



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 73–80
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-73-80

УДК 514.13; 514.752

ТЕОРЕМА БЕЛЬТРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

© 2022 г. А. В. КОСТИН

Аннотация. Э. Бельтрами доказал теорему о взаимосвязи кривизн для семейств поверхностей вращения в трехмерном евклидовом пространстве, из которой следует, что если некоторая поверхность вращения M' ортогонально пересекает все поверхности, получаемые из одной поверхности постоянной кривизны M переносами вдоль оси вращения, то кривизна поверхности M' также постоянна и отличается от кривизны поверхности M только знаком. В данной работе получены аналоги этой теоремы для поверхностей вращения в трехмерном пространстве Минковского.

Ключевые слова: пространство Минковского, поверхность вращения, плоскость Лобачевского, плоскость де Ситтера, пространство постоянной кривизны, псевдосфера.

BELTRAMI THEOREM IN MINKOWSKI SPACE

© 2022 A. V. KOSTIN

ABSTRACT. E. Beltrami proved a theorem on the relationship of curvatures for families of surfaces of revolution in the three-dimensional Euclidean space, which implies that if some surface of revolution M' orthogonally intersects all surfaces obtained from a surface of constant curvature M by translations along the rotation axis, then the curvature of the surface M' is also constant and differs from the curvature of the surface M only in sign. In this paper, we obtain analogs of this theorem for surfaces of revolution in the three-dimensional Minkowski space.

Keywords and phrases: Minkowski space, surface of revolution, Lobachevsky plane, de Sitter plane, space of constant curvature, pseudosphere.

AMS Subject Classification: 53A35, 53B30

1. Введение. Поверхности вращения постоянной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве исследовал Ф. Миндинг в [15–17]. В этих работах он нашел все типы меридианов поверхностей вращения постоянной положительной и постоянной отрицательной кривизны. Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны Миндинг исследовал вплоть до нахождения формул тригонометрии геодезических треугольников. Эти результаты впоследствии были использованы Э. Бельтрами для построения первой интерпретации геометрии Лобачевского в 1868 г. (см. [9]). Но к поверхностям постоянной кривизны Бельтрами обращался неоднократно и до этой работы.

В 1864 г. в [8] Э. Бельтрами рассмотрел два семейства поверхностей вращения относительно одной и той же оси. Меридианы поверхностей вращения первого семейства он задавал с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \varphi;$$

меридианы второго семейства, каждая поверхность которого ортогонально пересекала поверхности первого семейства, задавались дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\varphi}.$$

В этом случае в точках пересечения поверхностей их кривизны K и K' удовлетворяют условию $K' = -K$. Отсюда, в частности, следует, что если поверхности первого семейства имеют постоянную кривизну, то кривизна поверхностей второго семейства также постоянна. Если в качестве поверхностей первого семейства выступают сферы, то поверхности второго семейства будут псевдосферами.

Приведем для удобства основные определения, используемые в настоящей работе. Будем рассматривать трехмерное псевдоевклидово пространство с метрикой

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 - (dz)^2, \quad (1)$$

называемое также трехмерным пространством Минковского. Для indefinitных квадратичных форм и определяемых с их помощью понятий, как и для положительно определенных форм, будем пользоваться обычными терминами: метрика, расстояние, длина отрезка. В зависимости от выбора квадратичной формы, задающей псевдоевклидову структуру в пространстве теории относительности (с одним минусом или с одним плюсом в каноническом виде), разные авторы по-разному определяют пространственноподобные и времениподобные векторы, прямые и поверхности в псевдоевклидовых пространствах любой размерности. В данной статье условимся пространственноподобными векторами называть векторы, скалярный квадрат которых в метрике (1) положителен, а времениподобными — векторы, скалярный квадрат которых отрицателен. Векторы с равным нулю скалярным квадратом называются светоподобными или изотропными. Плоскости, нормали которых времениподобны, являются евклидовыми. Плоскости, нормали которых пространственноподобны, являются псевдоевклидовыми. Плоскости, нормали которых изотропны, называются изотропными или полуевклидовыми. Поверхности, касательные плоскости которых евклидовы, называются пространственноподобными. На таких поверхностях индуцируется риманова метрика. Поверхности, касательные плоскости которых псевдоевклидовы, называются времениподобными. Внутренняя геометрия на таких поверхностях псевдориманова. На поверхностях, касательные плоскости которых во всех точках изотропны, индуцируется полуриманова геометрия. Метрика на таких поверхностях вырождена. Вращения пространства вокруг времениподобных прямых являются эллиптическими. Орбиты точек являются с аффинной точки зрения эллипсами. В индуцированной метрике в своих плоскостях эти орбиты являются евклидовыми окружностями. В частом случае, когда оси вращения параллельны временной оси, в стандартных декартовых координатах орбиты будут окружностями и в евклидовой метрике

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (2)$$

Вращения вокруг пространственноподобных прямых являются гиперболическими. Неизотропные орбиты точек с аффинной точки зрения представляются гиперболами. Орбиты точек при вращении вокруг изотропных прямых с аффинной точки зрения представляются параболами. Общая теория кривых и поверхностей трехмерного пространства Минковского изложена в [14] (см. также [4]). Собственно поверхностям вращения посвящена статья [7]. Необходимые сведения из гиперболической геометрии изложены в монографии Б. А. Розенфельда [5].

2. Основные результаты. Сформулируем основной результат работы. В работе рассматриваются пространственноподобные и времениподобные поверхности вращения и семейства таких поверхностей, полученные переносами вдоль пространственноподобных и времениподобных осей.

Теорема 1. Пусть меридианы первого семейства поверхностей вращения с времениподобной осью Oz в плоскости Oxz задаются уравнением

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{th}(\alpha),$$

где α является функцией от x , а меридианы второго семейства поверхностей с той же осью вращения задаются уравнением

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{cth}(\alpha).$$

Если поверхности первого семейства обладают постоянной кривизной, то кривизна каждой поверхности второго семейства также постоянна и отличается от кривизны поверхностей первого семейства только знаком.

Также будет приведено обобщение этой теоремы и аналогичные утверждения для других видов поверхностей вращения, доказательство которых аналогично доказательству теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 1 и ее обобщение. *Доказательство.* Поскольку решения уравнения

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{th}(\alpha)$$

отличаются только константой интегрирования, все поверхности вращения с такими меридианами будут получаться из одной поверхности M переносами вдоль оси вращения Oz . Из вида правой части этого уравнения следует, что в метрике (1) касательные плоскости поверхности во всех точках будут евклидовыми, а сама поверхность вращения будет пространственноподобной. Меридианы поверхностей второго семейства, определяемые уравнением

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{cth}(\alpha),$$

в метрике (1) будут ортогональны меридианам поверхностей вращения из первого семейства. Как следствие, сами поверхности второго семейства тоже будут ортогональны поверхностям первого семейства. Все поверхности второго семейства также будут получаться из одной поверхности M' переносами вдоль оси вращения Oz . Далее зафиксируем поверхности M и M' . Пусть γ — меридиан поверхности M , γ' — меридиан поверхности M' , L — точка пересечения этих меридианов. Обозначим через R_1 модуль радиуса кривизны меридиана поверхности M в точке L , а через R_2 — модуль радиуса кривизны нормального сечения этой поверхности в направлении параллели в той же точке L . Сами главные радиусы кривизны поверхности M во всех точках принимают чисто мнимые значения. Кривизна меридиана первой поверхности $z = t(x)$ может быть найдена по формуле (см. [4])

$$k(x) = \frac{|t''(x)|}{\sqrt{|1 - (t'(x))^2|^3}}. \quad (3)$$

Если наложить условие, что кривая пространственноподобна, то модуль в знаменателе можно опустить. Из (3) следует, что модуль радиуса кривизны меридиана поверхности M будет равен

$$R_1 = \frac{\sqrt{(1 - (t'(x))^2)^3}}{|t''(x)|}. \quad (4)$$

Пусть нормаль к кривой γ в точке L , она же — касательная к кривой γ' в этой точке, пересекает ось вращения в точке N , а касательная к кривой γ в точке L (нормаль к кривой γ' в этой точке L) пересекает ось вращения в точке N' . Заметим, что ортогональность направлений на псевдоевклидовой плоскости Oxz (сопряженность относительно квадратичной формы $dx^2 - dz^2$) в стандартных декартовых координатах Oxz эквивалентна симметричности прямых с такими направлениями относительно изотропной прямой, проходящей через их точку пересечения. Обозначим через α гиперболический угол, который касательная к кривой γ в точке L образует с положительным направлением оси Ox . Из уравнения кривой γ следует, что

$$\operatorname{th}(\alpha) = \frac{dz}{dx}.$$

Во введенных выше обозначения имеем

$$\operatorname{th}(\alpha) = t'(x). \quad (5)$$

Рассмотрим треугольник NLN' . Прямая NL в метрике $ds^2 = dx^2 - dz^2$ ортогональна прямой NL' , а прямая NN' ортогональна оси Ox . Значит, угол $N'NL$ равен α . Опустим из точки L перпендикуляр LP на ось вращения Oz . В прямоугольном треугольнике NLP гипотенуза NL , катет LP , $|LP| = |x|$, и противолежащий угол связаны следующим образом:

$$|NL| = R_2 = \frac{|x|}{|\operatorname{sh} \alpha|} = \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \alpha}}{|\operatorname{th} \alpha|}, \quad (6)$$

здесь x — абсцисса точки L , т.е. при положительных значениях x — расстояние от точки L до оси вращения. Из (4), (5), (6) получим:

$$R_1 \cdot R_2 = \frac{|x| \cdot (1 - (t'(x))^2)^2}{|t'(x)| \cdot |t''(x)|}. \quad (7)$$

Поскольку поверхность M пространственноподобна, ее кривизна K в точке L будет выражаться следующим образом:

$$K = -\frac{1}{R_1 \cdot R_2} = -\frac{|t'(x)| \cdot |t''(x)|}{|x| \cdot (1 - (t'(x))^2)^2}. \quad (8)$$

Найдем теперь модули главных радиусов кривизны поверхности M' в точке L . Пусть меридиан γ' поверхности M' задается следующим образом:

$$z = \theta(x), \quad y = 0. \quad (9)$$

Так как меридиан γ' поверхности M' в метрике $ds^2 = dx^2 - dz^2$ ортогонален всем кривым, задаваемым уравнением

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{th}(\alpha),$$

то в этом случае имеем:

$$\frac{dz}{dx} = \theta'(x) = \frac{1}{t'(x)}. \quad (10)$$

В уравнении

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{cth}(\alpha)$$

правая часть всегда принимает значения по модулю большие единицы. Отсюда следует, что кривая γ' является времениподобной. Поэтому кривизна ее в стандартных декартовых координатах будет вычисляться по формуле:

$$k(x) = \frac{|\theta''(x)|}{\sqrt{((\theta'(x))^2 - 1)^3}}. \quad (11)$$

Обозначим через R'_1 модуль радиуса кривизны меридиана γ' в точке L . Из последнего соотношения получим:

$$R'_1 = \frac{\sqrt{((\theta'(x))^2 - 1)^3}}{|\theta''(x)|}. \quad (12)$$

Учитывая (10), имеем:

$$R'_1 = \frac{\sqrt{(1/(t'(x))^2 - 1)^3}}{\frac{1}{|t'(x)|^2} \cdot |t''(x)|}, \quad (13)$$

или

$$R'_1 = \frac{\sqrt{(1 - (t'(x))^2)^3}}{|t'(x)| \cdot |t''(x)|}. \quad (14)$$

В прямоугольном треугольнике NLN' катеты NL и NL' связаны следующим образом:

$$|N'L| = |NL| \cdot |\operatorname{th} \alpha|, \quad R_2 = \frac{|x|}{|\operatorname{sh} \alpha|} = \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \alpha}}{|\operatorname{th} \alpha|}. \quad (15)$$

Так как $R'_2 = |N'L|$, а $R_2 = |NL|$, то отсюда имеем:

$$R'_2 = R_2 \cdot |\operatorname{th} \alpha| = \frac{|x|}{|\operatorname{sh} \alpha|} = \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \alpha}}{|\operatorname{th} \alpha|} \cdot |\operatorname{th} \alpha|, \quad (16)$$

то есть

$$R'_2 = |x| \cdot \sqrt{1 - t'(x)^2}. \quad (17)$$

Из (14), (17) получаем:

$$R'_1 \cdot R'_2 = \frac{|x| \cdot (1 - (t'(x))^2)^2}{|t'(x)| \cdot |t''(x)|}. \quad (18)$$

Следовательно,

$$R'_1 \cdot R'_2 = R_1 \cdot R_2. \quad (19)$$

Поверхность M' является времениподобной. Значит, ее кривизна в точке L будет равна

$$\frac{1}{R'_1 \cdot R'_2} = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} = -K > 0. \quad (20)$$

Если при этом кривизна поверхности M постоянна, то постоянной будет и кривизна поверхности M' . Теорема доказана. \square

Очевидно, что теорема 1 может быть обобщена следующим образом.

Теорема 2. Пусть дано семейство S поверхностей вращения, получающихся из одной поверхности вращения M параллельными переносами вдоль времениподобной оси вращения. Пусть касательные плоскости к поверхности M либо все евклидовы, либо все псевдоевклидовы. Если поверхность M' ортогонально пересекает все поверхности семейства S , то кривизна поверхности M' в каждой точке пересечения ее с любой поверхностью семейства S совпадает по абсолютной величине с кривизной пересекаемой поверхности и противоположна ей по знаку.

4. Примеры поверхностей, полученных эллиптическим вращением. Рассмотрим случаи, когда меридианы поверхностей постоянной кривизны, полученных эллиптическим вращением, представляются элементарными функциями. Пусть в условиях теоремы 1 функция α имеет вид

$$\alpha = \text{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (21)$$

где a — положительная вещественная константа. Тогда первое семейство меридианов будет задаваться дифференциальным уравнением

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \quad (22)$$

Его решениями будут псевдоевклидовы полуокружности

$$z = \sqrt{x^2 + a^2} + \text{const}. \quad (23)$$

Поверхность M в этом случае будет полусферой мнимого радиуса $a \cdot i$, $i^2 = -1$.

Ортогональные траектории семейства кривых, задаваемых уравнением (22), будут определяться из уравнения

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}. \quad (24)$$

Интегрируя его, получим:

$$z = \sqrt{x^2 + a^2} - a \cdot \text{Arth} \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \text{const}. \quad (25)$$

Решения будут времениподобными кривыми, обладающими постоянным отрезком касательной до времениподобной прямой, в данном случае, до самой оси Oz . На рис. 1 $x^1 = z$, $x^2 = x$, то есть база этой псевдоевклидовой трактрисы (ось Oz) расположена горизонтально.

Эта ось является общей асимптотой всех кривых ортогонального семейства. Кроме того, каждая кривая имеет еще изотропную асимптоту. Поверхность M' при этом будет воронкой де Ситтера—Широкова (см. [1, 2]), впервые рассмотренной П. А. Широковым в студенческой работе в 1917 г., тогда же рекомендованной к публикации, но вышедшей только в 1966 г. в сборнике избранных работ [6]. П. А. Широков строил поверхность из псевдосферы Бельтрами—Миндинга, придавая радиусам орбит чисто мнимые значения. Полученная поверхность локально несет на себе геометрию так называемой идеальной области плоскости Лобачевского, реализуемой вне

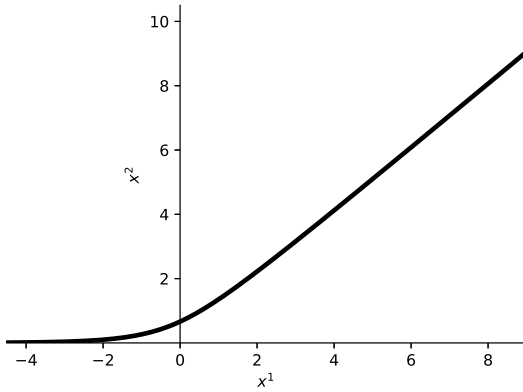


Рис. 1. Псевдоевклидова трактриса, у которой база и касательная являются прямыми одного типа.

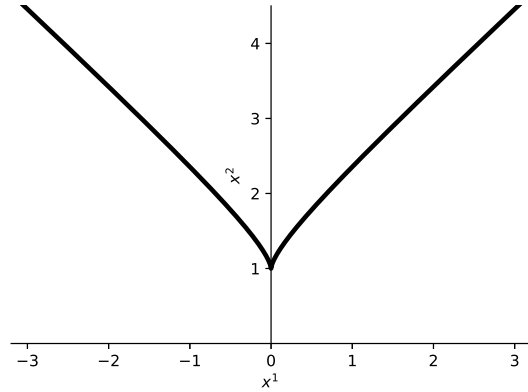


Рис. 2. Псевдоевклидова трактриса, у которой база и касательная являются прямыми разных типов.

абсолюта на проективной модели плоскости Лобачевского (см. [5]). Эта геометрия локально совпадает с двумерной геометрией де Ситтера. Глобально воронка де Ситтера—Широкова изометрична факторпространству идеальной области плоскости Лобачевского по действию дискретной группы орициклических вращений. Образующей этой группы является орициклическое вращение, совмещающее пару параллельных прямых идеальной области, то есть прямых с общей точкой на абсолюте. П. А. Широков формально не вкладывал поверхность в псевдоевклидово пространство. Его подход эквивалентен введению в пространстве индефинитной метрики

$$ds^2 = -(dx)^2 - (dy)^2 + (dz)^2. \quad (26)$$

Вследствие этого индуцированная на поверхности метрика и ее кривизна отличаются от метрики и кривизны рассмотренной в данной работе поверхности знаком. Это только формальное отличие, сводящееся к замене вещественных длин чисто мнимыми и наоборот. Впервые же модель двумерного пространства с индефинитной метрикой постоянной кривизны рассмотрел, по всей видимости, Гессе в [12].

Зададим семейство меридианов поверхностей вращения следующим образом:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (27)$$

Решениями этого уравнения будут времениподобные кривые

$$z = \sqrt{x^2 - a^2} + \text{const}. \quad (28)$$

Эти кривые являются псевдоевклидовыми окружностями вещественного радиуса a (точнее, их частями). Поверхность вращения M будет полусферой вещественного радиуса (если в правых частях уравнений (27), (28) поставить $\pm -$ то сферой вещественного радиуса). Ортогональные траектории семейства кривых (27), (28) будут иметь следующий вид:

$$z = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \text{arctg} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + \text{const}. \quad (29)$$

Эти кривые будут пространственноподобными, обладающими постоянным вещественным отрезком касательной до времениподобной оси OZ . На рис. 2 изображены две ветви такой псевдоевклидовой трактрисы. Каждая ветвь имеет изотропную асимптоту. Ось вращения, как и на рис. 1, расположена горизонтально, то есть здесь также $x^1 = z$, $x^2 = x$.

Кривизна поверхности M будет постоянной и положительной, а именно, $K = 1/a^2$; кривизна поверхности M' будет равна $K = -1/a^2$. Сама поверхность M' будет продолжением за ребро возврата псевдосферы Бельтрами—Миндинга. В трехмерном пространстве Лобачевского эту

поверхность можно интерпретировать следующим образом. У касательного конуса к орисфере удалим вершину на абсолют (см. [13]). Часть конуса до линии касания с орисферой будет изометрична одной полости псевдосферы Бельтрами—Миндинга, часть конуса после линии касания будет изометрична рассматриваемой поверхности. Изометрические вложения класса C^∞ «полной» псевдосферы в восьмимерное сферическое пространство и семимерное евклидово пространство построил Д. Блануша (см. [10, 11]). Продолжение «полной псевдосферы» (т.е. конуса с вершиной на абсолютe расширенного трехмерного гиперболического пространства, или, что тоже самое, поверхности вращения прямой вокруг параллельной ей прямой) за абсолют является воронкой де Ситтера—Широкова. С касательными конусами к орисферам связаны и другие поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны.

5. Примеры поверхностей, полученных гиперболическим вращением. Аналогично теоремам 1 и 2 доказывается следующее утверждение, формулировка которого отличается от теоремы 2 только заменой времениподобной оси вращения на пространственноподобную. Как следствие, орбиты точек при вращении станут незамкнутыми.

Теорема 3. Пусть дано семейство S поверхностей вращения, получающихся из одной поверхности вращения M параллельными переносами вдоль пространственноподобной оси вращения. Пусть касательные плоскости к поверхности M либо все евклидовы, либо все псевдоевклидовы. Если поверхность M' ортогонально пересекает все поверхности семейства S , то кривизна поверхности M' в каждой точке пересечения ее с любой поверхностью семейства S совпадает по абсолютной величине с кривизной пересекаемой поверхности и противоположна ей по знаку.

В плоскости Oxz меридианы поверхностей вращения с осью Ox зададим следующим образом:

$$x = \sqrt{z^2 + a^2} - a \cdot \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{a} + \operatorname{const}. \quad (30)$$

Эти меридианы, как и меридианы воронки де Ситтера—Широкова, имеют постоянный отрезок касательной до оси вращения, только в данном случае этот отрезок имеет вещественную длину a . Изображение этой псевдоевклидовой трактрисы то же, что и на рис. 1, только теперь $x^1 = x$, $x^2 = z$. Поверхности семейства S , полученные гиперболическими вращениями меридианов, глобально изометричны плоскости Лобачевского кривизны $K = -1/a^2$. Орбиты точек во внутренней геометрии поверхности являются орициклами. Поверхности, ортогонально пересекающие поверхности семейства S , являются частями сфер вещественного радиуса, центры которых расположены на оси Ox .

Зададим теперь в плоскости Oxz семейство меридианов поверхностей вращения с осью Ox следующим образом:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (31)$$

Гиперболические вращения этих кривых образуют семейство сфер мнимого радиуса с центрами на оси Ox . Ортогональные траектории семейства (31) обладают постоянным отрезком касательной $a \cdot i$ до пространственноподобной оси Ox . На рис. 2 теперь $x^1 = x$, $x^2 = z$. Поверхность, полученная гиперболическим вращением такой кривой, является еще одним псевдоевклидовым аналогом псевдосферы: бабочкой де Ситтера—Широкова. Одна полость такой поверхности изометрична части идеальной области плоскости Лобачевского, заключенной между орициклом и абсолютom. Орбиты всех точек при вращении будут во внутренней геометрии поверхности орициклами. Винтовые движения псевдоевклидовых аналогов трактрисы в пространстве Минковского рассмотрены в [3].

6. Пример ортогональных семейств поверхностей, полученных изотропным вращением. Рассмотрим на вещественно-комплексной евклидовой плоскости с декартовой системой координат Oxy окружность $x^2 + y^2 = 1$ и пару мнимых изотропных прямых $x \pm i \cdot y = 0$. Формально определенная длина отрезка касательной к окружности до этих прямых будет постоянной. Замена $y \rightarrow y \cdot i$ даст вещественную интерпретацию этого свойства: псевдоевклидова окружность

$x^2 - y^2 = 1$ в метрике $ds^2 = dx^2 - dy^2$ обладает постоянным отрезком касательной до изотропных прямых $x \mp y = 0$, проходящих через ее центр. Аналогичное свойство, очевидно, выполняется и для окружности мнимого радиуса. Отсюда и из того факта, что касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, вытекает, что для семейства псевдоевклидовых окружностей фиксированного радиуса с центрами на изотропной прямой ортогональными траекториями будут тоже псевдоевклидовы окружности другого типа, радиусы которых по модулю равны радиусам окружностей исходного семейства. Изотропные вращения кривых дают сферы вещественного и мнимого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Костин А. В.* Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях// Владикавказ. мат. ж. — 2019. — 21, № 1. — С. 16–26.
2. *Костин А. В.* Эволюты меридианов и асимптотические на псевдосферах// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 169. — С. 24–31.
3. *Костин А. В.* О геликоидах Дини в пространстве Минковского// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 180. — С. 50–57.
4. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. — олгоград: Изд-во ВолГУ, 2011.
5. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
6. *Широков П. А.* Интерпретация и метрика квадратичных геометрий// в кн.: Избранные работы по геометрии. — Казань, 1966. — С. 15–179.
7. *Barros M., Caballero M., Ortega M.* Rotational surfaces in \mathbb{L}^3 and solutions of the nonlinear sigma model// Commun. Math. Phys. — 2009. — 290, № 2. — P. 437–477.
8. *Beltrami E.* Intorno ad alcune proprietà delle superficie rivoluzione// Ann. Mat. Pura Appl. Ser. I. — 1864. — VI. — P. 171–179.
9. *Beltrami E.* Saggio di interpretazione della geometria non-Euklidea// Giorn. Mat. — 1868. — VI. — P. 284–322.
10. *Blanusha D.* C^∞ -Isometric imbeddings of the hyperbolic plane and of cylinders with hyperbolic metric in spherical spaces// Ann. Math. Pura Appl. — 1962. — 57. — P. 321–337.
11. *Blanusha D.* C^∞ -Isometric imbeddings of cylinders with hyperbolic metric in Euclidean 7-space// Glas. Mat.-Fiz. Astron. — 1956. — 11, № 3-4. — P. 243–246.
12. *Hesse L. O.* Über ein Übertragungsprinzip// J. Reine Angew. Math. — 1866. — 66. — P. 15–21.
13. *Kostin A. V.* Some generalization of the shadow problem in the Lobachevsky space// Ukr. Math. J. — 2021. — 73, № 1. — P. 61–68.
14. *Lopez R.* Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz–Minkowski space// Int. Electron. J. Geom. — 2014. — 7, № 1. — P. 44–107.
15. *Minding F.* Ueber die Biegung krummer Flächen// J. Reine Angew. Math. — 1838. — 18. — P. 365–368.
16. *Minding F.* Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse// J. Reine Angew. Math. — 1839. — 19. — P. 370–387.
17. *Minding F.* Beiträge zur Theorie der kürzerten Linien auf krummen Flächen// J. Reine Angew. Math. — 1840. — 20. — P. 323–327.

Костин Андрей Викторович

Елабужский институт Казанского федерального университета

E-mail: kostin_andrei@mail.ru