ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 50–65
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-50-65

УДК 514.765

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ПОДГРУППОЙ ИЗОТРОПИИ И ИЗОТРОПНЫМ ТЕНЗОРОМ СХОУТЕНА—ВЕЙЛЯ

© 2023 г. **П. Н. КЛЕПИКОВ**

Аннотация. Изотропный тензор Схоутена—Вейля ранее изучался в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. В случае локально однородных псевдоримановых пространств с нетривиальной подгруппой изотропии были классифицированы многообразия с изотропным тензором Вейля. В данной работе получена классификация четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с изотропным тензором Схоутена—Вейля. Кроме того, получены некоторые результаты о тензорах кривизны подобных многообразий.

Ключевые слова: локально однородное пространство, изотропный тензор Схоутена—Вейля, алгебра Ли.

FOUR-DIMENSIONAL LOCALLY HOMOGENEOUS PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH A NONTRIVIAL ISOTROPY SUBGROUP AND AN ISOTROPIC SCHOUTEN–WEIL TENSOR

© 2023 **P. N. KLEPIKOV**

Abstract. The isotropic Schouten–Weyl tensor was previously studied in the case of three-dimensional Lie groups with a left-invariant Lorentzian metric. In the case of locally homogeneous pseudo-Riemannian spaces with a nontrivial isotropy subgroup, manifolds with an isotropic Weyl tensor were classified. In this paper, we obtain a classification of four-dimensional, locally homogeneous pseudo-Riemannian manifolds with an isotropic Schouten—Weyl tensor. Some results on the curvature tensors of similar manifolds are obtained.

Keywords and phrases: locally homogeneous space, isotropic Schouten–Weyl tensor, Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53B20, 53C30

1. Введение. (Псевдо)римановы многообразия с нулевым тензором Схоутена—Вейля изучались в работах многих математиков. В частности, в класс данных многообразий входят многообразия Эйнштейна ($r = \lambda g$) и их прямые произведения, локально симметрические пространства ($\nabla R = 0$), Риччи-параллельные многообразия ($\nabla r = 0$) и конформно плоские многообразия ($W = 0$) (см. [13]). Также отметим, что в случае многообразий постоянной скалярной кривизны класс многообразий с нулевым тензором Схоутена—Вейля совпадается с классом $\mathcal{B}$ эйнштейново подобных многообразий в смысле А. Грея [17].

Для локально однородных пространств с нулевым тензором Схоутена—Вейля известны некоторые классификационные результаты в случае малых размерностей. Например, Дж. Кальварузо

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00111).

и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановы метрики Эйнштейна, конформно плоские и Риччи-параллельные метрики на четырехмерных группах Ли [14–16]. Более того, А. Заем и А. Хаджи-Бадали классифицировали четырехмерные эйнштеново подобные псевдоримановы локально однородные пространства с нетривиальной подгруппой изотропии [20]. Классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой и нулевым тензором Схоутена—Вейля была получена в работе [6]. В случае римановой метрики Д. С. Воронов, О. П. Хромова, Е. Д. Родионов и В. В. Славский получили классификацию четырехмерных метрических групп Ли с нулевым тензором Схоутена—Вейля [1, 4, 5].

(Псевдо)римановы многообразия с изотропным тензором Схоутена—Вейля естественным образом возникают при изучении локально конформно однородных (псевдо)римановых пространств [19]. Ранее данные многообразия в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой изучались в работах [10, 12]. В них была получена полная классификация метрических групп Ли, тензор Схоутена—Вейля которых является изотропным. Кроме того, в работах [8, 9] была получена классификация четырехмерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля. Данная работа продолжает исследования многообразий с изотропным тензором Схоутена—Вейля в случае четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии.

Целью данной работы является доказательство следующей

Теорема 1. *Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(M = G/H, g)$ имеет изотропный тензор Схоутена—Вейля тогда и только тогда, когда алгебра Ли группы G содержится в таблице* 1.

2. Основные обозначения и факты.

Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии (алгебра Ли группы H), $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — фактор-пространство, являющиеся дополнением к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ определяет представление изотропии $\psi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом $\psi_X(Y) = [X, Y]_\mathfrak{m}$. Каждая инвариантная (псевдо)риманова метрика на однородном пространстве G/H соответствует невырожденной симметричной билинейной форме g на $\mathfrak{m}$, которая определяется равенством

$$(\psi_X)^t \cdot g + g \cdot \psi_X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \tag{1}$$

где $(\psi_X)^t$ — транспонированная матрица. Данная билинейная форма определяет связность Леви-Чивиты

$$\nabla\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m}), \quad \nabla_X(Y_\mathfrak{m}) = \frac{1}{2}[X, Y]_\mathfrak{m} + v(X, Y),$$

где $v\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ определяется равенством

$$2g(v(X, Y), Z_\mathfrak{m}) = g(X_\mathfrak{m}, [Z, Y]_\mathfrak{m}) + g(Y_\mathfrak{m}, [Z, X]_\mathfrak{m}).$$

Тензор кривизны $R\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ определяется выражением

$$R(X, Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X,Y]}.$$

Тензор Риччи r определяется как свертка тензора кривизны по второму и четвертому индексу, скалярная кривизна Scal определяется как полная свертка тензора Риччи r с метрическим тензором g. Тензор Схоутена—Вейля определяется равенством

$$SW(X, Y, Z) = \frac{1}{n-2}\left(\nabla_Z r(X, Y) - \nabla_Y r(X, Z) - \frac{1}{2(n-1)}(g(X, Y)\nabla_Z \mathrm{Scal} - g(X, Z)\nabla_Y \mathrm{Scal})\right),$$

или, в силу постоянства скалярной кривизны:

$$SW(X, Y, Z) = \frac{1}{n-2}(\nabla_Z r(X, Y) - \nabla_Y r(X, Z)).$$

Таблица 1. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена—Вейля

№	Скобки Ли	Скалярное произведение на дополнении к подалгебре изотропии	Ограничения
$1.1^1.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_1,u_3]=u_2,$ $[u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{13}^2+4\alpha_{24}^2}{4\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13}\neq 0,\ \alpha_{44}\neq 0$
$1.1^1.3$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_1,u_3]=e_1+u_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13}\neq 0,\ \alpha_{24}\neq 0$
$1.1^2.1$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=-u_2,$ $[u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=2u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{24}^2-\alpha_{33}^2}{\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{24}^2\neq\alpha_{33}^2,\ \alpha_{33}\neq 0,$ $\alpha_{44}\neq 0$
$1.1^2.3$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=e_1+u_2$	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33}\neq 0,\ \alpha_{24}\neq 0$
$1.1^2.4$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=-e_1+u_2$		$\alpha_{33}\neq 0,\ \alpha_{24}\neq 0$
$1.3^1.1$	$[e_1,u_1]=e_1,\ [e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,$ $[u_1,u_2]=-\frac{1}{2}u_2,\ [u_1,u_3]=u_3,\ [u_1,u_4]=\frac{1}{2}u_4,$ $[u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{34}^2+\alpha_{44}^2\neq 0,$ $\alpha_{33}\alpha_{44}\neq\alpha_{34}^2,\ \alpha_{23}\neq 0$
$1.4^1.1$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [e_1,u_4]=e_1,$ $[u_1,u_2]=u_1,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,$ $[u_2,u_3]=u_3,\ [u_3,u_4]=-u_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33}\neq 0,\ \alpha_{22}\neq 0,$ $\alpha_{44}\neq 0$
$1.4^1.2$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [e_1,u_4]=e_1,$ $[u_1,u_4]=pu_1,\ [u_2,u_4]=(p-1)u_2,$ $[u_3,u_4]=(p-2)u_3$		$\alpha_{33}\neq 0,\ p\neq 3,\ p\neq\frac{5}{3},$ $\alpha_{22}\neq 0,\ \alpha_{44}\neq 0$
$1.4^1.3$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [e_1,u_4]=e_1,$ $[u_1,u_4]=2u_1,\ [u_2,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=u_2$		$\alpha_{33}\neq\alpha_{44},\ \alpha_{22}\neq 0,$ $\alpha_{44}\neq 0$
$1.4^1.4$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [e_1,u_4]=e_1,$ $[u_1,u_4]=2u_1,\ [u_2,u_3]=-e_1,\ [u_2,u_4]=u_2$		$\alpha_{33}\neq-\alpha_{44},\ \alpha_{22}\neq 0,$ $\alpha_{44}\neq 0$
$1.4^1.5$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_2]=u_1,$ $[u_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_3$		$\alpha_{33}\neq 0,\ \alpha_{22}\neq 0,$ $\alpha_{44}\neq 0$
$1.4^1.6$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,$ $[u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_1+u_3$		$\alpha_{22}\neq 0,\ \alpha_{44}\neq 0$
$1.4^1.7$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,$ $[u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=-u_1+u_3$		$\alpha_{22}\neq 0,\ \alpha_{44}\neq 0$
$2.5^1.1$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_1,u_4]=-2e_1,$ $[e_2,u_2]=-2e_2,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,$ $[u_1,u_2]=2e_2-u_1,\ [u_1,u_3]=u_2+u_4,$ $[u_1,u_4]=2e_1-u_1,\ [u_2,u_3]=-2u_3,$ $[u_2,u_4]=u_2-u_4,\ [u_3,u_4]=2u_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{33}\neq 0,\ \alpha_{24}\neq 0$
$2.5^2.1$	$[e_1,u_2]=-e_1+u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_1,u_4]=e_2,$ $[e_2,u_2]=-e_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-e_1-u_1,$ $[u_1,u_2]=e_1-u_1,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-e_2,$ $[u_2,u_3]=-2u_3,\ [u_2,u_4]=-u_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33}\neq 0,\ \alpha_{22}\neq 0,$ $\alpha_{44}\neq 0$

Если размерность многообразия $m \geqslant 4$, то тензор Схоутена—Вейля связан с дивергенцией тензора Вейля следующим равенством [13]:

$$SW = -(n-3)\operatorname{div} W.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ определяется как полная свертка тензора Схоутена—Вейля с метрическим тензором по каждому индексу.

Тензор Схоутена—Вейля SW будем называть *изотропным*, если квадрат его длины равен нулю ($\|SW\|^2 = 0$), а сам тензор не равен нулю ($SW \neq 0$).

Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять квадрат длины тензора Схоутена—Вейля на локально однородном (псевдо)римановом пространстве (см. подробнее [7, 11]).

Пусть, как и ранее, $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ дополнение в $\mathfrak{g}$ к $\mathfrak{h}$, $h = \dim \mathfrak{h}$.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_h, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ есть базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k, \quad [h_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

Первым шагом является вычисление представления изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)_j^k = (\psi(e_i))_j^k = \bar{c}_{ij}^k \tag{2}$$

и запись системы уравнений (1).

Далее вычисляются компоненты связности Леви-Чивиты ∇ с помощью известного метрического тензора g_{ij} и структурных констант c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl}), \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2} g^{sk} \bar{c}_{is}^l g_{jl}, \tag{3}$$

где $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{h_i} u_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$, $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r:

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p + C_{ij}^l \bar{\Gamma}_{lk}^p\right) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}. \tag{4}$$

В конце вычисляются компоненты тензора Схоутена—Вейля

$$SW_{ijk} = \frac{1}{n-2}(r_{ij,k} - r_{ik,j}) = \frac{1}{n-2}(r_{sk}\Gamma_{ji}^s + r_{is}\Gamma_{jk}^s - r_{sj}\Gamma_{ki}^s - r_{is}\Gamma_{kj}^s)$$

и квадрат длины тензора Схоутена—Вейля

$$\|SW\|^2 = SW_{ijk} SW_{\alpha\beta\gamma} g^{i\alpha} g^{j\beta} g^{k\gamma}.$$

Отметим, что подобные математические модели для метрических групп Ли также были построены в работах [2, 3], а для локально однородных пространств в работах [11, 14].

В данной работе будем использовать классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий, полученную в работе [18]. Для каждого случая указаны скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, параметры могут принимать любые действительные значения, если не указано обратное; во всех случаях подалгебра изотропии $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_i)$, дополнение $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_i)$. Далее по тексту будем ссылаться на случаи из данной классификации по их номеру (например, $2.1^3.5$).

Ниже по тексту, при указании вида инвариантной метрики, будем ссылаться на таблицу 2. Так, например, фраза «Метрический тензор имеет вид 4» означает, что матрица метрического тензора имеет вид, приведенный в таблице 2 под номером 4 вместе с соответствующими ограничениями на компоненты метрического тензора.

Таблица 2. Вид инвариантного метрического тензора

№	Матрица метрического тензора	Ограничения	№	Матрица метрического тензора	Ограничения
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
3	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{44} & 0 \\ -\alpha_{23} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$
4	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$	12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$	13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{44} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$	15	$\begin{pmatrix} \alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{24} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 \neq 0$			

3. Кривизна четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии. В данном разделе приведем некоторые теоремы о тензорах кривизны четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий. Но сначала упомянем следующую лемму, доказательство которой приводится, например, в [13].

Лемма 1. *Пусть* $\{R = 0\}$ *обозначает класс всех плоских (псевдо)римановых многообразий;* $\{r = 0\}$ — *класс многообразий с нулевым тензором Риччи;* $\{\nabla R = 0\}$ — *класс локально симметричных многообразий;* $\{W = 0\}$ — *класс конформно плоских многообразий;* $\{\nabla r = 0\}$ — *класс Риччи-параллельных многообразий;* $\{\nabla W = 0\}$ — *класс многообразий с параллельным тензором Вейля;* $\{SW = 0\}$ — *класс многообразий с нулевым тензором Схоутена—Вейля. Тогда выполняются следующие включения:*

(i) $\{R = 0\} \subseteq \{r = 0\}$, $\{R = 0\} \subseteq \{\nabla R = 0\}$, $\{R = 0\} \subseteq \{W = 0\}$;
(ii) $\{r = 0\} \subseteq \{\nabla r = 0\}$, $\{\nabla R = 0\} \subseteq \{\nabla r = 0\}$;
(iii) $\{W = 0\} \subseteq \{\nabla W = 0\}$, $\{\nabla R = 0\} \subseteq \{\nabla W = 0\}$;
(iv) $\{\nabla r = 0\} \subseteq \{SW = 0\}$, $\{\nabla W = 0\} \subseteq \{SW = 0\}$.

Теорема 2. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(G/H, g)$ является плоским многообразием (т.е. $R = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 46 типов локально однородных пространств*:

$1.1^1.9$,	$1.2^1.1$,	$2.1^2.6$,	$2.3^1.1$,	$3.2^1.4$,	$3.5^2.4$,	$5.1^1.1$,
$1.1^1.10$,	$1.2^2.1$,	$2.1^3.6$,	$2.4^1.3$,	$3.2^2.2$,	$4.1^1.1$,	$6.1^1.2$,
$1.1^2.12$,	$1.3^1.18$,	$2.1^4.2$,	$2.5^1.14$,	$3.3^1.4$,	$4.1^2.1$,	$6.1^2.3$,
$1.1^3.1$,	$1.3^1.32$,	$2.2^1.6$,	$2.5^2.7$,	$3.3^2.4$,	$4.2^1.2$,	$6.1^3.3$.
$1.1^4.1$,	$1.4^1.23$,	$2.2^1.7$,	$3.1^1.1$,	$3.4^1.1$,	$4.2^2.3$,	
$1.1^5.1$,	$1.4^1.26$,	$2.2^2.4$,	$3.1^2.1$,	$3.4^2.1$,	$4.2^3.2$,	
$1.1^6.1$,	$2.1^1.3$,	$2.2^3.1$,	$3.2^1.2$,	$3.5^1.4$,	$4.3^1.2$,	

Доказательство. Ниже подробно рассмотрим случай $1.1^1.9$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Для случая $1.1^1.9$ существует такой базис $\{e_1, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ в $\mathfrak{g}$, что ненулевые скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_2] = \frac{1}{2}u_2, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [e_1, u_4] = -\frac{1}{2}u_4, \quad [u_1, u_4] = u_2.$$

Далее, обозначая $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ и с использованием (1) и (2), получаем представление изотропии и вид инвариантного метрического тензора в данном базисе:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как g невырождена, то $\alpha_{13}\alpha_{24} \neq 0$. Компоненты связности Леви-Чивиты определяются с помощью (3):

$$(\Gamma_1)^k_j = (\Gamma_2)^k_j = (\Gamma_3)^k_j = 0,$$

$$(\Gamma_4)^k_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{24}}{\alpha_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\bar{\Gamma}_1)^k_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Далее с помощью (4) убеждаемся, что все компоненты тензора кривизны R тождественно равны нулю.

Остальные случаи теоремы 2 рассматриваются аналогично. $\square$

Доказательство теорем 3—7 аналогично доказательству теоремы 2 и основывается на прямых вычислениях, поэтому приводить их не будем.

Теорема 3. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 2). Тогда $(G/H, g)$ является Риччи плоским многообразием (т.е. $r = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 12 типов локально однородных пространств*:

$1.3^1.17$,	$1.3^1.31$,	$2.2^2.3$,	$2.5^1.11$,	$2.5^1.13$,	$3.2^1.3$,
$1.3^1.23$,	$2.2^1.5$,	$2.5^1.2$,	$2.5^1.12$,	$2.5^2.6$,	$4.3^1.1$.

Теорема 4. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 2). Тогда $(G/H, g)$ является конформно плоским многообразием (т.е. $W = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 28 типов локально однородных пространств*:

$1.4^1.8$,	$2.4^1.2$,	$2.5^1.10$,	$3.3^1.2$,	$3.3^2.3$,	$3.5^2.1$,	$6.1^2.1$,
$2.2^1.2$,	$2.5^1.4$,	$3.2^1.1$,	$3.3^1.3$,	$3.5^1.1$,	$3.5^2.2$,	$6.1^2.2$,
$2.2^1.3$,	$2.5^1.6$,	$3.2^2.1$,	$3.3^2.1$,	$3.5^1.2$,	$3.5^2.3$,	$6.1^3.1$,
$2.4^1.1$,	$2.5^1.9$,	$3.3^1.1$,	$3.3^2.2$,	$3.5^1.3$,	$6.1^1.1$,	$6.1^3.2$.

Теорема 5. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 2). Тогда $(G/H, g)$ является локально симметричным многообразием (т.е. $\nabla R = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 73 типов локально однородных пространств:*

$1.1^1.5$,	$1.4^1.8$,	$2.1^2.4$,	$2.2^2.1$,	$2.5^1.11$,	$3.3^2.2$,	$4.2^3.1$,
$1.1^1.6$,	$1.4^1.14$,	$2.1^2.5$,	$2.2^2.2$,	$2.5^1.12$,	$3.3^2.3$,	$4.3^1.1$,
$1.1^1.7$,	$1.4^1.21$,	$2.1^3.1$,	$2.2^2.3$,	$2.5^1.13$,	$3.5^1.1$,	$6.1^1.1$,
$1.1^2.6$,	$1.4^1.22$,	$2.1^3.2$,	$2.4^1.1$,	$2.5^2.4$,	$3.5^1.2$,	$6.1^2.1$,
$1.1^2.7$,	$1.4^1.24$,	$2.1^3.3$,	$2.4^1.2$,	$2.5^2.5$,	$3.5^1.3$,	$6.1^2.2$,
$1.1^2.8$,	$1.4^1.25$,	$2.1^3.4$,	$2.5^1.2$,	$2.5^2.6$,	$3.5^2.1$,	$6.1^3.1$,
$1.1^2.9$,	$2.1^1.1$,	$2.1^3.5$,	$2.5^1.6$,	$3.2^1.1$,	$3.5^2.2$,	$6.1^3.2$.
$1.1^2.10$,	$2.1^1.2$,	$2.1^4.1$,	$2.5^1.7$,	$3.2^1.3$,	$3.5^2.3$,	
$1.3^1.11$,	$2.1^2.1$,	$2.2^1.1$,	$2.5^1.8$,	$3.2^2.1$,	$4.2^1.1$,	
$1.3^1.17$,	$2.1^2.2$,	$2.2^1.4$,	$2.5^1.9$,	$3.3^1.2$,	$4.2^2.1$,	
$1.3^1.31$,	$2.1^2.3$,	$2.2^1.5$,	$2.5^1.10$,	$3.3^1.3$,	$4.2^2.2$,	

Теорема 6. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теоремах 2, 3 и 5). Тогда $(G/H, g)$ является Риччи паралельным многообразием (т.е. $\nabla r = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 15 типов локально однородных пространств:*

$1.3^1.3$,	$1.3^1.9$,	$1.4^1.13$,	$1.4^1.17$,	$1.4^1.20$,
$1.3^1.6$,	$1.3^1.10$,	$1.4^1.15$,	$1.4^1.18$,	$2.5^1.5$,
$1.3^1.8$,	$1.3^1.20$,	$1.4^1.16$,	$1.4^1.19$,	$2.5^2.3$

Теорема 7. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теоремах 2–6). Тогда $(G/H, g)$ имеет нулевой тензор Схоутена—Вейля (т.е. $SW = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в следующем списке из 25 типов локально однородных пространств:*

$1.3^1.2$,	$1.3^1.12$,	$1.3^1.16$,	$1.3^1.24$,	$1.3^1.28$,	$1.4^1.10$,	$2.5^1.3$,
$1.3^1.4$,	$1.3^1.13$,	$1.3^1.19$,	$1.3^1.25$,	$1.3^1.29$,	$1.4^1.11$,	$2.5^2.2$.
$1.3^1.5$,	$1.3^1.14$,	$1.3^1.21$,	$1.3^1.26$,	$1.3^1.30$,	$1.4^1.12$,	
$1.3^1.7$,	$1.3^1.15$,	$1.3^1.22$,	$1.3^1.27$,	$1.4^1.9$,		

4. Изотропный тензор Схоутена—Вейля. Доказательство теоремы 1 основывается на предложениях, которые будут доказаны в данном разделе.

Предложение 1. *Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда тензор Схоутена—Вейля многообразия $(G/H, g)$ равен нулю для любой инвариантной метрики g, если и только если G/H содержится в следующем списке:*

$1.1^1.(5–10)$,	$1.1^6.1$,	$2.1^2.(1–6)$,	$2.3^1.1$,	$3.2^1.(1–4)$,	$3.5^1.(1–4)$,	$4.2^3.(1,2)$,
$1.1^2.(6–10)$,	$1.2^1.1$,	$2.1^3.(1–6)$,	$2.4^1.(1–3)$,	$3.2^2.(1,2)$,	$3.5^2.(1–4)$,	$4.3^1.(1,2)$,
$1.1^2.12$,	$1.2^2.1$,	$2.1^4.(1,2)$,	$2.5^1.(2–14)$,	$3.3^1.(1–4)$,	$4.1^1.1$,	$5.1^1.1$,
$1.1^3.1$,	$1.3^1.(2–32)$,	$2.2^1.(1–7)$,	$2.5^2.(2–7)$,	$3.3^2.(1–4)$,	$4.1^2.1$,	$6.1^1.(1,2)$,
$1.1^4.1$,	$1.4^1.(8–26)$,	$2.2^2.(1–4)$,	$3.1^1.1$,	$3.4^1.1$,	$4.2^1.(1,2)$,	$6.1^2.(1–3)$,
$1.1^5.1$,	$2.1^1.(1–3)$,	$2.2^3.1$,	$3.1^2.1$,	$3.4^2.1$,	$4.2^2.(1–3)$,	$6.1^3.(1–3)$.

Доказательство. Данное предложение является следствием теорем 2—7 в силу леммы 1. □

Предложение 2. *Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H есть случай $1.1^1.8$ или $1.1^2.11$, то квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ не равен нулю ни для какой инвариантной метрики g.*

Доказательство.

Случай $1.1^1.8$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1]=u_1,\quad [e_1,u_2]=\frac{1}{2}u_2,\quad [e_1,u_3]=-u_3,\quad [e_1,u_4]=-\frac{1}{2}u_4,$$
$$[u_1,u_3]=-2e_1,\quad [u_1,u_4]=u_2,\quad [u_2,u_3]=u_4,$$

где $\mathfrak{h}=\operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m}=\operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g=(\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{22}=0,\quad 2\alpha_{11}=0,\quad \frac{3}{2}\alpha_{12}=0,\quad \frac{1}{2}\alpha_{14}=0,$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_{23}=0,\quad -2\alpha_{33}=0,\quad -\frac{3}{2}\alpha_{34}=0,\quad -\alpha_{44}=0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 2. Нетривиальными компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{223}=-SW_{232}=-SW_{441}=\frac{3\alpha_{24}}{2\alpha_{13}}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2=-\frac{9}{\alpha_{13}^3}.$$

Он, очевидно, не обращается в нуль ни для какой инвариантной метрики g.

Случай $1.1^2.11$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1]=u_3,\quad [e_1,u_2]=\frac{1}{2}u_4,\quad [e_1,u_3]=-u_1,\quad [e_1,u_4]=-\frac{1}{2}u_2,$$
$$[u_1,u_2]=u_2,\quad [u_1,u_3]=-4e_1,\quad [u_1,u_4]=-u_4,\quad [u_2,u_3]=-u_4,\quad [u_3,u_4]=u_2,$$

где $\mathfrak{h}=\operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m}=\operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\\1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{24} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{11} + \alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{12} + \frac{1}{2}\alpha_{34} = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_{12} + \alpha_{34} = 0,$$
$$\frac{1}{2}\alpha_{14} + \alpha_{23} = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_{22} + \frac{1}{2}\alpha_{44} = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_{23} - \alpha_{14} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 4. Нетривиальными компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{221} = -SW_{234} = SW_{243} = -SW_{441} = \frac{3\alpha_{44}}{\alpha_{33}}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{72}{\alpha_{33}^3};$$

очевидно, он не обращается в нуль ни для какой инвариантной метрики g. □

Предложение 3. *Если $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что приведены в предложении 1). Если G/H содержится в приведенном ниже списке, то из равенства нулю квадрата длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ для некоторой инвариантной метрики g следует равенство нулю самого тензора Схоутена—Вейля SW:*

$$1.1^1.2, \quad 1.1^1.4, \quad 1.1^2.2, \quad 1.1^2.5.$$

Доказательство. Последовательно рассмотрим все случаи, приведенные выше.

Случай $1.1^1.2$. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [u_2, u_4] = pu_2, \quad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, $p \in \mathbb{R}$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{224} = -SW_{242} = \frac{\alpha_{22}^2 p(2p-1)}{4(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \quad SW_{143} = -SW_{134} = SW_{341} = \frac{\alpha_{13}\alpha_{22} p(2p-1)}{8(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{442} = -\frac{\alpha_{24}\alpha_{22} p(2p-1)}{4(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}^3 p^2 (2p-1)^2}{16(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^3}.$$

Он обращается в нуль, когда либо $\alpha_{22} = 0$, либо $p = 0$, либо $p = 1/2$. Но во всех этих случаях сам тензор Схоутена—Вейля также равен нулю.

Поскольку во всех случаях алгоритм доказательства однообразен, то далее для каждого случая приведем лишь номер вида метрического тензора g (из таблицы 2), нетривиальные компоненты тензора Схоутена—Вейля SW и квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$.

Случай	g	SW	$\|SW\|^2$
$1.1^1.4$	1	$SW_{123} = -SW_{132} = \dfrac{\alpha_{22}^2}{4\alpha_{13}^2}$, $SW_{143} = -SW_{341} = -SW_{134} = \dfrac{\alpha_{24}\alpha_{22}}{4\alpha_{13}^2}$, $SW_{231} = -\dfrac{\alpha_{22}^2}{2\alpha_{13}^2}$	$-\dfrac{3\alpha_{22}^3}{4\alpha_{13}^6}$
$1.1^2.2$	3	$SW_{141} = SW_{343} = -SW_{114} = -SW_{334} = \dfrac{\alpha_{33}\alpha_{22}p(p-1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $SW_{224} = -SW_{242} = \dfrac{\alpha_{22}^2 p(p-1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $SW_{442} = -\dfrac{\alpha_{24}\alpha_{22}p(p-1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$	$\dfrac{3\alpha_{22}^3 p^2(p-1)^2}{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)^3}$
$1.1^2.5$	3	$SW_{132} = -SW_{123} = \dfrac{\alpha_{22}^2}{4\alpha_{33}^2}$, $SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \dfrac{\alpha_{24}\alpha_{22}}{4\alpha_{33}^2}$, $SW_{231} = \dfrac{\alpha_{22}^2}{2\alpha_{33}^2}$	$\dfrac{3\alpha_{22}^3}{4\alpha_{33}^6}$

□

Предложение 4. *Если $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H есть случай $1.4^1.6$ или $1.4^1.7$, то квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ равен нулю для любой инвариантной метрики g, а сам тензор Схоутена—Вейля не тривиален.*

Доказательство.

Случай $1.4^1.6$. В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1, u_2] = u_1, \quad [e_1, u_3] = u_2, \quad [u_1, u_4] = u_1, \quad [u_2, u_4] = u_2, \quad [u_3, u_4] = u_1 + u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{24} = 0, \quad 2\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{22} + \alpha_{13} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 6. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{343} = -SW_{334} = \frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{44}}.$$

Они не могут обращаться в нуль, поскольку при $\alpha_{23} = 0$ метрический тензор был бы вырожденным. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен нулю.

Случай $1.4^1.7$. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_2] = u_1, \quad [e_1, u_3] = u_2, \quad [u_1, u_4] = u_1, \quad [u_2, u_4] = u_2, \quad [u_3, u_4] = -u_1 + u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{24} = 0, \quad 2\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{22} + \alpha_{13} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 6. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{334} = -SW_{343} = \frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{44}}.$$

Они не могут обратиться в нуль, поскольку при $\alpha_{23} = 0$ метрический тензор был бы вырожденным. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен нулю. □

Предложение 5. *Если* $(M = G/H, g)$ — *локально однородное псевдориманово многообразие размерностиЁ4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если* G/H *содержится в нижеприведенном списке, то квадрат длины тензора Схоутена—Вейля* $\|SW\|^2$ *равен нулю для любой инвариантной метрики* g*, но сам тензор Схоутена—Вейля может быть равен нулю для некоторых инвариантных метрик*:

$$1.3^1.1, \quad 1.4^1.1, \quad 1.4^1.2, \quad 1.4^1.3, \quad 1.4^1.4, \quad 1.4^1.5, \quad 2.5^1.1, \quad 2.5^2.1.$$

Доказательство. Последовательно рассмотрим все случаи, приведенные выше.

Случай $1.3^1.1$. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = e_1, \quad [e_1, u_3] = u_1, \quad [e_1, u_4] = u_2, \quad [u_1, u_2] = -\frac{1}{2}u_2,$$
$$[u_1, u_3] = u_3, \quad [u_1, u_4] = \frac{1}{2}u_4, \quad [u_2, u_3] = \frac{1}{2}u_4,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{24} = 0, \quad \alpha_{23} + \alpha_{14} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 5. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{331} = \frac{45(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2)}{32\alpha_{23}^2}, \quad SW_{334} = -SW_{343} = \frac{15\alpha_{44}(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2)}{64\alpha_{23}^3}.$$

Они могут обратиться в нуль, когда $\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2 = 0$. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен нулю. Поскольку во всех случаях алгоритм доказательства однообразен, то далее для каждого случая приведем лишь номер вида метрического тензора g (из таблицы 2) и нетривиальные компоненты тензора Схоутена—Вейля SW. Во всех случаях квадрат длины тензора Схоутена—Вейля тривиален.

Случай	g	SW
$1.4^1.1$	6	$SW_{332} = -\dfrac{3\alpha_{33}(\alpha_{44}+2\alpha_{22})}{4\alpha_{22}\alpha_{44}}$, $SW_{343} = -SW_{334} = \dfrac{\alpha_{33}(5\alpha_{44}+8\alpha_{22})}{4\alpha_{22}\alpha_{44}}$
$1.4^1.2$	6	$SW_{343} = -SW_{334} = \dfrac{\alpha_{33}(p-3)(3*p-5)}{2\alpha_{44}}$
$1.4^1.3$	6	$SW_{334} = -SW_{343} = \dfrac{\alpha_{33}-\alpha_{44}}{2\alpha_{44}}$
$1.4^1.4$	6	$SW_{334} = -SW_{343} = \dfrac{\alpha_{33}+\alpha_{44}}{2\alpha_{44}}$
$1.4^1.5$	6	$SW_{332} = -\dfrac{3\alpha_{33}}{4\alpha_{22}}$
$2.5^1.1$	12	$SW_{332} = SW_{334} = -SW_{343} = \dfrac{15\alpha_{33}}{\alpha_{24}}$
$2.5^2.1$	6	$SW_{332} = \dfrac{15\alpha_{33}}{2\alpha_{44}}$

□

В предложениях 1, 2, 3 перечислены четырехмерные локально однородные (псевдо)римановы многообразия, которые не могут иметь изотропный тензор Схоутена—Вейля. В предложении 4 перечислены локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4, тензор Схоутена—Вейля которых изотропен для любой инвариантной метрики. В предложении 5 содержатся четырехмерные однородные псевдоримановы многообразия, тензор Схоутена—Вейля которых изотропен при некоторых условиях типа «неравенство», эти многообразия вместе с соответствующими условиями содержатся в таблице 1. Пять оставшихся случаев из классификации [18] рассмотрим далее.

Случай $1.1^1.1$**.** В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1,u_1]=u_1,\quad [e_1,u_3]=-u_3,\quad [u_1,u_3]=u_2,\quad [u_2,u_4]=u_2,\quad [u_3,u_4]=u_3,$$

где $\mathfrak{h}=\mathrm{span}(e_1)$, $\mathfrak{m}=\mathrm{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g=(\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{12}=0,\quad \alpha_{14}=0,\quad 2\alpha_{11}=0,\quad -\alpha_{23}=0,\quad -2\alpha_{33}=0,\quad -\alpha_{34}=0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{123}=SW_{224}=-SW_{132}=-SW_{231}=-SW_{242}=\frac{(\alpha_{13}^2+\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)\alpha_{22}^2}{4\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)},$$

$$SW_{143}=-SW_{134}=\frac{(\alpha_{13}+2\alpha_{24})(\alpha_{13}^2+\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{8\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)},$$

$$SW_{341}=\frac{(\alpha_{13}-2\alpha_{24})(\alpha_{13}^2+\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{8\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)},$$

$$SW_{442}=-\frac{(\alpha_{13}^2+\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)\alpha_{22}\alpha_{24}}{4\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3(\alpha_{13}^2 - 4\alpha_{22}\alpha_{44} + 4\alpha_{24}^2)(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^2\alpha_{22}^3}{16\alpha_{13}^6(\alpha_{44}\alpha_{22} - \alpha_{24}^2)^3}.$$

Он обращается в нуль в трех случаях:

(i) при $\alpha_{22} = 0$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;

(ii) при $\alpha_{22} = -\dfrac{\alpha_{13}^2 - \alpha_{24}^2}{\alpha_{44}}$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;

(iii) при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{13}^2 + 4\alpha_{24}^2}{4\alpha_{44}}$; в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным.

Случай $1.1^1.3$. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [u_1, u_3] = e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad 2\alpha_{11} = 0, \quad -\alpha_{23} = 0, \quad -2\alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{132} = -SW_{123} = 2SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2}, \quad SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{13} - \alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = -\frac{3\alpha_{22}(\alpha_{13} - \alpha_{22})^2}{4\alpha_{13}^6};$$

он обращается в нуль в двух случаях:

(i) при $\alpha_{13} = \alpha_{22}$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;

(ii) при $\alpha_{22} = 0$, в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным.

Случай $1.1^2.1$. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = -u_2, \quad [u_1, u_4] = u_1, \quad [u_2, u_4] = 2u_2, \quad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{114} = SW_{334} = -SW_{141} = -SW_{343} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{4\alpha_{33}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{242} = 2SW_{123} = -SW_{224} = -SW_{231} = -2SW_{132} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{22}^2}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{442} = 2SW_{143} = -2SW_{134} = -2SW_{341} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{24}\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + \alpha_{33}^2)\alpha_{22}^3(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)^2}{4\alpha_{33}^6(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^3}.$$

Он обращается в нуль нулю в трех случаях:

(i) при $\alpha_{22} = 0$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;

(ii) при $\alpha_{22} = \dfrac{\alpha_{24}^2 + 4\alpha_{33}^2}{\alpha_{44}}$; но в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;

(iii) при $\alpha_{22} = \dfrac{\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2}{\alpha_{44}}$; в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным, если $\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2 \neq 0$.

Случай $1.1^2.3$. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{231} = 2SW_{132} = -2SW_{123} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22} - \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}, \quad SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{22} - \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}(\alpha_{22} - \alpha_{33})^2}{4\alpha_{33}^6}.$$

Он обращается в нуль в двух случаях:

(i) при $\alpha_{22} = \alpha_{33}$; но в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;

(ii) при $\alpha_{22} = 0$; в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным.

Случай $1.1^2.4$. В данном случае скобки Ли имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_3, \quad [e_1, u_3] = -u_1, \quad [u_1, u_3] = -e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие инвариантности (1) метрического тензора $g = (\alpha_{ij})$ будет иметь вид

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3. Ненулевыми компонентами тензора Схоутена—Вейля являются

$$SW_{132} = -SW_{123} = 2SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}, \quad SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{22} + \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена—Вейля равен

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})^2}{4\alpha_{33}^6}.$$

Он обращается в нуль в двух случаях:

(i) при $\alpha_{22} = -\alpha_{33}$; в этом случае обращаются в нуль компоненты тензора Схоутена—Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена—Вейля не является изотропным;

(ii) при $\alpha_{22} = 0$; в этом случае тензор Схоутена—Вейля является изотропным.

В заключение заметим, что для 186 многообразий из этой классификации [18] справедливо следующее:

(I) 15 многообразий могут иметь изотропный тензор Схоутена—Вейля SW, причем:
  - (a) для двух из них тензор Схоутена—Вейля SW изотропен для любой инвариантной метрики;
  - (b) в остальных 13 случаях тензор Схоутена—Вейля SW является изотропным лишь при определенных условиях на инвариантную метрику, причем:
    - (i) в пяти случаях условия на инвариантную метрику являются условиями типа равенств;
    - (ii) в восьми случаях условия на инвариантную метрику являются условиями типа неравенств;

(II) 171 многообразие не может иметь изотропный тензор Схоутена—Вейля SW, причем:
  - (a) в двух случаях квадрат длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ не равен нулю ни для какой инвариантной метрики;
  - (b) в 165 случаях все компоненты тензора Схоутена—Вейля SW равны нулю для любой инвариантной метрики;
  - (c) в четырех случаях тривиальность квадрата длины тензора Схоутена—Вейля $\|SW\|^2$ для некоторой инвариантной метрики влечет за собой тривиальность тензора Схоутена—Вейля SW.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов Д. С., Родионов Е. Д.* Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с тензором Вейля с нулевой дивергенцией// Докл. РАН. — 2010. — *432*, № 3. — С. 301—303.
2. *Гладунова О. П.* Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой// Вестн. Алтайск. гос. пед. ун-та. — 2006. — *6*, № 2. — С. 111–115.

3. *Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2013. — № 1 (77). — С. 19–23.
4. *Гладунова О. П., Славский В. В.* Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с тензором Вейля с нулевой дивергенцией// Докл. РАН. — 2010. — № 6. — С. 736—738.
5. *Гладунова О. П., Славский В. В.* О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли// Мат. тр. — 2011. — *14*, № 1. — С. 50–69.
6. *Клепиков П. Н.* Четырехмерные метрические группы Ли с нулевым тензором Схоутена—Вейля// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 271–330.
7. *Клепиков П. Н., Родионов Е. Д.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2017. — № 4 (96). — С. 108–111.
8. *Клепикова С. В.* Изотропный тензор Вейля на четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразиях// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2019. — № 1 (105). — С. 80–83.
9. *Клепикова С. В., Хромова О. П.* Локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4 с изотропным тензором Вейля// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2018. — № 1 (99). — С. 99–102.
10. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства// Мат. тр. — 2006. — *9*, № 1. — С. 130–168.
11. *Хромова О. П.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях// Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2017. — № 1 (93). — С. 140–143.
12. *Хромова О. П., Клепиков П. Н., Клепикова С. В., Родионов Е. Д.* On the Schouten–Weyl tensor of 3-dimensional metric Lie groups// Тр. семин. геом. мат. модел. — 2017. — *3*. — С. 21–29.
13. *Besse A.* Einstein Manifolds. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
14. *Calvaruso G., Zaeim A.* Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds// Tôhoku Math. J. — 2014. — *66*. — P. 31–54.
15. *Calvaruso G., Zaeim A.* Four-dimensional Lorentzian Lie groups// Differ. Geom. Appl. — 2013. — *31*. — P. 496–509.
16. *Calvaruso G., Zaeim A.* Neutral metrics on four-dimensional Lie groups// J. Lie Theory. — 2015. — *25*. — P. 1023–1044.
17. *Gray A.* Einstein-like manifolds which are not Einstein// Geom. Dedicata. — 1978. — *7*. — P. 259–280.
18. *Komrakov B. B.* Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces// Lobachevskii J. Math. — 2001. — *8*. — P. 33–165.
19. *Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces// Comment. Math. Univ. Carol. — 2002. — *43*, № 2. — P. 271–282.
20. *Zaeim A., Haji-Badali A.* Einstein-like pseudo-Riemannian homogeneous manifolds of dimension four// Mediter. J. Math. — 2016. — *13*, № 5. — P. 3455–3468.

Клепиков Павел Николаевич
Алтайский государственный университет, Барнаул
E-mail: `klepikov.math@gmail.com`