



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-3-13

УДК 514.1

ДЕЙСТВИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ НА СЕМЕЙСТВАХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

© 2023 г. С. А. БОГАТЫЙ, А. А. ТУЖИЛИН

Аннотация. Изучается действие мультипликативной группы положительных вещественных чисел на различных семействах метрических пространств, состоящее в умножении всех расстояний в метрических пространствах на одно и то же положительное вещественное число; такое действие называется подобием. Изучаются стационарные подгруппы этих действий.

Ключевые слова: метрическая геометрия, расстояние Громова—Хаусдорфа, собственный класс Громова—Хаусдорфа, облако, действие группы подобия.

ACTION OF SIMILARITY TRANSFORMATIONS ON FAMILIES OF METRIC SPACES

© 2023 S. A. BOGATYI, A. A. TUZHILIN

ABSTRACT. We study the action of the multiplicative group of positive real numbers on various families of a metric space, which consists of multiplying all distances in the metric space by the same positive real number; such an action is called similarity. Stationary subgroups of such actions are studied.

Keywords and phrases: metric geometry, Gromov–Hausdorff distance, Gromov–Hausdorff class, cloud, similarity group action.

AMS Subject Classification: 51F99

1. Введение. Работа посвящена изучению действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел на семействах метрических пространств: каждому вещественному числу $\lambda \in \mathbb{R}_+$ сопоставляется отображение, умножающее все расстояния в рассматриваемых метрических пространствах на λ . Особое внимание мы уделяем следующим трем семействам. Первое из них — это семейство всех непустых подмножеств нормированного пространства V . Здесь каждому $X \subset V$ сопоставляется подмножество λX того же нормированного пространства V . Второе семейство — собственный класс (в смысле теории множеств фон Неймана—Бернаиса—Гёделя, см. [2]), состоящий из всех непустых метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Здесь каждому классу изометрии метрического пространства X сопоставляется класс изометрии метрического пространства λX . Точнее, чтобы не впадать в противоречие с теорией множеств, это отображение определим на представителях классов изометрии. Отметим, что на этом собственном классе естественным образом задается знаменитое расстояние Громова—Хаусдорфа (см. [3–5]), которое превращает класс в обобщенное псевдометрическое пространство (слово «обобщенный» означает, что допускаются бесконечные расстояния, а приставка «псевдо» — что между неизометричными пространствами могут быть нулевые расстояния). Полученный класс будем обозначать $\mathcal{GH}$ и называть *классом Громова—Хаусдорфа*. Наконец, третье семейство

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00355).

получается из класса $\mathcal{GH}$ так: вводим на $\mathcal{GH}$ отношение эквивалентности, отнеся к эквивалентным те пары метрических пространств, для которых расстояние Громова—Хаусдорфа конечно. Эти классы эквивалентности назовем *облаками*, а класс всех облаков обозначим Clouds . Оказывается, если расстояния во всех метрических пространствах из данного облака умножить на одно и то же положительное вещественное число, то все эти пространства или останутся в облаке, или перейдут в одно и то же другое облако. Таким образом, рассматриваемое действие переносится и на класс Clouds .

Описанные выше действия будем изучать в терминах стационарных подгрупп разных их элементов. Напомним, что стационарные подгруппы элементов одной и той же орбиты сопряжены. В нашем случае группа $\mathbb{R}_+$ коммутативна, поэтому у всех элементов одной и той же орбиты стационарные подгруппы совпадают. Будем пользоваться следующими обозначениями. Если $X \subset V$ — непустое подмножество нормированного векторного пространства V , то соответствующую стационарную подгруппу обозначим $\text{St}_V X$. Если $X \in \mathcal{GH}$ — представитель класса изометрии всех метрических пространств, то стационарную подгруппу X обозначим $\text{St } X$. Для каждого такого X содержащее его облако обозначим $[X]$, а стационарную подгруппу для $[X] \in \text{Clouds}$ будем обозначать $\text{St}[X]$. Перечислим основные наши результаты.

Вначале опишем общие свойства стационарных подгрупп $\text{St}[X]$ и $\text{St } X$. Для подмножеств X нормированных пространств V изучим все три подгруппы: $\text{St}[X]$, $\text{St } X$ и $\text{St}_V X$. Выясним, что $\text{St}[X] \supset \text{St } X \supset \text{St}_V X$ и приведем примеры, демонстрирующие возможность произвольного расположения равенств в этой цепочке.

Затем остановимся на нетривиальном частном случае, когда в качестве X выступает бесконечная двусторонняя геометрическая прогрессия $X_q = \{q^l\}_{l \in \mathbb{Z}}$, $q > 1$. Ясно, что подгруппа $G_q = X_q \subset \mathbb{R}_+$ переводит прогрессию X_q в себя и, в действительности, $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$. Покажем, что при достаточно больших q , а именно, если q не меньше максимального корня уравнения $(q-1)^2 = q$, а также при всех рациональных $q > 1$, выполняется $\text{St}[X_q] = G_q$. В частности, отсюда вытекает, что и $\text{St } X_q = G_q$, т.е. все $\lambda \in \mathbb{R}_+$, для которых X_q изометрично λX_q , — это в точности элементы из G_q .

Что можно сказать для оставшихся $q > 1$? В общем случае покажем, что $\text{St}[X_q]$ представляет собой группу $G_{\sqrt[n]{q}}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. К настоящему времени у нас нет примеров, показывающих, что n может быть больше 1. Наша гипотеза: и в этом общем случае группа $\text{St}[X_q]$ равна G_q .

Наконец, рассмотрим «промежуточную» ситуацию, когда q не меньше наибольшего корня уравнения $(q-1)^{m+1} = q$. Отметим, что чем больше m , тем меньше этот корень, тем самым, расширяем область рассматриваемых q , захватывая в пределе все q из промежутка $(2, \infty)$. В этом случае докажем, что $\text{St}[X_q] = G_{\sqrt[n]{q}}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, лежащего между 1 и m . Таким образом, при $q \geq q_m$ понизим «степень неопределенности» в определении стационарной подгруппы.

В заключение соберем полученные результаты, чтобы наглядно представить устройство рассматриваемых стационарных групп для всего семейства пространств aX_q , $q > 1$, $a > 0$.

Исследование выполнено в МГУ имени М. В. Ломоносова, и при работе над статьей А. А. Тужилин пользовался поддержкой Российского научного фонда, проект 21-11-00355.

2. Основные определения и предварительные результаты. Как было отмечено во введении, одно из семейств, на котором будем изучать действие группы $\mathbb{R}_+$, — это собственный класс Громова—Хаусдорфа. Напомним соответствующие определения.

В теории множеств фон Неймана—Бернайса—Гёделя (NGB) все объекты называются *классами*, см., например, [2]. Классы бывают двух типов: множества, которые определяются как классы, являющиеся элементами других классов, и *собственные классы*, которые не являются элементами никаких других классов. На классах определены многие стандартные операции, скажем, декартово произведение, отображение и т. д. В частности, на каждом классе можно задать функцию расстояния. Будем пользоваться следующей терминологией:

- (i) *функцией расстояния* или, короче, *расстоянием* на классе $\mathcal{A}$ будем называть произвольное отображение $\rho: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, для которого всегда $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

- (ii) если расстояние удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. если всегда выполняется

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

то ρ назовем *обобщенной псевдометрикой* (слово «обобщенный» отвечает возможности принимать значение ∞);

- (iii) если для обобщенной псевдометрики дополнительно выполняется условие положительной определенности, т.е. если всегда $\rho(x, y) = 0$ влечет $x = y$, то такое ρ назовем *обобщенной метрикой*;
- (iv) наконец, если ρ не принимает значение ∞ , то в приведенных выше определениях слово «обобщенный» будем опускать, а иногда, чтобы подчеркнуть отсутствие ∞ , будем называть это расстояние *конечным*.

Как принято в метрической геометрии, вместо $\rho(x, y)$ будем почти всегда писать $|xy|$. Напомним теперь определения расстояния Хаусдорфа и Громова—Хаусдорфа.

2.1. Расстояние Хаусдорфа. Пусть X — произвольное метрическое пространство, $x \in X$, а $r > 0$ и $s \geq 0$ — вещественные числа. Через $U_r(x)$ и $B_s(x)$ будем обозначать соответственно *открытый* и *замкнутый шары* с центром в точке x и радиусами r и s . Если A и B — непустые подмножество X , то положим

$$|xA| = |Ax| = \inf \{|xa| : a \in A\}, \quad |AB| = |BA| = \inf \{|ab| : a \in A, b \in B\}.$$

Далее, определим *открытую r -окрестность* $U_r(A)$ и *замкнутую s -окрестность* $B_s(A)$ множества A , положив

$$U_r(A) = \{x \in X : |xA| < r\}, \quad B_s(A) = \{x \in X : |xA| \leq s\}.$$

Наконец, *расстоянием Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$d_H(A, B) = \inf \{r : A \subset U_r(B) \text{ \& } U_r(A) \supset B\} = \inf \{s : A \subset B_s(B) \text{ \& } B_s(A) \supset B\}.$$

Расстояние Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой: оно может быть бесконечным, как в случае прямой $\mathbb{R}$ и любой ее точки, а также равняться нулю между разными подмножествами, например, между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$. Тем не менее, на множестве, состоящем из всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств метрического пространства X , расстояние Хаусдорфа является метрикой [1].

2.2. Расстояние Громова—Хаусдорфа. Обозначим $\mathcal{VGH}$ собственный класс, состоящий из всех непустых метрических пространств. На этом классе зададим функцию расстояния, которая называется *расстоянием Громова—Хаусдорфа*:

$$d_{GH}(X, Y) = \inf \{d_H(X', Y') : X', Y' \subset Z \in \mathcal{VGH}, X' \approx X, Y' \approx Y\},$$

где для метрических пространств U и V выражение $U \approx V$ обозначает, что эти пространства изометричны.

Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 1 (см. [1]). *Расстояние Громова—Хаусдорфа является обобщенной псевдометрикой, равной нулю на каждой паре изометричных пространств.*

Эта теорема позволяет исследовать расстояние Громова—Хаусдорфа на собственном классе $\mathcal{GH}$, состоящем из представителей классов изометрии всех метрических пространств, по одному из каждого класса изометрии. Это похоже на рассмотрение всех множеств с точностью до биекции, т.е. рассмотрение собственного класса всех кардинальных чисел. Будем называть $\mathcal{GH}$ *классом Громова—Хаусдорфа*.

Приведем ряд простейших свойств класса $\mathcal{GH}$. Через $\Delta_1 \in \mathcal{GH}$ обозначим одноточечное метрическое пространство. Также для пространства $X \in \mathcal{GH}$ и вещественного числа $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое получается из X умножением всех его расстояний на λ . Если же $\lambda = 0$ и $\text{diam } X < \infty$, то положим $\lambda X = \Delta_1$.

Предложение 1 (см. [1]). Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняются следующие соотношения:

- (i) $2d_{GH}(\Delta_1, X) = \text{diam } X$;
- (ii) $2d_{GH}(X, Y) \leq \max\{\text{diam } X, \text{diam } Y\}$;
- (iii) если диаметр X или Y конечен, то $|\text{diam } X - \text{diam } Y| \leq 2d_{GH}(X, Y)$;
- (iv) если диаметр X конечен, то $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = \frac{1}{2}|\lambda - \mu| \text{diam } X$ для любых $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$;
- (v) для любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X, Y)$.

Рассмотрим на $\mathcal{GH}$ отношение $\sim$, определенное так. Будем говорить, что $X, Y \in \mathcal{GH}$ находятся в отношении $\sim$, если и только если $d_{GH}(X, Y) < \infty$. Легко видеть, что $\sim$ является эквивалентностью. Классы эквивалентности этого отношения назовем *облаками* (некоторые авторы используют термин *галактики*). Облако, содержащее метрическое пространство X , обозначим $[X]$. Ясно, что расстояние Громова—Хаусдорфа между точками одного облака конечно, а между точками разных облаков — бесконечно. Тем самым ограничение расстояния Громова—Хаусдорфа на облако является (конечной) псевдометрикой. Класс всех облаков из $\mathcal{GH}$ обозначим Clouds .

3. Основные результаты. Будем рассматривать три семейства метрических пространств и соответствующие действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ положительных вещественных чисел, состоящие в умножении всех расстояний в метрических пространствах на данные $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Эти действия будем изучать в терминах их стационарных подгрупп. Отметим, что корректность определения действия на классе Clouds мгновенно вытекает из предложения 1.

Напомним введенные выше обозначения для стационарных подгрупп G в каждом из трех случаев.

1. Если $X \subset V$ — непустое подмножество нормированного векторного пространства X , то $G = \text{St}_V X$.
2. Если $X \in \mathcal{GH}$, то $G = \text{St } X$.
3. Если $[X] \in \text{Clouds}$, то $G = \text{St}[X]$.

Отметим, что если $\lambda \in \text{St } X$, то пространства X и λX изометричны и, значит, находятся в одном облаке, поэтому $\lambda \in \text{St}[X]$. Тем самым имеет место следующий результат.

Предложение 2. Для любого $X \in \mathcal{GH}$ выполняется $\text{St } X \subset \text{St}[X]$.

В случае нормированного векторного пространства V и непустого $X \subset V$, каждое $\lambda \in \text{St}_V X$ переводит $X \subset V$ в себя, поэтому пространства λX и X изометричны. С учетом предложения 2, приходим к следующему выводу.

Предложение 3. Для любого нормированного пространства V и его непустого подмножества X выполняется $\text{St}[X] \supset \text{St } X \supset \text{St}_V X$. В частности, если $\text{St}[X] = \text{St}_V X$, то $\text{St}[X] = \text{St } X = \text{St}_V X$.

Замечание 1. Приведем примеры, показывающие, что все возможные соотношения включения между $\text{St}[X]$, $\text{St } X$ и $\text{St}_V X$, кроме «запрещенных» предложением 3, могут встречаться. Итак, пусть снова X — непустое подмножество нормированного пространства V .

1. Все три стабилизатора могут совпадать: $\text{St}[X] = \text{St } X = \text{St}_V X$. Например, пусть $X = \{3^l\}_{l \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$. Тогда в силу теоремы 3 (см. ниже) имеем $\text{St}[X] = \{3^l\}_{l \in \mathbb{Z}} = \text{St } X = \text{St}_{\mathbb{R}} X$.
2. Может иметь место $\text{St}[X] \neq \text{St } X = \text{St}_V X$. Например, если $X = \{3^l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, то $\text{St } X = \text{St}_{\mathbb{R}} X = \{1\}$, но $3 \in \text{St}[X]$.
3. Может выполняться $\text{St}[X] = \text{St } X \neq \text{St}_{\mathbb{R}} X$. Например, если $X = \{1 + 3^l\}_{l \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, то X изометрично $\{3^l\}_{l \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, поэтому $\text{St}[X] = \text{St } X$, в частности, $3 \in \text{St } X$. Но $3X \neq X$, поэтому $3 \notin \text{St}_{\mathbb{R}} X$.
4. Все три стабилизатора могут быть различными: $\text{St}[X] \neq \text{St } X \neq \text{St}_V X \neq \text{St}[X]$. Например, это так для $X = \sqrt{2} + \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Действительно, так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+$ множество λX всюду плотно в $\mathbb{R}$, то все эти множества лежат в одном облаке, поэтому $\text{St}[X] = \mathbb{R}_+$. Далее, если $\lambda \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$, то $\lambda \mathbb{Q}$ изометрично $\mathbb{Q}$ и, значит, $\sqrt{2} + \mathbb{Q} = X$ изометрично $\lambda\sqrt{2} + \lambda\mathbb{Q} = \lambda X$, поэтому $\lambda \in \text{St } X$. Если же $\lambda \in \mathbb{R}_+$ иррационально, то расстояния между разными точками из λX тоже иррациональны, а между точками в X —

рациональны, так что $\lambda \notin \text{St } X$. Итак, $\text{St } X = \mathbb{Q}$. Наконец, если $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то, в силу предложения 3, $\text{St}_{\mathbb{R}} X \subset \text{St } X = \mathbb{Q}$. Однако если для $\lambda \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$ выполняется $\lambda X = X$, то для каждого $q_1 \in \mathbb{Q}$ существует $q_2 \in \mathbb{Q}$ такое, что $\lambda(\sqrt{2} + q_1) = \sqrt{2} + q_2$, т.е. $\sqrt{2}(\lambda - 1) = q_2 - \lambda q_1$. Но для $\lambda \in \mathbb{Q}$, отличных от 1, это равенство не может иметь места, так как $\sqrt{2}$ — иррационально. Таким образом, $\text{St}_{\mathbb{R}} X = \{1\}$.

Замечание 2. Так как для каждого положительного $a > 0$ облака $[aX]$ и $[X]$ лежат в одной орбите действия коммутативной группы $\mathbb{R}_+$ на классе Clouds, то $\text{St}[aX] = \text{St}[X]$. Аналогично, имеет место равенство $\text{St}(aX) = \text{St } X$, а в случае, когда X — непустое подмножество нормированного векторного пространства V , то и равенство $\text{St}_V(aX) = \text{St}_V X$.

Структура мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ легче описывается с помощью изоморфизма $\lambda \mapsto \log \lambda$, действующего из $\mathbb{R}_+$ в аддитивную группу $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел. Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 2. Каждая подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел — или замкнутое подмножество вида $a\mathbb{Z}$, где $a \geq 0$ — некоторое вещественное число, или же всюду плотное подмножество. Таким образом, каждая подгруппа в $\mathbb{R}_+$ или равна единичной подгруппе $\{1\}$, или имеет вид $G_p := \{p^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ для некоторого вещественного $p > 1$, или же всюду плотна в $\mathbb{R}_+$. Более того, у подгруппы вида G_p , $p > 1$, имеется ровно две образующих, а именно, p и $1/p$.

Для действительного числа $q > 1$ рассмотрим на числовой прямой бесконечное неограниченное подмножество

$$X_q = \{q^l : l \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R} \quad (1)$$

с естественной метрикой, индуцированной из прямой. Облако, в которое входит метрическое пространство X_q , будем, как и выше, обозначать $[X_q]$. Наша основная задача — изучить стабилизаторы $\text{St}[X_q]$, $\text{St } X_q$ и $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q$.

Замечание 3. Отметим, что хотя X_q и G_q совпадают как подмножества прямой, мы ввели для них разные обозначения. Это связано с тем, что первый из этих объектов рассматривается как метрическое пространство, а второй — как группа.

Начнем со следующего элементарного наблюдения.

Предложение 4. Для каждого $q > 1$ и $a > 0$ выполняется соотношение

$$\text{St}[aX_q] = \text{St}[X_q] \supset \text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q = \text{St}_{\mathbb{R}}(aX_q).$$

Доказательство. Равенства $\text{St}[aX_q] = \text{St}[X_q]$ и $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = \text{St}_{\mathbb{R}}(aX_q)$ являются частными случаями замечания 2. Проверим равенство $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$. Для этого заметим, что при каждом $l \in \mathbb{Z}$ выполняется $q^l X_q = X_q$. Обратно, если $bX_q = X_q$ для некоторого $b > 0$, то $b \cdot 1 = q^l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$. Включение $\text{St}[X_q] \supset \text{St}_{\mathbb{R}} X_q$ является частным случаем предложения 3. $\square$

Замечание 4. Так как для каждого $q > 1$ множество $\{q^l : l \in \mathbb{Z}, l < 0\} \subset X_q$ ограничено, то для каждого $a > 0$ метрическое пространство aX_q и геометрическая прогрессия $\{aq^l : l \in \mathbb{Z}, l \geq 0\}$, рассматриваемая также как метрическое пространство, лежат в одном облаке. Таким образом, мы заодно изучаем и стабилизаторы облаков неограниченных геометрических прогрессий.

Приведем основные наши результаты. Пусть q_m — максимальный корень уравнения

$$(q - 1)^{m+1} = q.$$

Например, если $m = 1$, то $q_1 = (3 + \sqrt{5})/2$.

Предложение 5. Функция $f(q) = (q - 1)^{m+1} - q$ строго монотонно возрастает на участке $[2, \infty)$, причем $f(2) < 0$ и $f(q) \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow +\infty$, поэтому максимальный корень q_m уравнения $(q - 1)^{m+1} = q$ — это единственный ноль функции f на $[2, \infty)$. Кроме того, $q_m < 2 + 1/m$, а при росте m корень q_m строго монотонно убывает и, значит, стремится к 2.

Доказательство. Монотонность функции f вытекает из того, что

$$f'(q) = (m+1)(q-1)^m - 1 > 0 \quad \text{при } q \geq 2.$$

Таким образом, на участке $(2, q_m)$ функция f отрицательна, а на (q_m, ∞) — положительна. Далее,

$$f\left(2 + \frac{1}{m}\right) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} - 2 - \frac{1}{m} = 1 + \frac{m+1}{m} + c - 2 - \frac{1}{m} = c,$$

где $c > 0$ в силу $m+1 \geq 2$. Так как $2 + 1/m > 2$, то $2 + 1/m > q_m$.

Наконец, покажем, что $q_m > q_n$ при $n > m$. Действительно, предположим противное, т.е. $q_m \leq q_n$. Тогда, как было отмечено выше, $f(q_n) = (q_n - 1)^{m+1} - q_n \geq 0$. Однако, если положить $k = n - m \geq 1$, то

$$q_n = (q_n - 1)^{n+1} = (q_n - 1)^{m+1}(q_n - 1)^k,$$

и так как $(q_n - 1)^k > 1$, то $f(q_n) = (q_n - 1)^{m+1} - q_n < 0$, противоречие. $\square$

Теорема 3. Если $q \geq q_1$, то $\text{St}[X_q] = G_q = \{q^l : l \in \mathbb{Z}\} = \text{St } X_q = \text{St}_{\mathbb{R}} X_q$.

В следующей теореме заменим неравенство $q \geq q_1$ на $q \geq q_m$, тем самым расширив, в силу предложения 5, область определения q , что в пределе даст нам весь промежуток $(2, \infty)$. Отметим, что это расширение приведет к увеличению неопределенности в определении $\text{St}[X_q]$. Авторам неизвестно, является ли эта «неопределенность» действительным фактором, или же свойством их доказательства.

Теорема 4. Если $q \geq q_m$, то $\text{St}[X_q] = G_{\sqrt[n]{q}} = \{q^{l/n} : l \in \mathbb{Z}\}$ для некоторого натурального $n \leq m$.

Замечание 5. Если в теореме 4 существует q , для которого $n \geq 2$, то $\text{St}[X_q] \neq \text{St}_{\mathbb{R}} X_q$.

В следующей теореме заменим ограничение $q \geq q_m$ на самое общее $q > 1$. Если в теореме 4 «неопределенность» была ограничена конечным набором натуральных $n \leq m$, то теперь на n ограничения сверху отсутствуют. Как и выше, авторам неизвестно, насколько эта «неопределенность» свойственна самой задаче.

Теорема 5. Для всякого $q > 1$ существует такое натуральное n , что $\text{St}[X_q] = \{q^{l/n} : l \in \mathbb{Z}\}$.

Оказывается, для рациональных $q > 1$ вся «неопределенность» пропадает. Доказательство этого факта существенно опирается на доказательство теоремы 5.

Теорема 6. Для всякого рационального $q > 1$ выполняется

$$\text{St}[X_q] = G_q = \{q^l : l \in \mathbb{Z}\} = \text{St } X_q = \text{St}_{\mathbb{R}} X_q.$$

Соберем полученные выше результаты для того, чтобы наглядно представить геометрию действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ в рассматриваемом случае.

Следствие 1. Для $q \geq q_1$ или $q \in \mathbb{Q}$, а также произвольных вещественных $p > 1$, $a > 0$ и $b > 0$, следующие условия эквивалентны.

1. Облака $[aX_p]$ и $[bX_q]$ метрических пространств aX_p и bX_q лежат в одной орбите действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ на классах Громова—Хаусдорфа.
2. Стабилизаторы пространств aX_p и bX_q совпадают: $\text{St}(aX_p) = \text{St}(bX_q)$.
3. Имеет место равенство $p = q$.
4. Пространства aX_p и bX_q , рассматриваемые как подмножества прямой $\mathbb{R}$, лежат в одной орбите действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ на подмножествах $\mathbb{R}$, в частности, $\text{St}_{\mathbb{R}}(aX_p) = \text{St}_{\mathbb{R}}(bX_q)$.

Следствие 2. Для $q \geq q_1$ или $q \in \mathbb{Q}$, а также произвольных вещественных $p > 1$, $a > 0$ и $b > 0$, следующие условия эквивалентны.

1. Метрические пространства aX_p и bX_q лежат в одном облаке: $[aX_p] = [bX_q]$.
2. Стабилизаторы пространств aX_p и bX_q совпадают, т.е. $\text{St}(aX_p) = \text{St}(bX_q)$, и $a/b = q^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

3. Имеют место равенства $p = q$ и $a/b = q^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.
 4. Пространства aX_p и bX_q совпадают как подмножества прямой $\mathbb{R}$.

Следствие 3. Если $q > 1$, $p > 1$, и пространства aX_p и bX_q лежат в одной и той же орбите действия мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ на классе Громова–Хаусдорфа, то $p^n = q^k$ для некоторых натуральных чисел n и k .

Перейдем к доказательству основных результатов. Нам понадобятся следующие технические утверждения.

3.1. Достаточное условие бесконечности расстояния Громова–Хаусдорфа. Для пары (X, Y) метрических пространств положим

$$\varphi_Y(x, x') = \inf_{y, y' \in Y} ||xx' - yy'||, \quad \Phi(X, Y) = \sup_{x, x' \in X} \varphi_Y(x, x').$$

Предложение 6. Пусть Z — произвольное метрическое пространство и $r > 0$ — вещественное число. Тогда для произвольных непустых $X, Y \subset Z$, удовлетворяющих условию $X \subset U_r(Y)$, выполняется $\Phi(X, Y) \leq 2r$.

Доказательство. Согласно условию, для любой точки $x \in X$ существует такая точка $y(x) \in Y$, что $|y(x)x| < r$. По неравенству треугольника

$$|xx'| \leq |xy(x)| + |y(x)y(x')| + |y(x')x'| \quad \text{и} \quad |y(x)y(x')| \leq |xy(x)| + |xx'| + |y(x')x'|,$$

откуда

$$2r > |xy(x)| + |y(x')x'| \geq ||xx' - y(x)y(x')|| \geq \inf_{y, y' \in Y} ||xx' - yy'|| = \varphi_Y(x, x'),$$

и, значит, $\Phi(X, Y) = \sup_{x, x' \in X} \varphi_Y(x, x') \leq 2r$, что и требовалось. $\square$

Следствие 4. Пусть X и Y — метрические пространства, для которых $\Phi(X, Y) = \infty$. Тогда $d_{GH}(X, Y) = \infty$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $d_{GH}(X, Y) < \infty$, тогда для любого конечного $r > d_{GH}(X, Y)$ существует метрическое пространство Z и два его подмножества X' и Y' , изометричные соответственно X и Y , причем $d_H(X', Y') < r$, откуда $X' \subset U_r(Y')$. По предложению 6, имеем $\Phi(X', Y') \leq 2r$, но, в силу изометричности, выполняется $\Phi(X, Y) = \Phi(X', Y')$, противоречие. $\square$

3.2. Доказательство теорем 3 и 4. Для вещественного $q > 1$ и натурального i следующие полуинтервалы нам пригодятся в дальнейшем:

$$I_{q,i} = \left[\left(\frac{q}{q-1} \right)^{1/i}, q^{1/i} \right).$$

Например, при $i = 1$ получаем

$$I_{q,1} = \left[\frac{q}{q-1}, q \right).$$

Так как при $q > 1$ неравенство $q^{1/i}/(q-1)^{1/i} < q^{1/i}$ равносильно $1/(q-1) < 1$, а решение последнего неравенства — это $q > 2$, получаем следующий результат.

Предложение 7. Все полуинтервалы $I_{q,i}$ или одновременно пусты, или нет. Они непусты, если и только если $q > 2$.

Предложение 8. Если $q > 2$, то $\text{St}[X_q] \cap I_{q,1} = \emptyset$.

Доказательство. Выберем произвольное $\lambda \in I_{q,1}$ и покажем, что $d_{GH}(X_q, \lambda X_q) = \infty$. Для доказательства этого факта воспользуемся следствием 4, в силу которого достаточно проверить, что $\Phi(X_q, \lambda X_q) = \infty$.

Так как $0 < \lambda < q$, то $1 - \lambda/q > 0$, поэтому существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $1 - \lambda/q > 1/q^s$, так что $\delta := 1 - \lambda/q - 1/q^s > 0$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $n > s$, положим $k = n - s < n$, оценим величину

$$\varphi_{\lambda X_q}(q^n, q^k) = \inf \{ |q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l| : m, l \in \mathbb{Z}, m \geq l \}$$

и покажем, что при $k \rightarrow \infty$ выполняется $\varphi_{\lambda X_q}(q^n, q^k) \rightarrow \infty$, откуда и вытекает требуемое $\Phi(X_q, \lambda X_q) = \infty$.

Пусть сначала $m = l$; тогда

$$|q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l| = q^n - q^k = q^k(q^s - 1) > q^k,$$

так как $q^s > 2$. Пусть теперь $m > l$. Если $m \geq n$, то

$$\lambda q^m - \lambda q^l - q^n + q^k \geq \lambda q^m - \lambda q^{m-1} - q^m + q^k = q^m \left(\lambda - \frac{\lambda}{q} - 1 \right) + q^k = q^m \left(\lambda \frac{q-1}{q} - 1 \right) + q^k \geq q^k,$$

где последнее неравенство вытекает из условия $\lambda \in I_{q,1}$, которое дает $\lambda \geq q/(q-1)$. Таким образом, получаем

$$|q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l| = \lambda q^m - \lambda q^l - q^n + q^k \geq q^k.$$

Если же $m < n$, то

$$q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l \geq q^n - q^k - \lambda q^{n-1} + \lambda q^l = q^n \left(1 - \frac{1}{q^s} - \frac{\lambda}{q} \right) + \lambda q^l > \delta q^n,$$

где последнее неравенство вытекает из того, что $\lambda q^l > 0$. Таким образом, в этом случае имеем

$$|q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l| = q^n - q^k - \lambda q^m + \lambda q^l \geq \delta q^n.$$

Итак, мы показали, что $\varphi_{\lambda X_q}(q^n, q^k) \geq \min\{q^k, \delta q^n\} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, что и требовалось. $\square$

Следующее предложение описывает ряд алгебраических свойств множества $\mathbb{R}_+ \setminus \text{St}[X_q]$.

Предложение 9. Для каждого $h \notin \text{St}[X_q]$, $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$ элементы h^{-1} , $h^{1/n}$ и $q^l h$ также не принадлежат $\text{St}[X_q]$.

Доказательство. Так как $\text{St}[X_q]$ — мультипликативная группа, то $h^{-1} \in \text{St}[X_q]$ или $h^{1/n} \in \text{St}[X_q]$ влечет $h \in \text{St}[X_q]$, противоречие. Если же $q^l h \in \text{St}[X_q]$, то так как, в силу предложения 4, выполняется $G_q \subset \text{St}[X_q]$, имеем $h = q^{-l} q^l h \in \text{St}[X_q]$, противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 3. Заметим, что $q_1 > 2$, поэтому применимо предложение 8. Из предложений 8 и 9 вытекает, что полуинтервалы

$$\left(\frac{1}{q}, \frac{q-1}{q} \right] = \left[\frac{q}{q-1}, q \right)^{-1}, \quad (1, q-1] = q \left(\frac{1}{q}, \frac{q-1}{q} \right]$$

не пересекают $\text{St}[X_q]$.

Если $q \geq q_1$, то $(q-1)^2 \geq q$, так как q_1 — максимальный корень уравнения $(q-1)^2 = q$, а «правее» q_1 парабола $(q-1)^2 - q$ находится выше оси абсцисс. Отсюда вытекает, что $q/(q-1) \leq q-1$, поэтому

$$(1, q) = (1, q-1] \cup \left[\frac{q}{q-1}, q \right).$$

По предложению 8, имеем $(1, q) \cap \text{St}[X_q] = \emptyset$. Осталось заметить, что

$$\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} q^l (1, q) = \mathbb{R}_+ \setminus G_q$$

не пересекает $\text{St}[X_q]$ в силу того же предложения 8, поэтому $\text{St}[X_q] \subset G_q$, но $G_q \subset \text{St}[X_q]$ и, значит, $\text{St}[X_q] = G_q$. Для завершения доказательства осталось заметить, что, по предложению 4, имеем $\text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$, откуда, в силу предложения 3, получаем $\text{St}[X_q] = \text{St} X_q = \text{St}_{\mathbb{R}} X_q = G_q$. $\square$

Доказательство теоремы 4. Так как, в силу предложения 5, выполняется $q_m > 2$, то применимо предложение 8 и, значит, непустой полуинтервал $I_{q,1}$ не содержит точек из $\text{St}[X_q]$, поэтому $\text{St}[X_q]$ не является всюду плотной подгруппой в $\mathbb{R}_+$. По теореме 2, группа $\text{St}[X_q]$ или равна $\{1\}$, или содержит бесконечную подгруппу G_p для некоторого $p > 1$. Так как $\text{St}[X_q]$, в силу предложения 4, содержит бесконечную подгруппу G_q , то $\text{St}[X_q] = G_p$. Так как $q \in \text{St}[X_q]$, то $q = p^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, откуда $p = q^{1/n}$. Так как $q > 1$ и $p > 1$, то $n > 0$.

Как и в доказательстве теоремы 3, заключаем, что полуинтервал $(1, q-1]$ не пересекает $\text{St}[X_q]$. Кроме того, из предложений 8 и 9 вытекает, что полуинтервал $I_{q,m}$ не пересекает $\text{St}[X_q]$. Как было отмечено выше, при $q \geq q_m$ выполняется $(q-1)^{m+1} \geq q$, поэтому при таких q имеем

$$\left(\frac{q}{q-1}\right)^{1/m} \leq q-1$$

и, значит, интервал $(1, q^{1/m}) = (1, q-1] \cup I_{q,m}$ не пересекает $\text{St}[X_q]$. В частности, $q^{1/n} \geq q^{1/m}$, так что $n \leq m$. $\square$

3.3. Доказательство теоремы 5. Покажем, что $\text{St}[X_q]$ не может быть всюду плотным в $\mathbb{R}_+$, откуда, в силу теоремы 2, получим $\text{St}[X_q] = G_p$. В заключение повторим рассуждения из доказательства теоремы 4 и покажем, что $p = q^{1/n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Итак, нам осталось доказать следующий результат.

Предложение 10. Для любого $q > 1$ множество $\mathbb{R}_+ \setminus \text{St}[X_q]$ содержит некоторый интервал.

Доказательство. Для $l \in \mathbb{Z}$ рассмотрим функцию $\varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l)$ и покажем, что существует интервал $(a, b) \subset (1, q)$, для которого при каждом $\lambda \in (a, b)$ выполняется $\sup_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l) = \infty$ и, значит,

$$\Phi(\lambda X_q, X_q) \geq \sup_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l) = \infty.$$

В силу следствия 4, все такие λ не лежат в $\text{St}[X_q]$, поэтому $(a, b) \subset \mathbb{R}_+ \setminus \text{St}[X_q]$, что и завершит доказательство.

Итак, выберем произвольные целые числа $n \geq k$ и положим $n = B + k$, так что $B \geq 0$. Если $B = 0$, то

$$|\lambda q^{l+1} - \lambda q^l - q^n + q^k| = \lambda q^l(q-1).$$

Пусть теперь $B > 0$, тогда

$$|\lambda q^{l+1} - \lambda q^l - q^n + q^k| = |\lambda q^l(q-1) - q^k(q^B - 1)| = q^l(q-1) \left| \lambda - q^i \frac{q^B - 1}{q-1} \right|,$$

где $i = k - l \in \mathbb{Z}$. Положим $\lambda_{B,i} = q^i(q^B - 1)/(q-1)$ и $\Lambda = \{\lambda_{B,i} : B \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}\} \cap (1, q)$.

Лемма 1. Пусть $\bar{\Lambda}$ обозначает замыкание множества Λ в интервале $(1, q)$. Тогда $(1, q) \setminus \bar{\Lambda}$ не пересекает $\text{St}[X_q]$.

Доказательство. Так как $(1, q) \setminus \bar{\Lambda}$ — открытое множество, каждое $\lambda \in (1, q) \setminus \bar{\Lambda}$ находится на некотором положительном расстоянии ε_λ от $\Lambda \cup \{1, q\}$, откуда

$$|\lambda q^{l+1} - \lambda q^l - q^n + q^k| \geq \varepsilon_\lambda q^l(q-1),$$

поэтому

$$\varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l) = \inf\{|\lambda q^{l+1} - \lambda q^l - q^n + q^k| : n, k \in \mathbb{Z}, n \geq k\} \geq \min(\varepsilon_\lambda, 1) q^l(q-1),$$

и, значит,

$$\sup_{l \in \mathbb{Z}} \varphi_{X_q}(\lambda q^{l+1}, \lambda q^l) \geq \sup_{l \in \mathbb{Z}} \min(\varepsilon_\lambda, 1) q^l(q-1) = \infty,$$

что и требовалось. $\square$

В заключение покажем, что $(1, q) \setminus \bar{\Lambda} \neq \emptyset$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Если для некоторого $B \in \mathbb{N}$ выполняется $\lambda_{B,i} \in (1, q)$, то при всех $j \in \mathbb{Z}, j \neq i$, имеем $\lambda_{B,j} \notin (1, q)$.

Доказательство. Так как $1 < \lambda_{B,i} < q$, то при $j > i$ имеем $\lambda_{B,j} = q^{j-i} \lambda_{B,i} > q^{j-i} \geq q$, а при $j < i$ выполняется $\lambda_{B,j} = \lambda_{B,i} / q^{i-j} < q / q^{i-j} \leq 1$. $\square$

Число $B \in \mathbb{N}$, для которого $\lambda_{B,i} \in (1, q)$, назовем *критическим*. Из леммы 2 вытекает, что для каждого критического B однозначно определено i , для которого $\lambda_{B,i} \in (1, q)$. Напомним, что множество всех таких $\lambda_{B,i}$ мы обозначили Λ . Из сказанного выше вытекает, что Λ представляет собой последовательность, занумерованную последовательными критическими B .

Выясним, как выглядят все предельные точки множества Λ .

Лемма 3. *Все предельные точки множества $\Lambda \subset \mathbb{R}$ имеют вид $q^k / (q - 1) \in [1, q]$, где $k \in \mathbb{Z}$. В частности, интервал $(1, q)$ содержит не более одной такой точки.*

Доказательство. Ясно, что все предельные точки множества Λ являются пределами подпоследовательностей в последовательности Λ . Иными словами, для каждой предельной точки A для Λ существует последовательность критических $B_j \rightarrow \infty$ и соответствующих им i_j такая, что $\lambda_{B_j, i_j} \rightarrow A$ при $j \rightarrow \infty$. Так как при $B_j \rightarrow \infty$ выполняется $(q^{B_j} - 1) / (q - 1) \rightarrow \infty$, а все λ_{B_j, i_j} лежат между 1 и q , то $i_j \rightarrow -\infty$. Отсюда вытекает, что $q^{i_j} / (q - 1) \rightarrow 0$, поэтому

$$A = \lim_{j \rightarrow \infty} q^{i_j} \frac{q^{B_j} - 1}{q - 1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{q^{B_j + i_j}}{q - 1} - \frac{q^{i_j}}{q - 1} \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{q^{B_j + i_j}}{q - 1}.$$

Так как $B_j + i_j \in \mathbb{Z}$ и $A > 0$, заключаем, что $B_j + i_j = \text{const}$ для достаточно больших j и, значит, A имеет вид $q^k / (q - 1)$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Осталось заметить, что если $q^k / (q - 1) \in (1, q)$, то для $m \in \mathbb{N}$ имеем $q^{k+m} / (q - 1) > q$ и $q^{k-m} / (q - 1) < 1$. $\square$

Из леммы 3 вытекает, что $(1, q) \setminus \bar{\Lambda} \neq \emptyset$. Доказательство предложения, а вместе с ним, и теоремы 5, закончено. $\square$

3.4. Доказательство теоремы 6. Предположим противное. В силу теоремы 5 существует $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, такое, что $q^{1/n} \in \text{St}[X_q]$. Так как $q > 1$, то $q^{1/n} \in (1, q)$. Покажем, что для рациональных q этого не может быть.

В доказательстве теоремы 5 мы построили множество Λ критических точек, лежащих в интервале $(1, q)$, выяснили, как выглядят точки из замыкания $\bar{\Lambda}$ множества Λ , а также показали, что открытое множество $(1, q) \setminus \bar{\Lambda}$ непусто и не пересекает $\text{St}[X_q]$. Таким образом, для доказательства теоремы 6 достаточно проверить, что $q^{1/n}$ не содержится в $\bar{\Lambda}$.

Напомним, что точки из Λ имеют вид $\lambda_{B,i} = q^i (q^B - 1) / (q - 1)$ для некоторых $B \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{Z}$, а предельные точки множества Λ — это $q^k / (q - 1)$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $q = s/t$, где $s, t \in \mathbb{N}$, причем s и t взаимно просты.

1. Покажем, что $q^{1/n}$ не равно $q^i (q^B - 1) / (q - 1)$ ни при каких $B \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{Z}$. Предположим противное, т.е. что $q^{1/n} = q^i (q^B - 1) / (q - 1)$ для некоторых n, i и B . Тогда

$$q(q - 1)^n = \frac{s(s - t)^n}{t^{n+1}} = q^{in} (q^B - 1)^n = \frac{s^{in} (s^B - t^B)^n}{t^{i+Bn}}.$$

Так как s и t взаимно просты не только между собой, но и с $s - t$ и $s^B - t^B$, заключаем, что $in = 1$, откуда $n = 1$, противоречие.

2. Покажем теперь, что $q^{1/n}$ не равно $q^k / (q - 1)$ ни при каком $k \in \mathbb{Z}$. Предположим противное, т.е. что $q^{1/n} = q^k / (q - 1)$ для некоторых n и k . Тогда

$$q(q - 1)^n = \frac{s(s - t)^n}{t^{n+1}} = q^{kn} = \frac{s^{kn}}{t^{kn}}.$$

Так как s и t взаимно просты не только между собой, но и с $s - t$ и $s^B - t^B$, заключаем, что $kn = 1$ и $kn = n + 1$, противоречие.

3.5. Доказательство следствия 1. Импликации $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$ очевидны. Осталось доказать $2 \Rightarrow 3$. Согласно теоремам 3, 6 и замечанию 2 имеем

$$G_p = \text{St}(X_p) = \text{St}(aX_p) = \text{St}(X_q) = \text{St}(bX_q) = G_q.$$

Так как $p > 1$ и $q > 1$, то по теореме 2 имеем $p = q$.

3.6. *Доказательство следствия 2.* Импликация $2 \Rightarrow 3$ вытекает из следствия 1. Импликации $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ очевидны. Осталось доказать $1 \Rightarrow 2$.

Так как пространства aX_p и bX_q лежат в одном облаке, их облака лежат в одной орбите действия группы $\mathbb{R}_+$, поэтому, в силу следствия 1, имеем $p = q$. Далее, пространства aX_q и bX_q лежат в одном облаке, если и только если в одном облаке лежат X_q и $(b/a)X_q$, что эквивалентно $b/a \in \text{St}[X_q]$. По теореме 3 имеем $b/a = q^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

3.7. *Доказательство следствия 3.* Раз пространства aX_p и bX_q лежат в одной и той же орбите, то и их облака также лежат в одной и той же орбите, поэтому, в силу предложения 4, имеем $\text{St}[aX_p] = \text{St}[bX_q] = \text{St}[X_p] = \text{St}[X_q]$. По теореме 5 $\text{St}[X_p] = \{p^{l/k}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $\text{St}[X_q] = \{q^{m/n}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. По теореме 2 $p^{\pm 1/k} = q^{\pm 1/n}$ для некоторого выбора знаков, но так как $p > 1$ и $q > 1$, получаем $p^{1/k} = q^{1/n}$, откуда $p^n = q^k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. — М.-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2004.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1984.
3. Edwards D. The structure of superspace// in: Studies in Topology (Stavarakas N. M., Allen K. R., ed.). — New York–London–San Francisco: Academic Press, 1975. — P. 121–133.
4. Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. — CEDIC/Fernand Nathan, 1981.
5. Gromov M. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. — Birkhäuser, 1999.

Богатый Семеон Антонович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: bogatyi@inbox.ru

Тужилин Алексей Августинovich

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuz@mech.math.msu.su