симплекса. Решение задачи о тени в n -мерном случае описано также в обзорной статье Ю. Б. Зелинского, И. Ю. Выговской и К. Х. Дакхила [2]. Там же описано решение ряда смежных задач, полученное к тому времени, и поставлено несколько новых.

Задача о тени является частным случаем задачи о нахождении минимальных условий, обеспечивающих принадлежность точки обобщенно-выпуклой оболочке семейства множеств. Соответствующие определения приведем с учетом того, что пространство, в котором будут рассматриваться все фигурирующие множества, заменим на гиперболическое. В пространстве Лобачевского кроме сфер есть еще два типа их аналогов, имеющие группы симметрий той же размерности. Это эквидистантные поверхности и орисферы. Внутренняя геометрия эквидистантных поверхностей гиперболическая, орисфер — евклидова. Рассмотрение конфигураций ограниченных ими областей является первым естественным обобщением задачи о тени в случае гиперболического пространства.

Под n -мерным гиперболическим пространством H^n , или n -мерным пространством Лобачевского, в работе всюду понимается пространство, глобально изометричное полусфере мнимого радиуса $n + 1$ -мерного псевдоевклидова пространства с метрикой

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2.$$

Определение 1. Множество U из n -мерного пространства Лобачевского H^n называется m -выпуклым относительно произвольной фиксированной точки $M \in H^n \setminus U$, если существует m -мерная плоскость, проходящая через точку M и не имеющая с множеством U общих точек.

Пересечение любого семейства множеств пространства Лобачевского, m -выпуклых относительно некоторой точки M , является m -выпуклым относительно этой точки M .

Определение 2. Множество $U \in H^n$, m -выпуклое относительно каждой не принадлежащей этому множеству точки, называется m -выпуклым.

Это определение также удовлетворяет аксиоме выпуклости: пересечение m -выпуклых множеств само является m -выпуклым.

Определение 3. Минимальное m -выпуклое множество, содержащее множество $U \in H^n$, называется m -выпуклой оболочкой множества U .

Понятие m -полувыпуклости является обобщением рассматриваемого понятия m -выпуклости.

Определение 4. Множество U , принадлежащее n -мерному пространству Лобачевского H^n , называется m -полувыпуклым относительно некоторой точки $M \in H^n \setminus U$, если существует m -мерная полуплоскость, содержащая точку M , и не имеющая с множеством U общих точек.

Определение 5. Эквидистантой гиперплоскости n -мерного пространства Лобачевского называется множество точек этого пространства, удаленных на фиксированное расстояние h от гиперплоскости. Это расстояние h называют высотой эквидистанты, а саму гиперплоскость называют базой эквидистанты.

«Евклидово» доказательство Зелинского и соавторов для $n + 1$ шара остаётся в силе и для шаров в n -мерном пространстве Лобачевского. Метрические характеристики для такой конфигурации в гиперболическом пространстве приведены в работе [12].

Фактически эта же идея остаётся в силе, если в пространстве Лобачевского вместо шаров рассматривать «эквишары», т.е. области, ограниченные эквидистантами гиперплоскостей n -мерного пространства Лобачевского. Центры «эквишаров» будут находиться в идеальной области расширенного пространства Лобачевского. Радиус сферы с центром в собственной точке O расширенного пространства Лобачевского в этом случае будет выражаться комплексным числом. Радиусы шаров тоже будут комплексными. Если оставаться в рамках метрической геометрии, вместо комплексных радиусов шаров можно рассматривать расстояния от точки O до полюс центров шаров. В качестве «эквишаров» можно рассматривать либо области, ограниченные двумя полостями эквидистанты гиперплоскости, либо области, ограниченные ближней к центру O полостью эквидистанты и гиперплоскостью, являющейся базой эквидистанты. Высоты эквидистант в конфигурации, создающей тень, различны.

2. Задача о тени для оришаров.

Определение 6. Орисферой (или гиперорисферой) и n -мерного пространства Лобачевского называется гиперповерхность этого пространства, ортогонально пересекающая (гипер)связку параллельных прямых этого пространства. Центр (гипер)связки называют несобственным центром орисферы. Область, ограниченную орисферой, называют оришаром. Прямые связки параллелей называют осями орисферы. Иначе орисферу можно определить как (гипер)поверхность уровня функции Буземана по лучу на ее оси, а оришар как множество подуровня функции Буземана.

При доказательстве достаточности $n + 1$ оришара для принадлежности некоторой точки их 1-выпуклой оболочке рассуждения, аналогичные рассуждениям для шаров и «эквишаров» не проходят. Покажем это. Рассмотрим семейство из $n + 1$ касающегося оришара с несобственными центрами в бесконечно удаленных вершинах правильного симплекса. Такой симплекс можно получить предельным переходом из правильного симплекса, устремляя длину ребра к бесконечности. При этом равные касающиеся шары с центрами в вершинах симплекса перейдут в оришары. Любая прямая, проходящая через центр симплекса, будет пересекаться хотя бы с одним из замкнутых оришаров. Но, в отличие от исходной постановки задачи, оришары в этой конфигурации будут касаться друг друга. Если по аналогии с решением задачи для шаров чуть деформировать конфигурацию, сместив бесконечно удаленные вершины симплекса, то в общем случае при $n > 2$ получим не изометричный симплекс. Но если далее добиться, чтобы оришары снова стали касаться, то симплекс с вершинами в несобственных центрах оришаров снова превратится в правильный, т.е. в симплекс с той же группой симметрий, что и обычный правильный симплекс с вершинами в собственной области пространства Лобачевского. Особенно наглядно это представляется в модели Пуанкаре в полупространстве. Положим кривизну пространства Лобачевского равной -1 . В модели Пуанкаре в евклидовом полупространстве метрика гиперболического пространства примет вид:

$$ds^2 = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2. \quad (1)$$

Орисферы максимальной размерности в модели пространства Лобачевского с метрикой (2) изображаются евклидовыми гиперплоскостями, параллельными гиперплоскости $x_n = 0$ и евклидовыми гиперсферами, касающимися этой гиперплоскости. Если одна из орисфер, ограничивающих оришары, в этой модели изображается (гипер)плоскостью $z = c = \text{const}$, то остальные касающиеся ее орисферы будут изображаться равными попарно касающимися евклидовыми сферами с центрами в плоскости $z = c/2$. Поэтому несобственные центры их «соберутся» в вершины правильного симплекса. Это обусловлено тем, что все орисферы пространства Лобачевского глобально изометричны между собой.

«Освещающая» точка в дальнейшем будет обозначаться через M . В двумерном случае легко доказывается, что двух непересекающихся открытых или замкнутых орикругов достаточно для того, чтобы выбранная точка плоскости Лобачевского принадлежала их 1-выпуклой оболочке. Можно просто через выбранную точку провести две неортогональные прямые, и в пару образованных ими смежных углов вписать по орикругу. Затем в случае открытых орикругов один из

них чуть приблизить к точке пересечения прямых. Аналогично доказывается, что трех открытых или замкнутых непересекающихся орикругов достаточно, чтобы выбранная точка M принадлежала их 1-полувыпуклой оболочке, т.е. чтобы каждый луч с началом в точке M пересекался хотя бы с одним из орикругов. Если потребовать, чтобы орикруги находились на равном (ненулевом) расстоянии от выбранной точки M , то минимальное число орикругов, обеспечивающих принадлежность точки M их 1-выпуклой оболочке, будет равно трем. Нетрудно доказать, что в случае равной удаленности никакого конечного числа непересекающихся орикругов недостаточно для принадлежности точки M их 1-полувыпуклой оболочке.

Если оришары в H^3 могут касаться, то четырех оришаров, удаленных от точки M на одно и то же расстояние, достаточно для принадлежности точки M их 1-выпуклой оболочке. Если же оришары не имеют общих точек, то, опираясь на результаты статьи [3], для трехмерного случая можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Никакого конечного числа непересекающихся оришаров, находящихся от выбранной точки M трехмерного пространства Лобачевского H^3 на равном расстоянии, недостаточно для того, чтобы точка M принадлежала их 1-выпуклой (тем более, 1-полувыпуклой) оболочке.*

Доказательство. Возьмем n -мерное пространство Лобачевского кривизны $K = -1$ в модели Пуанкаре в евклидовом единичном шаре

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1. \quad (2)$$

Метрика гиперболического пространства в этой модели имеет следующий вид:

$$ds^2 = \left(4 \sum_{i=1}^n dx_i^2 \right) / \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2. \quad (3)$$

Точку M поместим в центр абсолюта, задаваемого уравнением

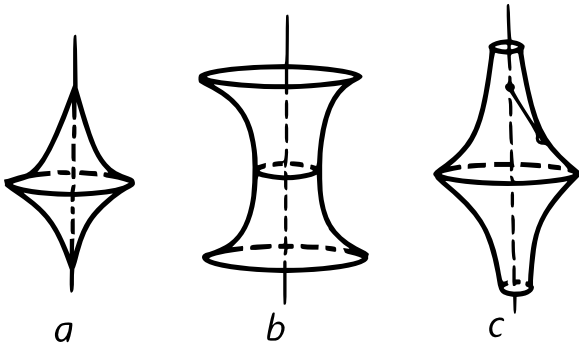
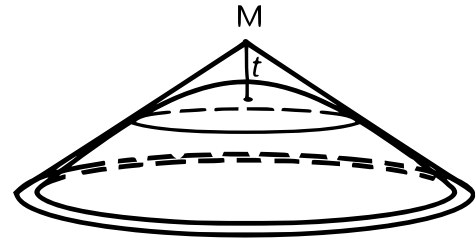
$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

Оришары пространства Лобачевского в этой модели изображаются евклидовыми шарами, касающимися абсолюта. Отсюда следует, что задача исследования принадлежности одной выбранной точки пространства Лобачевского 1-выпуклой оболочке семейства оришаров может быть переформулирована в евклидовых терминах: какого числа непересекающихся шаров, касающихся внутренним образом сферы с центром в точке M евклидова пространства и не содержащих точку M , достаточно для того, чтобы точка M принадлежала их 1-выпуклой оболочке. Равные шары при этом будут играть роль равноудаленных от точки M оришаров в модели Пуанкаре в шаре. Оришары пространства Лобачевского, удаленные от точки M на равные расстояния d , будут изображаться евклидовыми шарами, удаленными от точки M на евклидовы расстояния

$$\frac{e^d}{e^d + 1}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что евклидовы радиусы этих шаров будут равны $1/(e^d + 1)$. В [3] доказано, что никакого конечного числа равных шаров, не содержащих центр евклидовой сферы и имеющих центры на этой сфере, недостаточно для того, чтобы центр сферы принадлежал их 1-выпуклой оболочке. Отсюда следует, что и никакого числа оришаров, удаленных от фиксированной точки пространства Лобачевского на ненулевые равные расстояния, недостаточно для принадлежности этой точки их 1-выпуклой оболочке. $\square$

Если же расстояния от точки M могут быть различными, то для принадлежности этой точки $M \in H^3$ 1-выпуклой оболочке непересекающихся открытых или замкнутых оришаров, не содержащих эту точку, достаточно четырех оришаров. Необходимость в настоящее время является открытым вопросом. В работе [13] приведены конфигурации из девяти одновременно открытых или одновременно замкнутых непересекающихся оришаров, обеспечивающих принадлежность

Рис. 1. Поверхности Миндинга в E^3 .Рис. 2. Вложение конической псевдосферической поверхности в H^3 .

выбранной точки их 1-полувыпуклой оболочке. Там же приведена конфигурация из трех замкнутых и пяти открытых оришаров, обеспечивающих принадлежность выбранной точки их 1-полувыпуклой оболочке. Точная оценка минимального числа оришаров, обеспечивающих принадлежность точки их 1-полувыпуклой оболочке, тоже является открытой проблемой.

Поверхности вращения постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве, речь о которых пойдет ниже, найдены Ф. Миндингом [15–17] (см. также [11]). Вид их изображен на рис. 1. Сегмент поверхности a после разреза по меридиану отображается на круговой сектор, сегмент поверхности b — на эквидистантный сектор, сегмент поверхности c — на орициклический сектор. Необходимые для чтения статьи сведения из геометрии Лобачевского можно найти в [7].

3. Основные результаты. С задачей о тени для оришаров косвенно оказывается связанной задача изометрического вложения поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны в евклидово пространство. Для общности картины «освещающую» точку M нужно помещать в разные области расширенного трехмерного гиперболического пространства. Ф. Миндингом найдены три типа поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны. Все эти поверхности Э. Бельтрами назвал псевдосферическими.

Каждая псевдосферическая поверхность вращения глобально изометрична касательному конусу к орисфере в трехмерном пространстве Лобачевского. В работе найдены выражения для меридианов поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны через расстояния от вершины касательного конуса до орисферы, либо через расстояние от полярной вершины, если вершина конуса находится в идеальной области расширенного трехмерного пространства Лобачевского, до орисферы. Глобальная изометричность касательного конуса доказывается для случая расположения вершины на бесконечности. Для двух других случаев доказательство может быть проведено аналогично.

4. Коническая псевдосферическая поверхность вращения и касательный конус с вершиной в собственной области трехмерного пространства Лобачевского.

Теорема 2. Пусть ω — некоторая фиксированная орисфера в трехмерном пространстве Лобачевского H^3 кривизны $K = -1$, а точка M не принадлежит оришару, ограниченному орисферой ω . Пусть конус с вершиной в точке M касается орисферы ω по линии γ . Тогда если расстояние от точки M до орисферы ω равно t (см. рис. 1), то часть касательного конуса от точки M до линии γ глобально изометрична евклидовой поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны, меридиан которой в декартовых координатах x, y, z задается следующим образом:

$$z = \int \sqrt{\frac{e^{2t}(1-x^2)-1}{x^2e^{2t}+1}} dx, \quad y = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Меридиан евклидовой конической поверхности вращения постоянной кривизны $K = -1$ задается соотношениями

$$z = \int \sqrt{\frac{(1-b^2)-x^2}{x^2+b^2}} dx, \quad y = 0, \quad b > 0. \quad (6)$$

Элементарными средствами определяется, что радиус максимальной параллели поверхности равен $\sqrt{1-b^2}$. Длина этой параллели $2\pi\sqrt{1-b^2}$.

Трехмерное пространство Лобачевского рассмотрим в модели Пуанкаре в евклидовом пространстве. Метрика гиперболического пространства в этой модели в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}. \quad (7)$$

Зададим орисферу ω уравнением $x_3 = 1$. У точек, не принадлежащих оришару с границей ω , координата x_3 будет меньше единицы. Пусть вершина касательного конуса к орисфере ω лежит в плоскости $x_2 = 0$. Зададим одну из образующих конуса в этой плоскости следующим образом:

$$x_1 = \cos(u), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sin(u). \quad (8)$$

Пусть вершина M конуса в (8) соответствует значению параметра $u = u_0$, где $u_0 \in (0, \pi/2)$. Тогда, учитывая, что расстояние от вершины до орисферы ω равно t , имеем:

$$\int_{\sin(u_0)}^1 \frac{dx_3}{x_3} = t.$$

Отсюда $t = -\ln(\sin(u_0))$. Хорошо известно, что внутренняя геометрия орисфер пространства Лобачевского является евклидовой. В модели Пуанкаре это проверяется элементарным образом, при помощи ограничения метрики (7) на поверхность ω : $x_3 = 0$. Отсюда $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. Используя евклидовость внутренней геометрии орисферы, получаем, что лучи с началом в точке M на орисфере ω освещают круг радиуса $\cos(u_0)$. Из равенств $\sqrt{1-b^2} = \cos(u_0)$ и $t = -\ln(\sin(u_0))$ получим $b = e^{-2t}$. Подставив отсюда b в (6), получим выражение (5) меридиана евклидовой конической псевдосферической поверхности. $\square$

5. Псевдосфера Бельтрами—Миндинга и касательный конус с вершиной в бесконечно удаленной точке трехмерного пространства Лобачевского.

Теорема 3. Пусть вершина касательного конуса к орисфере находится на абсолюте трехмерного пространства Лобачевского. Тогда часть касательного конуса до линии касания глобально изометрична одной полости псевдосферы Бельтрами—Миндинга.

Доказательство. Хорошо известно, что псевдосфера Бельтрами—Миндинга кривизны $K = -1$ после разреза по меридиану отображается на орициклический сектор с длиной дуги граничного орицикла, равной 2π . Орисферу ω евклидовой инверсией с центром в точке $O(0,0,0)$ и евклидовым радиусом, равным $\sqrt{2}$, переведем в орисферу ω_1 , задаваемую уравнением

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 = 1.$$

Такая инверсия служит симметрией пространства Лобачевского относительно плоскости. Вершину касательного конуса поместим в бесконечно удаленную точку пространства. Сам касательный конус до линии касания с орисферой ω_1 можно задать следующим образом:

$$x_1 = \cos(u), \quad x_2 = \sin(u), \quad x_3 = v \geq 1. \quad (9)$$

Ограничим метрику (7) на касательный конус (9). Получим, что индуцированная метрика на конусе примет вид

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2},$$

т.е. локально совпадет с метрикой гиперболической плоскости кривизны $K = -1$. Учитывая, что $v \geq 1$ и длина линии касания конуса и орисферы ω_1 в точности равна 2π , убеждаемся, что такой

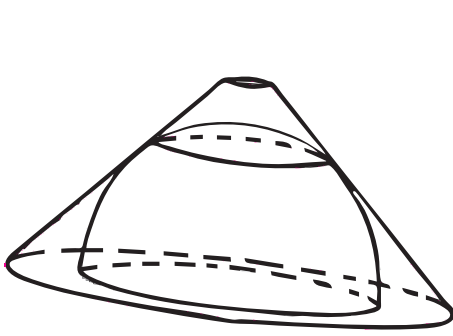
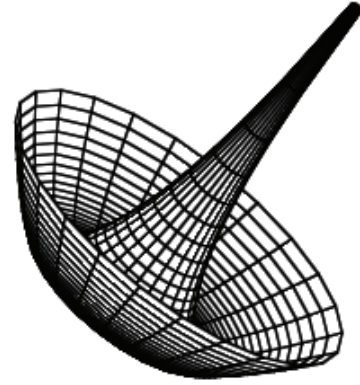
Рис. 3. Вложение псевдосферы в H^3 .

Рис. 4. «Полная» псевдосфера в плоском пространстве.

касательный конус до линии касания глобально изометричен одной полости псевдосферы Бельтрами—Миндинга. Непосредственно изоморфизм поверхности (9) на одну полость псевдосферы Бельтрами—Миндинга в евклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ можно осуществить по равенству локальных координат, параметризовав псевдосферу координатами карты Пуанкаре:

$$x_1 = \frac{1}{v} \cos(u), \quad x_2 = \frac{1}{v} \sin(u), \quad x_3 = -\sqrt{1 - \frac{1}{v^2}} + \ln \left(v \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{v^2}} \right) \right). \quad \square$$

На рис. 3 изображена абстрактная картинка сегмента орисферы и касательного конуса в H^3 . Линия касания разделяет части конуса, изометрически вкладываемые в евклидово и псевдоевклидово пространства. Касательный конус к орисфере в случае, когда вершина конуса удалена от орисферы на бесконечное расстояние, можно рассматривать как поверхность, полученную вращением прямой вокруг параллельной ей прямой. Причем изначально пару параллелей можно выбрать произвольно, так как любая пара параллельных прямых в пространстве Лобачевского движением переводится в любую другую пару параллелей. После нужно рассмотреть вращение одной из прямых вокруг другой и в полученную поверхность вписать орисферу.

Замечание 1. Часть касательного конуса, для которой $x_3 \leq 1$, глобально изометрична одному из псевдоевклидовых аналогов псевдосферы, задаваемому в пространстве с метрикой

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$$

следующим образом (см. [4]):

$$x_1 = \operatorname{ch}(u) \sin(v), \quad x_2 = \operatorname{ch}(u) \cos(v), \quad x_3 = \operatorname{sh}(u) - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(u)). \quad (10)$$

Меридиан поверхности является одним из аналогов трактрисы:

$$x_1 = \operatorname{ch}(u), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \operatorname{sh}(u) - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(u)).$$

Он обладает постоянным вещественным отрезком касательной до оси вращения Ox_3 . В этом нетрудно убедиться непосредственным подсчетом. В плоскости $x_2 = 0$ уравнение касательной в точке M_0 , определяемой параметром u_0 , будет иметь следующий вид:

$$\frac{x_1 - \operatorname{ch}(u_0)}{\operatorname{sh}(u_0)} = \frac{x_3 - \operatorname{sh}(u_0) + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(u_0))}{\operatorname{ch}(u_0) - 1/\operatorname{ch}(u_0)}. \quad (11)$$

Положив в (11) $x_1 = 0$, найдем координаты точки M_1 пересечения касательной с осью Ox_3 :

$$M_1(0, 0, \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(u_0))).$$

Отсюда получим:

$$M_0 M_1^2 = (\operatorname{ch}(u_0))^2 - (\operatorname{sh}(u_0))^2. \quad (12)$$

Из (12) следует, что длина отрезка $M_0 M_1$ в метрике $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$ будет равна единице. Как и евклидова трактриса, этот ее псевдоевклидов аналог имеет точку возврата. Кроме того, каждая ветвь этой кривой имеет изотропную асимптоту.

Введем на поверхности (10) другие локальные координаты:

$$u^1 = v, \quad u^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}(u)}.$$

Уравнения поверхности примут следующий вид:

$$x_1 = \frac{\sin(u^1)}{u^2}, \quad x_2 = \frac{\cos(u^1)}{u^2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{1 - (u^2)^2}}{u^2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - (u^2)^2}}{u^2}\right).$$

Индукцированная на поверхности метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{(u^2)^2}. \quad (13)$$

Одну полость поверхности в конформной карте Пуанкаре с координатами u^1, u^2 бесконечно-листно накрывает область $0 < u^2 \leq 1$. Накрытие строится факторизацией по действию дискретной группы Z орициклических вращений. В качестве образующей группы берется орициклическое вращение, моделируемое евклидовым параллельным переносом параллельно абсолюту на расстояние 2π . Поскольку одну полость псевдосферы Бельтрами—Миндинга кривизны $K = -1$ бесконечно-листно накрывает орикруг $u^2 > 1$, данная поверхность действительно осуществляет изометрическое вложение в плоское пространство продолжения псевдосферы Бельтрами—Миндинга. Если в трехмерном пространстве с координатами x_1, x_2, x_3 внутри цилиндра $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$ взять евклидову метрику:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

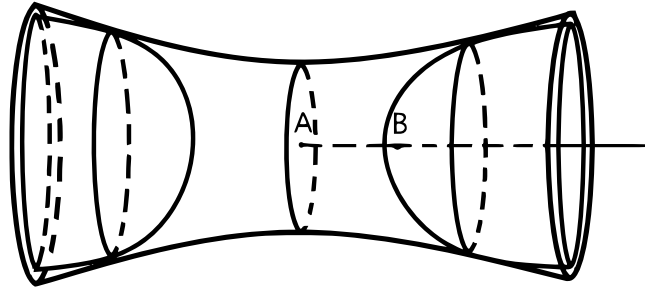
а вне его — псевдоевклидову метрику:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2,$$

то в такое пространство с кусочно-регулярной метрикой изометрически вкладывается полная псевдосфера, т.е. весь касательный конус к орисфере: и до, и после линии касания конуса с орисферой. Такое изометрическое вложение изображено на рис. 4. К плоскости ребра возврата и евклидова, и псевдоевклидова части поверхности подходят тангенциально. И евклидова, и псевдоевклидова ветвь меридиана такой скомпонованной поверхности имеют одинаковую длину отрезка касательной до их общей оси вращения.

О других псевдоевклидовых аналогах псевдосферы и свойствах асимптотических линий на них см. [4, 6, 14]. Винтовые поверхности в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, обобщающие псевдоевклидовы аналоги псевдосферы, рассмотрены в работе автора [5]. Регулярные изометрические вложения класса C^∞ «полной» псевдосферы, т.е. всей лежащей в собственной области части конуса с вершиной на абсолюте, и «полной катушки» в 7-мерное евклидово и 8-мерное сферическое пространства построены Д. Бланушей [9, 10].

6. Катушка Миндинга и касательный конус с вершиной в идеальной области расширенного трехмерного гиперболического пространства. Если трехмерное пространство Лобачевского рассматривать в проективной модели, то часть проективного пространства, внешняя по отношению к абсолюту, называется идеальной областью пространства Лобачевского. В ней реализуется псевдориманова геометрия с индефинитной метрикой постоянной кривизны. Пусть орисфера ω' лежит в собственной области пространства Лобачевского. Поместим вершину касательного к орисфере ω' конуса в идеальную область. Тогда в собственной области найдется еще одна орисфера ω'' , вписанная в этот конус.

Рис. 5. Вложение катушки Миндинга в H^3 .

Теорема 4. Если расстояние от полярной вершины конуса, лежащей в идеальной области расширенного трехмерного пространства Лобачевского, до орисферы ω' равно t , то часть касательного конуса между линиями касания с орисферами ω' и ω'' глобально изометрична катушке Миндинга с меридианом, задаваемым в декартовых координатах следующим образом:

$$z = \int \sqrt{\frac{1 + e^{-2t} - x^2}{x^2 - e^{-2t}}} dx, \quad y = 0, \quad (14)$$

Доказательство. На рис. 5 точка A оси конуса лежит в полярной его вершине, а точка B — на орисфере, касающейся этого конуса. Ось конуса является также одной из осей, касающейся его орисферы. $AB = t$ — расстояние от полярной вершины конуса до касающейся его орисферы. Часть конуса, лежащую в собственной области пространства Лобачевского, можно рассматривать как поверхность, полученную вращением прямой вокруг расходящейся с ней прямой.

Меридиан катушки Миндинга в декартовых координатах задается следующим образом:

$$z = \int \sqrt{\frac{(1 + b^2) - x^2}{x^2 - b^2}} dx, \quad y = 0, \quad b > 0. \quad (15)$$

Обратимся опять к модели Пуанкаре пространства Лобачевского в евклидовом полупространстве. Орисферу ω' зададим уравнением $x_3 = 0$, а осевое сечение конуса — уравнением $x_2 = 0$. Часть образующей, лежащую в собственной области, зададим следующим образом:

$$x_1 = \sin(u), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \cos(u). \quad (16)$$

Полярная идеальной вершины конуса будет пересекать часть конуса, лежащую в собственной области, по горловому сечению, т.е. по сечению минимального радиуса. Аналогично тому, как это было сделано для конической поверхности, можно показать, что если расстояние от полярной до орисферы ω' равно t , то полярная пересечет образующую (16) в точке

$$\left(\arcsin \frac{1}{1 + e^{-2t}}, 0, 0 \right),$$

а часть конуса между орисферами ω' и ω'' будет соответствовать катушке Миндинга с меридианом (15), для которого $b = e^{-t}$. Подставив это выражение в уравнения евклидова меридиана, получим его представление (14) через расстояние от полярной вершины конуса до касательной орисферы. Орисфера ω'' будет изображаться сферой

$$(x_1 - \sqrt{1 + e^{-2t}})^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}e^{-2t} \right)^2 = \frac{1}{4}e^{-4t},$$

инверсной орисфере $x_3 = 0$ относительно сферы S^2 с центром в точке $(\sqrt{1 + e^{-2t}}, 0, 0)$ и радиусом e^{-t} . Такая инверсия моделирует симметрию пространства Лобачевского относительно плоскости, изображаемой половиной сферы S^2 , а сама плоскость (евклидова полусфера) моделирует полярную вершину конуса, лежащей в идеальной области расширенного трехмерного пространства Лобачевского. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени// Укр. мат. ж. — 2015. — 67, № 12. — С. 1658–1666.
2. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К. Задача о тени и смежные задачи// Proc. Int. Geometry Center. — 2016. — 9, № 3-4. — С. 50–58.
3. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К. Задача о тени для шаров фиксированного радиуса// Укр. мат. вісн. — 2016. — 13, № 4. — С. 599–602.
4. Костин А. В. Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях// Владикавказ. мат. ж. — 2019. — 21, № 1. — С. 16–26.
5. Костин А. В. О геликоидах Дини в пространстве Минковского// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 180. — С. 50–57.
6. Костин А. В. Эволюты меридианов и асимптотические на псевдосферах// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 169. — С. 23–30.
7. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
8. Худайбергенов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке семейства шаров. — Деп. в ВИНИТИ 21.02.1982, № 1772.
9. Blanusha D. C^∞ -Isometric imbeddings of the hyperbolic plane and of cylinders with hyperbolic metric in spherical spaces// Ann. Math. Pura Appl. — 1962. — 57. — P. 321–337.
10. Blanusha D. C^∞ -Isometric imbeddings of cylinders with hyperbolic metric in Euclidean 7-space// Glas. Mat.-Fiz. Astron. — 1956. — 11, № 3-4. — P. 243–246.
11. Klein F. Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. — Berlin, 1928.
12. Kostin A. V. Problem of shadow in the Lobachevskii space// Ukr. Math. J. — 2019. — 70, № 11. — P. 1758–1766.
13. Kostin A. V. Some generalisations of the shadow problem in the Lobachevsky space// Ukr. Math. J. — 2021. — 73, № 1. — P. 61–68.
14. Костин А. В. Асимптотические на псевдосферах и угол параллельности// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 6. — С. 25–34.
15. Minding F. Über die Biegung krummer Flächen// J. Reine Angew. Math. — 1838. — 18. — P. 365–368.
16. Minding F. Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse// J. Reine Angew. Math. — 1839. — 19. — P. 370–387.
17. Minding F. Beiträge zur Theorie der kürzerten Linien auf krummen Flächen// J. Reine Angew. Math. — 1840. — 20. — P. 323–327.

Костин Андрей Викторович

Елабужский институт Казанского федерального университета

E-mail: kostin_andrei@mail.ru