ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 63–72
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-63-72

УДК 517.95

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ С ТРЕХКОМПОНЕНТНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

© 2022 г. **Л. Г. ШАГАЛОВА**

Аннотация. На ограниченном отрезке времени рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби эволюционного типа в случае, когда размерность фазовой переменной равна единице. Гамильтониан зависит от фазовой и импульсной переменных, при этом зависимость от импульсной переменной экспоненциальна. Область, в которой рассматривается уравнение, разбивается на три подобласти. Внутри каждой из трех областей гамильтониан непрерывен, а на границах этих областей терпит разрыв по фазовой переменной. На основе минимаксного/вязкостного подхода вводится непрерывное обобщенное решение рассматриваемой задачи, доказывается его существование. Обобщенное решение является единственным, если задача рассматривается в ограниченной по фазовой переменной области.

***Ключевые слова*:** уравнение Гамильтона—Якоби, разрывный гамильтониан, некоэрцитивный гамильтониан, обобщенное решение, вязкостное решение.

GENERALIZED SOLUTION OF THE HAMILTON–JACOBI EQUATION WITH A THREE-COMPONENT HAMILTONIAN

© 2022 **L. G. SHAGALOVA**

Abstract. On a bounded time interval, we consider the Cauchy problem for the of evolutionary Hamilton–Jacobi equation in the case where the dimension of the phase variable is equal to one. The Hamiltonian depends on the phase and momentum variables and the dependence on the momentum variable is exponential. The domain in which the equation is considered is divided into three subdomains. Inside each of the three subdomains, the Hamiltonian is continuous, while at the boundaries of these subdomains it is discontinuous with respect to the phase variable. Based on the minimax/viscosity approach, we introduce the notion of a continuous generalized solution of the problem and prove its existence. The generalized solution is unique if the problem is considered in a domain bounded with respect to the phase variable.

***Keywords and phrases*:** Hamiltonian–Jacobi equation, discontinuous Hamiltonian, noncoercive Hamiltonian, generalized solution, viscosity solution.

***AMS Subject Classification*:** 35F21, 35F25

1. Введение. В теории уравнений Гамильтона—Якоби известны различные концепции обобщенного решения (см., например [1, 4, 8, 9, 12]). В рамках этих концепций рассмотрены решения начальных и краевых задач различных типов, доказаны теоремы существования и единственности, изучены свойства решений и разработаны методы их построения. При этом на входные данные задачи, в частности, на гамильтониан, накладываются определенные требования, обеспечивающие существование решения. Как правило, гамильтониан предполагается непрерывным и удовлетворяющим при этом некоторым дополнительным условиям, таким как липшицевость, условие подлинейного роста или условие коэрцитивности по импульсной переменной.

Вместе с тем ряд практических задач (например, в кристаллографии [14]) приводят к уравнениям Гамильтона—Якоби, в которых гамильтониан не удовлетворяет указанным требованиям, и известные теоремы существования обобщенных решений не выполнены. Для таких задач приходится вводить новые определения решений.

В данной работе рассматривается уравнение Гамильтона—Якоби с гамильтонианом, зависящим от фазовой и импульсной переменной. Фазовая переменная одномерна, а зависимость от импульсной переменной экспоненциальна. Задачи с экспоненциальной зависимостью гамильтониана от импульсной переменной нетипичны для теории уравнений Гамильтона—Якоби. Вместе с тем такие уравнения возникают в прикладных исследованиях, в частности, в молекулярной генетике [11]. Ранее уравнение подобного типа исследовалось [5–7] в ограниченной по x замкнутой области $G = \{(t, x) \mid t \in [0, T],\ x \in [-1; 1]\}$. В [5] непрерывный гамильтониан не удовлетворял условию коэрцитивности на границе, и для задачи Коши не существовало вязкостного [8, 9] решения, что потребовало ввести новое определение обобщенного решения. При этом обобщенное решение было неединственным. В [6] представлены достаточные условия существования глобального решения, сохраняющего структуру, задаваемую начальным многообразием, в [7] исследовано поведение такого решения при больших значениях времени.

В настоящей работе область, в которой рассматривается уравнение, прямыми вида $x = x_*$ и $x = x^*$, где $x_* < x^*$, разбивается на три подобласти, в которых гамильтониан задается разными формулами. Внутри каждой из областей гамильтониан непрерывен, но на линиях, разделяющих эти области, терпит разрыв по фазовой переменной. В каждой из областей гамильтониан является выпуклым по импульсной переменной, но для него не выполнены известные условия существования вязкостого (минимаксного [4, 12]) решений.

Для рассматриваемой задачи Коши на основе вязкостного/минимаксного подхода вводится непрерывное обобщенное решение, доказывается его существование. Доказательство основано на анализе поведения решений характеристической системы и имеет конструктивный характер — сначала строится решение в замыкании средней области $\operatorname{cl} G_0 = \{(t, x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ x_* \leqslant x \leqslant x^*\}$, которое затем непрерывно продолжается на области $G_- = \{(t, x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ x < x_*\}$ и $G_+ = \{(t, x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ x > x_*\}$. Обобщенное решение является единственным, если задача рассматривается в ограниченной по фазовой переменной области $G^M = \{(t, x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ -M < x < M*\}$, где $M > \max\{|x_*|, |x^*|\}$.

2. Постановка задачи.

Рассматривается следующая задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби эволюционного типа.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Здесь T — заданный момент времени, $T > 0$, $u_0(\cdot)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Предполагается, что заданы непрерывно дифференцируемые функции $h(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а также $f(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(\cdot)$ является монотонно возрастающей, а $g(\cdot)$ — монотонно убывающей. Пусть существуют точки x_* и x^* такие, что $f(x_*) = 0$, $g(x^*) = 0$, и справедливо неравенство $x_* < x^*$.

Задача (1), (2) рассматривается в предположении, что гамильтониан имеет вид

$$H(x, p) = \begin{cases} g(x)e^{-p}, & x < x_*,\ p \in \mathbb{R} \\ h(x) + f(x)e^{p} + g(x)e^{-p}, & x_* \leqslant x \leqslant x^*,\ p \in \mathbb{R} \\ f(x)e^{p}, & x > x^*,\ p \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

Введя функции

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad h_{[x_*, x^*]}(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [x_*, x^*] \\ 0, & x \notin [x_*, x^*], \end{cases}$$

гамильтониан (3) можно записать в виде

$$H(x,p) = h_{[x_*,x^*]}(x) + f^+(x)e^p + g^+(x)e^{-p}.$$

Определим области

$$G_- = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x < x_*\},$$
$$G_0 = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x_* < x < x^*\},$$
$$G_+ = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x < x^*\}.$$

Справедливо равенство

$$[0,T] \times \mathbb{R} = \operatorname{cl} G_- \cup \operatorname{cl} G_0 \cup \operatorname{cl} G_+,$$

где $\operatorname{cl} G$ обозначает замыкание множества G.

Таким образом, область $[0,T) \times \mathbb{R}$, в которой рассматривается задача (1), (2), разбивается на три подобласти, в каждой из которых гамильтониан определяется соответствующей непрерывной функцией, и если $h(x_*) \neq 0$, $h(x^*) \neq 0$, на границах этих областей гамильтониан разрывен.

Для задачи Коши (1)–(3) с разрывным гамильтонианом требуется определить непрерывное обобщенное решение, исследовать вопросы существования и единственности такого решения.

3. Вязкостное решение в области $\operatorname{cl} G_0$. Обобщенное решение задачи (1)–(3) будет строиться на базе понятия вязкостного решения, которое при определенных условиях (например, липшицевости гамильтониана по фазовой и импульсной переменным) эквивалентно введенному А. И. Субботиным минимаксному решению [4, 12].

Напомним одно из эквивалентных определений вязкостного решения для уравнения с непрерывным гамильтонианом. Приведем его для актуального в данной работе случая одномерной фазовой переменной.

Пусть задано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Символом $C(W)$ будем обозначать класс функций, непрерывных на множестве W.

Пусть $u(\cdot) \in C(W)$ и $(t,x) \in W$. Субдифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество

$$D^-u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \liminf_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in W}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y-x)}{|\tau - t| + |y-x|} \geqslant 0 \right\}. \tag{4}$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t,x) называется множество

$$D^+u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \limsup_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in W}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y-x)}{|\tau - t| + |y-x|} \leqslant 0 \right\}.$$

Определение 1. Функция $u \in C(W)$ называется нижним вязкостным решением уравнения (1) на множестве W, если справедливо неравенство

$$a + H(x,s) \leqslant 0, \quad \forall (t,x) \in W,\ \forall (a,s) \in D^+u(t,x). \tag{5}$$

Функция $u \in C(W)$ называется верхним вязкостным решением уравнения (1) на W, если справедливо неравенство

$$a + H(x,s) \geqslant 0, \quad \forall (t,x) \in W,\ \forall (a,s) \in D^-u(t,x). \tag{6}$$

Непрерывная функция $u(\cdot)$ называется вязкостным решением уравнения (1) на W, если она является одновременно нижним и верхним решением (1) на W.

Если множество W ограничено и замкнуто, функция $u(\cdot)$, являющаяся вязкостным решением уравнения (1) на этом множестве, согласно определению 1 должна удовлетворять обоим неравенствам (5),(6) как во внутренних, так и в граничных точках множества W.

В работе [8] обобщенное решение уравнения (1) на ограниченном замкнутом множестве $\operatorname{cl} W$ определялось как функция, являющаяся вязкостным решением на внутренности множества W

и верхним вязкостным решением на границе ∂W этого множества — этих условий достаточно для существования и единственности решения, удовлетворяющего заданному начальному условию. Таким образом, в граничных точках множества W для вязкостного решения следует проверять только неравенство (6).

Отметим, что в граничных точках множества W субдифференциал $D^-u(t,x)$, если он непуст, является неограниченным множеством. Действительно, пусть $(t_*,y_*)\in\partial W$, $(a,s)\in D^-u(t_*,y_*)$, а вектор (n_1,n_2) является внешней нормалью к множеству $\operatorname{cl} W$ в точке (t_*,y_*). Тогда, как нетрудно заметить из определения (4) субдифференциала, для любого положительного числа k справедливо

$$(a+kn_1, s+kn_2)\in D^-u(t_*,y_*).$$

Построим вязкостное решение задачи (1), (2) на замкнутом множестве $\operatorname{cl} G_0$. Согласно (3) гамильтониан в этой области имеет вид

$$H(x,p)=h(x)+f(x)e^p+g(x)e^{-p}. \tag{7}$$

Поскольку в рассматриваемой области функции f и g неотрицательны, гамильтониан является выпуклым. Кроме того, в открытой области G_0 гамильтониан (7) удовлетворяет условию коэрцитивности

$$H(x,p)\to+\infty \quad \text{при} \quad |p|\to\infty. \tag{8}$$

На границах $x=x_*$ и $x=x^*$ условие (8) не выполняется.

Для $\varepsilon>0$ определим область

$$G_0^\varepsilon=\{(t,x)\mid 0\leqslant t<T,\ x_*+\varepsilon\leqslant x\leqslant x^*-\varepsilon\}.$$

Из результатов пункта (5) в [8, Theorem X.I, p. 678] получаем, что в области $G_0^\varepsilon\subset G_0$ существует единственное вязкостное решение. При этом его значение в точке $(t,x)\in G_0^\varepsilon$ равно

$$u(t,x)=\inf\left\{u_0(\xi(0))+\int\limits_0^t H^*(\xi(s),\dot\xi(s))ds : \xi(0)=y,\ \xi(t)=x,\ y\in[x_*+\varepsilon;\ x^*-\varepsilon]\right\}. \tag{9}$$

Здесь H^* — функция, сопряженная к гамильтониану, определяемая следующим образом

$$H^*(x,q)=\sup_{p\in\mathbb{R}}\{pq-H(x,p)\}.$$

Функции ξ, по которым ищется инфимум в (9), принадлежат классу $C^1(0,T;[x_*+\varepsilon;x^*-\varepsilon])$ непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[0,T]$ и принимающих значения из отрезка $[x_*+\varepsilon;x^*-\varepsilon]$.

Характеристическая система (см., например, [2,13]) для задачи (1), (2) с гамильтонианом (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot x=H_p(x,p)=f(x)e^p-g(x)e^p,\\
&\dot p=-H_x(x,p)=-h'(x)-f'(x)e^p-g'(x)e^{-p},\\
&\dot z=pH_p(x,p)-H(x,p)=p(f(x)e^p-g(x)e^p)-f(x)e^p-g(x)e^p-h(x)
\end{aligned} \tag{10}$$

и рассматривается с начальными условиями

$$x(0,y)=y,\quad p(0,y)=u_0'(y),\quad z(0,y)=u_0(y),\quad y\in[x_*+\varepsilon;x^*-\varepsilon]. \tag{11}$$

Здесь $H_x(x,p)=\partial H(x,p)/\partial x$, $H_p(x,p)=\partial H(x,p)/\partial p$, а символом $f'(x)$ обозначается производная функции $f(x)$. Решения системы (10), (11) называются характеристиками. Компоненты $x(\cdot,y)$, $p(\cdot,y)$ и $z(\cdot,y)$ решения называются соответственно фазовыми, импульсными и ценовыми характеристиками.

Выписывая необходимые условия экстремума для вариационной задачи (9), можно показать, что инфимум достигается на фазовых характеристиках, и согласно методу обобщенных характеристик [10,13] значение (9) вязкостного решения в точке $(t,x)\in G_0^\varepsilon$ равно

$$u(t,x)=\min\left\{u_0(y)+\int\limits_0^t(p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau))-H(x(\tau),p(\tau)))d\tau : x(t,y)=x\right\}. \tag{12}$$

где $x(t) = x(t, y)$ и $p(t) = p(t, y)$ являются соответственно фазовой и импульсной компонентами решения характеристической системы (10), (11), определяемого параметром $y \in [x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon]$.

Покажем, что вязкостное решение, определенное в открытой области G_0 репрезентативной формулой (12), можно непрерывно продолжить на границы области $x = x_*$ и $x = x^*$, и полученное продолжение будет вязкостным решением в области $\operatorname{cl} G_0$.

Рассмотрим в системе (10) уравнение для импульсной компоненты характеристики. Поскольку функции h, f и g, рассматриваемые на ограниченном отрезке $[x_*, x^*]$, непрерывно дифференцируемы, а f и g, кроме того, являются соответственно строго возрастающей и строго убывающей функциями, можно получить следующую оценку

$$-Ae^{p} - B < \dot{p} < Ae^{-p} + B,$$

где $A > 0$, $B \geqslant 0$. Используя эту оценку, можно показать, что найдутся числа $K > 0$, C_1 и C_2 такие, что

$$-Kt + C_1 < p(t) < Kt + C_2.$$

Из (3) получаем, что $p(t)$ внутри области G_0 принимают конечные значения, поэтому импульсные компоненты характеристик (10), как и фазовые компоненты, продолжимы либо до момента $t = T$, либо до верхней ($x = x^*$) или нижней ($x = x_*$) границы области G_0. Таким образом, устремляя ε к нулю, мы непрерывно продолжим заданную в областях G_0^{ε} функцию $u(t, x)$ на $\operatorname{cl} G_0$.

По схеме, аналогичной использованной в работе [5] для доказательства супердифференцируемости обобщенного решения, можно доказать, что функция $u(t, x)$ является субдифференцируемой в $\operatorname{cl} G_0$, то есть

$$\forall (t, x) \in \operatorname{cl} G_0 \quad D^{-}(t, x) \neq \emptyset.$$

Заметим, что если функция u дифференцируема в точке (t, x), тогда

$$D^{-}(t, x) = D^{+}(t, x) = \left\{ \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) \right\}.$$

Покажем, что на границах $x = x_*$ и $x = x^*$ выполняется дифференциальное неравенство (6).

Символом $\operatorname{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)$ дифференцируема. Определим множество

$$\partial u(t, x) = \operatorname{co}\Bigg\{ (a, s) : a = \lim_{i \to \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial t},\ s = \lim_{i \to \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial x}; \\ (t_i, x_i) \to (t, x) \text{ при } i \to \infty,\ (t_i, x_i) \in \operatorname{Dif}(u) \Bigg\}. \quad (13)$$

Для $0 < t < T$ справедливы включения

$$D^{-}(t, x_*) \subset \{(a, s + k) \mid (a, s) \in \partial u(t, x_*),\ k > 0\},$$
$$D^{-}(t, x^*) \subset \{(a, s - k) \mid (a, s) \in \partial u(t, x_*),\ k > 0\}.$$

Таким образом, в силу (7), для проверки выполнения неравенства (6) на верхней границе области $\operatorname{cl} G_0$ достаточно показать, что если

$$a + h(x^*) + f(x^*)e^{p} \geqslant 0,$$

тогда для всех $s > 0$ выполняется

$$a + h(x^*) + f(x^*)e^{p+s} \geqslant 0. \quad (14)$$

Поскольку $f(x^*) > 0$, неравенство (14) справедливо. Итак, на верхней границе $x = x^*$ выполнено дифференциальное неравенство (6) для субдифференциала функции $u(\cdot)$.

Для проверки неравенства (6) на нижней границе $x = x_*$ области $\operatorname{cl} G_0$ достаточно показать, что если

$$a + h(x_*) + g(x_*)e^{-p} \geqslant 0,$$

тогда для всех $s > 0$ выполняется

$$a + h(x_*) + g(x_*)e^{-(p-s)} = a + h(x_*) + g(x_*)e^{-p+s} \geqslant 0. \tag{15}$$

Неравенство (15) справедливо, так как $g(x_*) > 0$. Таким образом, в точках нижней границы $x = x_*$ выполнено дифференциальное неравенство (6), и это завершает доказательство того, что построенная в области $\operatorname{cl} G_0$ функция $u(\cdot)$ является вязкостным решением. Поскольку гамильтониан (7) и функция $u_0(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы, из результатов [8] следует, что вязкостное решение в замкнутой области $\operatorname{cl} G_0$ единственно.

4. Свойства решения на границах областей. Прежде чем перейти к построению решения задачи в областях G_- и G_+ (1)–(3), изучим свойства построенного в области $\operatorname{cl} G_0$ вязкостного решения $u(\cdot)$ на линиях $x = x_*$ и $x = x^*$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = u(t, x^*), \quad t \in [0, T].$$

По построению $\varphi(0) = u_0(x^*)$.

Пусть $\Delta > 0$. Согласно (12) существует $y_\Delta \in (x_*, x^*)$ такое, что

$$\varphi(\Delta) = u_0(y_\Delta) + \int\limits_0^\Delta (p_\Delta(\tau)H_p(x_\Delta(\tau), p_\Delta(\tau)) - H(x_\Delta(\tau), p_\Delta(\tau)))d\tau, \tag{16}$$

где $x_\Delta(t)$ и $p_\Delta(t)$ являются соответственно фазовой и импульсной компонентами решения характеристической системы (10), (11), определяемого параметром y_Δ.

При малых значениях Δ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка величину $p_\Delta(t)$ можно считать равной значению $u_0'(x^* - y_\Delta)$, а фазовую характеристику $x_\Delta(t)$ — отрезком прямой, соединяющей точки $(0, x^* - y_\Delta)$ и $(0, \Delta)$. При этом значение интеграла в выражении (16) по теореме о среднем будет равно $K\Delta^2$.

Поскольку $y_\Delta \to x^*$ при $\Delta \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{\varphi(\Delta) - \varphi(0)}{\Delta} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{u_0(y_\Delta) + K\Delta^2 + o(\Delta) - u_0(x^*)}{\Delta} = u_0'(x^*).$$

Итак, функция $\varphi(\cdot)$ в точке $t = 0$ имеет правую производную, значение которой равно производной начальной функции $u_0'(\cdot)$ в точке x^*.

$$\varphi_+'(0) = u_0'(x^*).$$

Поскольку построенное в области $\operatorname{cl} G_0$ вязкостное решение $u(\cdot)$ субдифференцируемо, функция $\varphi(\cdot)$ также является субдифференцируемой, то есть для неё справедливо свойство

$$\forall t \in [0, T] \quad D^-\varphi(t) \neq \emptyset. \tag{17}$$

Функция одной переменной, субдифференцируемая на ограниченном отрезке, имеет на этом отрезке не более конечного числа точек недифференцируемости. Таким образом, из (17) следует, что функция $\varphi(\cdot)$ является кусочно дифференцируемой.

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi(t) = u(t, x_*), \quad t \in [0, T].$$

По построению $\psi(0) = u_0(x_*)$. Так же, как и для функции $\varphi(\cdot)$, можно доказать, что

$$\forall t \in [0, T] \quad D^-\psi(t) \neq \emptyset,$$

и функция $\psi(\cdot)$ кусочно дифференцируема. Кроме того, функция $\psi(\cdot)$ в точке $t = 0$ имеет правую производную, и

$$\psi_+'(0) = u_0'(x_*).$$

5. Построение решения в областях G_+ и G_-. В области G_+ гамильтониан задачи (1)–(3) имеет вид

$$H(x,p) = f(x)e^p, \quad f(x) > 0,$$

и соответствующая характеристическая система записывается следующим образом.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = f(x)e^p, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) =) - f'(x)e^p, \\ \dot{z} &= pH_p(x,p) - H(x,p). \end{aligned} \tag{18}$$

Начальное многообразие, с которого согласно методу обобщенных характеристик [10,13] следует выпускать характеристики, разбивается на две части

$$\{(t,x,z) \mid t=0,\ x \geqslant x_*,\ z = u_0(x)\} \cup \{(t,x,z) \mid 0 \leqslant t < T,\ x = x^*,\ z = \varphi(t) = u(t,x^*)\},$$

поэтому система (18) должна рассматриваться с двумя наборами начальных условий.

Начальные условия для характеристик, стартующих в момент $t=0$, имеют вид

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad z(0,y) = u_0(y), \quad y \in [x^*;\infty). \tag{19}$$

Для характеристик, стартующих в момент $\tau \in [0,T)$ из точек, расположенных на линии $x = x^*$, начальные условия записываются следующим образом

$$x(\tau) = x^*, \quad p(\tau) \in D^-\varphi(\tau), \quad z(\tau) = \varphi(\tau) = u(\tau, x^*). \tag{20}$$

Если функция $\varphi(\cdot)$ дифференцируема в точке τ, тогда в этой точке её субдифференциал состоит из единственного элемента, и

$$D^-\varphi(\tau) = D^+\varphi(\tau) = \varphi'(\tau).$$

В точках недифференцируемости $\varphi(\cdot)$ супердифференциал пуст, а субдифференциал является отрезком. Таким образом, если в точке τ функция $\varphi(\cdot)$ недифференцируема, из точки (τ, x^*) выпускается пучок характеристик.

Рассмотрим первые два уравнения (для фазовой и импульсной компонент характеристики) системы (18). Разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{f'(x)}{f(x)},$$

получим

$$p(x) = p(x_0) - \ln f(x).$$

Подставив это выражение для p в первое уравнение характеристической системы (18), получим, что фазовые компоненты характеристик являются прямыми вида

$$x = x_0 + e^{p(x_0)}t.$$

Определим множество

$$\Gamma_+ = \{(t,x,) \mid t=0,\ x \geqslant x^*\} \cup \{(t,x) \mid 0 \leqslant t < T,\ x = x^*\}.$$

Для точки $(\bar{t},\bar{x}) \in G_+$ определим $X(\Gamma_+;\bar{t},\bar{x})$ как множество всех фазовых характеристик $x(\cdot)$, выпущенных из точек множества Γ_+, таких, что для них справедливо условие

$$x(\bar{t}) = \bar{x}.$$

Используя метод обобщенных характеристик, можно показать, что функция

$$u(t,x) = \min_{X(\Gamma_+;t,x)} \left\{ u(\tau^\natural, x^\natural) + \int\limits_{\tau^\natural}^{t} (p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau)))d\tau \right\}$$

является вязкостным решением задачи (1)–(3) в области G_+. Здесь $(\tau^\natural, x^\natural)$ — точка из множества Γ_+, из которой выпущена фазовая характеристика $x(\cdot)$; $p(\cdot)$ — соответствующая импульсная характеристика,

$$u(\tau^\natural, x^\natural) = \begin{cases} u_0(x^\natural), & \text{если } \tau^\natural = 0, \\ \varphi(\tau^\natural), & \text{если } 0 \leqslant \tau^\natural < T,\ x^\natural = x^*. \end{cases}$$

Аналогично строится вязкостное решение в области G_-. В этой области гамильтониан имеет вид

$$H(x,p) = g(x)e^{-p}, \quad g(x) > 0,$$

а соответствующая характеристическая система записывается следующим образом.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = -g(x)e^{-p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) =) - g'(x)e^{-p}, \\ \dot{z} &= pH_p(x,p) - H(x,p). \end{aligned} \tag{21}$$

Для характеристик, выпускаемых в момент $t = 0$, начальные условия имеют вид

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad z(0,y) = u_0(y), \quad y \in (-\infty; x_*]. \tag{22}$$

Начальные условия для характеристик, стартующих в момент $\tau \in [0,T)$ из точек, расположенных на линии $x = x_*$, записываются следующим образом

$$x(\tau) = x_*, \quad p(\tau) \in D^-\psi(\tau), \quad z(\tau) = \psi(\tau) = u(\tau, x_*). \tag{23}$$

Несложно проверить, что фазовые характеристики являются прямыми вида

$$x = x_0 - e^{-p(x_0)}t.$$

Определим множество

$$\Gamma_- = \{(t,x,) \mid t = 0,\ x \leqslant x_*\} \cup \{(t,x) \mid 0 \leqslant t < T,\ x = x_*\}.$$

Для точки $(\bar{t}, \bar{x}) \in G_-$ определим множество $X(\Gamma_-; \bar{t}, \bar{x})$ как множество всех фазовых характеристик $x(\cdot)$, выпущенных из точек множества Γ_-, таких, что для них справедливо условие

$$x(\bar{t}) = \bar{x}.$$

Функция

$$u(t,x) = \min_{X(\Gamma_-;t,x)} \left\{ u(\tau^\natural, x^\natural) + \int\limits_{\tau^\natural}^{t} (p(\tau)H_p(x(\tau),p(\tau)) - H(x(\tau),p(\tau)))d\tau \right\}$$

является вязкостным решением задачи (1)–(3) в области G_-. Здесь $(\tau^\natural, x^\natural)$ — точка из множества Γ_-, из которой выпущена фазовая характеристика $x(\cdot)$; $p(\cdot)$ — соответствующая импульсная характеристика,

$$u(\tau^\natural, x^\natural) = \begin{cases} u_0(x^\natural), & \text{если } \tau^\natural = 0, \\ \psi(\tau^\natural), & \text{если } 0 \leqslant \tau^\natural < T,\ x^\natural = x_*. \end{cases}$$

6. Обобщенное решение. Основываясь на проведенных построениях, дадим следующее определение.

Определение 2. Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем непрерывную функцию $u(\cdot)\colon [0;T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую начальному условию (2) и такую, что её сужения $u_{|G_-}(\cdot)$, $u_{|G_+}(\cdot)$ и $u_{|\,\mathrm{cl}\,G_0}(\cdot)$ на области G_- и G_+ и на замыкание области G_0 являются вязкостными решениями уравнения (1) с гамильтонианом вида (3) на этих множествах.

Замечание 1. Проверка того, что сужения функции $u(\cdot)$ являются вязкостными решениями, сводится к проверке выполнения дифференциальных неравенств (5), (6). Следует подчеркнуть, что для точек (t,x), принадлежащих границе области G_0 (лежащих на линиях $x = x_*$ и $x = x^*$), субдифференциал $D^-u(t,x)$ и супердифференциал $D^+u(t,x)$ функции $u(\cdot)$ не совпадают с соответствующими субдифференциалом и супердифференциалом сужения $D^-u_{|\,\mathrm{cl}\,G_0}(t,x)$ и $D^+u_{|\,\mathrm{cl}\,G_0}(t,x)$. В частности, $D^-u(t,x)$ является ограниченным и замкнутым (возможно, пустым) множеством, а множество $D^-u_{|\,\mathrm{cl}\,G_0}(t,x)$ неограниченно.

Из построений, представленных выше, следует утверждение.

Теорема 1. *Для задачи* (1)–(3) *существует обобщенное в смысле определения* 1 *решение* $u(\cdot)\colon [0;T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

В ограниченной и замкнутой области $\mathrm{cl}\,G_0$ вязкостное решение задачи (1)–(3) единственно, но на неограниченных открытых множествах $G_-\times\mathbb{R}$ и $G_+\times\mathbb{R}$ гамильтониан H, задаваемый формулой (3), не удовлетворяет известным достаточным условиям единственности вязкостного решения, поэтому на множестве $[0;T]\times\mathbb{R}$ обобщенное решение может быть не единственным.

Пусть $M > 0$ такое, что

$$M > \max\{|x_*|, |x^*|\}. \tag{24}$$

Рассмотрим задачу (1)–(3) для $(t,x)\in[0,T]\times(-M;M)$, то есть в ограниченной по x открытой области. Можно показать, что в этом случае значения импульсных компонент характеристических систем (18), (19), (20) и (21), (22), (23) будут ограничены, и

$$p(t)\in P,\quad t\in[0,T],$$

для всех $t\in[0,T]$, где P — ограниченный отрезок.

Определим

$$G_-^M = \{(t,x)\mid 0<t<T,\ -M<x<x_*\},\quad G_+^M = \{(t,x)\mid 0<t<T,\ x^*<x<M\}.$$

Гамильтониан $H(x,p)$ непрерывно дифференцируем на ограниченных замкнутых множествах $\mathrm{cl}\,G_-^M\times P$ и $\mathrm{cl}\,G_+^M\times P$, следовательно, на этих множествах он удовлетворяет условию Липшица. Поэтому вязкостные решения задачи (1)–(3) в областях $[0,T)\times G_-^M$ и $[0,T)\times G_+^M$ единственны. Отсюда следует единственность обобщенного решения задачи (1)–(3), рассматриваемой в ограниченной по x области $[0,T]\times(-M;M)$.

Таким образом, доказано следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть* M *удовлетворяет условию* (24)*. Тогда для задачи* (1)–(3)*, рассматриваемой в области* $[0,T]\times(-M;M)$*, обобщенное в смысле определения* 1 *решение* $u(\cdot)\colon[0;T]\times(-M;M)\to\mathbb{R}$ *существует и единственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кружков С. Н.* Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I// Мат. сб. — 1966. — *70 (112)*, № 3. — С. 394–415.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1961.
4. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона—Якоби. — М.: Наука, 1991.
5. *Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г.* О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби с фазовыми ограничениями// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — *17*, № 2. — С. 191–208.
6. *Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г.* О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2015. — *21*, № 2. — С. 220–235.
7. *Шагалова Л. Г.* Непрерывное обобщенное решение уравнения Гамильтона—Якоби с некоэрцитивным гамильтонианом// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *186*. — С. 144–151.
8. *Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.* Hamilton–Jacobi equations with state constraints// Trans. Am. Math. Soc. — 1990. — *318*, № 2. — P. 643–683.

9. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — *377*, № 1. — P. 1–42.
10. *Mirică Ş.* Generalized solutions by Cauchy's method of characteristics// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1987. — *77*. — P. 317–350.
11. *Saakian D. B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and Crow–Kimura models for molecular evolution// Phys. Rev. E. — 2008. — *78*, № 4. — 041908.
12. *Subbotin A. I.* Generalized Solutions of First-Order Partial Differential Equations. The Dynamical Optimization Perspective. — Boston: Birkhäuser, 1995.
13. *Subbotina N. N.* The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization// Mod. Math. Appl. — 2004. — *20*. — P. 2955–3091.
14. *Yokoyama E., Giga Y., Rybka P.* A microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation// Phys. D. — 2008. — *237*. — P. 2845–2855.

Шагалова Любовь Геннадьевна
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения РАН, Екатеринбург
E-mail: shag@imm.uran.ru