



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 10–29
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-10-29

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

© 2022 г. А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является первой частью работы; продолжение будет опубликовано в следующих выпусках.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h -пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES. I. PRELIMINARIES

© 2022 A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV

ABSTRACT. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the first part of the work; continuation will be published in future issues.

Keywords and phrases: differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h -space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

AMS Subject Classification: 53Z05

ВВЕДЕНИЕ

Теория групп проективных преобразований псевдоримановых пространств является одним из активно развивающихся разделов дифференциальной геометрии, имеющих приложения в теории дифференциальных уравнений и анализе, а также в теоретической и математической физике.

Проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий уравнений математической физики. Достаточно упомянуть, что алгебра Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнения Кортевега—де Фриза является подалгеброй проективной, точнее, аффинной алгебры Ли, а уравнение Риккати можно рассматривать как «своеобразную реализацию» группы проективных преобразований на прямой (см. [17]).

Концепция теории групп была предложена Э. Галуа во время его работы над алгебраическими проблемами. К. Джордан нашел дальнейшее применение теории групп. Теория непрерывных групп была основана С. Ли. Исследуя возможность использования расширенных методов Галуа для решения задач, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений, Ли обнаружил новый тип групп, которые он назвал непрерывными группами преобразований (в наше время они называются группами Ли).

Впервые задача определения римановых пространств V^n , допускающих непрерывные группы проективных преобразований, рассматривалась С. Ли и затем учеником Г. Дарбу М. Кёнигсом для случая двумерных поверхностей. Дальнейшее развитие теории проективных преобразований и проективных движений (инфинитезимальных проективных преобразований) в пространствах с линейной связностью связано с именами таких известных математиков, как Э. Картан, Л. П. Эйзенхарт, М. С. Кнебельман, Я. А. Схоутен, К. Яно, И. П. Егоров, Г. Врэнчану, Ш. Кобаяси и др.

Проблема проективных преобразований в V^n тесно примыкает к проблеме геодезических отображений псевдоримановых пространств, которая в разное время рассматривалась Е. Бельтрами, У. Дини, Т. Леви-Чивита, Г. Фубини, Л. П. Эйзенхартом, П. А. Широковым, А. З. Петровым, Н. С. Синюковым, А. С. Солодовниковым, В. И. Голиковым, Г. И. Кручковичем, А. В. Аминовой и др. (см. [13]).

Как известно, в пространствах постоянной кривизны S^n проективная группа совпадает локально с проективной группой псевдоевклидова пространства, т.е. с группой дробно-линейных подстановок, и зависит от $n(n+2)$ параметров.

В пространствах V^n непостоянной кривизны порядок проективной группы не превосходит числа $n(n-2)+5$ (см. [31]), причем в большинстве случаев эта группа состоит из преобразований подобия (гомотетий) или изометрий.

В 1903 г. в «Записках Туринской Академии наук» вышла работа Г. Фубини «О группах геодезических преобразований» [81], которая положила начало систематическому определению и изучению пространств с положительно определенными метриками, допускающих проективную группу более широкую, чем группа гомотетий. Позже А. С. Солодовников (см. [53], 1956 г.) продолжил исследования Г. Фубини; в трудах Фубини и Солодовникова содержится классификация собственно римановых пространств V^n , $n \geq 3$, по (локальным) группам проективных преобразований, более широким, чем группы гомотетий.

Выводы Фубини и Солодовникова опираются на предположение о положительной определенности рассматриваемых метрик. Снятие условия знакоопределенности значительно усложняет задачу и требует принципиально нового подхода к ее решению (см., например, [1–8, 12, 32–35]).

В 1987 г. вышла работа А. В. Аминовой [67] (см. также [68]), где в рамках метода подвижного репера была развита техника косономального репера, которая дала ключ к решению задачи в псевдоримановых пространствах общего вида. В работах А. В. Аминовой [1–8, 12] были найдены все лоренцевы многообразия размерности $n \geq 4$, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования, и для каждого из них — максимальная проективная и аффинная алгебра Ли, включая гомотетическую и изометрическую подалгебры.

Подобная задача для псевдоримановых пространств произвольной сигнатуры ранее не рассматривалась.

Поэтому представленное в данной работе исследование проективно-групповых свойств пятимерных псевдоримановых пространств общей сигнатуры в случае невырожденной характеристики Сегре производной Ли метрического тензора (так называемых жестких h -пространств, см. раздел 1.2) является актуальной задачей, имеющей важное теоретическое и прикладное значение.

В теоретической физике за последние годы значительно возрос интерес к использованию геометрических свойств многомерных, в частности, пятимерных пространств.

В 1919 г. Т. Калуцей была предложена идея геометризации электромагнитного поля в духе эйнштейновской теории тяготения с помощью увеличения на единицу числа пространственных координат; сейчас в литературе пятимерная теория называется теорией Калуцы—Клейна. Заслуга Клейна состоит в обобщении линеаризованного варианта теории Калуцы на общий случай.

В теории Калуцы—Клейна мир описывается пятимерным псевдоримановым пространственно-временным многообразием с квадратичной дифференциальной формой

$$dI^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 5. \quad (1)$$

Пятнадцать компонент пятимерного метрического тензора определяют десять компонент четырёхмерного метрического тензора и четыре компоненты векторного электромагнитного потенциала. Оставшаяся пятнадцатая компонента метрического тензора описывает некоторое скалярное поле.

В качестве уравнений поля используются пятимерные уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \tilde{\Lambda} g_{\alpha\beta} = \chi Q_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где $Q_{\alpha\beta}$ — пятимерный тензор энергии-импульса внешней материи. Из этих уравнений следуют аналоги четырёхмерных уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса электромагнитного поля и уравнения Максвелла. В качестве уравнений движения частиц берутся пятимерные уравнения геодезических

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dI^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dI} \frac{dx^\gamma}{dI}, \quad (3)$$

где $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ — пятимерные символы Кристоффеля. Теории с размерностью пространства больше пяти и с полевыми уравнениями, аналогичными уравнениям Эйнштейна, называются теориями типа Калуцы—Клейна.

В 1921 г. Калуца и Клейн показали, что при определенных условиях (таких как цилиндричность: $\partial g_{ij}/\partial x^5 = 0$, $i, j = 1, \dots, 4$) добавление пятого измерения может объяснить появление электромагнитного поля. Проблема заключается в том, что хотя сама модель является геометрической, условия типа цилиндричности не являются таковыми. Эта проблема была частично решена Эйнштейном и Бергманом, которые в своей статье 1938 года предположили, что пятое измерение компактифицируется в небольшую окружность S^1 , так что в полученном цилиндрическом пятимерном пространстве-времени $\mathbb{R}^4 \times S^1$ зависимость от x^5 макроскопически незаметна.

В работе [120] было показано, что если во всех определениях векторов, тензоров и т. д. заменить $\mathbb{R}^4$ на $\mathbb{R}^4 \times S^1$, то условия типа цилиндричности станут полностью геометрическими.

В работе А. П. Трунева [57] была развита модель фундаментальных взаимодействий на основе теории Калуцы—Клейна в пятимерном пространстве.

В работах [72] и [73] рассматривается $(4 + d)$ -мерное пространство-время с топологией $T \times V^3 \times V^d$, где V^3 и V^d — однородные и изотропные подпространства, причём V^d (внутреннее подпространство) компактно. Выбран упрощенный сценарий эволюции рассматриваемой модели: задается временная зависимость масштабных факторов подпространств V^3 и V^d , приближенно соответствующая полученным ранее решениям уравнений Эйнштейна. На этом фоне исследуются возмущения метрики с одним индексом четырёхмерного подпространства $T \times V^3$ и одним индексом внутреннего подпространства V^d . Сжатие масштаба внутреннего пространства (что необходимо для согласования с наблюдениями в настоящее время) приводит к возникновению в четырёхмерном физическом пространстве массивных полевых мод рассматриваемых возмущений, которые гипотетически связываются с наличием темной реликтовой материи во Вселенной.

Теорема о соответствии теории Калуцы—Клейна четырёхмерной эйнштейновской теории гравитации, взаимодействующей с электромагнетизмом, доказана в [70]. Получено точное решение вакуумных уравнений Эйнштейна в пятимерном пространстве, представляющее решение Боннора четырёхмерной теории Эйнштейна—Максвелла. Найденное решение описывает массивный источник, обладающий магнитным и дипольным моментами.

Стабильность вакуумных решений многомерных уравнений Эйнштейна (а значит, сохранение планковских размеров внутреннего пространства) в механизме спонтанной компактификации за счет эффекта Казимира достигается путем чрезмерного увеличения числа полей внешней материи. Для преодоления этого недостатка в [91] предложено использовать механизм нарушения

калибровочных симметрий с помощью петель Вильсона, активно используемый в теории суперструн. Рассмотрена космологическая модель

$$ds^2 = dt^2 - a_{ij}^2(t)dx^i dx^j - b^2(t)(dx^5)^2, \quad i, j = 1, \dots, 3,$$

содержащая внешние $SU(2)$ -калибровочные поля и взаимодействующие с ними спиноры. В правой части пятимерных уравнений Эйнштейна содержится тензор энергии-импульса, соответствующий однопетлевым вакуумным флуктуациям спинорных и калибровочных полей. Полученная из пятимерных уравнений Эйнштейна система уравнений для параметров $a(t)$ и $b(t)$ допускает стабильное решение при сравнительно малом числе спинорных полей.

В статье [88] рассматривается пятимерная космологическая модель с безмассовой 5-пылью в качестве источника. Зависимость от x^5 не учитывается, однако феноменологически вводится известный казимировский потенциал. Показано, что уравнения такой модели допускают решение, в котором три пространственных измерения расширяются во времени, а дополнительное измерение стягивается, причем скорость этих процессов определяется количеством 5-пыли во Вселенной. Строится обобщение на случай произвольного числа тороидальных дополнительных координат. Проводится обсуждение влияния потенциала Казимира на космологические сценарии и возможные его изменения, связанные с наличием во Вселенной тяжелых фермионов.

В статье [82] рассмотрено уравнение геодезических в пятимерной космологии Калуцы—Клейна. В качестве основного результата декларируется установление на качественном уровне того факта, что 5-скорость и другие величины в рассматриваемом случае будут зависеть не только от времени, но и от массы частицы. При сопоставлении полученных космологических уравнений с четырёхмерными уравнениями в случае материи в виде идеальной жидкости получен аналог метрики Фридмана—Робертсона—Уокера. Приводятся рассуждения о природе и динамике гравитационной постоянной.

В [122, 123] предложена новая интерпретация пятимерной теории, согласно которой дополнительные слагаемые в пятимерных вакуумных уравнениях Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = 0$ для метрик вида

$$ds^2 = e^{\nu(t,\psi)} dt^2 - e^{\Omega(t,\psi)} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - e^{\mu(t,\psi)} d\psi^2,$$

содержащих произвольные функции $\mu(t, \psi)$ и $\nu(t, \psi)$, отождествляются с правой частью соответствующего четырёхмерного уравнения для идеальной жидкости:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left[(p - \rho) u_\mu u_\nu - p q_{\mu\nu} \right].$$

Показано, что для некоторой не зависящей от ψ метрики (пятимерная метрика де Леона), являющейся решением уравнений указанного вида, четырёхмерный сектор соответствует фридмановской модели пространственноплоской Вселенной, заполненной излучением, подобное отождествление приводит к правильным зависимостям давления p и плотности ρ от времени. Для другой предложенной в этих работах метрики выбором свободного параметра удастся добиться соответствия на гиперплоскостях $\psi = \text{const}$ с пространственно-плоскими моделями Фридмана как в случае излучения, так и в случае пылевидной материи.

Целью данной работы является определение всех пятимерных жестких h -пространств H_χ , т.е. псевдоримановых многообразий (M^5, g) произвольной сигнатуры с (невыврожденной) характеристикой Сегре $\chi = \{r_1, \dots, r_k\}$, $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$, $r_1 + \dots + r_k = 5$, и вещественными собственными значениями производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении инфинитезимального преобразования X , допускающих (негомотетические) проективные и аффинные движения (т.е. инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования), и для каждого из них — определение структуры соответствующих максимальных проективной и аффинной алгебр Ли, включая классификацию h -пространств H_{221} типа $\{221\}$ по максимальным алгебрам Ли проективных и аффинных преобразований, более широким, чем алгебры Ли гомотетий.

Решение поставленной задачи основано на разбиении пространств (M^5, g) по типам в соответствии с алгебраической структурой билинейной формы $h = L_X g$ и включает следующие этапы:

- I. Интегрирование уравнений Эйзенхарта для каждого допустимого типа (1.20) h -пространств H_χ (см. раздел 1.2).

- II. Вычисление кривизны h -пространств H_χ и получение необходимых и достаточных условий постоянства кривизны исследуемых пространств.
- III. Нахождение общего решения уравнения Эйзенхарта для каждого h -пространства H_χ непостоянной кривизны.
- IV. Исследование структуры максимальных проективных и аффинных алгебр Ли, более широких, чем алгебры Ли гомотетий, для каждого из найденных h -пространств.
- V. Интегрирование обобщенных уравнений Киллинга $L_X g = h$ для h -пространств H_{221} типа $\{221\}$, включающих три класса h -пространств: $H_{221,1}$, $H_{221,2}$ и $H_{221,3}$.
- VI. Классификация h -пространств $H_{221,1}$, $H_{221,2}$ и $H_{221,3}$ типа $\{221\}$ непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований с указанием размерностей, базисных элементов и структурных уравнений максимальных проективных, аффинных, гомотетических и изометрических (под)алгебр Ли.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Полностью решена задача определения пятимерных жестких h -пространств H_χ , т.е. пятимерных псевдоримановых пространств (M^5, g) , допускающих нетривиальные решения $h \neq \text{const} \cdot g$ уравнения Эйзенхарта с вещественной невырожденной характеристикой Сегре χ (теоремы ??, ??, ?? и ??).
2. Для каждого из найденных h -пространств получены общие решения уравнения Эйзенхарта; каждому решению отвечает квадратичный первый интеграл уравнений геодезических (теоремы ??, ??, ?? и ??).
3. Найденны формы связности и кривизны пятимерных пространств H_χ . Получены необходимые и достаточные условия постоянства кривизны жестких h -пространств (теоремы ??, ??, ?? и ??).
4. Описаны свойства определяющих функций проективных движений и ковариантно постоянных симметричных тензоров в жестких h -пространствах (теоремы ??, ??, ??, и ??).
5. Установлены необходимые и достаточные условия существования в пятимерном пространстве негомотетического проективного движения заданного типа χ (теоремы ??, ??, ?? и ??) и любого допустимого типа (теоремы ??, ??, ?? и ??).
6. Показано, что аффинная алгебра Ли в жестком h -пространстве непостоянной кривизны состоит, самое большее, из гомотетий (теоремы ??, ??, ?? и ??).
7. Доказано, что если пятимерное жесткое h -пространство допускает негомотетическую проективную алгебру Ли P_r , то эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r - 1$ (теоремы ??, ??, ??, и ??).
8. Дана классификация h -пространств H_{221} непостоянной кривизны по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований; перечислены все проективно-подвижные h -метрики типа $\{221\}$ и указаны размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли (теоремы ??, ??, и ??).

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Псевдоримановы многообразия. Гладкое n -мерное многообразие M , на котором задано невырожденное симметричное тензорное поле g валентности $(0, 2)$, обладающее тем свойством, что для любой точки $p \in M$ билинейный функционал g_p на линейном пространстве $T_p M$ является скалярным произведением, называется псевдоримановым многообразием (см. [43, 58]).

Тензорное поле g называется метрическим тензором псевдориманова пространства, или просто метрикой.

Для любых гладких векторных полей X, Y на псевдоримановом пространстве M их свертка $g(X, Y)$ с тензором g является гладкой функцией на M . Эта функция называется скалярным произведением полей X, Y и обозначается символом $(X, Y) = g(X, Y)$. В локальной карте (x, U) функция (X, Y) определяется формулой

$$(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j,$$

где

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

— компоненты тензора g , а X^i и Y^j — компоненты векторных полей X и Y .

На псевдоримановом многообразии (M, g) существует единственная линейная связность ∇ , удовлетворяющая условиям

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle, \quad (1.1)$$

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y] \quad (1.2)$$

для всех дифференцируемых векторных полей X, Y, Z на M и называемая связностью Леви-Чивита или римановой связностью. Компоненты связности ∇ называются символами Кристоффеля.

Символы Кристоффеля, или Кристоффели первого и второго рода метрики g задаются формулами

$$\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}), \quad (1.3)$$

$$\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h = \frac{1}{2}g^{hk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \quad (1.4)$$

Компоненты тензора кривизны R_{jkl}^i определяются коэффициентами линейной связности Леви-Чивита и находятся по формуле

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i. \quad (1.5)$$

Для любого векторного поля X на гладком многообразии M существует линейное отображение $X : f \rightarrow Xf$ алгебры F_M вещественных функций на M в себя по правилу $(Xf)(p) = X_p f$, где $p \in M$, $X_p f$ — производная функции f вдоль вектора X_p , принадлежащего касательному пространству $T_p M$ к M в точке p (см. [13, 38]). Если $\xi^1, \dots, \xi^n$ — компоненты векторного поля X в карте (x, U) , то

$$Xf|_U = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \xi^i \partial_i f; \quad (1.6)$$

в частности,

$$Xx^i = \xi^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Множество χ_M всех дифференцируемых векторных полей на гладком многообразии M является вещественной алгеброй Ли бесконечной размерности относительно операции коммутирования (скобки Ли), определенной равенством

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

для всех функций f на M и $X, Y \in \chi_M$. Если $X = \xi^j \partial_j$ и $Y = \eta^j \partial_j$ в карте (x, U) , то согласно (1.6) имеем

$$[X, Y] = (\xi^j \partial_j \eta^i - \eta^j \partial_j \xi^i) \partial_i.$$

В частности, для координатных векторных полей $X_1 = \partial_1, \dots, X_n = \partial_n$ выполняются равенства

$$[X_i, X_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Гладкая кривая $\gamma = x_t$, $a < t < b$, где $-\infty \leq a < b \leq \infty$, на многообразии M с линейной связностью ∇ называется геодезической, если векторное поле X , касательное к γ в точке x_t , параллельно вдоль γ , т.е. если $\nabla_X X = 0$ для всех t , где t — аффинный параметр для γ , а ∇_X означает ковариантную производную вдоль X (см. [38]).

Напомним определение характеристики Сегре тензора h_{ij} . Пусть λ -матрица $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ имеет в точке $x \in V$ систему элементарных делителей $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, (\lambda - \lambda_1)^{m_2}, \dots, (\lambda - \lambda_2)^{m_1}, (\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \dots$. Инварианты λ_i , называемые базисами элементарных делителей, определяют собственные числа тензора h_{ij} в точке x и являются корнями характеристического уравнения

$$\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0.$$

Числа $m_1, m_2, \dots, m'_1, m'_2, \dots$ определяют тип тензора h_{ij} . Для обозначения типа тензора употребляется символ

$$\chi = \{(m_1, m_2, \dots)(m'_1, m'_2, \dots) \dots\},$$

в котором круглые скобки объединяют числа, соответствующие одному и тому же характеристическому числу. Этот символ называется характеристикой Сегре λ -матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ или матрицы (h_{ij}) (см. [13, 59]).

1.2. Инфинитезимальные преобразования. Напомним, что локальная однопараметрическая группа непрерывных преобразований, определенных на $U \times I_\varepsilon$, где $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и U — открытое подмножество в M , является таким непрерывным отображением

$$(x, \tau) \in U \times I_\varepsilon \rightarrow f_\tau(x) \in f_\tau(U),$$

что $f_\tau : x \rightarrow f_\tau(x)$ является диффеоморфизмом U на открытое множество $f_\tau(U)$ из M и

$$f_{\tau_1 + \tau_2}(x) = f_{\tau_1} \circ f_{\tau_2}(x)$$

всякий раз, когда $\tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2 \in I_\varepsilon$ и $f_{\tau_2}(x) \in U$ (см. [38]).

Диффеоморфизм $f : A^n = (M, \nabla) \rightarrow \bar{A}^n = (\bar{M}, \bar{\nabla})$, где ∇ и $\bar{\nabla}$ — аффинные связности на M и $\bar{M}$ соответственно, называется аффинным отображением, если он отображает любое параллельное векторное поле вдоль $l \subset M$ в параллельное векторное поле вдоль $f(l) \subset \bar{M}$.

Диффеоморфизм $f : A^n \rightarrow \bar{A}^n$ является аффинным отображением тогда и только тогда, когда $f * (\bar{\nabla}) = \nabla$, т.е. локально в общей системе координат компоненты аффинных связностей $(\nabla$ и $\bar{\nabla})$ связаны соотношением

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x);$$

при этом тензор деформации $P = \bar{\nabla} - \nabla$ равен нулю.

Пусть многообразие $A^n = (M, \nabla)$, оснащенное аффинной связностью ∇ , допускает геодезическое отображение на псевдориманово многообразие $V^n = (M, g)$, где g — метрический тензор в V^n . Диффеоморфизм $f : A^n \rightarrow V^n$ является аффинным отображением тогда и только тогда, когда метрический тензор g в V^n параллелен в A^n , т.е.

$$\nabla g = 0.$$

Аффинное отображение многообразия $A^n = (M, \nabla)$ на себя называется аффинным преобразованием в A^n . Множество всех аффинных преобразований в A^n образует аффинную группу в A^n .

Векторное поле X на A^n называется бесконечно малым аффинным преобразованием, или аффинным (киллинговым) векторным полем, а также аффинным движением, если это поле генерирует локальную однопараметрическую группу f_t в окрестности U любой точки $p \in M$, которая сохраняет аффинную связность, т.е. отображение $f_t : M \rightarrow M$ является аффинным преобразованием [13]. Векторное поле X на M является инфинитезимальным аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда

$$\nabla_Y(L_X - \nabla_X) = R(X, Y) \quad (1.7)$$

для каждого векторного поля Y на M , где L_X — производная Ли вдоль X (см. [38]).

Производная Ли аффинной связности ∇ с компонентами Γ_{jk}^i является тензорным полем типа $(1, 2)$ и имеет вид

$$L_X \Gamma_{jk}^i \equiv \partial_j \xi^i + \xi^l \partial_l \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^l \partial_l \xi^i + \Gamma_{lk}^i \partial_j \xi^l + \Gamma_{jl}^i \partial_k \xi^l \equiv \xi_{,jk}^i - R_{jkl}^i \xi^l$$

(запятая здесь и далее означает ковариантную производную).

Для псевдориманова многообразия (M, g) условие $L_X \Gamma_{jk}^i = 0$ можно записать в виде

$$\nabla(L_X g) = 0 \quad (1.8)$$

(см. [13]) или

$$L_X g_{ij} = h_{ij}, \quad h_{ij,k} = 0, \quad (1.9)$$

где ξ^i, Γ_{jk}^i и R_{jkl}^i — соответственно компоненты векторного поля X , связности ∇ и тензорного поля кривизны в координатном репере (∂_i) .

Изометрические отображения псевдориманова пространства $V^n = (M, g)$ на себя называются изометрическими преобразованиями на V^n .

Векторное поле X на V^n называется бесконечно малой изометрией, или векторным полем Киллинга, если для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность U точки p , что локальная однопараметрическая группа f_t , определенная векторным полем X , сохраняет метрику, т.е. отображение $f_t : M \rightarrow M$ является изометрическим преобразованием (см. [38]). Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось уравнение Киллинга

$$L_X g = 0, \quad (1.10)$$

или, в локальной карте (x, U) ,

$$L_X g_{ij} \equiv \xi^l \partial_l g_{ij} + g_{il} \partial_j \xi^l + g_{jl} \partial_i \xi^l \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0, \quad (1.11)$$

где L_X — производная Ли вдоль X и $\xi^i \partial_i = X|_U$.

Диффеоморфизм f из $V^n = (M, g)$ на $\bar{V}^n = (\bar{M}, \bar{g})$ называется гомотетией, если длина любой дуги $l \subset V^n$ и длина ее образа $f(l) \subset \bar{V}^n$ пропорциональны с постоянным коэффициентом k , т.е. $f(l) = k \cdot l$.

Необходимым и достаточным условием гомотетичности отображения $f : V^n \rightarrow \bar{V}^n$ является равенство $\bar{g} = k f_* g$, $k = \text{const}$. В общей системе координат (x^i) и в координатной форме

$$\bar{g} = kg, \quad \bar{g}_{ij}(x) = k \cdot g_{ij}(x), \quad k = \text{const}.$$

Ясно, что любое гомотетическое отображение является специальным аффинным отображением, а для $k = 1$ оно изометрично (см. [13, 107]).

Гомотетические отображения псевдориманова пространства $V^n = (M, g)$ на себя называются гомотетическими преобразованиями в V^n .

Векторное поле X на V^n называется бесконечно малой гомотетией, или гомотетическим векторным полем Киллинга, или также гомотетическим движением, если для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность U точки p , что локальная однопараметрическая группа f_t , определенная векторным полем X , сохраняет метрику с точностью до постоянного множителя k , т.е. отображение $f_t : M \rightarrow M$ является гомотетическим преобразованием (см. [13, 107]). В специальной системе координат (x^i) , в которой $X = \partial_1$, гомотетическое преобразование определяется уравнением

$$\partial_1 g_{ij}(x) = k g_{ij}(x), \quad k = \text{const}, \quad (1.12)$$

или, в локальной карте (x, U) ,

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = k g_{ij}, \quad (1.13)$$

где $\xi_i = g_{ij} \xi^j$.

Конформные отображения риманова пространства $V^n = (M, g)$ на себя называются конформными преобразованиями в V^n .

Векторное поле X на V^n называется бесконечно малым конформным преобразованием, или конформным векторным полем Киллинга, или конформным движением, если для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность U точки p , что локальная однопараметрическая группа f_t , определенная векторным полем X , состоит из конформных преобразований (см. [13]).

В специальной системе координат (x^i) , в которой $X = \partial_1$, конформное преобразование G_1 характеризуется уравнением

$$\partial_1 g_{ij}(x) = \sigma(x) g_{ij}(x), \quad (1.14)$$

где $\sigma(x)$ — функция.

Конформное движение X в локальной карте (x, U) задается формулой

$$L_X g \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \sigma g_{ij}, \quad (1.15)$$

где $\xi_i = g_{ij} \xi^j$, $X = \xi^i \partial_i$.

Преобразование G_1 гомотетично, если $\sigma \equiv \text{const}$, и изометрично, если $\sigma \equiv 0$.

Проективное преобразование псевдориманова многообразия M^n с проективной структурой Π сохраняет проективную структуру Π и переводит геодезические линии снова в геодезические (см. [13, 62]).

Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) с проективной структурой Π называется бесконечно малым проективным преобразованием или проективным движением, если локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$, состоит из (локальных) проективных преобразований, т.е. автоморфизмов проективной структуры Π .

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $X = \xi^i \partial_i$ было проективным движением в псевдоримановом многообразии (M, g) , является равенство

$$(L_X g_{ij})_{,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}, \quad (1.16)$$

где φ — функция от x^i , называемая определяющей функцией проективного движения X (см. [13]).

Уравнение (1.16) можно записать в виде двух соотношений:

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij} \quad (1.17)$$

(обобщенное уравнение Киллинга) и

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i} \quad (1.18)$$

(уравнение Эйзенхарта). Если $\varphi = \text{const}$, т.е. $\text{Div } X = \text{const}$, то векторное поле X сохраняет аффинную связность и, следовательно, является бесконечно малым аффинным преобразованием, или аффинным движением.

Аффинное движение X является бесконечно малой гомотетией, или гомотетическим движением, если $h_{ij} = \text{const} \cdot g_{ij}$, и бесконечно малой изометрией, или изометрическим движением, если $h_{ij} = 0$ (см. [13]).

После замены переменных

$$h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij},$$

где a_{ij} — симметричная билинейная форма той же характеристики Сегре χ (т.е. того же типа χ), что и h_{ij} , уравнение (1.18) принимает вид

$$a_{ij,k} = g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}. \quad (1.19)$$

Если (M, g) допускает нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта (1.18) типа χ , то оно называется h -пространством типа χ и обозначается H_χ , а g_{ij} называется h -метрикой типа χ . Задав тип тензора h_{ij} , можно найти решение уравнения Эйзенхарта (1.18), а затем и уравнения Киллинга (1.17).

H -пространства типа $\{r_1, \dots, r_k\}$, $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$, с вещественными базисами элементарных делителей тензора h_{ij} будем называть *жесткими h -пространствами*.

К пятимерным жестким h -пространствам относятся h -пространства следующих возможных типов: $\chi_\nu = \{\nu 1, \dots, 1\}$, $\nu = 1, 2, 3$,

$$\chi_{221} = \{221\}, \quad \chi_{32} = \{32\}, \quad \chi_{41} = \{41\}, \quad \chi_5 = \{5\}. \quad (1.20)$$

H -пространства типа χ_ν связаны с лоренцевой сигнатурой и были детально изучены в работах А. В. Аминовой [1–8, 12]. Нахождению h -пространств H_{221} , H_{32} , H_{41} , H_5 и исследованию их проективно-групповых свойств посвящена данная работа.

1.3. Уравнения Эйзенхарта в косономальном репере. Косономальный репер (Y_h) , адаптированный к характеристике Сегре симметричной билинейной формы h_{ij}

$$\chi = \left\{ r_1 \dots r_{k_0} \left(m_1^{k_0+1} \dots m_{s_{k_0+1}}^{k_0+1} \right) \dots \left(m_1^k \dots m_{s_k}^k \right) \right\}$$

задается в области $V \subset M^n$ разбиением множества индексов $I = \{1, \dots, n\}$

$$I = \bigcup_{\alpha=1}^k I_\alpha, \quad I_\alpha = \{s \mid n_\alpha + 1 \leq s \leq n_\alpha + r_\alpha\},$$

$$n_1 = 0, \quad n_\alpha = \sum_{l=1}^{\alpha-1} r_l, \quad r_1 + \dots + r_k = n, \quad \alpha = 2, \dots, k,$$

и биекцией

$$\sim: I \rightarrow I, \quad I_\alpha \ni h \rightarrow \tilde{h} = 2n_\alpha + r_\alpha + 1 - h \in I_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, k,$$

обладающей свойством $\sim \circ \sim = \text{id}_I$. В косономальном репере индексы (Y_h) поднимаются и опускаются с помощью метрики

$$\bar{g}_{pq} = g(Y_p, Y_q) \equiv \theta_p(Y_q) = e_p \delta_p^{\bar{q}}, \quad e_p = \pm 1,$$

например, $\theta_p = e_p \theta^{\bar{p}}$ (см. [13]).

В терминах локальной координатной системы каноническая форма $\theta = \theta^i E_i$ задается соотношением

$$\theta^i = \Theta_j^i dx^j, \quad dx^k = \xi_j^k \theta^j \quad (1.21)$$

(см. [13, с. 96]), где (Θ_j^i) — обратная матрица для (ξ_j^k) :

$$\xi_k^i \Theta_j^k = \delta_j^i. \quad (1.22)$$

Набор линейно независимых форм θ^i образует в каждой точке $p \in M$ корепер, дуальный к базису ξ в $T_p M$.

Пусть $(Y_1, \dots, Y_n) = \left(\xi_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \xi_n^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ — косономальный репер в области $V \subset M$, $U \subset V$ — координатная окрестность, $(X_i) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ — натуральный репер, $g_{ij} = g(X_i, X_j)$. Для 1-формы θ_h , сопряженной векторному полю Y_h относительно $g|_V$,

$$(\theta_h, Y_l) \equiv \theta_h(Y_l) = g(Y_h, Y_l), \quad l = 1, \dots, n,$$

из (1.21), (1.22) имеем

$$\theta_h|_U = \xi_i dx^i = e_h \theta^{\bar{h}}|_U, \quad \Theta_i^h = e_h \xi_i, \quad h = 1, \dots, n.$$

Разрешив уравнения $g_{ij} \xi_h^i = \xi_j^{\bar{h}}$ относительно g_{ij} , получим

$$g_{ij} = \sum_{h=1}^n e_h \xi_i \xi_j^{\bar{h}}, \quad \text{или} \quad g|_U = \sum_{h=1}^n e_h \theta_h \otimes \theta_{\bar{h}} \equiv \sum_{h=1}^n e_h \theta_h \theta_{\bar{h}}.$$

Из этих соотношений следует формула перехода от косономального репера $(Y_1, \dots, Y_n)$ на U к координатному реперу $(X_1, \dots, X_n)$:

$$X_j = \sum_{h=1}^n e_h \xi_j^{\bar{h}} Y_h, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.23)$$

а также формула для компонент g^{ij} контравариантного метрического тензора g_c :

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^n e_h \xi_h^i \xi_h^j, \quad \text{или} \quad g_c|_U = \sum_{h=1}^n e_h Y_h \otimes Y_{\bar{h}}.$$

В силу (1.23) для билинейной формы h на V имеем

$$h_{ij} = h(X_i, X_j) = \sum_{p,q=1}^n e_p e_q h(Y_p, Y_q) \xi_i^{\bar{p}} \xi_j^{\bar{q}}.$$

Аналогично,

$$h^{ij} = \sum_{p,q=1}^n e_p e_q h(Y_p, Y_q) \xi^{\bar{p}} \xi^{\bar{q}}.$$

Отсюда, введя обозначения $\bar{h}_{pq} = h(Y_p, Y_q)$, получим (см. [13, с. 99])

$$h = \sum_{p,q=1}^n e_p e_q \bar{h}_{pq} \theta_{\bar{p}} \otimes \theta_{\bar{q}} \equiv \sum_{p,q=1}^n e_p e_q \bar{h}_{pq} \theta_{\bar{p}} \theta_{\bar{q}}.$$

Определим в V систему инвариантов $\gamma_{lpk} = -\gamma_{plk}$ (коэффициенты вращения Риччи (см. [62, § 30]) равенствами

$$\nabla_{Y_k} Y_l \equiv \sum_{p=1}^5 e_p \gamma_{lpk} Y_p = \gamma_{lk}^p Y_p, \quad (1.24)$$

где $\gamma_{lk}^p = e_p \gamma_{lpk}$ — компоненты 1-формы связности ω_j^i в косорепере (Y_h) :

$$\omega_j^i = \gamma_j^i \theta^l = e_i \gamma_{j\bar{i}l} \theta^l = \sum_{h=1}^5 e_h e_i \gamma_{j\bar{i}h} \theta_{\bar{h}}. \quad (1.25)$$

Используя (1.24), легко убедиться в справедливости равенства

$$[Y_k, Y_h] \equiv \nabla_{Y_k} Y_h - \nabla_{Y_h} Y_k = \sum_{l=1}^n e_l (\gamma_{lkh} - \gamma_{lhk}) Y_{\bar{l}}, \quad (1.26)$$

где $[Y_k, Y_h]$ — скобка Ли векторных полей Y_k, Y_h :

$$[Y_k, Y_h] \Big|_U = \left(\xi_k^i \partial_i \xi_h^j - \xi_h^i \partial_i \xi_k^j \right) X_j. \quad (1.27)$$

В косономальном репере уравнение Эйзенхарта после замены $h = a + 2\varphi g$ примет вид

$$Y_r \bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^5 e_h (\bar{a}_{hq} \gamma_{\bar{h}pr} + \bar{a}_{ph} \gamma_{\bar{h}qr}) = \bar{g}_{qr} Y_p \varphi + \bar{g}_{pr} Y_q \varphi, \quad p, q, r = 1, \dots, 5,$$

что равносильно

$$d\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^n e_h (\bar{a}_{hq} \omega_{p\bar{h}} + \bar{a}_{ph} \omega_{q\bar{h}}) = (Y_q \varphi) \theta_{\bar{p}} + (Y_p \varphi) \theta_{\bar{q}}, \quad (1.28)$$

где $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ есть 1-форма связности. Интегрированию этого уравнения для пятимерных жестких h -пространств посвящена вторая часть работы.

1.4. Обзор литературы. В общей теории относительности четырехмерное пространство-время, наделенное симметриями в форме бесконечно малых преобразований, играет исключительно важную роль.

В своей книге «Пространства Эйнштейна» проф. А. З. Петров дал классификацию четырехмерных пространств-времен на основе их (локальных) групп изометрий, т.е. их алгебр Ли векторных полей Киллинга. В работе [90] обсуждались алгебраические и геометрические свойства этих алгебр Ли, были вычислены базисы пятимерных алгебр Ли векторов Киллинга, найденных в книге А. З. Петрова, и рассмотрены приложения.

В пятимерной теории Калуцы—Клейна подробно обсуждается четырёхмерная проекция пятимерных уравнений геодезических. Предложена классификация 5-геодезических, представленных с помощью деформированного 5-конуса. При некоторых предположениях пятимерные уравнения геодезических дают уравнения движения Лоренца для заряженной частицы. Собственная масса и собственный заряд вводятся как новые параметры частиц; предложены формулы для массы и заряда (см. [98]).

Пятимерная общая теория относительности с источниками, которые являются пятимерными точечными частицами или струнами, была исследована в качестве поучительной модели для изучения классических теорий Калуцы—Клейна. В [105] получены уравнения поля и уравнения движения пробной частицы, при этом внимание было уделено только тем решениям, которые изометричны в дополнительном измерении. Получены выражения для гравитационной и инерционной масс, электрического заряда и скалярной массы. Пробные частицы и источники рассматривались как нити, намотанные на компактное дополнительное измерение; одиночная нить

является источником поля, которое является изометрическим или приближенно изометрическим вдоль дополнительного измерения. Предложены некоторые подходы, могущие привести к реалистичной теории Калуцы—Клейна.

В [114] рассматриваются векторы Киллинга в пятимерном статическом пространстве. Общие проблемы, касающиеся, в частности, существования и максимального числа векторов Киллинга, изучались в работах по геометрии (см., например, [125]).

В физических приложениях векторы Киллинга используются во многих задачах (см., например, работу А. Коли и Дж. Таппер [76]), включая задачи, связанные с гравитацией.

В [126] доказан факт жесткости для групп, действующих на псевдоримановых многообразиях с сохранением непараметризованных геодезических.

В работе К. М. Буданова и А. Я. Султанова [28] получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования расслоения Вейля второго порядка над дифференцируемым многообразием со связностью полного лифта. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых векторное поле является инфинитезимальным аффинным преобразованием.

В работе А. Фиаловски [80] изучалось пространство модулей всех комплексных пятимерных алгебр Ли, реализуемое как стратификация по орбифолдам, связанным скачкообразными деформациями. Орбифолды задаются действием конечных групп на простых комплексных многообразиях. Используемый метод определения стратификации основан на построении версальных деформаций алгебр Ли, которые позволяют идентифицировать естественные окрестности элементов в пространстве модулей.

В [117] показано, что подходящее двойное расширение конечномерной неразложимой контактной алгебры Ли снова является контактной алгеброй Ли. В частности, за исключением семейства пятимерных неразложимых контактно-разрешимых алгебр Ли $A_{5,35}$, любая пятимерная неразложимая контактно-разрешимая алгебра Ли может быть получена как двойное расширение трёхмерной алгебры Ли. Семейство $A_{5,35}$ можно обобщить на семейство $(4n + 1)$ -мерных неразложимых контактно-разрешимых алгебр Ли, которые не могут быть получены ни как подвес симплектической алгебры Ли коразмерности 1, ни как двойное расширение контактной подалгебры Ли коразмерности 2.

В [84] разработан формализм, позволяющий систематически строить суперсимметричные теории в зависимости от сигнатур пространства-времени. Используется алгебра суперсимметрии, которая получается путем удвоения спинорного представления, это позволяет обобщить симплектические майорановские спиноры. Для случая, когда спинорное представление является комплексно неприводимым, R -симметрия действует только на внутреннем пространстве. Показано, что возникающие при построении связные группы суть $SO(2)$, $SO(1, 1)$, $SU(2)$ и $SU(1, 1)$. В качестве приложения построены преобразования суперсимметрии и суперсимметричные лагранжианы для пятимерных векторных мультиплетов при произвольной сигнатуре (t, s) . В этом случае группами R -симметрии являются $SU(2)$ или $SU(1, 1)$, в зависимости от того, несет ли спинорное представление кватернионную или паракватернионную структуру. Для евклидовой сигнатуры скалярные и векторные кинетические члены различаются по относительному знаку, что согласуется с известными результатами.

Хорошо известно, что пятимерная теория Калуцы—Клейна обеспечивает геометрическую основу для объединения гравитации и электромагнетизма. Также в этой теории были найдены решения солитонного типа (см., например, [87]). Вот почему важно исследовать обобщенные векторы Киллинга в $5D$ пространствах.

В [74] изучался конкретный ряд изометрических векторов Киллинга, полученных из четырехмерного линейного элемента при его определенной параметризации. Аналогичная проблема была решена в [100, 113], где для некоторых линейных элементов были получены генераторы групп изометрий в пятимерном пространстве.

В теориях типа Калуцы—Клейна пятимерное пространство выделяется благодаря тому, что из всех многомерных пространств именно в этом пространстве полное многообразие M^5 вместе с многообразием типа Калуцы—Клейна $M^4 \times S^1$ удовлетворяют классическим уравнениям

Эйнштейна—Виттена. Отметим, что решение системы уравнений

$$\xi^k \partial_k \tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{ik} \partial_j \xi^k + \tilde{g}_{kj} \partial_i \xi^k = \Phi \tilde{g}_{ij}$$

для конформных векторов Киллинга приводит к более ясному пониманию природы ограничений на g_{55} для групп изометрий (см. [115]).

В [63] было исследовано поведение малых возмущений метрики Калуцы—Клейна в пятимерном пространстве-времени, получены решения уравнений для амплитуды метрических возмущений при условии постоянства возмущений в пятом направлении. Небольшие возмущения отождествляются с гравитационными волнами.

В [118] с помощью жордановых матриц была представлена алгебраическая классификация симметрических тензоров второго порядка в пятимерных лоренцевых пространствах типа Калуцы—Клейна. Показано, что возможными типами Сегре являются $[1, 1111]$, $[2111]$, $[311]$, $[z\bar{z}111]$ и их вырождения. Найден набор канонических форм для каждого типа Сегре. Также изучаются возможные непрерывные группы симметрий для каждой канонической формы.

Римановы симметрические пространства имеют следующие два класса пространств в качестве своих естественных обобщений: (A) класс GS-пространств (обобщенно-симметрические римановы пространства), (B) класс GPS-пространств (обобщенные поточечно-симметрические римановы пространства). О. Ковальский показал (см. [99]), что отношение включения $(A) \subset (B)$ между этими двумя классами является строгим.

В [106] утверждается, что в размерности 5 класс (A) и класс (B) должны совпадать.

В [89] представлен новый подход к алгебраической классификации симметричных тензоров второго порядка в пятимерном пространстве-времени. Найденные возможные типы Сегре для симметричного двухвалентного тензора. Получен набор канонических форм для каждого типа Сегре. Также сформулирована теорема, в которой собраны некоторые основные результаты, касающиеся алгебраической структуры тензора Риччи в пятимерном пространстве-времени.

Существование так называемого «фантомного» скалярного поля в некотором римановом пространстве V_4 , для которого эффективный тензор энергии-импульса $T^{(st)}$ обращается в нуль в пятимерной теории Калуцы—Клейна, исследуется с помощью условий интегрируемости соотношений вида

$$\Phi_{;\mu;\nu} = k\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + bg_{\mu\nu},$$

найденных в [95].

В [45] исследованы генераторы групп конформных движений, допускаемых метрикой

$$ds^2 = g_{11}(z)dt^2 - dz^2 - g_{33}(z)d\nu^2 - (g_{33}(z)\sin^2\nu + g_{55}(z)\cos^2\nu)d\varphi^2 - \\ - 2g_{55}(z)\cos\nu d\varphi d\psi - g_{55}(z)d\psi^2.$$

Наличие конформных векторных полей Киллинга позволяет описать законы сохранения для бесследовых тензорных величин (см. например, [83]).

Пятимерное риманово многообразие представляет особый интерес в теориях Калуцы—Клейна (см. [124]). Кроме того, решение обобщенной системы приводит к более глубокому анализу ограничений, которые были наложены на g_{55} в [44] при поиске ряда изометрических киллинговых полей.

В [121] описывается классификация римановых пространств с пятимерной группой движений с точки зрения решения уравнений Дирака. Идентифицирован класс пространств, в которых уравнение Дирака не допускает полного разделения переменных; точные решения уравнения Дирака получаются в этих пространствах методом некоммутативного интегрирования.

В [110] получена предельная диаграмма для классификации Сегре в пятимерном пространстве-времени, расширяющая недавнюю работу по пределам тензора энергии-импульса в общей теории относительности. Некоторые результаты Героча (см. [85]) о границах пространства-времени в общей теории относительности распространяются на пятимерное пространство-время Калуцы—Клейна.

В [69] рассматривался метрический тензор однородного изотропного пятимерного псевдориманова пространства, разрешающий соответствующие уравнения Эйнштейна в случае, когда пространственная компонента является плоской, сферической или псевдосферической.

Новая пятимерная классическая единая теория поля типа Калуцы—Клейна формулируется с использованием двух отдельных скалярных полей. Показано, что предложенная процедура решает проблему изменчивости параметра гравитационной связи без требования конформной инвариантности. Соответствующие уравнения поля обсуждаются с учетом возможной индукции градиентов скалярного поля электромагнитными полями. В [103] получен новый предел соответствия, в котором уравнения поля приводят к обычным уравнениям Эйнштейна—Максвелла без условия постоянства скалярного поля.

В [39] геометрическая модель гравитационного взаимодействия с электромагнитным полем в аффинно-метрическом пространстве с кручением и неметричностью представлена как динамика пустого пятимерного аффинно-метрического пространства. Гравитационное и электромагнитное поля в модели выражаются через метрический тензор пятимерного пространства-времени. Уравнения теории выводятся из вариационного принципа с использованием формализма $(4 + 1)$ -расщепления. Получены точные сферически симметричные решения системы полевых уравнений предложенной теории и исследованы их возможные эффекты в астрофизике и физике элементарных частиц.

В [104] рассматриваются пятимерные группы Ли с многозначными функциями Казимира. Показано, что в случае, когда группа Ли состоит из существенно многозначных функций Казимира, пространство орбит коприсоединенного представления является неполухаусдорфовым, что позволяет сформулировать критерий идентификации этих групп. Полные инволютивные множества функций Казимира извлекаются для всех вещественных пятимерных алгебр Ли, и по этому критерию идентифицируются две алгебры Ли с нехаусдорфовым пространством орбит.

В [75] изучено множество однородных геодезических пятимерных обобщенных симметрических пространств и найдено несколько интересных вариантов поведения геодезических.

В рамках пятимерной теории гравитации рассмотрены пространства, которые допускают семейство максимально симметричных трехмерных подпространств. Для этих пространств построены пятимерные вакуумные уравнения Эйнштейна и введен пятимерный аналог массовой функции. Соответствующий ей закон сохранения некоторого заряда приводит к пятимерному аналогу теоремы Биркгофа. Отсюда следует, что для рассматриваемых пространств условие цилиндричности реализуется динамически. Для некоторых полученных метрик условие регулярности приводит к замкнутости пятой координаты. При этом оказывается возможным связать величину периода пятой координаты с сохраняющимся зарядом. Обсуждается проблема разделения динамических степеней свободы скалярного и гравитационного полей, полученных в результате редукции исходного пятимерного действия к четырехмерному виду, и связанная с этим проблема конформной неоднозначности калибровки 4-метрики. Параметризация скалярного поля и 4-метрики, приводящая к конформно-инвариантной теории взаимодействующих скалярного и гравитационного полей, представляется автору статьи [29] наиболее естественной.

Последние разработки в теории струн позволяют предположить существование дополнительных пространственных измерений, которые не являются ни малыми, ни компактными. Основой множества космологических моделей бран является та, в которой поля материи ограничены бранным миром, заключенным в пять измерений (объем). Используя основные результаты алгебраической классификации симметричных тензоров второго порядка в пятимерном пространстве-времени (см. [89, 118]), авторы работы [116] представили две теоремы, содержащие некоторые результаты об алгебраической структуре симметричных тензоров второго порядка в пятимерном пространстве. Показано, как можно по индукции получить классификацию и канонические формы симметричного тензора второго ранга на n -мерных ($n > 5$) пространствах, исходя из классификации в пятимерных пространствах, представить типы Сегре и соответствующие канонические формы в размерности n . Эта классификация важна в контексте n -мерных бранных миров, а также в рамках $11D$ супергравитации и $10D$ теории суперструн.

В [96] изучена структура расслоения Зейферта на односвязных 5-многообразиях. Полученные результаты используются для построения метрик Эйнштейна с положительной кривизной Риччи на указанных многообразиях.

В [109] рассматриваются пятимерные космологические модели в геометрии Лиры с зависящей от времени калибровочной функцией. Получены точные решения пятимерных вакуумных уравнений, обсуждаются их свойства.

В [86] проведено исследование некоторых отношений между алгеброй Ли бесконечно малых конформных преобразований касательного расслоения с синектическим лифтом римановой метрики и алгеброй Ли бесконечно малых проективных преобразований.

В работе А. С. Киселева [36] получен ряд решений для пятимерной изотропной космологической модели, построенной на базе ОТО. Материя, заполняющая Вселенную, представлена в виде идеальной жидкости. Показано, что в рамках пятимерной космологии можно объяснить современные наблюдаемые данные о характере эволюции Вселенной. В [37] того же автора получены космологические решения в рамках обобщенной теории Калуцы—Клейна для случая пятимерного пространства Римана—Вейля. Материя в виде идеальной жидкости индуцирует неметричность пространства-времени. Утверждается, что такая теория дает адекватное описание современного этапа эволюции Метагалактики. В рамках пятимерной геометрической теории получен ряд решений для модели, описывающей самогравитирующую идеальную жидкость в пятимерном пространстве с неметричностью типа Вейля [93].

В [92] дан краткий обзор псевдоримановой геометрии пятимерного однородного пространства с конформной группой $O(4, 2)$. Описана топология пространства и обсуждается его связь с конформно компактифицированным пространством Минковского. Описана компактификация с помощью геометрии сферы Ли. Отмечается возможное применение теории START Хайме—Келлера с использованием ее предшественника — 5-оптики Ю. Б. Румера.

В [77] исследуются пятимерные псевдоримановы многообразия, снабженные почти параконтактной структурой, которая является аналогом почти контактной структуры в римановой геометрии. Предполагается, что кривизна и аффинор-структуры коммутируют. Эти многообразия допускают совместимую косимплектическую структуру в смысле П. Либермана. Найдены явные выражения для связности, кривизны, кривизны Вейля и тензора Риччи. Классифицированы многообразия с контактным потенциалом Риччи и локально плоские многообразия. Описаны все связные односвязные группы Ли, допускающие левоинвариантную структуру. Изучаемые многообразия являются пространствами Уокера — многообразиями с параллельным изотропным распределением, однако классификационная теорема Уокера не применяется.

В работе Й. Микеша [108] пятимерное риманово многообразие M^5 с неприводимой $SO(3)$ -структурой рассмотрено в качестве примера абстрактного статистического многообразия. Доказано, что если M^5 является статистическим многообразием постоянной кривизны, то метрика риманова многообразия является метрикой Эйнштейна. Показано, что пятимерная евклидова сфера с неприводимой $SO(3)$ -структурой не может быть сопряженным симметричным статистическим многообразием. Получены некоторые результаты для пятимерного риманова многообразия с почти интегрируемой $SO(3)$ -структурой. Доказано, в частности, что тензор интегрируемой $SO(3)$ -структуры на пятимерном римановом многообразии является гармоническим симметричным тензором и определяет первый интеграл третьего порядка уравнений геодезических. Рассмотрены некоторые топологические свойства пятимерных компактных и конформно-плоских римановых многообразий с неприводимой $SO(3)$ -структурой.

В работе [111] методы Т. Т. Думитреску, Г. Фестуччи и Н. Зейберга (см. [79]) обобщены на пятимерные римановы многообразия M ; изучена связь между геометрией в M и числом решений обобщенного спинорного уравнения Киллинга, полученного из пятимерной супергравитации. Существование одной пары решений связано с почти контактными метрическими структурами. Обсуждается случай $M = S^1 \times M^4$, где M расслоено подмногообразиями со специальными кватернион-келеровыми свойствами. В случае двух пар решений замыкание подалгебры изометрий,

порожденной решениями, требует, чтобы M было S^3 - или T^3 -расслоением на римановой поверхности. Предложена новая суперсимметричная теория для $N = 1$ векторного мультиплета на K -контактном многообразии, допускающая решения спинорного уравнения Киллинга.

В [101] получены два пятимерных точных решения для пространства-времени типа I Бианки в теории гравитации $f(R, T)$ в предположении о постоянном параметре замедления и законе вариации параметра Хаббла, соответствующих двум различным космологическим моделям, сингулярной и неособой; для обеих моделей обсуждается их физическое поведение.

В [112] исследовался жесткий предел $5D$ конформной супергравитации с минимальной суперсимметрией на римановых многообразиях. Необходимым и достаточным условием существования решения является существование конформного вектора Киллинга. Обсуждается, при каких обстоятельствах допускается кинетический член Янга–Миллса в действии векторного мультиплета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аминова А. В. Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения // Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. Аминова А. В. О полях тяготения, допускающих группы проективных движений // Докл. АН СССР. — 1971. — 197, № 4. — С. 807–809.
3. Аминова А. В. Проективные группы в полях тяготения. I // Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3–13.
4. Аминова А. В. Проективные группы в полях тяготения. II // Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. Аминова А. В. О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел / Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. Аминова А. В. Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств // Тр. Геом. семин. ВИНТИ АН СССР. — 1974. — 6. — С. 295–316.
7. Аминова А. В. Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности // Тр. Геом. семин. ВИНТИ АН СССР. — 1974. — 6. — С. 317–346.
8. Аминова А. В. Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля // Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. Аминова А. В. Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности // Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. Аминова А. В. Группы преобразований римановых многообразий // Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНТИ. — 1990. — 22. — С. 97–165.
11. Аминова А. В. Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими // Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 2 (290). — С. 107–164.
12. Аминова А. В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий // Усп. мат. наук. — 1995. — 50, № 1. — С. 69–142.
13. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. Аминова А. В. Проективные симметрии и законы сохранения в K -пространствах, определяемых полями тяготения // Изв. вузов. Физика. — 2008. — 51, № 4. — С. 30–37.
15. Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии // Мат. сб. — 2010. — 201, № 5. — С. 3–13.
16. Аминова А. В. Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. сб. — 2006. — 197, № 7. — С. 3–28.
18. Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — 123. — С. 58–80.
19. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств специального вида // Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.

20. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств. I. H -пространства типа $\{32\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств. II. H -пространства типа $\{41\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях пятимерных пространств. III. H -пространства типа $\{5\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56–66.
23. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. H -пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Проективно-групповые свойства h -пространств типа $\{221\}$ // Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.
25. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Проективно-групповые свойства h -пространств H_5 типа $\{5\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О свойствах проективных алгебр Ли жестких h -пространств H_{32} типа $\{32\}$ // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — 162, № 2. — С. 111–119.
27. Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Алгебры Ли проективных движений пятимерных h -пространств H_{221} типа $\{221\}$ // Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. Буданов К. М., Султанов А. Я. Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3–13.
29. Гладуш В. Д. Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — 136, № 3. — С. 480–495.
30. Голиков В. И. О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. Егоров И. П. Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. Жукова Л. И. Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — 124. — С. 13–18.
33. Жукова Л. И. Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — 124. — С. 19–25.
34. Жукова Л. И. О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — 124. — С. 26–30.
35. Жукова Л. И. Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. Киселев А. С. Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. Киселев А. С., Кречет В. Г. Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — 3, № 1. — С. 37–41.
38. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.
39. Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В. Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — 1, № 9. — С. 33–37.
40. Кручкович Г. И. Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. Кручкович Г. И. О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3–18.
42. Петров А. З. О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — 109, № 3. — С. 7–36.
43. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. Рчеумишвили Г. Л. Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — 102, № 3. — С. 345–351.
45. Рчеумишвили Г. Л. Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — 112, № 2. — С. 249–253.

46. Синюков Н. С. О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — 98, № 1. — С. 21–23.
47. Синюков Н. С. Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — 111, № 4. — С. 266–267.
48. Синюков Н. С. Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133–135.
49. Синюков Н. С. Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — 137, № 6. — С. 1312–1314.
50. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 4. — С. 781–782.
51. Синюков Н. С. К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — 169, № 4. — С. 770–772.
52. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
53. Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — 11. — С. 45–116.
54. Солодовников А. С. Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — 108, № 2. — С. 201–203.
55. Солодовников А. С. Геодезические классы пространств $V(K)$ // Докл. АН СССР. — 1956. — 111, № 1. — С. 33–36.
56. Солодовников А. С. Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.
57. Трунев А. П. Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы–Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — 71, № 7. — С. 1–26.
58. Шарафутдинов В. А. Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018.
59. Широков П. А. Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. Широков П. А. Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.
62. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. Abe O. Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — 109, № 6. — P. 659–673.
64. Aminova A. V. On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — 46. — P. 179–186.
65. Aminova A. V. Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — 54. — P. 91–100.
66. Aminova A. V. Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. Aminova A. V. Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — 113, № 3. — P. 367–470.
68. Aminova A. V., Aminov N. A.-M. Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — 158, № 2. — P. 163–183.
69. Anchordoqui L. A., Birman G. S. Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — 32. — P. 73–79.
70. Becerril R., Matos T. Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — 41, № 6. — P. 1895–1896.
71. Beltrami E. Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G. Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — 311, № 3. — P. 151–154.
73. Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G. Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — 106, № 2. — P. 107–122.
74. Bokhari A. H., Qadir A. Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — 28. — P. 1019–1022.

75. *Calvaruso G., Marinosci R. A.* Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// *Balkan J. Geom. Appl.* — 2003. — 8, № 1. — P. 1–19.
76. *Coley A. A., Tupper B. O. J.* Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// *J. Math. Phys.* — 1989. — 30. — P. 2616–2625.
77. *Dacko P.* Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ [arXiv: 1308.6429 \[math.DG\]](#).
78. *Dini U.* Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// *Ann. Mat.* — 1869. — 3, № 7. — P. 269–293.
79. *Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N.* Exploring curved superspace/ [arXiv: 1205.1115v2 \[hep.th\]](#).
80. *Fialowski A., Penkava M.* The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// *J. Algebra.* — 2016. — 458. — P. 422–444.
81. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche// *Mem. Acc. Torino. Cl. Fisi. Mat. Nat.* — 1903. — 53, № 2. — P. 261–313.
82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// *Astrophys. Space Sci.* — 1988. — 141, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// *Rev. Mod. Phys.* — 1962. — 34, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T. J.* *High Energy Phys.* — 2018. — 2018. — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// *Commun. Math. Phys.* — 1969. — 13. — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the symplectic lift of a Riemannian metric// *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*. — 2009. — 119, № 3. — P. 345–350.
87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// *Nucl. Phys.* — 1983. — B226. — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// *Phys. Lett. B.* — 1988. — 201, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensional space-times// *Gen. Rel. Gravit.* — 1996. — 8, № 9. — P. 1107–1113.
90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// *All Graduate Plan B and other Reports.* — 2011. — 102. — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// *Phys. Rev. D.* — 1991. — 43, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five-dimensional conformal domain/ [arXiv: 1111.5540v2 \[math-ph\]](#).
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann–Weyl space// *Russ. Phys. J.* — 2012. — 55, № 4. — P. 417–425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// *Proc. Am. Math. Soc.* — 1958. — 9, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five-dimensional Kaluza–Klein theory// *Russ. Phys. J.* — 1996. — 39, № 2. — P. 146–152.
96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// *J. Geom. Anal.* — 2005. — 15, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV.* — Chelsea Publ., 1972. — P. 368–404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// *Gen. Rel. Gravit.* — 1984. — 16, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leq 5$ // *Rozprawy CSAV, Rada MPV.* — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D., Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* *Exact Solutions of Einstein's Field Equations.* — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R, T)$ theory of gravity// *Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn.* — 2014. — 3, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// *Ann. Mat.* — 1896. — 24, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ [arXiv: gr-qc/0101121](#).

104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non-semi-Hausdorff space of orbits// Russ. Phys. J. — 2003. — 46, № 9. — P. 912–920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pausi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// Nuovo Cim. — 1988. — 99A, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// Geom. Dedic. — 1995. — 57. — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$ -structure as a model of abstract statistical manifold// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — 45. — P. 111–128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// Astrophys. Space Sci. — 2007. — 310. — P. 273–276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space-times in five dimensions and their relation to the Segre types// J. Math. Phys. — 1997. — 38. — P. 4228–4236.
111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ [arXiv:1308.1567v4 \[hep.th\]](#).
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ [arXiv:1504.04340v3 \[het-th\]](#).
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// J. Math. Phys. — 1992. — 33. — P. 1103–1108.
115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ [arXiv:gr-qc/9312004v1](#).
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// Brazil. J. Phys. — 2004. — 34, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroquez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// J. Geom. Phys. — 2016. — 100. — P. 20–32.
118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza–Klein-type theories// J. Math. Phys. — 1995. — 36. — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// Math. Ann. — 1886. — 27. — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ [arXiv:0506218v1 \[physics.class-ph\]](#).
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// Russ. Phys. J. — 1997. — 40, № 8. — P. 727–731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// Astrophys. J. — 1992. — 394, № 1. — P. 19–24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — 7, № 11. — P. 921–926.
124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// Nucl. Phys. B. — 1981. — 186. — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// Ann. Math. — 1952. — 55. — P. 38–45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// Adv. Math. — 2016. — 297. — P. 26–53.

Аминова Ася Васильевна
 Казанский (Приволжский) федеральный университет
 E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
 Казанский (Приволжский) федеральный университет
 E-mail: dzhamoliddink@mail.ru