ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 10–37
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-10-37

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. II. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЗЕНХАРТА

© 2022 г. **А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ**

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является второй частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *212.* — С. 10–29. Продолжение будет опубликовано в следующих выпусках.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES. II. INTEGRATION OF THE EISENHART EQUATIONS

© 2022 **A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV**

Abstract. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the second part of the work. The first part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *212.* — P. 10–29. Continuation will be published in future issues.

***Keywords and phrases*:** differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

***AMS Subject Classification*:** 53Z05

2. Интегрирование уравнений Эйзенхарта

Так как всякая r-мерная алгебра Ли обязательно содержит одномерную подалгебру, а уравнения, определяющие одномерную проективную алгебру Ли в (M^5, g), имеют вид

$$L_X g = h, \quad \nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi, \tag{2.1}$$

где последнее уравнение после замены $h = a + 2\varphi g$ равносильно

$$\nabla a(Y,Z,W) = g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi,$$

$Y, Z, W \in TM$, $(n+1)\varphi = \operatorname{Div} X$, то в первую очередь необходимо определить те пространства, для которых эти уравнения имеют решения (g, h, φ). Первое из уравнений (2.1) называется *обобщенным уравнением Киллинга*, а второе — *уравнением Эйзенхарта*. Если $\varphi = \text{const}$, т.е. $\operatorname{Div} X = \text{const}$, то проективное движение является аффинным.

Классификация пространств, допускающих негомотетические проективные движения, основана на разбиении их по типам в соответствии с алгебраической структурой производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении проективного движения X, определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq M$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_X g$. Тип тензора $L_X g$ определяет тип проективного движения X и тип метрики g в области V. Такие метрики называются *h-метриками типа* χ, а соответствующие пространства — *h-пространствами типа* χ (см. [12, 13]).

В данном разделе мы интегрируем уравнения Эйзенхарта и находим пятимерные жесткие h-метрики всех допустимых типов (**??**).

2.1. Коэффициенты вращения Риччи пятимерных жестких h-пространств в косонормальном репере. В данном разделе для каждой характеристики билинейной формы h в пространстве M^5 мы находим формы связности и коэффициенты вращения Риччи, удовлетворяющие уравнениям Эйзенхарта в косонормальном репере.

Пусть θ_h — каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h, (Y_h) — косонормальный репер в области $V \subseteq M$, в котором билинейные формы g и $h = a + 2\varphi g$ имеют канонический вид:

$$g\big|_V = \sum_{p=1}^{k} g_p, \quad h\big|_V = \sum_{p=1}^{k} (\lambda_p + 2\varphi) g_p + h_0 \equiv a + 2\varphi g, \quad 2\varphi = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — попарно различные характеристические числа билинейной формы $a = h - 2\varphi g$ кратностей соответственно $r_1, \ldots, r_k$, и при $n = 5$ для разных невырожденных характеристик (**??**) определяются следующими формулами:

$$\begin{gathered}\chi_{221} = \{221\}: \ g = e_1(\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1) + e_2(\theta_3\theta_4 + \theta_4\theta_3) + e_3\theta_5\theta_5, \\ h_0 = a_0 = e_1(\theta_1\theta_1) + e_2(\theta_3\theta_3);\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\bar{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 f_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 f_2 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 f_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\chi_{32} = \{32\}: \ g = e_1(\theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_2 + \theta_3\theta_1) + e_2(\theta_4\theta_5 + \theta_5\theta_4), \\ h_0 = a_0 = e_1(\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1) + e_2(\theta_4\theta_4);\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\bar{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 f_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 \\ e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 & e_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\chi_{41} = \{41\}: \ g = e_1(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1) + e_2(\theta_5\theta_5), \\ h_0 = a_0 = e_1(\theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_2 + \theta_3\theta_1);\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\bar{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_1 f_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 f_1 & e_1 & 0 \\ 0 & e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 \\ e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\chi_5 = \{5\}: \ g = e(\theta_1\theta_5 + \theta_2\theta_4 + \theta_3\theta_3 + \theta_4\theta_2 + \theta_5\theta_1), \\ h_0 = a_0 = e(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1);\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$(\bar a_{pq})=\begin{pmatrix}0&0&0&0&ef\\0&0&0&ef&e\\0&0&ef&e&0\\0&ef&e&0&0\\ef&e&0&0&0\end{pmatrix},\quad (\bar g_{pq})=\begin{pmatrix}0&0&0&0&e\\0&0&0&e&0\\0&0&e&0&0\\0&e&0&0&0\\e&0&0&0&0\end{pmatrix},\tag{2.9}$$

здесь e, e_1, e_2, e_3 равны ± 1.

Помимо перечисленных, при $n=5$ возможны характеристики $\chi_\nu=\{\nu 1,\ldots,1\}$, $\nu=1,2,3$, относящиеся к лоренцевой сигнатуре; они были подробно исследованы в работах А. В. Аминовой [12,13], поэтому здесь не рассматриваются.

Подставив в уравнение Эйзенхарта (**??**) вместо $\bar g_{pq}$ и $\bar a_{pq}$ соответствующие канонические значения и учитывая, что

$$\begin{aligned}
&\tilde 1=2,\quad \tilde 2=1,\quad \tilde 3=4,\quad \tilde 4=3,\quad \tilde 5=5\quad \text{в случае } \{221\};\\
&\tilde 1=3,\quad \tilde 2=2,\quad \tilde 3=1,\quad \tilde 4=5,\quad \tilde 5=4\quad \text{в случае } \{32\};\\
&\tilde 1=4,\quad \tilde 2=3,\quad \tilde 3=2,\quad \tilde 4=1,\quad \tilde 5=5\quad \text{в случае } \{41\};\\
&\tilde 1=5,\quad \tilde 2=4,\quad \tilde 3=3,\quad \tilde 4=2,\quad \tilde 5=1\quad \text{в случае } \{5\},
\end{aligned}$$

получим системы $n^2(n+1)/2$ уравнений, которые после ряда преобразований приводят к следующим соотношениям.

***H*-пространства H_{221} типа $\chi_{221}=\{221\}$:**

$$\begin{gathered}
Y_1\varphi=Y_3\varphi=0,\quad d\lambda_1=e_1(Y_2\varphi)\theta_1,\quad d\lambda_2=e_2(Y_4\varphi)\theta_3,\quad d\lambda_3=2e_3(Y_5\varphi)\theta_5,\\
\omega_{14}=\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_1,\quad \omega_{15}=\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}\theta_1,\quad \omega_{21}=(Y_2\varphi)\theta_2,\quad \omega_{23}=\frac{Y_2\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_3,\\
\omega_{24}=\frac{Y_4\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_1+\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_2-\frac{Y_2\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_3+\frac{Y_2\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_4,\\
\omega_{25}=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}\theta_1+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}\theta_2+\frac{Y_2\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}\theta_5,\\
\omega_{35}=\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_2}\theta_3,\quad \omega_{43}=(Y_4\varphi)\theta_4,\quad \omega_{45}=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_2)^2}\theta_3+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_2}\theta_4+\frac{Y_4\varphi}{\lambda_3-\lambda_2}\theta_5.
\end{gathered}\tag{2.10}$$

***H*-пространства H_{32} типа $\chi_{32}=\{32\}$:**

$$\begin{gathered}
Y_1\varphi=Y_2\varphi=Y_4\varphi=0,\quad d\lambda_1=\frac{2}{3}e_1(Y_3\varphi)\theta_1,\quad d\lambda_2=e_2(Y_5\varphi)\theta_4,\\
\omega_{12}=\frac{1}{3}(Y_3\varphi)\theta_1,\quad \omega_{13}=-(Y_3\varphi)\theta_2,\quad \omega_{15}=\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_1,\\
\omega_{25}=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_1+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_2,\quad \omega_{32}=(Y_3\varphi)\theta_3,\quad \omega_{34}=\frac{Y_3\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_4,\\
\omega_{35}=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}\theta_1+\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_2+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_3-\frac{Y_3\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\theta_4+\frac{Y_3\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}\theta_5.
\end{gathered}\tag{2.11}$$

***H*-пространства H_{41} типа $\chi_{41} = \{41\}$:**

$$\begin{gathered}
Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = 0, \quad d\lambda_1 = \frac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1, \quad d\lambda_2 = 2(Y_5\varphi)\theta_5, \\
\omega_{13} = \frac{1}{2}(Y_4\varphi)\theta_1, \quad \omega_{14} = -(Y_4\varphi)\theta_2, \quad \omega_{15} = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_1, \\
\omega_{24} = -(Y_4\varphi)\theta_3, \quad \omega_{25} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_2, \\
\omega_{34} = -(Y_4\varphi)\theta_4, \quad \omega_{35} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\theta_2 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_3, \\
\omega_{45} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^4}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}\theta_2 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\theta_3 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_4 + \frac{Y_4\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_5.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

***H*-пространства H_5 типа $\chi_5 = \{5\}$:**

$$\begin{gathered}
Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = Y_4\varphi = 0, \quad d\lambda = \frac{2}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \\
\omega_{32} = -\frac{1}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \quad \omega_{41} = -\frac{3}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \quad \omega_{51} = (Y_5\varphi)\theta_2, \\
\omega_{52} = (Y_5\varphi)\theta_3, \quad \omega_{53} = (Y_5\varphi)\theta_4, \quad \omega_{54} = (Y_5\varphi)\theta_5.
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Отсюда, используя формулу (**??**), найдем коэффициенты вращения Риччи γ_{ijk} для рассматриваемых h-пространств.

Тип $\{221\}$:

$$\begin{gathered}
\gamma_{121} = -\gamma_{211} = e_1 Y_2\varphi, \quad \gamma_{142} = -\gamma_{412} = \frac{e_1 Y_4\varphi}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \gamma_{152} = -\gamma_{512} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{\lambda_1 - \lambda_3}, \\
\gamma_{234} = -\gamma_{324} = \frac{e_2 Y_2\varphi}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \gamma_{241} = -\gamma_{421} = \frac{e_2 Y_4\varphi}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \gamma_{242} = -\gamma_{422} = -\frac{e_1 Y_4\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \\
\gamma_{243} = -\gamma_{423} = \frac{e_2 Y_2\varphi}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \gamma_{244} = -\gamma_{422} = \frac{e_2 Y_2\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \quad \gamma_{251} = -\gamma_{521} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{\lambda_1 - \lambda_3}, \\
\gamma_{522} = -\gamma_{252} = -\frac{e_1 Y_5\varphi}{(\lambda_3 - \lambda_1)^2}, \quad \gamma_{255} = -\gamma_{522} = \frac{e_3 Y_2\varphi}{\lambda_1 - \lambda_3}, \quad \gamma_{343} = -\gamma_{433} = e_2 Y_4\varphi, \\
\gamma_{354} = -\gamma_{534} = \frac{e_2 Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_3}, \quad \gamma_{453} = -\gamma_{543} = \frac{e_2 Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_3}, \\
\gamma_{544} = -\gamma_{454} = \frac{e_2 Y_5\varphi}{(\lambda_3 - \lambda_2)^2}, \quad \gamma_{455} = -\gamma_{545} = \frac{e_3 Y_4\varphi}{\lambda_2 - \lambda_3}.
\end{gathered}$$

Тип $\{32\}$:

$$\begin{gathered}
\gamma_{213} = -\gamma_{123} = \frac{1}{3} e_1 Y_3\varphi, \quad \gamma_{231} = -\gamma_{321} = e_1 Y_3\varphi, \quad \gamma_{312} = -\gamma_{132} = -e_1 Y_3\varphi, \\
\gamma_{435} = -\gamma_{345} = \frac{e_1 Y_3\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \gamma_{513} = -\gamma_{153} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \gamma_{522} = -\gamma_{252} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\
\gamma_{523} = -\gamma_{253} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \quad \gamma_{531} = -\gamma_{351} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \gamma_{532} = -\gamma_{352} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \\
\gamma_{533} = -\gamma_{353} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}, \quad \gamma_{534} = -\gamma_{354} = \frac{e_2 Y_3\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\
\gamma_{535} = -\gamma_{355} = -\frac{e_2 Y_3\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \quad \gamma_{544} = -\gamma_{454} = -e_2 Y_5\varphi.
\end{gathered}$$

Тип $\{41\}$:

$$\gamma_{314}=-\gamma_{134}=\frac{1}{2}e_1Y_4\varphi,\quad \gamma_{413}=-\gamma_{143}=-e_1Y_4\varphi,\quad \gamma_{422}=-\gamma_{242}=-e_1Y_4\varphi,$$
$$\gamma_{431}=-\gamma_{341}=-e_1Y_4\varphi,\quad \gamma_{514}=-\gamma_{154}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\quad \gamma_{523}=-\gamma_{253}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},$$
$$\gamma_{524}=-\gamma_{254}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},\quad \gamma_{532}=-\gamma_{352}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\quad \gamma_{533}=-\gamma_{353}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},$$
$$\gamma_{534}=-\gamma_{354}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3},\quad \gamma_{541}=-\gamma_{451}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\quad \gamma_{542}=-\gamma_{452}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},$$
$$\gamma_{543}=-\gamma_{453}=\frac{e_1Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3},\ \gamma_{544}=-\gamma_{454}=\frac{e_1Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1},\ \gamma_{545}=-\gamma_{455}=\frac{e_2Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Тип $\{5\}$:

$$\gamma_{145}=-\gamma_{415}=-\frac{3}{5}eY_5\varphi,\quad \gamma_{154}=-\gamma_{514}=eY_5\varphi,\quad \gamma_{235}=-\gamma_{325}=-\frac{1}{5}eY_5\varphi,$$
$$\gamma_{253}=-\gamma_{523}=eY_5\varphi,\quad \gamma_{352}=-\gamma_{532}=eY_5\varphi,\quad \gamma_{451}=-\gamma_{541}=eY_5\varphi.$$

Во всех четырех случаях невыписанные коэффициенты ω_{ij} и γ_{ijk} равны нулю.

2.2. H-пространства типа $\{221\}$. В этом разделе будут определены тензоры g_{ij} и h_{ij} для h-пространств типа $\{221\}$, когда тензор h_{ij} имеет три главных направления, два из которых изотропные.

Из (2.10) следуют равенства

$$Y_i\lambda_1=\delta_{i2}Y_2\varphi,\quad Y_i\lambda_2=\delta_{i4}Y_4\varphi,\quad Y_i\lambda_3=\delta_{i5}Y_5\varphi,\quad i=1,\dots,5. \tag{2.14}$$

Используя полученные соотношения и формулу (**??**), составим всевозможные скобки Ли векторных полей $Y_1,\dots,Y_5$:

$$[Y_1,Y_2]=-(Y_2\varphi)Y_2,\quad [Y_1,Y_3]=0,\quad [Y_1,Y_4]=\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_1,$$
$$[Y_1,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}Y_1,\quad [Y_2,Y_3]=\frac{Y_2\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_3,$$
$$[Y_2,Y_4]=\frac{Y_4\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_1+\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_2-\frac{Y_2\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_3-\frac{Y_2\varphi}{\lambda_1-\lambda_2}Y_4, \tag{2.15}$$
$$[Y_2,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_1)^2}Y_1+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_1}Y_2-\frac{Y_2\varphi}{\lambda_1-\lambda_3}Y_5,\quad [Y_3,Y_4]=-(Y_4\varphi)Y_4,$$
$$[Y_3,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{\lambda_3-\lambda_2}Y_3,\quad [Y_4,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_2)^2}Y_3+\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_3-\lambda_2)}Y_4-\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_3}Y_5.$$

Напомним, что система линейных дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестной функцией u

$$Y_su\equiv \underset{s}{\xi}{}^i(x^1,\dots,x^n)\frac{\partial u}{\partial x^i}=0,\quad s=1,\dots,p;\ i=1,\dots,n,$$

где $\underset{s}{\xi}{}^i$ — компоненты p векторных полей косонормального репера $(Y_1,\dots,Y_n)$, является вполне интегрируемой, т.е. допускает $n-p$ независимых решений $u^1,\dots,u^p$, если и только если все коммутаторы операторов системы

$$[Y_s,Y_t]\equiv Y_sY_t-Y_tY_s=\sum_{r=1}^{n}e_r(\gamma_{rst}-\gamma_{rts})Y_r,\quad s,t=1,\dots,p, \tag{2.16}$$

где

$$\gamma_{ijk}=\underset{i}{\xi}{}_{l,m}\underset{j}{\xi}{}^l\underset{k}{\xi}{}^m \tag{2.17}$$

— коэффициенты вращения Риччи, линейно выражаются через операторы системы $Y_1, \dots, Y_p$ (см. [62, с. 143], [61, с. 12]).

Из (2.15) видно, что системы дифференциальных уравнений

$$Y_1 u = Y_3 u = Y_4 u = Y_5 u = 0, \quad Y_3 u = Y_4 u = Y_5 u = 0$$

являются вполне интегрируемыми и имеют соответственно одно и два решения. Обозначим решение первой системы и одно из двух независимых решений второй системы через u^1, еще одно решение второй системы обозначим u^2.

В новых координатах $x^{1'} = u^1(x)$, $x^{2'} = u^2(x)$, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^{2} = \underset{3}{\xi}^{p} = \underset{4}{\xi}^{p} = \underset{5}{\xi}^{p} = 0$$

при $p = 1, 2$. Так же найдем

$$\underset{3}{\xi}^{4} = \underset{2}{\xi}^{q} = \underset{4}{\xi}^{q} = \underset{5}{\xi}^{q} = 0$$

при $q = 3, 4$ и

$$\underset{1}{\xi}^{5} = \underset{2}{\xi}^{5} = \underset{3}{\xi}^{5} = \underset{4}{\xi}^{5} = 0.$$

После этого из (2.10), (2.14) следует, что λ_1 зависит только от x^2, λ_2 зависит только от x^4 и λ_3 зависит только от x^5:

$$\lambda_1 \equiv f_1(x^2), \quad \lambda_2 \equiv f_2(x^4), \quad \lambda_3 \equiv f_3(x^5).$$

Приравнивая в каждой координатной окрестности U координаты векторных полей в правых и левых частях уравнений (2.15), с помощью формулы (**??**) получим следующую систему из 21 нелинейного уравнения в частных производных с неизвестными $\underset{i}{\xi}^{j}$:

1° $\underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{1} - \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{1}{\xi}^{1} = -\underset{2}{\xi}^{2} f_1' \underset{2}{\xi}^{1}$;

2° $\underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{2} = -f_1'(\underset{2}{\xi}^{2})^2$;

3° $\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{1}{\xi}^{1} = \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{3} = \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{5} = \underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{5} = 0$;

4° $\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{3} + \underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{3} - \underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{3} = \underset{4}{\xi}^{4} f_2' \underset{4}{\xi}^{3}$;

5° $\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{4} = -f_2'(\underset{4}{\xi}^{4})^2$;

6° $\partial_4\underset{1}{\xi}^{1} = -\dfrac{f_2'}{f_2 - f_1}\underset{1}{\xi}^{1}$;

7° $\underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3} = \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{4} = 0$;

8° $\partial_5\underset{1}{\xi}^{1} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{f_3 - f_1}\underset{1}{\xi}^{1}$;

9° $\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{1} = \underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{2} = 0$;

10° $\partial_2\underset{3}{\xi}^{3} = -\dfrac{f_1'}{f_1 - f_2}\underset{3}{\xi}^{3}$;

11° $\partial_5\underset{3}{\xi}^{3} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{f_3 - f_2}\underset{3}{\xi}^{3}$;

12° $-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{1} - \underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{2}{\xi}^{1} = \dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{4}{\xi}^{4} f_2' \underset{1}{\xi}^{1} + \dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{4}{\xi}^{4} f_2' \underset{2}{\xi}^{1}$;

13° $-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{2}{\xi}^{2} = \dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{4}{\xi}^{4} f_2' \underset{2}{\xi}^{2}$;

14° $\underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3} + \underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{3} = -\dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{2}{\xi}^{2} f_1' \underset{3}{\xi}^{3} - \dfrac{1}{f_1 - f_2}\underset{2}{\xi}^{2} f_1' \underset{4}{\xi}^{3}$;

15° $\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{4} = \dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{2}{\xi}^{2} f_1' \underset{4}{\xi}^{4}$;

16° $\partial_5\underset{2}{\xi}^{1} = -\dfrac{1}{(f_3 - f_1)^2}\dfrac{1}{2}\underset{5}{\xi}^{5} f_3' \underset{1}{\xi}^{1} - \dfrac{1}{f_3 - f_1}\dfrac{1}{2}\underset{5}{\xi}^{5} f_3' \underset{2}{\xi}^{1}$;

17° $-\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^2 = \dfrac{1}{f_3-f_1}\dfrac{1}{2}\underset{5}{\xi}^5 f_3'\underset{2}{\xi}^2;$

18° $\partial_2\underset{5}{\xi}^5 = \dfrac{f_1'}{f_3-f_1}\underset{5}{\xi}^5;$

19° $\partial_5\underset{4}{\xi}^3 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{(f_3-f_2)^2}\underset{3}{\xi}^3 - \dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{f_3-f_2}\underset{4}{\xi}^3;$

20° $\partial_5\underset{4}{\xi}^4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{f_3'}{f_2-f_3}\underset{4}{\xi}^4;$

21° $\partial_4\underset{5}{\xi}^5 = \dfrac{f_2'}{f_3-f_2}\underset{5}{\xi}^5.$

Штрих здесь и далее означает производную функции одного переменного по ее аргументу, например, $f_1' \equiv df_1/dx^2$, $f_2' \equiv df_2/dx^4$, $f_3' \equiv df_3/dx^5$).

Из уравнения 3° следует

$$\partial_3\underset{1}{\xi}^1 = \partial_1\underset{3}{\xi}^3 = \partial_1\underset{5}{\xi}^5 = \partial_3\underset{5}{\xi}^5 = 0.$$

Интегрируя уравнения 6°, 8°, 10°, 11°, 18° и 21°, найдем

$$\underset{1}{\xi}^1 = \frac{1}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^{1/2}}R_1(x^1,x^2),$$
$$\underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_1-f_2)(f_3-f_2)^{1/2}}R_3(x^3,x^4),$$
$$\underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1-f_3)(f_2-f_3)}R_5(x^5),$$

где R_1, R_3, R_5 — ненулевые функции указанных переменных. После преобразования координат

$$x^{1'} = \int R_1^{-1}dx^1, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = \int R_3^{-1}dx^3, \quad x^{4'} = x^4, \quad x^{5'} = \int R_5^{-1}dx^5,$$

не меняющего полученных ранее равенств, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^1 = \frac{1}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^{1/2}}, \quad \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_1-f_2)(f_3-f_2)^{1/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1-f_3)(f_2-f_3)}.$$

Из уравнения 9° следует $\partial_3\underset{2}{\xi}^2 = 0$. Проинтегрировав уравнения 2°, 13° и 17°, найдем

$$\underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^{1/2}(f_1'x^1+\tau(x^2))}.$$

Возможны два случая: $f_1' \neq 0$ и $f_1' = 0$.

В первом случае сделаем преобразование координат

$$x^{2'} = f_1(x^2), \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2,$$

и положим $\overline{\tau} = (f_1')^{-1}\tau$; тогда

$$\underset{2}{\xi}^{2'} = (x^{3'}+\overline{\tau})^{-1}\underset{1}{\xi}^{1'}, \quad \underset{2}{\xi}^{p'} = \underset{2}{\xi}^p, \quad p \neq 2.$$

Во втором случае сделаем замену

$$\bar{x}^2 = \int \tau dx^2.$$

В итоге, опустив черту, объединим оба случая формулами

$$f_1 = \varepsilon_1 x^2 + (1-\varepsilon_1)c_1, \quad c_1 = \mathrm{const},$$
$$\underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{(f_2-f_1)(f_3-f_1)^{1/2}A}, \quad A \equiv \varepsilon_1\big(x^1+\tau(x^2)\big)+1-\varepsilon_1,$$

где ε_1 равно 0 или 1.

Подобно этому, из уравнений 5°, 7°, 15° и 20° имеем

$$f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1-\varepsilon_2)c_2, \quad c_2 = \mathrm{const},$$

$$\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2} B}, \quad B \equiv \varepsilon_2\big(x^3 + \omega(x^4)\big) + 1 - \varepsilon_2,$$

где ε_2 равно 0 или 1.

Интегрируя уравнения 1°, 9°, 12° 16° 4°, 7°, 14° и 19°, получим

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2A(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}(A\sigma_1 + N(x^2)),$$
$$\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2B(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}(B\sigma_2 + M(x^4)),$$

где

$$\sigma_1 \equiv \frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1}, \quad \sigma_2 \equiv \frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2}.$$

После преобразования координат

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int N dx^2, \quad x^{3'} = x^3 - \frac{1}{2}\int M dx^4, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 1, 3,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}\sigma_1, \quad \underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}\sigma_2.$$

Используя найденные значения компонент векторов косонормального репера:

$$\begin{gathered}
\underset{1}{\xi}^1 = \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}, \quad \underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}\sigma_1, \\
\underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}\left(\varepsilon_1\left(x^1 + \tau(x^2)\right) + 1 - \varepsilon_1\right)}, \\
\underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}, \quad \underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}\sigma_2, \\
\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}\left(\varepsilon_2\left(x^3 + \omega(x^4)\right) + 1 - \varepsilon_2\right)}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)}
\end{gathered} \tag{2.18}$$

(выписаны только ненулевые компоненты), по формулам (**??**), (**??**) вычислим компоненты канонических 1-форм в натуральном репере (X_i):

$$\theta_1 = (f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2} A dx^2, \quad \theta_2 = (f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}\left(dx^1 - \frac{\sigma_1}{2} A dx^2\right),$$
$$\theta_3 = (f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2} B dx^4, \quad \theta_4 = (f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}\left(dx^3 - \frac{\sigma_2}{2} B dx^4\right),$$
$$\theta_5 = (f_1 - f_3)(f_2 - f_3) dx^5,$$

и затем по формулам (2.2) — компоненты метрики g и билинейной формы h в натуральном репере.

Вычислив символы Кристоффеля найденной метрики g, непосредственной проверкой убедимся в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. В итоге получим следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть M — пятимерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi_{221} = \{221\}$ определены в M или в некоторой области $V \subseteq M$ и пусть f_1, f_2, f_3 — попарно различные характеристические корни билинейной формы $h - 2\varphi g$ кратностей соответственно 2, 2 и 1. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т.е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi_{221} = \{221\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\begin{gathered}
g = e_1(f_2 - f_1)^2(f_3 - f_1)g_1 + e_2(f_1 - f_2)^2(f_3 - f_2)g_2 + e_3(f_1 - f_3)^2(f_2 - f_3)^2 g_3, \\
h = (2f_1 + 2f_2 + f_3)g + e_1(f_2 - f_1)^2(f_3 - f_1)\left(f_1 g_1 + \Lambda_1\right) + \\
+ e_2(f_1 - f_2)^2(f_3 - f_2)\left(f_2 g_2 + \Lambda_2\right) + e_3(f_1 - f_3)^2(f_2 - f_3)^2 f_3 g_3, \\
\varphi = f_1 + f_2 + \frac{1}{2} f_3
\end{gathered} \tag{2.19}$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x, U), в которой

$$
\begin{aligned}
g_1\big|_U &= A\left(2dx^1dx^2 - A\left(\frac{2}{f_2-f_1}+\frac{1}{f_3-f_1}\right)(dx^2)^2\right),\\
g_2\big|_U &= B\left(2dx^3dx^4 - B\left(\frac{2}{f_1-f_2}+\frac{1}{f_3-f_2}\right)(dx^4)^2\right),\\
g_3\big|_U &= (dx^5)^2, \quad \Lambda_1\big|_U = A^2(dx^2)^2, \quad \Lambda_2\big|_U = B^2(dx^4)^2,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

где

$$
f_1 = \varepsilon_1 x^2 + (1-\varepsilon_1)c_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1-\varepsilon_2)c_2, \quad f_3 = f_3(x^5) \equiv \mu(x^5),
$$
$$
c_1 = \mathrm{const}, \quad c_2 = \mathrm{const}, \quad A = \varepsilon_1(x^1+\tau(x^2)) + 1 - \varepsilon_1, \quad B = \varepsilon_2(x^3+\omega(x^4)) + 1 - \varepsilon_2,
$$

ε_1, ε_2 принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2, e_3 = \pm 1$, τ — функция x^2, ω — функция x^4.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Векторное поле $X \in TM^5$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{221\}$ на пятимерном псевдоримановом многообразии (M^5, g), когда выполняется равенство $L_X g = h$, где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (2.19) *и* (2.20) (см. теорему 2.1).

2.3. H-пространства типа $\{32\}$. В этом разделе будут определены метрики h-пространств типа $\{32\}$, когда тензор h_{ij} имеет два изотропных главных направления. Так как

$$
d = \theta^h Y_h = \sum_h e_h \theta_{\tilde{h}} Y_h,
$$

из (2.11) следуют равенства

$$
Y_i\lambda_1 = \frac{2}{3}\delta_{i3}Y_3\varphi, \quad Y_i\lambda_2 = \delta_{i5}Y_5\varphi, \quad i = 1, \dots, 5.
\tag{2.21}
$$

Используя соотношения (2.11) и формулу (**??**), составим скобки Ли векторных полей $Y_1, \dots, Y_5$ и выпишем те из них, которые отличны от нуля:

$$
\begin{gathered}
[Y_1, Y_3] = -\frac{2}{3}(Y_3\varphi)Y_2, \quad [Y_1, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_1, \quad [Y_2, Y_3] = -\frac{4}{3}(Y_3\varphi)Y_3,\\
[Y_2, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_1 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_2, \quad [Y_3, Y_4] = \frac{Y_3\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_4,\\
[Y_3, Y_5] = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}Y_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_2 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_3 - \frac{Y_3\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_4 + \frac{Y_3\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_5,\\
[Y_4, Y_5] = -(Y_5\varphi)Y_5.
\end{gathered}
\tag{2.22}
$$

Из (2.22) следует, что системы дифференциальных уравнений

$$
Y_1u = Y_2u = Y_4u = Y_5u = 0, \quad Y_1u = Y_4u = Y_5u = 0, \quad Y_4u = Y_5u = 0
$$

являются вполне интегрируемыми (см. раздел 2.2). Обозначим (единственное) решение первой системы и одно из двух независимых решений второй системы через u^3, еще одно решение второй системы через u^2, решения третьей системы — через u^1, u^2, u^3.

Системы

$$
Y_1u = Y_2u = Y_3u = Y_4u = 0, \quad Y_1u = Y_2u = Y_3u = 0
$$

также вполне интегрируемы; решения первой системы обозначим u^5, второй — u^4 и u^5.

В новых координатах $x^{i'} = u^i$, опустив штрихи, получим

$$
\underset{i_1}{\xi}^{j_2} = \underset{i_2}{\xi}^{j_1} = 0, \quad \underset{1}{\xi}^i = Q(x)\delta^i_1, \quad \underset{4}{\xi}^i = P(x)\delta^i_4, \quad \underset{2}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^5 = 0, \quad i_1, j_1 = 1, 2, 3;\ i_2, j_2 = 4, 5.
$$

Из (2.11) и (2.21) следует, что λ_1 зависит только от x^3, а λ_2 — только от x^5:

$$
\lambda_1 \equiv f_1(x^3), \quad \lambda_2 \equiv f_2(x^5);
$$

при этом

$$\varphi = \frac{1}{2}(3f_1 + 2f_2).$$

Приравняв в каждой карте U координаты векторов в обеих частях уравнений (2.22), с помощью формулы (**??**) получим систему 25 нелинейных уравнений в частных производных с неизвестными $\underset{i}{\xi}^{j}$:

1° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

2° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

3° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 = -\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{2}{\xi}^1;$

4° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 = -\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{2}{\xi}^2;$

5° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^3 = 0;$

6° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

7° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{1}{\xi}^1 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1;$

8° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 = -2\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{3}{\xi}^1;$

9° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 = -2\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{3}{\xi}^2;$

10° $\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3 = -2f_1'(\underset{3}{\xi}^3)^2;$

11° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1 = \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

12° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4 = 0;$

13° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^1 = -\dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1 - \dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^1;$

14° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^2 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^2;$

15° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^4 = 0;$

16° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5 = \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5 = 0;$

17° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^1 = \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^2 = 0;$

18° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^4 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{f_1 - f_2}\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{4}{\xi}^4;$

19° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^4 - \underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{4}{\xi}^4 - \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^4 = -\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{5}{\xi}^4;$

20° $\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^5 = -f_2'(\underset{5}{\xi}^5)^2;$

21° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^1 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^1 - \dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^1 - \dfrac{1}{(f_2 - f_1)^3}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{1}{\xi}^1;$

22° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^2 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^2 - \dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{2}{\xi}^2;$

23° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^3 = -\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{5}{\xi}^5 f_2'\underset{3}{\xi}^3;$

24° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^4 = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{5}{\xi}^4 - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(f_2 - f_1)^2}\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{4}{\xi}^4;$

25° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5 = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{f_2 - f_1}\underset{3}{\xi}^3 f_1'\underset{5}{\xi}^5;$

здесь $f_1' \equiv df_1/dx^3$, $f_2' \equiv df_2/dx^5$.

Из уравнений 6°, 2°, 11° и 12° системы с учетом неравенства $\det\big(\underset{i}{\xi}^{j}\big) \neq 0)$ получим

$$\partial_4 \underset{1}{\xi}^1 = \partial_1 \underset{2}{\xi}^2 = \partial_4 \underset{2}{\xi}^2 = \partial_1 \underset{4}{\xi}^4 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^4 = 0.$$

Интегрируя уравнения 7°, 14° и 18°, найдем

$$\underset{1}{\xi}^1 = \frac{1}{f_2 - f_1}\Omega_1(x^1, x^2, x^3), \quad \underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{f_2 - f_1}\Omega_2(x^2, x^3), \quad \underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}}\Omega_4(x^4, x^5).$$

После замены координат

$$x^{1'} = \int \frac{dx^1}{\Omega_1}, \quad x^{2'} = \int \frac{dx^2}{\Omega_2}, \quad x^{4'} = \int \frac{dx^4}{\Omega_4}, \quad x^{k'} = x^k, \quad k = 3, 5,$$

не меняющей полученных ранее результатов, опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{f_2 - f_1}, \quad \underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}}.$$

Интегрируя уравнения 1°, 13° и учитывая, что, в силу 11°, $\underset{2}{\xi}^1$ не зависит от переменной x^4, получим

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)}(\Upsilon_1 + 2D(x^2, x^3)),$$

где D — произвольная функция переменных x^2, x^3 и введено обозначение

$$\Upsilon_1 \equiv \frac{2}{f_2 - f_1}.$$

Выполнив преобразование координат

$$x^{1'} = x^1 - \int D(x^2, x^3)dx^2, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 1,$$

опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{\Upsilon_1}{2(f_2 - f_1)}.$$

Интегрирование уравнений 23°, 5° и 10° дает

$$\underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(f_1' x^2 + \tau(x^3))}.$$

Здесь возможны два случая: $f_1' \neq 0$ и $f_1' = 0$.

В первом случае сделаем замену координат

$$\bar{x}^3 = f_1(x^3), \quad \bar{x}^k = x^k, \quad k \neq 3,$$

и введем обозначение $\bar{\tau} = (f_1')^{-1}\tau$; тогда

$$\underset{3}{\bar{\xi}}^3 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(x^2 + \bar{\tau})}, \quad \underset{3}{\bar{\xi}}^k = \underset{3}{\xi}^k, \quad k \neq 3.$$

Во втором случае положим

$$\bar{x}^3 = \int \tau dx^3.$$

После опускания черты оба случая описываются формулами

$$f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)c_1, \quad c_1 = \mathrm{const},$$

$$\underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A}, \quad A \equiv \varepsilon_1\big(x^2 + \tau(x^3)\big) + 1 - \varepsilon_1,$$

где ε_1 равно 0 или 1.

Аналогично из уравнений 20°, 16° и 25° получим

$$f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1 - \varepsilon_2)c_2, \quad c_2 = \mathrm{const},$$

$$\underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2} B}, \quad B \equiv \varepsilon_2\big(x^4 + \mu(x^5)\big) + 1 - \varepsilon_2),$$

где ε_2 равно 0 или 1.

Из уравнения 17° следует $\partial_4 \underset{3}{\xi}^1 = 0$. Интегрируя уравнения 21°, 3° и 8°, найдем

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{8(f_2 - f_1)A}(2A\Upsilon_2 + A(\Upsilon_1)^2 + 4\Phi(x^3)),$$

где Φ — произвольная функция x^3,

$$\Upsilon_2 \equiv \frac{2}{(f_2 - f_1)^2}.$$

В новых координатах

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int \Phi(x^3) dx^3, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 1,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{4(f_2 - f_1)}\left(\Upsilon_2 + \frac{1}{2}\Upsilon_1^2\right).$$

Интегрирование уравнений 22°, 4° и 9° дает

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A}(A\Upsilon_1 + 2\Psi(x^3) - \varepsilon_1 x^1),$$

где Ψ — произвольная функция x^3. Сделаем замену координат

$$x^{2'} = x^2 - \int \Psi(x^3) dx^3, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 2$$

и опустим штрихи; тогда

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)}\left(\Upsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 x^1}{A}\right).$$

Разрешая уравнения 15°, 24° и 19°, найдем

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{1}{2B(f_1 - f_2)^{3/2}}(B\Upsilon_3 + F(x^5)),$$

где F — произвольная функция x^5 и введено обозначение

$$\Upsilon_3 \equiv \frac{3}{f_1 - f_2}.$$

После преобразования координат

$$x^{4'} = x^4 - \int F(x^5) dx^5, \quad x^{k'} = x^k, \quad k \neq 4,$$

опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{\Upsilon_3}{2(f_1 - f_2)^{3/2}}.$$

Выпишем ненулевые значения компонент векторов найденного косонормального репера:

$$\begin{gathered}
\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{f_2 - f_1}, \quad \underset{2}{\xi}^1 = \frac{\Upsilon_1}{2(f_2 - f_1)}, \quad \underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{4(f_2 - f_1)}\left(\Upsilon_2 + \frac{1}{2}\Upsilon_1^2\right),\\
\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)}\left(\Upsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 x^1}{A}\right), \quad \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A}, \quad \underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}},\\
\underset{5}{\xi}^4 = \frac{\Upsilon_3}{2(f_1 - f_2)^{3/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2} B},
\end{gathered} \tag{2.23}$$

и по формулам (**??**), (**??**) вычислим компоненты канонических 1-форм в натуральном репере (X_i):

$$\theta_1 = 2e_1(f_2 - f_1)A dx^3, \quad \theta_2 = e_1(f_2 - f_1)\big(dx^2 - (A\Upsilon_1 - \varepsilon_1 x^1)dx^3\big),$$

$$\theta_3 = e_1(f_2 - f_1)\left(dx^1 - \frac{1}{2}\Upsilon_1 dx^2 - \left(\frac{1}{2}A\Upsilon_2 - \frac{1}{4}A\Upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\Upsilon_1\varepsilon_1 x^1\right)dx^3\right),$$
$$\theta_4 = e_2(f_1 - f_2)^{3/2}Bdx^5, \quad \theta_5 = e_2(f_1 - f_2)^{3/2}\left(dx^4 - \frac{1}{2}\Upsilon_3 Bdx^5\right).$$

Затем по формулам (2.4) определим компоненты метрики g и билинейной формы h в натуральном репере.

Подсчитав символы Кристоффеля найденной метрики g, можно непосредственной проверкой убедиться в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть M — пятимерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi_{32} = \{32\}$ определены в M или в некоторой области $V \subseteq M$ и пусть f_1, f_2 — попарно различные характеристические корни билинейной формы $h-2\varphi g$ кратностей соответственно 3 и 2. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т.е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi_{32} = \{32\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\begin{gathered} g = e_1(f_2 - f_1)^2 g_1 + e_2(f_1 - f_2)^3 g_2, \\ h = (3f_1 + 2f_2)g + e_1(f_2 - f_1)^2\left(f_1 g_1 + \Lambda_1\right) + e_2(f_1 - f_2)^3\left(f_2 g_2 + \Lambda_2\right), \\ \varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2 \end{gathered} \tag{2.24}$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x, U), в которой

$$\begin{aligned} g_1\big|_U &= 4Adx^1dx^3 + \left(dx^2\right)^2 + 2\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{4A}{f_2 - f_1}\right)dx^2dx^3 + \\ &\qquad + \left(\varepsilon_1\left(x^1\right)^2 - \frac{8A\varepsilon_1 x^1}{f_2 - f_1} + \frac{4A^2}{(f_2 - f_1)^2}\right)\left(dx^3\right)^2, \\ g_2\big|_U &= 2Bdx^4dx^5 - \frac{3B^2}{f_1 - f_2}\left(dx^5\right)^2, \\ \Lambda_1\big|_U &= 4Adx^2dx^3 + 4A\left(\varepsilon_1 x^1 - \frac{2A}{f_2 - f_1}\right)\left(dx^3\right)^2, \quad \Lambda_2\big|_U = B^2\left(dx^5\right)^2, \quad \varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2, \end{aligned} \tag{2.25}$$

где

$$\begin{gathered} f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)c_1, \quad f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1 - \varepsilon_2)c_2, \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad c_2 = \mathrm{const}, \\ A = \varepsilon_1\left(x^2 + \tau(x^3)\right) + 1 - \varepsilon_1, \quad B = \varepsilon_2\left(x^4 + \mu(x^5)\right) + 1 - \varepsilon_2, \end{gathered}$$

ε_1 и ε_2 принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2 = \pm 1$, τ — функция x^3, μ — функция x^5.

Из теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Векторное поле $X \in TM$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{32\}$ на пятимерном псевдоримановом многообразии (M, g), когда выполняется равенство $L_X g = h$, где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (2.24) *и* (2.25) (см. теорему 2.3).

2.4. H-пространства типа {41}. В этом разделе определяются метрики h-пространств типа $\{41\}$, когда тензор h_{ij} имеет два главных направления, одно из которых изотропное. Из (2.12) следуют равенства

$$Y_i\lambda_1 = \frac{1}{2}\delta_{i4}Y_4\varphi, \quad Y_i\lambda_2 = 2\delta_{i5}Y_5\varphi, \quad i = 1, \ldots, 5. \tag{2.26}$$

Пользуясь уравнениями (2.12) и формулой (**??**), составим скобки Ли векторных полей $Y_1,\dots,Y_5$:

$$
\begin{gathered}
[Y_1,Y_2]=0,\quad [Y_1,Y_3]=0,\quad [Y_1,Y_4]=-\frac{1}{2}(Y_4\varphi)Y_2,\\
[Y_1,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_1,\quad [Y_2,Y_3]=0,\quad [Y_2,Y_4]=-(Y_4\varphi)Y_3,\\
[Y_2,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_1+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_2,\quad [Y_3,Y_4]=-\frac{3}{2}(Y_4\varphi)Y_4,\\
[Y_3,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}Y_1+\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_2+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_3,\\
[Y_4,Y_5]=\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^4}Y_1+\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}Y_2+\frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}Y_3+\frac{Y_5\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_4+\frac{Y_4\varphi}{\lambda_2-\lambda_1}Y_5;
\end{gathered}
\tag{2.27}
$$

остальные скобки Ли равны нулю.

Из приведенных выше формул следует, что системы дифференциальных уравнений

$$Y_1u=Y_2u=Y_3u=Y_5u=0,\quad Y_1u=Y_2u=Y_5u=0,\quad Y_1u=Y_5u=0$$

являются вполне интегрируемыми (см. раздел 2.2). Обозначим решение первой системы и одно из двух независимых решений второй системы через u^4, еще одно решение второй системы — через u^3; пусть решения третьей системы будут u^2,u^3 и u^4, а решения уравнения $Y_5u=0$ — u^1,u^2,u^3 и u^4. Система $Y_1u=Y_2u=Y_3u=Y_4u=0$ также является вполне интегрируемой, ее единственное решение обозначим u^5.

В новых координатах $x^{i'}=u^i$, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^i=Q(x)\delta^i_1,\quad \underset{5}{\xi}^i=P(x)\delta^i_5,\quad \underset{2}{\xi}^3=\underset{2}{\xi}^4=\underset{2}{\xi}^5=\underset{3}{\xi}^4=\underset{3}{\xi}^5=\underset{4}{\xi}^5=0.$$

Из (2.12) и (2.26) следует, что λ_1 зависит только от x^4, а λ_2 — только от x^5:

$$\lambda_1\equiv f_1(x^4),\quad \lambda_2\equiv f_2(x^5);$$

при этом

$$\varphi=\frac{1}{2}(4f_1+f_2).$$

Записав в координатах векторные уравнения (2.27), с учетом формулы (**??**) получим систему 34 нелинейных уравнений в частных производных с неизвестными $\underset{i}{\xi}^j$:

1° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1-\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1-\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1=0;$

2° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2=0;$

3° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1=0;$

4° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2=0;$

5° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3=0;$

6° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1-\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{1}{\xi}^1=-\underset{4}{\xi}^4f_1'\underset{2}{\xi}^1;$

7° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2=-\underset{4}{\xi}^4f_1'\underset{2}{\xi}^2;$

8° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3=0;$

9° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4=0;$

10° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{1}{\xi}^1=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{1}{\xi}^1;$

11° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5=0;$

12° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1=0;$

13° $\underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{2}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{2}=0;$

14° $\underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{3}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{3}=0;$

15° $\underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{1}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{2}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{2}{\xi}^{1}=-2\underset{4}{\xi}^{4}f_1'\underset{3}{\xi}^{1};$

16° $\underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{2}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{2}{\xi}^{2}=-2\underset{4}{\xi}^{4}f_1'\underset{3}{\xi}^{2};$

17° $\underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{3}=-2\underset{4}{\xi}^{4}f_1'\underset{3}{\xi}^{3};$

18° $\underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{4}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{4}=0;$

19° $\underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{5}=0;$

20° $\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{2}{\xi}^{1}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{1}{\xi}^{1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{2}{\xi}^{1};$

21° $\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{2}{\xi}^{2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{2}{\xi}^{2};$

22° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{1}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{1}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{1}=-3\underset{4}{\xi}^{4}f_1'\underset{4}{\xi}^{1};$

23° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{2}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{2}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{2}=-3\underset{4}{\xi}^{4}f_1'\underset{4}{\xi}^{2};$

24° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{3}=-3\underset{4}{\xi}^{4}f_1'\underset{4}{\xi}^{3};$

25° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{4}=-3f_1'(\underset{4}{\xi}^{4})^2;$

26° $\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{3}{\xi}^{1}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{3}{\xi}^{1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{2}{\xi}^{1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{1}{\xi}^{1};$

27° $\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{3}{\xi}^{2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{3}{\xi}^{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{2}{\xi}^{2},$

28° $\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{3}{\xi}^{3}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{3}{\xi}^{3};$

29° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{5}=0;$

30° $\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{1}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{4}{\xi}^{1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{3}{\xi}^{1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{2}{\xi}^{1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^4}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{1}{\xi}^{1};$

31° $\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{4}{\xi}^{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{3}{\xi}^{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{2}{\xi}^{2};$

32° $\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{3}=-\tfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{4}{\xi}^{3}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{3}{\xi}^{3};$

33° $\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{4}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^{5}f_2'\underset{4}{\xi}^{4};$

34° $\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{5}=\dfrac{2}{f_2-f_1}\underset{4}{\xi}^{4}f_1'\underset{5}{\xi}^{5};$

здесь $f_1'\equiv df_1/dx^4$, $f_2'\equiv df_2/dx^5$.

Интегрируя уравнения 10°, 2°, 20°, 5°, 14°, 27°, 11°, 19°, 29° и 34°, найдем

$$\underset{1}{\xi}^{1}=\frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}T_1(x^1,x^2,x^3,x^4),\quad \underset{2}{\xi}^{2}=\frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}T_2(x^2,x^3,x^4),$$
$$\underset{3}{\xi}^{3}=\frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}T_3(x^3,x^4),\quad \underset{5}{\xi}^{5}=\frac{1}{(f1-f_2)^2}T_5(x^5),$$

где T_1, T_2, T_3 и T_5 — произвольные функции указанных переменных. После преобразования координат

$$x^{1'}=\int T_1^{-1}dx^1,\quad x^{2'}=\int T_2^{-1}dx^2,\quad x^{3'}=\int T_3^{-1}dx^3,\quad x^{4'}=x^4,\quad x^{5'}=\int T_5^{-1}dx^5,$$

которое не меняет приведенных выше результатов, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1-f_2)^2}. \tag{2.28}$$

Интегрируя с учетом этих равенств уравнения 9°, 18°, 25° и 33°, найдем

$$\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{3(f_2-f_1)^{1/2}(f_1'(x^3)+\omega(x^4))}.$$

Здесь так же, как в предыдущих разделах, возможны два варианта: $f_1' \neq 0$ и $f_1' = 0$. В первом случае сделаем замену координат

$$\bar{x}^4 = f_1(x^4), \quad \bar{x}^k = x^k, \quad p \neq 4$$

и положим $\bar{\omega} = (f_1')^{-1}\omega$; в итоге

$$\underset{4}{\bar{\xi}}^4 = \frac{1}{3(f_2-f_1)^{1/2}(x^3+\bar{\omega})}, \quad \underset{4}{\bar{\xi}}^p = \underset{4}{\xi}^p, \quad p \neq 4.$$

Во втором случае сделаем замену

$$\bar{x}^4 = 3\int \omega dx^4.$$

Оба случая объединяют формулы

$$f_1 = \varepsilon_1 x^4 + (1-\varepsilon_1)c_1, \quad c_1 = \mathrm{const},$$

$$\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_2-f_1)^{1/2}A}, \quad A \equiv 3\varepsilon_1\bigl(x^3+\omega(x^4)\bigr) + 1 - \varepsilon_1,$$

где ε_1 равно 0 или 1 (штрихи опущены).

Интегрирование уравнений 1° и 20° дает

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2-f_1)^{1/2}}(\Sigma_1 + D(x^2,x^3,x^4)),$$

где D — произвольная функция указанных переменных и введено обозначение

$$\Sigma_1 \equiv \frac{1}{f_2-f_1}.$$

После замены координат

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int D dx^2, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

опуская штрихи, получим

$$\underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2-f_1)^{1/2}}\Sigma_1. \tag{2.29}$$

Из уравнений 3°, 12° и 26° выводим

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{8(f_2-f_1)^{1/2}}\bigl(2\Sigma_2 + (\Sigma_1)^2 + 2\Lambda(x^3,x^4)\bigr),$$

где Λ — произвольная функция x^3 и x^4,

$$\Sigma_2 \equiv \frac{1}{(f_2-f_1)^2}.$$

В новых координатах

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int \Lambda dx^3, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{8(f_2-f_1)^{1/2}}\bigl((\Sigma_1)^2 + 2\Sigma_2\bigr). \tag{2.30}$$

Интегрирование уравнений 4°, 13° и 27° дает

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2-f_1)^{1/2}}\bigl(\Sigma_1 + F(x^3,x^4)\bigr),$$

где F — произвольная функция x^3, x^4. Сделав замену координат

$$x^{2'} = x^2 - \int F dx^3, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2,$$

будем иметь

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}} \Sigma_1. \tag{2.31}$$

В результате интегрирования уравнений 8°, 17°, 24° и 32° получим

$$\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2A(f_2 - f_1)^{1/2}} \big(A\Sigma_1 + 3P(x^4) - 4\varepsilon_1 x^2 \big),$$

где P — произвольная функция x^4. В новых координатах

$$x^{3'} = x^3 - \int P dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 3,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2A(f_2 - f_1)^{1/2}} \big(A\Sigma_1 - 4\varepsilon_1 x^2 \big). \tag{2.32}$$

Интегрируя уравнения 7°, 16°, 23° и 31°, найдем

$$\underset{4}{\xi}^2 = \frac{1}{8A(f_2 - f_1)^{1/2}} \big(2A\Sigma_2 + A(\Sigma_1)^2 + 3Q(x^4) - 8\varepsilon_1 x^1 \big),$$

где Q — произвольная функция x^4. Выполнив замену координат

$$x^{2'} = x^2 - \int Q dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2,$$

получим

$$\underset{4}{\xi}^2 = \frac{1}{8A(f_2 - f_1)^{1/2}} \big(2A\Sigma_2 + A(\Sigma_1)^2 - 8\varepsilon_1 x^1 \big). \tag{2.33}$$

Из уравнений 6°, 15°, 22° и 30° следует

$$\underset{4}{\xi}^1 = \frac{1}{6(f_2 - f_1)^{1/2}} \left(\Sigma_3 + \frac{3}{4}\Sigma_1\Sigma_2 + \frac{1}{8}(\Sigma_1)^3 \right), \tag{2.34}$$

где

$$\Sigma_3 \equiv \frac{1}{(f_2 - f_1)^3}.$$

Используя найденные векторы косонормального репера с компонентами

$$\begin{gathered}
\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{(f_2 - f_1)^{1/2}}, \quad \underset{2}{\xi}^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{3/2}}, \\
\underset{3}{\xi}^1 = \frac{3}{8(f_2 - f_1)^{5/2}}, \quad \underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{3/2}}, \\
\underset{4}{\xi}^1 = \frac{5}{16(f_2 - f_1)^{7/2}}, \quad \underset{4}{\xi}^2 = \frac{1}{8(f_2 - f_1)^{1/2}} \left(\frac{3}{(f_2 - f_1)^2} - \frac{8}{A}\varepsilon_1 x^1 \right), \\
\underset{4}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{f_2 - f_1} - \frac{4}{A}\varepsilon_1 x^2 \right), \\
\underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{A(f_2 - f_1)^{1/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^2}, \\
A = 3\varepsilon_1 \big(x^3 + \omega(x^4) \big) + 1 - \varepsilon_1,
\end{gathered} \tag{2.35}$$

по формулам (**??**), (**??**) вычислим канонические 1-формы:

$$\theta_1 = (f_2 - f_1)^{1/2} A dx^4, \quad \theta_2 = (f_2 - f_1)^{1/2} \left(dx^3 - \left(\frac{1}{2} \frac{A}{f_2 - f_1} - 2\varepsilon_1 x^2 \right) dx^4 \right),$$

$$\theta_3 = (f_2 - f_1)^{1/2} \left(dx^2 - \frac{1}{2} \frac{dx^3}{f_2 - f_1} - \left(\frac{1}{8} \frac{A}{(f_2 - f_1)^2} - \varepsilon_1 x^1 + \frac{\varepsilon_1 x^2}{f_2 - f_1} \right) dx^4 \right),$$

$$\theta_4=(f_2-f_1)^{1/2}\left(dx^1-\frac{1}{2}\frac{dx^2}{f_2-f_1}-\frac{1}{8}\frac{dx^3}{(f_2-f_1)^2}-\left(\frac{1}{16}\frac{A}{(f_2-f_1)^3}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1x^1}{f_2-f_1}+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_1x^2}{(f_2-f_1)^2}\right)dx^4\right),$$
$$\theta_5=(f_1-f_2)^2dx^5,$$

и затем, по формулам (2.6), найдем компоненты метрики g и билинейной формы h. Непосредственной проверкой убедимся в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. Ввиду этого справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть M — пятимерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi_{41}=\{41\}$ определены в M или в некоторой области $V\subseteq M$ и пусть f_1, f_2 — различные характеристические корни билинейной формы $h-2\varphi g$ кратностей соответственно 4 и 1. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т.е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi_{41}=\{41\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\begin{gathered}g=g_1+g_2,\\ h=(4f_1+f_2)g+f_1g_1+f_2g_2+h_0,\\ \varphi=2f_1+\frac{1}{2}f_2\end{gathered}\tag{2.36}$$

и вокруг каждой точки $p\in V\subseteq M$ существовала каноническая карта (x,U), в которой

$$\begin{aligned}e_1g_1\big|_U&=2A(f_2-f_1)dx^1dx^4+2(f_2-f_1)dx^2dx^3+\\&\quad+2\big(2\varepsilon_1(f_2-f_1)x^2-A\big)dx^2dx^4-(dx^3)^2+2\varepsilon_1\big((f_2-f_1)x^1-2x^2\big)dx^3dx^4+\\&\qquad+4\varepsilon_1\left((f_2-f_1)x^1x^2-(x^2)^2-\frac{1}{2}Ax^1\right)(dx^4)^2,\\ e_2g_2\big|_U&=(f_1-f_2)^4(dx^5)^2,\\ e_1h_0\big|_U&=2A(f_2-f_1)dx^2dx^4+(f_2-f_1)(dx^3)^2+2\big(2\varepsilon_1(f_2-f_1)x^2-A\big)dx^3dx^4+\\&\qquad+4\varepsilon_1\left((f_2-f_1)\left((x^2)^2+\frac{1}{2}Ax^1\right)-Ax^2\right)(dx^4)^2,\end{aligned}\tag{2.37}$$

где

$$f_1=\varepsilon_1x^4+(1-\varepsilon_1)c_1,\quad f_2=\mu(x^5),\quad c_1=\mathrm{const},\quad A=3\varepsilon_1\big(x^3+\omega(x^4)\big)+1-\varepsilon_1,$$

ε_1 принимает значения 0 или 1, $e_1,e_2=\pm1$, ω — функция x^4.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Векторное поле $X\in TM$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{41\}$ на пятимерном псевдоримановом многообразии (M,g), когда выполняется равенство $L_Xg=h$, где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (2.36)–(2.37) (см. теорему 2.5).

2.5. H-пространства типа $\{5\}$. Найдем метрики h-пространств типа $\{5\}$. Из (2.13) следуют равенства

$$Y_i\lambda=\frac{2}{5}\delta_{i5}Y_5\varphi,\quad i=1,\dots,5.\tag{2.38}$$

С помощью формулы (**??**) составим скобки Ли векторных полей $Y_1,\dots,Y_5$:

$$\begin{gathered}[Y_1,Y_2]=0,\quad[Y_1,Y_3]=0,\quad[Y_1,Y_4]=0,\quad[Y_1,Y_5]=-\frac{2}{5}(Y_5\varphi)Y_2,\\ [Y_2,Y_3]=0,\quad[Y_2,Y_4]=0,\quad[Y_2,Y_5]=-\frac{4}{5}(Y_5\varphi)Y_3,\quad[Y_3,Y_4]=0,\\ [Y_3,Y_5]=-\frac{6}{5}(Y_5\varphi)Y_4,\quad[Y_4,Y_5]=-\frac{8}{5}(Y_5\varphi)Y_5.\end{gathered}\tag{2.39}$$

Отсюда видно, что каждая из четырех систем дифференциальных уравнений

$$Y_1u=Y_2u=Y_3u=Y_4u=0,\quad Y_1u=Y_2u=Y_3u=0,\quad Y_1u=Y_2u=0,\quad Y_1u=0,$$

является вполне интегрируемой (см. раздел 2.2). Обозначим решения первой системы u^5. Одно из двух независимых решений второй системы выберем равным u^5, а второе обозначим u^4. Независимые решения третьей системы выберем в виде u^3, u^4, u^5, а независимые решения последней системы — в виде u^2, u^3, u^4, u^5 и обозначим через u^1 какую-либо функцию, не зависящую от u^2, u^3, u^4 и u^5.

В новых координатах $x^{i'} = u^i$, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^i = Q(x)\delta^i_1, \quad \underset{2}{\xi}^3 = \underset{2}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^5 = \underset{3}{\xi}^4 = \underset{3}{\xi}^5 = \underset{4}{\xi}^5 = 0. \tag{2.40}$$

С учетом этих равенств из (2.13) и (2.38) следует, что λ зависит только от x^5: $\lambda \equiv f(x^5)$, при этом

$$\varphi = \frac{5}{2} f(x^5).$$

Заметив, что из (2.40) ввиду условия $\det\left(\underset{j}{\xi}^i\right) \neq 0$ следует $\underset{i}{\xi}^i \neq 0$ при $i = 1, \ldots, 5$, приравняем в каждой координатной окрестности U координаты векторных полей слева и справа в уравнениях (2.39) и с помощью формулы (**??**) получим следующую систему 34 дифференциальных уравнений с неизвестными $\underset{i}{\xi}^j$:

1° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

2° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3 = 0;$

3° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

4° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{1}{\xi}^1 = 0;$

5° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4 = 0;$

6° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{1}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{1}{\xi}^1 = -f'\underset{2}{\xi}^1\underset{5}{\xi}^5;$

7° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^2 = -f'\underset{2}{\xi}^2\underset{5}{\xi}^5;$

8° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^3 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^4 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5 = 0;$

9° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 = 0;$

10° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2 - \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

11° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3 = 0;$

12° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1 = 0;$

13° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2 = 0;$

14° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^3 = 0;$

15° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4 = 0;$

16° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^1 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1 - \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^1 = -2f'\underset{3}{\xi}^1\underset{5}{\xi}^5;$

17° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^2 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2 - \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^2 = -2f'\underset{3}{\xi}^2\underset{5}{\xi}^5;$

18° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^3 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^3 = -2f'\underset{3}{\xi}^3\underset{5}{\xi}^5;$

19° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^4 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^4 = 0;$

20° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5 + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5 = 0;$

21° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^1 + \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^1 + \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^1 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^1 = 0;$

22° $\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^2 + \underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^2 + \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^2 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^2 = 0;$

23° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{3}=0;$

24° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{4}=0;$

25° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{3}{\xi}^{1}=-3f'\underset{4}{\xi}^{1}\underset{5}{\xi}^{5};$

26° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{3}{\xi}^{2}=-3\underset{5}{\xi}^{5}f'\underset{4}{\xi}^{2};$

27° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{3}{\xi}^{3}=-3\underset{5}{\xi}^{5}f'\underset{4}{\xi}^{1};$

28° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{4}=-3\underset{5}{\xi}^{5}f'\underset{4}{\xi}^{4};$

29° $\underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{5}=0;$

30° $\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{1}=-4f'\underset{5}{\xi}^{1}\underset{5}{\xi}^{5};$

31° $\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{2}=-4f'\underset{5}{\xi}^{2}\underset{5}{\xi}^{5};$

32° $\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{3}=-4f'\underset{5}{\xi}^{3}\underset{5}{\xi}^{5};$

33° $\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{4}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{4}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{4}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{4}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{4}{\xi}^{4}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{4}=-4f'\underset{5}{\xi}^{4}\underset{5}{\xi}^{5};$

34° $\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{5}=-4f'\left(\underset{5}{\xi}^{5}\right)^2;$

здесь $f'\equiv df/dx^5$.

Из уравнений 2°, 5°, 11°, 15° и 24° следуют равенства

$$\partial_1\underset{2}{\xi}^{2}=\partial_1\underset{3}{\xi}^{3}=\partial_2\underset{3}{\xi}^{3}=\partial_1\underset{4}{\xi}^{4}=\partial_2\underset{4}{\xi}^{4}=\partial_3\underset{4}{\xi}^{4}=0.$$

С учетом этого имеем

$$\underset{1}{\xi}^{1}=\Phi_1,\quad \underset{2}{\xi}^{2}=\Phi_2,\quad \underset{3}{\xi}^{3}=\Phi_3,\quad \underset{4}{\xi}^{4}=\Phi_4,$$

где $\Phi_1=\Phi_1(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5)$, $\Phi_2=\Phi_2(x^2,x^3,x^4,x^5)$, $\Phi_3=\Phi_3(x^3,x^4,x^5)$ и $\Phi_4=\Phi_4(x^4,x^5)$ — произвольные ненулевые функции указанных переменных. После преобразования координат

$$x^{1'}=\int\frac{dx^1}{\Phi_1},\quad x^{2'}=\int\frac{dx^2}{\Phi_2},\quad x^{3'}=\int\frac{dx^3}{\Phi_3},\quad x^{4'}=\int\frac{dx^4}{\Phi_4},\quad x^{5'}=x^5,$$

опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^{1}=\underset{2}{\xi}^{2}=\underset{3}{\xi}^{3}=\underset{4}{\xi}^{4}=1.$$

Из уравнений 8°, 20° и 29° следует

$$\partial_1\underset{5}{\xi}^{5}=\partial_2\underset{5}{\xi}^{5}=\partial_3\underset{5}{\xi}^{5}=0.$$

Интегрируя уравнение 34°, найдем

$$\underset{5}{\xi}^{5}=\frac{1}{4(f'x^4+\eta(x^5))}.$$

Возможны два случая: $f'\neq 0$ и $f'=0$. В первом случае сделаем замену координат

$$\bar{x}^5=f(x^5),\quad \bar{x}^k=x^k,\quad k\neq 5,$$

и положим $\bar\eta=(f')^{-1}\eta$; тогда

$$\underset{5}{\bar\xi}^{5}=\frac{1}{4(x^4+\bar\eta)},\quad \underset{5}{\bar\xi}^{k}=\underset{5}{\xi}^{k},\quad k\neq 5.$$

Во втором случае сделаем замену переменной

$$\bar{x}^5=4\int\eta\,dx^5.$$

Опустив черту, объединим оба случая формулами

$$f=\varepsilon x^5+(1-\varepsilon)c,\quad c=\mathrm{const},$$

$$\underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{A}, \quad A \equiv 4\varepsilon\bigl(x^4 + \eta(x^5)\bigr) + 1 - \varepsilon,$$

где ε равно 0 или 1.

Из уравнения 1° следует $\partial_1 \underset{2}{\xi}^1 = 0$; вследствие этого получаем

$$\underset{2}{\xi}^1 = \chi(x^2, x^3, x^4, x^5),$$

где χ — произвольная функция указанных переменных. Выполнив замену координат

$$x^{1'} = x^1 - \int \chi dx^2, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

и опустив штрихи, найдем

$$\underset{2}{\xi}^1 = 0.$$

Из уравнений 2°, 3°, 9° и 10° следует

$$\partial_1 \underset{3}{\xi}^1 = \partial_2 \underset{3}{\xi}^1 = \partial_1 \underset{3}{\xi}^2 = \partial_2 \underset{3}{\xi}^2 = 0,$$

поэтому

$$\underset{3}{\xi}^1 = \Psi(x^3, x^4, x^5), \quad \underset{3}{\xi}^2 = N(x^3, x^4, x^5),$$

где Ψ и N — произвольные функции указанных переменных. После преобразования координат

$$x^{1'} = x^1 - \int \Psi dx^3, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

$$x^{2'} = x^2 - \int N dx^3, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2;$$

опустив штрихи, получим

$$\underset{3}{\xi}^1 = \underset{3}{\xi}^2 = 0.$$

Из уравнений 4°, 5°, 12°, 13°, 14°, 21°, 22° и 23° вытекают равенства

$$\partial_1 \underset{4}{\xi}^1 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^1 = \partial_3 \underset{4}{\xi}^1 = \partial_1 \underset{4}{\xi}^2 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^2 = \partial_3 \underset{4}{\xi}^2 = \partial_1 \underset{4}{\xi}^3 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^3 = \partial_3 \underset{4}{\xi}^3 = 0,$$

поэтому

$$\underset{4}{\xi}^1 = D(x^4, x^5), \quad \underset{4}{\xi}^2 = G(x^4, x^5), \quad \underset{4}{\xi}^3 = Z(x^4, x^5),$$

где D, G и Z — произвольные функции указанных переменных. Произведя замену переменных

$$x^{1'} = x^1 - \int D dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 1,$$

$$x^{2'} = x^2 - \int G dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 2,$$

$$x^{3'} = x^3 - \int Z dx^4, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 3,$$

и опустив штрихи, получим

$$\underset{4}{\xi}^1 = \underset{4}{\xi}^2 = \underset{4}{\xi}^3 = 0.$$

Учитывая равенства

$$\partial_1 \underset{5}{\xi}^1 = \partial_2 \underset{5}{\xi}^1 = \partial_3 \underset{5}{\xi}^1 = 0,$$

вытекающие из уравнений 6°, 16° и 25°, проинтегрируем уравнение 30°:

$$\underset{5}{\xi}^1 = \frac{4W(x^5)}{A};$$

здесь W — произвольная функция x^5. Выполнив замену координат

$$x^{1'} = x^1 - 4\int W dx^5, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 5,$$

получим (штрихи опущены)

$$\underset{5}{\xi}^1 = 0.$$

Из уравнений 7°, 17°, 26° и 31° найдем

$$\underset{5}{\xi}^2 = \frac{1}{A}(4Q(x^5) - \varepsilon x^1),$$

где Q — произвольная функция x^5. После преобразования координат

$$x^{2'} = x^2 - 4\int Q(x^5)dx^5, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 5,$$

получим

$$\underset{5}{\xi}^2 = -\varepsilon x^1 A^{-1}.$$

С учетом равенств

$$\partial_1 \underset{5}{\xi}^3 = \partial_3 \underset{5}{\xi}^3 = 0,$$

вытекающих из уравнений 8° и 27°, интегрирование уравнений 18°, 32° дает

$$\underset{5}{\xi}^3 = \frac{1}{A}(4M(x^5) - 2\varepsilon x^2),$$

где M — произвольная функция x^5. Замена координат

$$x^{3'} = x^3 - 4\int M dx^5, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 5,$$

приводит к равенству

$$\underset{5}{\xi}^3 = -2\varepsilon x^2 A^{-1}.$$

Из уравнений 8° и 19° следует

$$\partial_1 \underset{5}{\xi}^4 = \partial_2 \underset{5}{\xi}^4 = 0.$$

Интегрирование уравнений 28°, 33° дает

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{1}{A}(4K(x^5) - 3\varepsilon x^3),$$

где K — произвольная функция x^5. В новых координатах

$$x^{4'} = x^4 - 4\int K(x^5)dx^5, \quad x^{p'} = x^p, \quad p \neq 5,$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{5}{\xi}^4 = -3\varepsilon x^3 A^{-1}.$$

В итоге ненулевые компоненты векторов косонормального репера имеют вид

$$\begin{gathered} \underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^4 = 1, \quad \underset{5}{\xi}^2 = -\varepsilon x^1 A^{-1}, \\ \underset{5}{\xi}^3 = -2\varepsilon x^2 A^{-1}, \quad \underset{5}{\xi}^4 = -3\varepsilon x^3 A^{-1}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = A^{-1}. \end{gathered} \tag{2.41}$$

По формулам (**??**), (**??**) вычислим компоненты канонических 1-форм в натуральном репере:

$$\theta_1 = A dx^5, \quad \theta_2 = dx^4 + 3\varepsilon x^3 dx^5,$$
$$\theta_3 = dx^3 + 2\varepsilon x^2 dx^5, \quad \theta_4 = dx^2 + \varepsilon x^1 dx^5, \quad \theta_5 = dx^1$$

и затем по формулам (2.8) — компоненты метрики g и билинейной формы h. Далее непосредственной проверкой убеждаемся в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.7. *Пусть M — пятимерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi_5 = \{5\}$ определены в M или в некоторой области $V \subseteq M$ и пусть f — характеристический корень билинейной формы $h - 2\varphi g$ кратности 5. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т.е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi_5 = \{5\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$h = 6fg + h_0, \quad \varphi = \frac{5}{2}f \tag{2.42}$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x, U), в которой

$$\begin{aligned} eg\big|_U = 2Adx^1dx^5 + 2dx^2dx^4 + 6\varepsilon x^3dx^2dx^5 + (dx^3)^2 + 4\varepsilon x^2dx^3dx^5 + \\ + 2\varepsilon x^1dx^4dx^5 + 2\varepsilon\Big(3x^1x^3 + 2(x^2)^2\Big)(dx^5)^2, \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$eh_0\big|_U = 2Adx^2dx^5 + 2dx^3dx^4 + 6\varepsilon x^3dx^3dx^5 + 4\varepsilon x^2dx^4dx^5 + 2\varepsilon\left(Ax^1 + 6x^2x^3\right)(dx^5)^2,$$

где

$$f = \varepsilon x^5 + (1-\varepsilon)c, \quad c = \mathrm{const}, \quad A = 4\varepsilon\big(x^4 + \tau(x^5)\big) + 1 - \varepsilon,$$

ε принимает значения 0 или 1, $e = \pm 1$, τ — функция x^5.

Из теоремы 2.7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.8. *Векторное поле $X \in TM$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{5\}$ на пятимерном псевдоримановом многообразии (M, g), когда выполняется равенство $L_X g = h$ (**??**), где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (2.42)–(2.43) (см. теорему 2.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения// Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. *Аминова А. В.* О полях тяготения, допускающих группы проективных движений// Докл. АН СССР. — 1971. — *197*, № 4. — С. 807–809.
3. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. I// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3—13.
4. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. II// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. *Аминова А. В.* О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел/ Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. *Аминова А. В.* Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 295–316.
7. *Аминова А. В.* Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 317–346.
8. *Аминова А. В.* Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля// Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. *Аминова А. В.* Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности// Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых многообразий// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. — 1990. — *22*. — С. 97–165.
11. *Аминова А. В.* Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 107–164.
12. *Аминова А. В.* Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — *50*, № 1. — С. 69–142.

13. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. *Аминова А. В.* Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения// Изв. вузов. Физика. — 2008. — *51*, № 4. — С. 30–37.
15. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 5. — С. 3–13.
16. *Аминова А. В.* Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 7. — С. 3–28.
18. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — *123*. — С. 58–80.
19. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.
20. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56—66.
23. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.
25. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств H_{32} типа $\{32\}$// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — *162*, № 2. — С. 111–119.
27. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Алгебры Ли проективных движений пятимерных h-пространств H_{221} типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. *Буданов К. М., Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3—13.
29. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—-Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — *136*, № 3. — С. 480—495.
30. *Голиков В. И.* О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. *Жукова Л. И.* Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 13—18.
33. *Жукова Л. И.* Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 19–25.
34. *Жукова Л. И.* О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 26–30.
35. *Жукова Л. И.* Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. *Киселев А. С.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. *Киселев А. С., Кречет В. Г.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — *3*, № 1. — С. 37–41.
38. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.

39. *Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В.* Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — *1*, № 9. — С. 33—37.
40. *Кручкович Г. И.* Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. *Кручкович Г. И.* О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3–18.
42. *Петров А. З.* О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — *109*, № 3. — С. 7–36.
43. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. *Рчеулишвили Г. Л.* Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 3. — С. 345—351.
45. *Рчеулишвили Г. Л.* Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — *112*, № 2. — С. 249—253.
46. *Синюков Н. С.* О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*, № 1. — С. 21—23.
47. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 4. — С. 266—267.
48. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133—135.
49. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
50. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
51. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770—772.
52. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
53. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*. — С. 45–116.
54. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — *108*, № 2. — С. 201–203.
55. *Солодовников А. С.* Геодезические классы пространств $V(K)$// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 1. — С. 33–36.
56. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.
57. *Трунев А. П.* Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы—Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — *71*, № 7. — С. 1–26.
58. *Шарафутдинов В. А.* Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск:: ИПЦ НГУ, 2018.
59. *Широков П. А.* Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. *Широков П. А.* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.
62. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. *Abe O.* Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — *109*, № 6. — P. 659—673.
64. *Aminova A. V.* On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — *46*. — P. 179–186.
65. *Aminova A. V.* Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — *54*. — P. 91–100.
66. *Aminova A. V.* Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.

68. *Aminova A. V., Aminov N. A.-M.* Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — *158*, № 2. — P. 163–183.
69. *Anchordoqui L. A., Birman G. S.* Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — *32.* — P. 73–79.
70. *Becerril R., Matos T.* Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — *41*, № 6. — P. 1895–1896.
71. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — *311*, № 3. — P. 151–154.
73. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — *106*, № 2. — P. 107–122.
74. *Bokhari A. H., Qadir A.* Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — *28.* — P. 1019–1022.
75. *Calvaruso G., Marinosci R. A.* Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// Balkan J. Geom. Appl. — 2003. — *8*, № 1. — P. 1–19.
76. *Coley A. A., Tupper B. O. J.* Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// J. Math. Phys. — 1989. — *30.* — P. 2616–2625.
77. *Dacko P.* Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ `arXiv: 1308.6429 [math.DG]`.
78. *Dini U.* Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. Mat. — 1869. — *3*, № 7. — P. 269–293.
79. *Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N.* Exploring curved superspace/ `arXiv: 1205.1115v2 [hep.th]`.
80. *Fialowski A., Penkava M.* The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// J. Algebra. — 2016. — *458.* — P. 422—444.
81. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche// Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. — 1903. — *53*, № 2. — P. 261–313.
82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// Astrophys. Space Sci. — 1988. — *141*, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// Rev. Mod. Phys. — 1962. — *34*, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T.* J. High Energy Phys. — 2018. — *2018.* — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// Commun. Math. Phys. — 1969. — *13.* — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric// Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — 2009. — *119*, № 3. — P. 345—350.
87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// Nucl. Phys. — 1983. — *B226.* — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// Phys. Lett. B. — 1988. — *201*, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeixa A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensionai space-times// Gen. Rel. Gravit. — 1996. — *8*, № 9. — P. 1107–1113.
90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// All Graduate Plan B and other Reports. — 2011. — *102.* — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// Phys. Rev. D. — 1991. — *43*, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five–dimensional conformal domain/ `arXiv: 1111.5540v2 [math-ph]`.
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann—Weyl space// Russ. Phys. J. — 2012. — *55*, № 4. — P. 417—425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — *9*, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five–dimensional Kaluza–Klein theory// Russ. Phys. J. — 1996. — *39*, № 2. — P. 146–152.

96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// J. Geom. Anal. — 2005. — *15*, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. — Chelsea Publ., 1972. — P. 368—404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// Gen. Rel. Gravit. — 1984. — *16*, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leqslant 5$// Rozpravy CSAV, Rada MPV. — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D. Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R,T)$ theory of gravity// Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn. — 2014. — *3*, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24*, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ `arXiv: gr-qc/0101121`.
104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non–semi-Hausdorff space of orbits// Russ. Phys. J. — 2003. — *46*, № 9. — P. 912—920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pavsi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// Nuovo Cim. — 1988. — *99A*, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// Geom. Dedic. — 1995. — *57*. — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — *45*. — P. 111—128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// Astrophys. Space Sci. — 2007. — *310*. — P. 273—276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space–times in five dimensions and their relation to the Segre types// J. Math. Phys. — 1997. — *38*. — P. 4228–4236.
111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ `arXiv: 1308.1567v4 [hep.th]`.
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ `arXiv: 1504.04340v3 [het-th]`.
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// J. Math. Phys. — 1992. — *33*. — P. 1103–1108.
115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ `arXiv: gr-qc/9312004v1`.
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// Brazil. J. Phys. — 2004. — *34*, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroguez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// J. Geom. Phys. — 2016. — *100*. — P. 20—32.
118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza—Klein-type theories// J. Math. Phys. — 1995. — *36*. — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// Math. Ann. — 1886. — *27*. — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ `arXiv: 0506218v1 [physics.class-ph]`.
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// Russ. Phys. J. — 1997. — *40*, № 8. — P. 727—731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// Astrophys. J. — 1992. — *394*, № 1. — P. 19—24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — *7*, № 11. — P. 921–926.

124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// Nucl. Phys. B. — 1981. — *186.* — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// Ann. Math. — 1952. — *55.* — P. 38—45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// Adv. Math. — 2016. — *297.* — P. 26—53.

Аминова Ася Васильевна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru