ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 38–46
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-38-46

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА—КАПУТО

© 2022 г. **К. В. БОЙКО, В. Е. ФЕДОРОВ**

Аннотация. Исследуются вопросы корректности линейных обратных задач для уравнений с несколькими дробными производными Герасимова—Капуто в банаховых пространствах. Рассмотрена обратная коэффициентная задача для разрешенного относительно старшей дробной производной уравнения, содержащего ограниченные операторы при младших производных. Доказан критерий корректности такой задачи. Аналогичная обратная задача для уравнения с вырожденным оператором при старшей производной в предположении относительной 0-ограниченности пары операторов при двух старших производных редуцирована к двум задачам на подпространствах для уравнений, разрешенных относительно старшей производной. Полученные критерии корректности позволили исследовать один класс обратных задач для уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального по пространственным оператора и с несколькими производными Герасимова—Капуто по времени.

Ключевые слова: дробная производная Герасимова—Капуто, вырожденное эволюционное уравнение, обратная коэффициентная задача, корректность задачи.

AN INVERSE PROBLEM FOR A CLASS OF DEGENERATE EVOLUTION MULTI-TERM EQUATIONS WITH GERASIMOV–CAPUTO DERIVATIVES

© 2022 **K. V. BOYKO, V. E. FEDOROV**

Abstract. Issues of well-posedness of linear inverse problems for equations with several Gerasimov–Caputo fractional derivatives in Banach spaces are investigated. The inverse coefficient problem is considered for an equation solved with respect to the highest fractional derivative containing bounded operators at lower order derivatives. The criterion of well-posedness of such a problem is proved. A similar inverse problem for an equation with a degenerate operator at the highest derivative, assuming the relative 0-boundedness of a pair of operators at two higher derivatives, is reduced to two problems on subspaces for equations solved with respect to the highest derivative. The obtained well-posedness criteria allowed us to investigate one class of inverse problems for equations with polynomials from an elliptic differential operator with respect to spatial variables and with several Gerasimov–Caputo time derivatives.

Keywords and phrases: Gerasimov–Caputo fractional derivative, degenerate evolution equation, inverse coefficient problem, problem well-posedness.

AMS Subject Classification: 35R30, 35R11, 34G10

1. Введение. Задачи для различных классов уравнений с несколькими дробными производными исследовались многими авторами, в частности, изучались начально-краевые задачи для

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Вьетнамской академией наук и технологий (проект № 21-51-54003).

телеграфных [11], диффузионных уравнений [8, 13] такого вида, различные уравнения в локально выпуклых (или просто в банаховых) пространствах с приложениями к уравнениям в частных производных [1, 7, 9, 12, 14]. В то же время обратные коэффициентные задачи рассматривались для разлиных уравнений с дробной производной [2, 3, 10, 15].

В этой работе исследуются вопросы корректности линейной обратной задачи для уравнения более сложного вида — с несколькими дробными производными Герасимова—Капуто в банаховых пространствах

$$D_t^{\alpha} Lx(t) = \sum_{j=1}^{n} M_j D_t^{\alpha_j} x(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $m_n - 1 < \alpha_n \leqslant m_n \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $L, M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линейные непрерывные операторы из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$), $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $M_n \in \mathcal{C}l(X; \mathcal{Y})$ (линейный замкнутый оператор, плотно определенный в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$), $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{Y}$, $T > 0$, с начальными условиями

$$x^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}, \quad l = 0, 1, \ldots, m_n - 1, \quad (Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}^1, \quad l = m_n, m_n + 1, \ldots, m - 1, \tag{2}$$

где P — проектор в пространстве $\mathcal{X}$ вдоль подпространства вырождения $\mathcal{X}^0$ (см. в п. 3) на подпространство $\mathcal{X}^1$, и с условием переопределения

$$\int_0^T x(t) d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}, \tag{3}$$

где функция μ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, T]$, а условие задается интегралом Римана—Стилтьеса. Неизвестными в обратной задаче (1)—(3) являются коэффициент u и функция $x\colon [0, T] \to \mathcal{X}$.

Во втором разделе сформулирована полученная теорема из работы [6] об однозначной разрешимости прямой задачи (1), (2) для разрешенного относительно старшей дробной производной уравнения, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $L = I$ и поэтому $P = I$, содержащего ограниченные операторы при младших производных. Формула решения из этой теоремы использована для исследования обратной задачи (1)—(3) для этого уравнения. Получен критерий ее корректности в терминах обратимости оператора, построенного по данным задачи.

В разделе 3 рассмотрена обратная коэффициентная задача (1)—(3) для вырожденного эволюционного уравнения, т.е. при $\ker L \neq \{0\}$. В предположении $(L, 0)$-ограниченности оператора M_n исходная вырожденная задача редуцирована к двум обратным задачам на двух взаимно дополняющих друг друга подпространствах для уравнений, разрешенных относительно старшей производной. На основе результата второго параграфа получен критерий корректности обратной задачи для вырожденного уравнения.

В последнем разделе полученные абстрактные результаты использованы при исследовании класса обратных задач для уравнений с многочленами от эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

2. Обратная задача для уравнения, разрешенного относительно старшей производной. Пусть $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка m, $J_t^0 := I$, дробный интеграл Римана—Лиувилля J_t^{β} порядка $\beta > 0$ и дробная производная Герасимова—Капуто D_t^{α} порядка $\alpha > 0$ определяются соотношениями соответственно

$$J_t^{\beta} z(t) := \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} z(s) ds, \quad D_t^{\alpha} z(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(z(t) - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right).$$

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. Рассмотрим обратную задачу для уравнения с несколькими дробными производными Герасимова—Капуто

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j D_t^{\alpha_j} z(t) + \varphi(t)u, \quad t \in [0, T], \tag{4}$$

где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $m - 1 < \alpha \leqslant m$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ (линейные непрерывные операторы в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$), $j = 1, 2, \ldots, n$, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{Y}$, $T > 0$, с начальными условиями Коши

$$z^{(l)}(0) = z_l \in \mathcal{Z}, \quad l = 0, 1, \ldots, m - 1, \tag{5}$$

и с условием переопределения

$$\int_0^T x(t) d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}, \tag{6}$$

где μ — функция ограниченной вариации на отрезке $[0, T]$. Неизвестными в обратной задаче (1)—(3) являются коэффициент u и функция $x\colon [0, T] \to \mathcal{X}$.

Обозначим $n_l := n + 1$ при $l > m_n - 1$ или $n_l := \min\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : l \leqslant m_j - 1\}$ в противном случае,

$$R := \max\left\{\frac{1}{2n},\ \|A_j\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} : j = 1, 2, \ldots, n\right\}, \quad r_0 := (2Rn)^{\frac{1}{\alpha - \alpha_n}},$$

$$\gamma_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0,\ \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\}, \quad \gamma_2 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pi,\ \lambda \in [-r_0, -\infty)\},$$

$$\gamma_3 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = -\pi,\ \lambda \in (-\infty, -r_0]\}, \quad \gamma := \bigcup_{k=1}^{3} \gamma_k,$$

$$Z_l(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{j=1}^{n} \lambda^{\alpha_j} A_j\right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{j=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_j - l - 1} A_j\right) e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0,$$

при $l = 0, 1, \ldots, m - 1$,

$$Z(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{j=1}^{n} \lambda^{\alpha_j} A_j\right)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0.$$

Решением прямой задачи (4), (5) (с известным $u \in \mathcal{Z}$) называется функция $z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z})$, для которой $D_t^{\alpha} z, D_t^{\alpha_j} A_j z \in C([0, T]; \mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и выполняются равенства (4) при всех $t \in [0, T]$ и (5).

Теорема 1 (см. [6]). *Пусть $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{Z}$, $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \ldots, m - 1$. Тогда существует единственное решение задачи* (4), (5), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Z(t - s)\varphi(s) u ds. \tag{7}$$

Введем также обозначения

$$\psi := z_T - \int_0^T \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l d\mu(t), \quad \chi := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z(t - s)\varphi(s) ds.$$

Решением обратной задачи (4)—(6) (с неизвестным $u \in \mathcal{Z}$) называется пара $(z(t), u)$, где $u \in \mathcal{Z}$, функция z является решением задачи (4), (5) с этим u, удовлетворяющее условию переопределения (6). Часто для краткости решением обратной задачи будем называть только соответствующее $u \in \mathcal{Z}$.

Задачу (4)—(6) назовем корректной, если для любых $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $(z(t), u)$, для которого

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C\left(\sum_{l=0}^{m-1} \|z_l\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}}\right),$$

где константа C не зависит от $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$.

Теорема 2. *Пусть $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $\mu\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Тогда задача (4)—(6) корректна в том и только в том случае, когда $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. При этом решение имеет вид $u = \chi^{-1}\psi$.*

Доказательство. По теореме 1 решение задачи Коши (4), (5) существует для любых $z_l \in \mathcal{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $u \in \mathcal{Z}$ и имеет вид (7). Подставив (7) в (6), получим равенство

$$\int_0^T \left(\sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int_0^t Z(t-s)\varphi(s)ds u\right) d\mu(t) = z_T,$$

которое имеет вид $\chi u = \psi$, т.е. задача (4)—(6) эквивалентна этому уравнению. Поэтому задача однозначно разрешима при любом $\psi \in \mathcal{Z}$ тогда и только тогда, когда существует обратный оператор $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Из вида решения $u = \chi^{-1}\psi$ следует корректность обратной задачи в случае $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. □

3. Обратная задача для вырожденного эволюционного уравнения. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ — множество всех линейных замкнутых операторов с областью определения, плотной в $\mathcal{X}$, действующих в $\mathcal{Y}$. Будем предполагать, что $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $L, M_1, M_2, \dots, M_{n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, D_{M_n} — область определения оператора M_n, на которой задана норма графика $\|\cdot\|_{D_{M_n}} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M_n \cdot\|_{\mathcal{Y}}$. Обозначим $\rho^L(M_n) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M_n)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$, $R^L_\mu(M_n) := (\mu L - M_n)^{-1} L$, $L^L_\mu(M_n) := L(\mu L - M_n)^{-1}$.

Оператор M_n называется (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a > 0\ \forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M_n)).$$

В случае (L,σ)-ограниченности оператора M_n определим проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M_n)d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M_n)d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

где $\Gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [16, с. 89, 90]). Положим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 := \operatorname{im} Q$. Обозначим для краткости $P_0 := I - P$, $Q_0 := I - Q$, через L_r $(M_{j,r})$ — сужение оператора L (M_j) на $\mathcal{X}^r$ $(D_{M_{n,r}} := D_{M_n} \cap \mathcal{X}^r$ при $j = n)$, $r = 0, 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. При этом известно (см. [16, с. 90, 91]), что $LP = QL$, $M_n P x = Q M_n x$ для $x \in D_{M_n}$, $M_{n,1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, $M_{n,0} \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $L_r \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^r;\mathcal{Y}^r)$, $r = 0, 1$, существуют операторы $M_{n,0}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$. Дополнительно потребуем в дальнейших рассуждениях выполнения условий коммутирования

$$M_j P = Q M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{8}$$

Далее будем предполагать также, что M_n $(L,0)$-ограничен, т.е. L_0 — нулевой оператор.

Рассмотрим обратную задачу для вырожденного эволюционного уравнения

$$D_t^\alpha L x(t) = \sum_{j=1}^n D_t^{\alpha_j} M_j x(t) + \varphi(t) u, \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $m - 1 < \alpha \leqslant m$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{Y}$, $T > 0$, с начальными условиями

$$x^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}, \quad l = 0, 1, \dots, m_n - 1, \quad (Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathcal{X}^1, \quad l = m_n, m_n + 1, \dots, m-1, \tag{10}$$

и условием переопределения

$$\int\limits_0^T x(t)d\mu(t) = x_T \in \mathcal{X}. \tag{11}$$

Решением задачи (9), (10) (при заданном $u \in \mathcal{Y}$) будем называть функцию $x\colon [0,T] \to D_{M_n}$, для которой $x \in C^{m_n-1}([0,T];\mathcal{X})$, $Px \in C^{m-1}([0,T];\mathcal{X})$, $D_t^\alpha Lx, D_t^{\alpha_j} M_j x \in C([0,T];\mathcal{X})$, $j = 1,2\ldots,n$, выполняются равенства (9) при всех $t \in [0,T]$ и (10).

Решением задачи (9)—(11) (при неизвестном $u \in \mathcal{Y}$) будем называть пару $(x(t),u)$, где $u \in \mathcal{Y}$, функция $x(t)$ является решением задачи (9), (10) при этом $u \in \mathcal{Y}$, удовлетворяющее условию переопределения (11). Для краткости решением также будем называть соответствующее u.

Задача (9)—(11) называется корректной, если для любых $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 1,2,\ldots,m_n-1$, $x_l \in \mathcal{X}^1$, $l = m_n, m_n+1,\ldots,m-1$, $x_T \in \mathcal{X}$ существует единственное решение $(x(t),u)$ задачи (9)—(11), при этом

$$\|u\|_{\mathcal{Y}} \leqslant C\biggl(\sum_{l=1}^{m-1} \|x_l\|_{\mathcal{X}} + \|x_T\|_{\mathcal{X}}\biggr),$$

где C не зависит от $x_l \in \mathcal{X}$, $l = 1,2,\ldots,m_n-1$, $x_l \in \mathcal{X}^1$, $l = m_n, m_n+1,\ldots,m-1$.

Если оператор M_n $(L,0)$-ограничен, то задача (9)—(11) эквивалентна системе двух задач на дополняющих друг друга подпространствах $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$:

$$D_t^\alpha v(t) = \sum_{j=1}^{n} D_t^{\alpha_j} L_1^{-1} M_{j,1} v(t) + \varphi(t) L_1^{-1} u^1, \quad t \in [0;T], \tag{12}$$

$$v^{(l)}(0) = v_l, \quad l = 0,1,\ldots,m-1, \tag{13}$$

$$\int\limits_0^T v(t)d\mu(t) = v_T, \tag{14}$$

и

$$D_t^{\alpha_n} w(t) = -\sum_{j=1}^{n-1} D_t^{\alpha_j} M_{n,0}^{-1} M_{j,0} w(t) - \varphi(t) M_{n,0}^{-1} u^0, \quad t \in [0,T], \tag{15}$$

$$w^{(l)}(0) = w_l, \quad l = 0,1,\ldots,m_n-1, \tag{16}$$

$$\int\limits_0^T w(t)d\mu(t) = w_T, \tag{17}$$

где $v(t) = Px(t)$, $w(t) = P_0 x(t)$, $v_l = Px_l$, $l = 0,1,\ldots,m-1$, $w_l = P_0 x_l$, $l = 0,1,\ldots,m_n-1$, $v_T = Px_T$, $w_T = P_0 x_T$, $u^1 = Qu$, $u^0 = Q_0 u$. При этом учитывается, что в силу условий (8) $M_j\colon \mathcal{X}^r \to \mathcal{Y}^r$, $r = 0,1$, $j = 1,2,\ldots,n-1$. Таким образом, обе обратные задачи (12)—(14) и (15)—(17) являются невырожденными, а следовательно, по теореме 2 они корректны тогда и только тогда, когда существует $\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$ и $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ соответственно. При этом решения имеют вид

$$u^0 = \chi_0^{-1}\psi_0, \quad u^1 = \chi_1^{-1}\psi_1,$$

где

$$\psi_0 = w_T - \int\limits_0^T \sum_{l=0}^{m_n-1} X_{l,0}(t) w_l d\mu(t), \quad \chi_0 = -\int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t X_0(t-s) M_{n,0}^{-1}\varphi(s)ds,$$

$$\psi_1 = v_T - \int\limits_0^T \sum_{l=0}^{m-1} X_{l,1}(t) v_l d\mu(t), \qquad \chi_1 = \int\limits_0^T d\mu(t) \int\limits_0^t X_1(t-s) L_1^{-1}\varphi(s)ds,$$

для $t > 0$

$$X_{l,0}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0}\left(\lambda^{\alpha_n}I + \sum_{j=1}^{n-1}\lambda^{\alpha_j}M_{n,0}^{-1}M_{j,0}\right)^{-1}\left(\lambda^{\alpha_n-l-1}I + \sum_{j=(n-1)_l}^{n-1}\lambda^{\alpha_j-l-1}M_{n,0}^{-1}M_{j,0}\right)e^{\lambda t}d\lambda,$$

при $(n-1)_l = \min\{j \in \{1,2,\dots,n-1\} : l \leqslant m_j - 1\}$, $l = 0,1,\dots,m_n-1$,

$$X_0(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0}\left(\lambda^{\alpha_n}I + \sum_{j=1}^{n-1}\lambda^{\alpha_j}M_{n,0}^{-1}M_{j,0}\right)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda,$$

$$X_{l,1}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^1}\left(\lambda^{\alpha}I - \sum_{j=1}^{n}\lambda^{\alpha_j}L_1^{-1}M_{j,1}\right)^{-1}\left(\lambda^{\alpha-l-1}I - \sum_{j=n_l}^{n}\lambda^{\alpha_j-l-1}L_1^{-1}M_{j,1}\right)e^{\lambda t}d\lambda$$

при $n_l = \min\{j \in \{1,2,\dots,n\} : l \leqslant m_j - 1\}$, $l = 0,1,\dots,m-1$,

$$X_1(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^1}\left(\lambda^{\alpha}I - \sum_{j=1}^{n}\lambda^{\alpha_j}L_1^{-1}M_{j,1}\right)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda.$$

Здесь контуры γ^0, γ^1 строятся так же, как контур γ для невырожденного случая, но с использованием в качестве радиуса r_0 константы

$$r_{0,0} := \left(2(n-1)\max\left\{\frac{1}{2(n-1)}, \|M_{n,0}^{-1}M_{j,0}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^0)} : j = 1,2,\dots,n-1\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}},$$

$$r_{0,1} := \left(2n\max\left\{\frac{1}{2n}, \|L_1^{-1}M_{j,1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^1)} : j = 1,2,\dots,n\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha-\alpha_n}}$$

соответственно.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $L, M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1,2,\dots,n-1$, $M_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_jP = QM_j$, $j = 1,2,\dots,n-1$, $\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$. *Тогда задача* (9)—(11) *корректна в том и только в том случае, когда существуют* $\chi_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$, $\chi_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$. *При этом решение имеет вид* $u = \chi_0^{-1}\psi_0 + \chi_1^{-1}\psi_1$.

4. Приложение. Пусть заданы многочлены

$$P_p(\lambda) = \sum_{j=0}^{p}c_j\lambda^j, \quad Q_p^k(\lambda) = \sum_{j=0}^{p}d_j^k\lambda^j, \quad c_j, d_j^k \in \mathbb{C}, \quad j = 0,1,\dots,p, \quad k = 1,2,\dots,n, \quad c_p \neq 0,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda w)(s) = \sum_{|q|\leqslant 2r}a_q(s)\frac{\partial^{|q|}w(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\dots\partial s_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_lw)(s) = \sum_{|q|\leqslant r_l}b_{lq}(s)\frac{\partial^{|q|}w(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\dots\partial s_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1,2,\dots,r,$$

$q = (q_1,q_2,\dots,q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \dots + q_d$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_r$ регулярно эллиптичен [4]. Пусть оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{w \in H^{2r}(\Omega) : B_lw(s) = 0,\ l = 1,2,\dots,r,\ s \in \partial\Omega\}$$

действует согласно равенству $\Lambda_1w = \Lambda w$. Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный и дискретный [4]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим обратную задачу

$$\frac{\partial^l v}{\partial t^l}(s,0) = v_l(s), \quad l = 0,1,\dots,m-1, \quad s \in \Omega, \tag{18}$$

$$B_l \Lambda^k v(s,t) = 0, \quad k = 0,1,\dots,p-1, \quad l = 1,2,\dots,r, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{19}$$

$$D_t^\alpha P_p(\Lambda) v(s,t) = \sum_{j=1}^n D_t^{\alpha_j} Q_p^j(\Lambda) v(s,t) + \varphi(t) h(s), \quad (s,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{20}$$

$$\int_0^T v(s,T) d\mu(t) = v_T(s), \quad s \in \Omega, \tag{21}$$

где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha$, $m_n - 1 < \alpha_n \leqslant m_n \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, неизвестные функции – $v \colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ и $h \colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Возьмем

$$\mathcal{X} = \{w \in H^{2rp}(\Omega) : B_l \Lambda^k w(s) = 0,\ k = 0,1,\dots,p-1,\ l = 1,2,\dots,r,\ s \in \partial\Omega\},$$

$\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$, $L = P_p(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $M_j = Q_p^j(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1,2,\dots,n$.

Пусть $P_p(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$ и задача (18)—(21) представима в виде (4)—(6), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_j = L^{-1}M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1,2,\dots,n$, $z_l = v_l(\cdot)$, $l = 0,1,\dots,m-1$, $u = L^{-1}h(\cdot)$. По теореме 2 необходимым и достаточным условием корректности обратной задачи (18)—(21) является условие существования такого $c > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_0^T \int_0^t \int_\gamma \left(\lambda^\alpha P_p(\lambda_k) - \sum_{j=1}^n \lambda^{\alpha_j} Q_p^j(\lambda_k) \right)^{-1} P_p(\lambda_k) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t) \right| \geqslant c, \tag{22}$$

поскольку

$$\chi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^\infty \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k \int_0^T \int_0^t \int_\gamma \left(\lambda^\alpha P_p(\lambda_k) - \sum_{j=1}^n \lambda^{\alpha_j} Q_p^j(\lambda_k) \right)^{-1} P_p(\lambda_k) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Пример 1. Возьмем $P_2(\lambda) = \lambda^2$, $n = 2$, $Q_2^1(\lambda) = a$, $Q_2^2(\lambda) = 1 + \lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $r = 1$, $\Lambda w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$, $B_1 = I$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 4/3$, $\alpha = 5/2$, $\varphi \equiv 1$, $\mu(t) = 0$ при $t \in (0,T)$, μ имеет единичный скачок в точке $t = T$. Тогда $m = 3$, $\lambda_k = -k^2$ при $k \in \mathbb{N}$ и задача (18)—(21) имеет вид

$$D_t^{5/2} \frac{\partial^4 v}{\partial s^4}(s,t) = a D_t^{1/4} v(s,t) + D_t^{4/3} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) v(s,t) + h(s), \quad (s,t) \in (0,\pi) \times [0,T],$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(0,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T],$$

$$v(s,0) = v_0(s), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(s,0) = v_1(s), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(s,0) = v_2(s), \quad s \in (0,\pi),$$

$$v(s,T) = v_T(s), \quad s \in (0,\pi),$$

а условие корректности после некоторых упрощений примет следующий вид:

$$\left| \int_\gamma (\lambda^{3/2} - a k^{-4} \lambda^{-3/4} - (k^{-4} - k^{-2}) \lambda^{1/3})^{-1} (e^{\lambda t} - e^{\lambda(t-T)}) d\lambda \right| \geqslant c.$$

Теперь рассмотрим вырожденный случай. Предположим, что $P_p(\lambda_k) = 0$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$, тогда оператор M_n $(L,0)$-ограничен при условии, что многочлены P_p и Q_p^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_k\}$ (см. [5]), при этом проекторы имеют вид

$$P = \sum_{P_p(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k, \quad Q = \sum_{P_p(\lambda_k)\neq 0} \langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

Имеем

$$Q_p^j P = \sum_{P_p(\lambda_k)\neq 0} Q_p^j(\lambda_k)\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k = QQ_p^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Начальные условия (10) можно задать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l v}{\partial t^l}(s,0) &= v_l(s), \quad l = 0,1,\ldots,m_n-1, \quad s\in\Omega,\\ \frac{\partial^l P_p(\Lambda) v}{\partial t^l}(s,0) &= y_l(s), \quad l = m_n, m_n+1,\ldots,m-1, \quad s\in\Omega, \end{aligned} \tag{23}$$

где $v_l \in \mathcal{X}$, $l = 0,1,\ldots,m_n-1$, $y_l\in\mathcal{Y}^1$, $l = m_n, m_n+1,\ldots,m-1$. Действительно, поскольку оператор M_n $(L,0)$-ограничен, то $\ker P = \ker L$, и условия $(Px)^{(l)} = x_l$, $l = m_n, m_n+1,\ldots,m-1$, эквивалентны условиям $(Lx)^{(l)} = y_l = L_1 x_l$, $l = m_n, m_n+1,\ldots,m-1$.

Задача (19)—(21), (23) представима в виде (9)—(11) с выбранными выше пространствами $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и операторами L, M_j, $j = 1,2,\ldots,n$, $x_l = v_l(\cdot)$, $l = 0,1,\ldots,m_n-1$, $x_l = L_1^{-1}y_l(\cdot)$, $l = m_n, m_n+1,\ldots,m-1$, $u = h(\cdot)$. По теореме 3 задача (19)—(21), (23) корректна тогда и только тогда, когда существует такое $c>0$, что при всех $k\in\mathbb{N}$, для которых $P_p(\lambda_k)\neq 0$,

$$\left| \int_0^T \int_0^t \int_{\gamma^1} \left(\lambda^\alpha P_p(\lambda_k) - \sum_{i=1}^n \lambda^{\alpha_i} Q_i(\lambda_k)\right)^{-1} P_p(\lambda_k) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t)\right| \geqslant c, \tag{24}$$

а при всех $k\in\mathbb{N}$, для которых $P_p(\lambda_k) = 0$,

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\gamma^0} \left(\sum_{i=1}^n \lambda^{\alpha_i} Q_i(\lambda_k)\right)^{-1} Q_n(\lambda_k) e^{\lambda(t-\tau)} d\lambda \varphi(\tau) d\tau d\mu(t) \neq 0. \tag{25}$$

При этом учитывается конечность числа условий (25), следующая из конечнократности спектра оператора Λ_1.

Пример 2. Пусть $P_2(\lambda) = \lambda(\lambda+9)$, $n=2$, $Q_2^1(\lambda) = a$, $Q_2^2(\lambda) = 1+\lambda$, $d = 1$, $\Omega = (0,\pi)$, $r = 1$, $\Lambda w = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$, $B_1 = I$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 4/3$, $\alpha = 5/2$, $\varphi\equiv 1$, $\mu(t) = 0$ при $t\in(0,T)$, μ имеет единичный скачок в точке $t = T$. Тогда $m = 3$, $m_2 = 2$, $\lambda_k = -k^2$ при $k\in\mathbb{N}$, $P_2(\lambda_3) = 0$ и задача (19)—(21), (23) имеет вид

$$D_t^{5/2}\left(\frac{\partial^4}{\partial s^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s,t) = aD_t^{1/4} v(s,t) + D_t^{4/3}\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s,t) + h(s), \quad (s,t)\in(0,\pi)\times[0,T],$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(0,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\pi,t) = 0, \quad t\in[0,T],$$

$$v(s,0) = v_0(s), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(s,0) = v_1(s), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^4}{\partial s^4} + 9\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s,0) = v_2(s), \quad s\in(0,\pi),$$

$$v(s,T) = v_T(s), \quad s\in(0,\pi),$$

где $v_0, v_1, v_T\in\mathcal{X}$, $v_2\in\mathcal{Y}^1$.

Необходимые и достаточные условия (24), (25) ее разрешимости есть

$$\left| \int_{\gamma^1} ((k^4 - 9k^2)\lambda^{3/2} - a\lambda^{-3/4} - (1-k^2)\lambda^{1/3})^{-1}(k^4 - 9k^2)(e^{\lambda t} - e^{\lambda(t-T)}) d\lambda\right| \geqslant c, \quad k\in\mathbb{N}\setminus\{3\},$$

$$\int\limits_{\gamma^0}(-a\lambda^{-3/4}+8\lambda^{1/3})^{-1}(e^{\lambda t}-e^{\lambda(t-T)})d\lambda\neq 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушак А. В.* Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными// Мат. заметки. — 2005. — *77*, № 1. — С. 28–41.
2. *Глушак А. В.* Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу// Совр. мат. Фундам. напр. — 2006. — *15*. — С. 126–141.
3. *Глушак А. В.* Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 5. — С. 684–693.
4. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
5. *Федоров В. Е.* Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 5. — С. 702–712.
6. *Федоров В. Е., Бойко К. В., Фуонг Т. Д.* Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными// Мат. заметки СВФУ. — 2021. — *28*, № 3. — С. 85–104.
7. *Федоров В. Е., Туров М. М.* Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана—Лиувилля// Сиб. мат. ж. — 2021. — *62*, № 5. — С. 1143–1162.
8. *Alvarez-Pardo E., Lizama C.* Mild solutions for multi-term time-fractional differential equations with nonlocal initial conditions// Electron. J. Differ. Equations. — 2014. — *2014*, № 39. — P. 1–10.
9. *Fedorov V. E., Kostić M.* On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces// Euras. Math. J. — 2018. — *9*, № 3. — P. 33–57.
10. *Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostić M.* A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2020. — *29*, № 2. — P. 173–184.
11. *Jiang H., Liu F., Turner I., Burrage K.* Analitical solutions for the multi-term time-space Caputo–Riesz fractional advection-diffussion equations on a finite domain// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *389*, № 2. — P. 1117–1127.
12. *Li C.-G., Kostič M., Li M.* Abstract multi-term fractional differential equations// Kragujevac J. Math. — 2014. — *38*, № 1. — P. 51–71.
13. *Liu F., Meerschaert M. M., McGough R. J., Zhuang P., Liu Q.* Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2013. — *16*, № 1. — P. 9–25.
14. *Lizama C., Prado H.* Fractional relaxation equations on Banach spaces// Appl. Math. Lett. — 2010. — *23*, № 1. — P. 137–142.
15. *Orlovsky D. G.* Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann–Liouville fractional derivative in a Hilbert space// Ж. СФУ. Сер. Мат. Физ. — 2015. — *8*, № 1. — С. 55–63.
16. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. — Utrecht, Boston: VSP, 2003.

Бойко Ксения Владимировна
Челябинский государственный университет
E-mail: kvboyko@mail.ru

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет
E-mail: kar@csu.ru