ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 37–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-37-40

УДК 517.95

ПОВЕДЕНИЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ С БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ ГЁЛЬДЕРА С ПОКАЗАТЕЛЕМ МЕНЬШЕ 1/2

© 2022 г. **А. Н. КОНЕНКОВ**

Аннотация. Для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной рассматриваются решения первой краевой задачи в области с боковой границей, имеющей модельную особенность: кривая, задающая боковую границу, гладкая, за исключением одной точки, и принадлежит классу Гёльдера с показателем меньше 1/2. При условии, что решение положительно в некоторой окрестности особой точки и равно нулю на боковой границе в этой окрестности, устанавливается, что первая производная решения неограниченно растет при приближении к особой точке.

***Ключевые слова*:** уравнение теплопроводности, первая краевая задача, негладкая боковая граница, метод барьеров.

BOUNDARY BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION IN A DOMAIN WHOSE LATERAL BOUNDARY SATISFIES THE HÖLDER CONDITION WITH EXPONENT LESS THAN 1/2

© 2022 **A. N. KONENKOV**

Abstract. For the heat equation with one space variable, we examine solutions of the first boundary-value problem in a domain whose lateral boundary possesses a model singularity, namely, the curve describing the lateral boundary is smooth everywhere except for one point and belongs to the Hölder class with exponent less than 1/2. We prove that if a solution is positive in some neighborhood of the singular point and vanishes on the lateral boundary in this neighborhood, then the first derivative of this solution unboundedly increases in any neighbourhood of the singular point.

***Keywords and phrases*:** heat equation, first boundary-value problem, nonsmooth lateral boundary, barrier method.

***AMS Subject Classification*:** 35A08, 35K10, 35D30

Гладкости решений параболических краевых задач в области с гладкой, за исключением одной точки, боковой границей посвящено много работ. И. Г. Петровский [3] для уравнения теплопроводности рассмотрел нецилиндрическую область и получил необходимые и достаточные условия на порядок касания граничной поверхности плоскостью $t = 0$ для разрешимости первой краевой задачи. Также много работ посвящено исследованию регулярности решений в областях с коническими точками (см. [2] и цитированную там литературу).

В [1] для параболического уравнения с одной пространственной переменной рассматриваются различные области, на границе которых есть точка, в которой боковая граница касается характеристики $t = 0$. При этом область лежит по разные стороны от этой прямой. Исследована гладкость решений. В частности, выписан главный член асимптотики решения вблизи особой точки. Боковая граница вблизи особой точки принадлежала классу Гёльдера $C^{1/2}$. В настоящей работе решения уравнения теплопроводности исследуются в области с менее гладкой боковой границей, имеющей модельную особенность из класса Гёльдера C^{α}, где $\alpha \in (0, 1/2)$. А именно рассматривается первая краевая задача в области Ω, которая в некоторой окрестности точки $(0, 1)$ задается неравенством $x > |1 - t|^{\alpha}$. Решение полагается сохраняющим знак в некоторой окрестности особой точки границы и равным нулю на границе. Мы показываем, что при этих условиях решение не может иметь ограниченной в области производной первого порядка по пространственной переменной. Это вытекает из получаемой степенной оценки снизу на рост производной на границе области.

Теорема 1. *Пусть функция* $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *удовлетворяет уравнению теплопроводности* $u_t - u_{xx} = 0$ *в* Ω *и в некоторой окрестности точки* $(1, 0)$ *положительна в* Ω *и равна нулю на боковой границе. Тогда существует число* $\varepsilon > 0$ *и константа* $C > 0$ *такие, что для* $t \in (1 - \varepsilon, 1)$ *справедлива оценка*

$$u_x|_{\Sigma} \geqslant C(1 - t)^{\alpha - 1/2}. \tag{1}$$

Доказательство. Распрямим боковую границу области с помощью замены переменных $(x, t) \to (x + |1 - t|^{\alpha}, t)$. При этом область Ω в окрестности точки $(0, 1)$ переходит в область, задаваемую неравенством $x > 0$, а уравнение теплопроводности в

$$Lu = u_t - \frac{1}{2} u_{xx} - \alpha(1 - t)^{\alpha - 1} u_x = 0.$$

Рассмотрим прямоугольник $Q_{\varepsilon,\delta} = (0, \varepsilon) \times (1 - \delta, 1)$, $0 < \varepsilon, \delta \leqslant 1$. Требуемый результат имеет локальный характер. Достаточно доказать оценку из утверждения теоремы в области такого вида для некоторых $\varepsilon, \delta > 0$.

Так как функция u является гладкой при $t < 1$ и положительной в достаточно малой области $Q_{\varepsilon,\delta}$, то u удовлетворяет следующим неравенствам

$$\begin{gathered} u(0, t) = 0, \\ C_1 x \leqslant u(x, 1 - \delta) \leqslant C_2 x, \\ C_3 \leqslant u(\varepsilon, t) \leqslant C_4, \end{gathered} \tag{2}$$

для некоторых постоянных $C_i > 0$.

Обозначим через $PQ_{\varepsilon,\delta}$ параболическую границу $Q_{\varepsilon,\delta}$. Пусть v — другое решение уравнения теплопроводности с такими же свойствами. Тогда можно подобрать $K_1, K_2 > 0$ так, что $K_1 v \leqslant u \leqslant K_2 v$ на $PQ_{\varepsilon,\delta}$ и, в силу принципа максимума, в $Q_{\varepsilon,\delta}$.

Если же функция v удовлетворяет неравенству $Lv \leqslant 0$, то $K_1 v \leqslant u$ в $Q_{\varepsilon,\delta}$ и

$$u_x(0, t) = \lim_{x \to 0+} \frac{u(x, t) - u(x, 0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{u(x, t)}{x} \geqslant K_1 \lim_{x \to 0+} \frac{v(x, t)}{x} = K_1 v_x(0, t).$$

Для доказательства утверждения теоремы воспользуемся методом барьеров. Построим функцию v с асимптотикой (1) у производной $v_x(0, t)$.

Обозначим через $Z(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} \exp\{-x^2/4t\}$ фундаментальное решение уравнения теплопроводности и для функции $\psi(x) = |x|^{2\alpha} \operatorname{sign} x$ рассмотрим потенциал Пуассона

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x - y, 1 - t) \psi(y) dy.$$

Так как ψ нечетна, то $v(0,t)=0$ и $v(x,t)>0$ при $x>0$. Производная v_x при $x=0$ выписывается явно:

$$v_x(0,t) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_x(y,1-t)\psi(y)dy = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)(1-t)^{\alpha-1/2}}{\sqrt{\pi}},$$

и имеет нужную асимптотику при $t\to 1-0$.

Так как $v_t=-v_{xx}$, осталось доказать неравенство $Lv=-2v_{xx}-\alpha(1-t)^{\alpha-1}v_x\leqslant 0$.

Обозначим $\tau=1-t$ и положим

$$w(x,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x-y,\tau)\psi(y)dy.$$

Тогда $Lv=-2w_{xx}-\alpha\tau^{\alpha-1}w_x$. Знак производных в правой части не меняется при $x>0$:

$$w_x(x,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(x-y,\tau)\psi'(y)dy>0,$$

$$w_{xx}(x,\tau)=\int\limits_{0}^{\infty}(Z(x-y,\tau)-Z(x+y,\tau))\psi''(y)dy<0.$$

Покажем, что $\alpha\tau^{\alpha-1}w_x\geqslant |w_{xx}|$.

Рассмотрим два случая. Сначала пусть $x\leqslant\tau^{1/2}$. Так как $\psi(kx)=k^{2\alpha}\psi(x)$, $k>0$, то $w(x,\tau)=k^{-2\alpha}w(kx,k^2\tau)$ и $w_x(x,\tau)=k^{1-2\alpha}w_x(kx,k^2\tau)$. Положив $k=\tau^{1/2}$, получим

$$w_x(x,\tau)=\tau^{\alpha-1/2}w_x(x\tau^{-1/2},1)$$

и

$$w_x(x,\tau)\geqslant\tau^{\alpha-1/2}\min_{0\leqslant y\leqslant 1}w_x(y,1)=C\tau^{\alpha-1/2}$$

для $0\leqslant x\leqslant\tau^{1/2}\leqslant 1$. Таким же образом, используя равенство $w_{xx}(x,\tau)=k^{2-2\alpha}w_x(kx,k^2\tau)$, получаем

$$|w_{xx}(x,\tau)|\leqslant\tau^{\alpha-1}\max_{0\leqslant y\leqslant 1}|w_{xx}(y,1)|=C\tau^{\alpha-1}.$$

Объединяя эти оценки, заключаем, что для достаточно малых $\tau>0$

$$Lv=-\alpha\tau^{\alpha-1}w_x-w_{xx}\leqslant -C_1\tau^{\alpha-1}\tau^{\alpha-1/2}+C_2\tau^{\alpha-1}=C_1\tau^{\alpha-1}(-\tau^{\alpha-1/2}+C_3)\leqslant 0.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $x>\tau^{1/2}$. Изучим сначала поведение функции w при $t=1$. Покажем, что

$$w(x,1)=x^{2\alpha}+O(x^{2\alpha-1}),\quad x\to+\infty.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
w(x,1)&=\psi(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}Z(x-y,1)(\psi(y)-\psi(x))dy=\\
&=\psi(x)+\int\limits_{x/2}^{3x/2}Z(x-y,1)(\psi(y)-\psi(x))dy+O(e^{-x^2/16})=\\
&=\psi(x)+\int\limits_{x/2}^{3x/2}Z(x-y,1)(\psi(y)-\psi(x)-\psi'(x)(x-y))dy+O(e^{-x^2/16})=\\
&=x^{2\alpha}+O(x^{2\alpha-1}),\quad x\to+\infty,
\end{aligned}$$

поскольку

$$\left|\int_{x/2}^{3x/2} Z(x-y,1)(\psi(y)-\psi(x)-\psi'(x)(x-y))dy\right| \leqslant \frac{1}{2}|\psi''(x/2)| \int_{-\infty}^{\infty} Z(x-y,1)(x-y)^2 dy = Cx^{2\alpha-1}.$$

Здесь мы воспользовались четностью фундаментального решения по x и монотонностью функции ψ'' при $x > 0$. Точно так же выводятся асимптотические формулы

$$\begin{aligned} w_x(x,1) &= 2\alpha x^{2\alpha-1} + O(x^{2\alpha-2}), \qquad & x \to +\infty, \\ w_{xx}(x,1) &= 2\alpha(2\alpha-1)x^{2\alpha-2} + O(x^{2\alpha-3}), \quad & x \to +\infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Из положительности $w_x(x,1)$ при $x > 0$ и (3) следует, что существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$w_x(x,1) \geqslant Cx^{2\alpha-1}, \quad x \geqslant 1.$$

Из равенства $w_x(x,\tau) = k^{1-2\alpha} w_x(kx, k^2\tau)$ при $k = \tau^{-1/2}$ получаем, что

$$w_x(x,t) = \tau^{\alpha-1/2} w_x(x\tau^{-1/2},1) \geqslant C\tau^{\alpha-1/2}(x\tau^{-1/2})^{2\alpha-1} = Cx^{2\alpha-1}.$$

Из (3) имеем:

$$|w_{xx}(x,\tau)| \leqslant Cx^{2\alpha-2}.$$

Для достаточно малого $\tau > 0$

$$\begin{aligned} Lv &= -\alpha\tau^{\alpha-1} w_x - w_{xx} \leqslant -C_1 x^{2\alpha-1}\tau^{\alpha-1} + C_2 x^{2\alpha-2} = \\ &= C_1 x^{2\alpha-2}(-\tau^{\alpha-1/2}(x\tau^{-1/2}) + C_3) \leqslant C_1 x^{2\alpha-2}(-\tau^{\alpha-1/2} + C_3) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Таким образом, барьерная функция v обладает всеми требуемыми свойствами в некотором прямоугольнике $Q_{\varepsilon,\delta}$.

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арефьев В. Н., Багиров Л. А.* О решениях уравнения теплопроводности в областях с особенностями// Мат. заметки. — 1998. — *64*, № 2. — С. 163–179.
2. *Козлов В. А., Мазья В. Г.* Об особенностях решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях с конической точкой// Изв. вузов. Мат. — 1987. — № 2. — С. 38–46.
3. *Петровский И. Г.* О решении первой краевой задачи для уравнения теплопроводности// Уч. зап. МГУ. — 1934. — № 2. — С. 55–59.

Коненков Андрей Николаевич
Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина
E-mail: a.konenkov@365.rsu.edu.ru