



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 40–51
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-40-51

УДК 517.977

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО СКАЛЯРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВУМЯ НЕСИНХРОННЫМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

© 2022 г. Л. М. БЕРЛИН, А. А. ГАЛЯЕВ, П. В. ЛЫСЕНКО

Аннотация. Рассматривается задача оптимального скалярного управления системой из двух независимых гармонических осцилляторов. Для решения используются методы геометрической теории управления, исследуется вертикальная подсистема гамильтоновой системы. Оптимальные решения найдены в разных по количеству переключений классах управления. Аналитические результаты иллюстрируются моделированием.

Ключевые слова: геометрическая теория, оптимальное управление, гармонический осциллятор, принцип максимума Понтрягина, алгебра Ли.

GEOMETRIC APPROACH TO THE PROBLEM OF OPTIMAL SCALAR CONTROL OF TWO NONSYNCHRONOUS OSCILLATORS

© 2022 L. M. BERLIN, A. A. GALYAEV, P. V. LYSENKO

ABSTRACT. The problem of optimal scalar control of a system of two independent harmonic oscillators is considered. For the solution, methods of geometric control theory are used. The vertical subsystem of the Hamiltonian system is examined. Optimal solutions are found in control classes with various number of switchings. Analytical results are illustrated by simulation.

Keywords and phrases: geometric theory, optimal control, harmonic oscillator, Pontryagin's maximum principle, Lie algebra.

AMS Subject Classification: 49K15, 22E60

1. Введение. Задачи управления динамическими колебательными системами, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими управляющее воздействие, широко представлены в различных приложениях в механике, технике и радиоэлектронике. В частности, в качестве группы осцилляторов может рассматриваться электрическая сеть, поведение всех контуров которой должно быть определено одним общим скалярным управлением. Целью управления является достижение системой требуемого состояния с оптимизацией заданного критерия качества. Для нахождения управления как функции времени необходимо решить задачу оптимального управления в условиях, когда размерность вектора управления значительно меньше, чем размерность фазового пространства состояний системы.

Фундаментом теории оптимального управления служит принцип максимума Понтрягина (ПМП), разработанный группой математиков во главе с Л. С. Понтрягиным и изложенный в [5],

Работа выполнена при поддержке Программы развития молодежных научных школ Института проблем управления РАН 2020–2021.

и окружающие его исследования. В [2] В. Г. Болтянским впервые решена задача синтеза для одноконтинуального осциллятора с критерием быстродействия с использованием ПМП. Задачи оптимального управления несколькими осцилляторами были поставлены в монографии Ф. Л. Черноусько [7], в которой также предлагаются приближенные методы по реализации управления для систем, содержащих колебательные и вращательные звенья. Далее, уже на основе этих методов, дается решение некоторых задач оптимального управления с использованием малых сил и задач управления колебаниями.

В данной работе будет применена геометрическая теория управления, возникшая в 1970-х гг., с геометрической интерпретацией ПМП. Такой подход использует методы теории групп и алгебр Ли, дифференциальной геометрии, а также симплектическую геометрию для исследования управляемых систем. Первый российский учебник [1] по данному направлению написан А. А. Аграчевым и Ю. Л. Сачковым.

В статье [3] показана управляемость системы N несинхронных осцилляторов и предложен алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления с критерием быстродействия. В статье [4] предложен алгоритм нахождения оптимального решения в классе трех переключений.

2. Постановка задачи оптимального скалярного управления двумя осцилляторами.

Рассмотрим систему, состоящую из двух независимых осцилляторов с различными собственными частотами колебаний $\omega_1 \neq \omega_2$. В каждый из осцилляторов введено скалярное управляющее воздействие u . Уравнения динамики системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{q}_1(t) = p_1(t), \\ \dot{p}_1(t) = -\omega_1^2 q_1(t) + u(t), \\ \dot{q}_2(t) = p_2(t), \\ \dot{p}_2(t) = -\omega_2^2 q_2(t) + u(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $q_i \in C^2(0, T)$ — координата i -го осциллятора, а $p_i \in C^1(0, T)$ — его импульс, $i = 1, 2$. Управление ограничено по модулю:

$$|u| \leq \varepsilon, \quad u \in L^\infty(0, T). \quad (2)$$

В начальный момент времени осцилляторы находятся в состоянии покоя, т. е. обе фазовые координаты каждого осциллятора равны нулю:

$$q_i(0) = 0, \quad p_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (3)$$

Цель управления состоит в приведении системы осцилляторов в некоторый нефиксированный момент времени T в конечное состояние:

$$q_1(T) = 0, \quad p_1(T) = 1, \quad q_2(T) = 0, \quad p_2(T) = 0. \quad (4)$$

Рассматривается задача быстродействия:

$$T \rightarrow \min_u. \quad (5)$$

3. Управляемость системы двух несинхронных осцилляторов. Задача оптимального управления (1)–(5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -\omega_1^2 q_1 \\ p_2 \\ -\omega_2^2 q_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = (q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathbb{R}^4 = M, \quad u \in [-\varepsilon, \varepsilon] = U, \quad (6)$$

$$x(0) = x_0 = (0, 0, 0, 0), \quad x(T) = x_T = (0, 1, 0, 0),$$

$$T = \int_0^T dt \rightarrow \min.$$

Система векторных полей данной задачи определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}(x, u) = \{f_1 + uf_2 \mid u \in U\}, \quad (7)$$

$$f_1 = p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - \omega_1^2 q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - \omega_2^2 q_2 \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Аффинная система $\mathcal{F}$ является несимметричной ввиду наличия вектора сдвига f_1 . Вопросы достижимости и управляемости для таких систем с геометрической точки зрения впервые были исследованы в статье Суссмана и Джарджевича [10].

Критерий для сильной достижимости дает следующая теорема.

Теорема 1 (Суссман, Джарджевич). *Аналитическая система $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ обладает свойством сильной достижимости в точке x тогда и только тогда, когда размерность идеала алгебры Ли, порожденной системой, совпадает с размерностью пространства состояний*

$$\dim \mathcal{L}_0(x) = n. \quad (8)$$

В [9, пример 3.16] показано применение теоремы 1 к линейным системам с ограничением на управление. Если внутренность U является непустым множеством, то ранговый критерий (8) обеспечивает свойство сильной достижимости для такой системы.

Для системы (6) справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Система (1) является сильно достижимой.*

Доказательство. Используем для доказательства теорему 1. В нашем случае для системы (7) идеал $\mathcal{L}_0$ имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = \text{span} \left(f_2, [f_1, f_2], [f_1, [f_1, f_2]], [f_1, [f_1, [f_1, f_2]]] \right). \quad (9)$$

Покажем это, выбрав, по определению идеала, из векторных полей f_1, f_2 и их скобок Ли такие, чтобы матрица, составленная из них, имела полный ранг, равный четырем (по размерности многообразия M). Для этого вычислим скобки Ли полей системы. Скобка Ли первого порядка равна

$$f_3 = [f_1, f_2] = -\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Скобки Ли второго порядка вычисляются в виде

$$f_4 = [f_1, f_3] = -\omega_1^2 \frac{\partial}{\partial p_1} - \omega_2^2 \frac{\partial}{\partial p_2}, \quad [f_2, f_3] = 0.$$

Единственная ненулевая скобка Ли третьего порядка равна

$$f_5 = [f_1, f_4] = \omega_1^2 \frac{\partial}{\partial q_1} + \omega_2^2 \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Удостоверимся, что f_2, f_3, f_4, f_5 линейно независимы. Определитель матрицы, составленной из выбранных векторных полей, не равен нулю:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -\omega_2^2 \\ \omega_1^2 & 0 & \omega_2^2 & 0 \end{pmatrix} = \omega_1^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_2^4 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 \neq 0,$$

так как $\omega_1 \neq \omega_2$ по условию задачи. Следовательно, выполнена теорема Суссмана—Джарджевича, и система является сильно достижимой. $\square$

На вопрос о глобальной управляемости линейной системы в нуле при наличии ограничений на управление вида $\mathcal{F}\{x, u\} = \{Ax + Bu \mid u \in U\}$ отвечает следующая теорема из [8].

Теорема 2 (ЛаСалль, Конти). *Автономная система (A, B, U) при $U \in \mathbb{R}^m$ и $\text{int } U \neq \emptyset$ глобально управляема в нуле тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$(i) \text{ rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n.$$

(ii) $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ для каждого собственного значения λ_i матрицы A .

Первое условие теоремы 2 эквивалентно ранговому критерию (8) теоремы 1. Кроме того, для системы (6) $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$. Таким образом, теорема 2 выполнена и система (6) является вполне управляемой.

Это можно доказать конкретным построением. Общее решение дифференциальных уравнений, описывающих систему (6), с начальными условиями $(q_1(0), p_1(0), q_2(0), p_2(0))$ имеет вид

$$q_1(t) = \frac{p_1(0)}{w_1} \sin(w_1 t) + q_1(0) \cos(w_1 t) + \frac{1}{w_1} \int_0^t \sin(w_1(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \quad (10a)$$

$$p_1(t) = p_1(0) \cos(w_1 t) - q_1(0) w_1 \sin(w_1 t) + \int_0^t \cos(w_1(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \quad (10b)$$

$$q_2(t) = \frac{p_2(0)}{w_2} \sin(w_2 t) + q_2(0) \cos(w_2 t) + \frac{1}{w_2} \int_0^t \sin(w_2(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \quad (10c)$$

$$p_2(t) = p_2(0) \cos(w_2 t) - q_2(0) w_2 \sin(w_2 t) + \int_0^t \cos(w_2(t - \tau)) u(\tau) d\tau. \quad (10d)$$

Для управляемости системы осцилляторов нужно, чтобы в некоторый момент t_1 все фазовые координаты стали равными нулю для произвольных начальных условий. Перепишем систему в виде

$$-\frac{p_1(0)}{w_1} \sin(w_1 t) - q_1(0) \cos(w_1 t) = \frac{1}{w_1} \int_0^t \sin(w_1(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \quad (11a)$$

$$-p_1(0) \cos(w_1 t) + q_1(0) w_1 \sin(w_1 t) = \int_0^t \cos(w_1(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \quad (11b)$$

$$-\frac{p_2(0)}{w_2} \sin(w_2 t) - q_2(0) \cos(w_2 t) = \frac{1}{w_2} \int_0^t \sin(w_2(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \quad (11c)$$

$$-p_2(0) \cos(w_2 t) + q_2(0) w_2 \sin(w_2 t) = \int_0^t \cos(w_2(t - \tau)) u(\tau) d\tau. \quad (11d)$$

В силу достижимости точка $(q_1(0), -p_1(0), q_2(0), -p_2(0))$ может быть достигнута из нуля за время t_0 при управлении $u_0(t)$. Тогда

$$q_1(0) = q_1(t_0) = \frac{1}{w_1} \int_0^{t_0} \sin(w_1(t_0 - \tau)) u_0(\tau) d\tau, \quad (12a)$$

$$-p_1(0) = p_1(t_0) = \int_0^{t_0} \cos(w_1(t_0 - \tau)) u_0(\tau) d\tau, \quad (12b)$$

$$q_2(0) = q_2(t_0) = \frac{1}{w_2} \int_0^{t_0} \sin(w_2(t_0 - \tau)) u_0(\tau) d\tau, \quad (12c)$$

$$-p_2(0) = p_2(t_0) = \int_0^{t_0} \cos(w_2(t_0 - \tau))u_0(\tau)d\tau. \quad (12d)$$

Подставляя в (11), получаем

$$\frac{1}{w_1} \int_0^{t_0} \sin(w_1(t_1 - t_0 + \tau))u_0(\tau)d\tau = \frac{1}{w_1} \int_0^{t_1} \sin(w_1(t_1 - \tau))u(\tau)d\tau, \quad (13a)$$

$$\int_0^{t_0} \cos(w_1(t_1 - t_0 + \tau))u_0(\tau)d\tau = \int_0^{t_1} \cos(w_1(t_1 - \tau))u(\tau)d\tau, \quad (13b)$$

$$\frac{1}{w_2} \int_0^{t_0} \sin(w_2(t_1 - t_0 + \tau))u_0(\tau)d\tau = \frac{1}{w_2} \int_0^{t_1} \sin(w_2(t_1 - \tau))u(\tau)d\tau, \quad (13c)$$

$$\int_0^{t_0} \cos(w_2(t_1 - t_0 + \tau))u_0(\tau)d\tau = \int_0^{t_1} \cos(w_2(t_1 - \tau))u(\tau)d\tau. \quad (13d)$$

Тогда при $t_1 = t_0$ и $u(t) = -u_0(t_0 - t)$ левая и правая части последней системы равны, т.е. система гарантированно может прийти в ноль из любой начальной точки, являясь, таким образом, управляемой.

Свойство управляемости можно показать с использованием теоремы Пуанкаре и того факта, что поле f_1 является бездивергентным,

$$\operatorname{div}_x f_1 = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_{1i}}{\partial x_i} = \frac{\partial p_1}{\partial q_1} - \omega_1^2 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial q_2} - \omega_2^2 \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = 0. \quad (14)$$

Это векторное поле на $\mathbb{R}^4$ является консервативным, т.е. сохраняет стандартный объём

$$\operatorname{Vol}(V) = \int_V dq_1 dp_1 dq_2 dp_2$$

тогда и только тогда, когда оно бездивергентно. Поэтому для f_1 будет выполнена следующая теорема.

Теорема 3 (Пуанкаре). Пусть M — гладкое многообразие с формой объёма Vol . Пусть векторное поле $f \in \vec{M}$ полно, а его поток e^{tf} сохраняет объём. Пусть $W \subset M$, $W \subset \overline{\operatorname{int} W}$, есть подмножество конечной меры, инвариантное относительно f :

$$\operatorname{Vol}(W) < \infty, \quad W \circ e^{tf} \subset W, \quad \forall t > 0.$$

Тогда все точки множества W устойчивы по Пуассону для поля f .

В качестве W выбирается множество, ограниченное поверхностью постоянной энергии:

$$E = \frac{\omega_1^2 q_1^2}{2} + \frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2 q_2^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}.$$

Устойчивость по Пуассону векторного поля f_1 и знание о том, что $\mathcal{F}$ — система полного ранга, позволяет воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{F} \subset \operatorname{Vec}(M)$ — система полного ранга. Если векторное поле $f \in \mathcal{F}$ устойчиво по Пуассону, то поле $-f$ совместимо с системой $\mathcal{F}$.

По определению это означает, что

$$\mathcal{A}_q(\mathcal{F} \cup -f_1) \subset \overline{\mathcal{A}_q(\mathcal{F})}. \quad (15)$$

Из совместимости полей $f_1, -f_1$ с исходной системой следует, что и поля

$$\pm f_2 = (f_1 \pm f_2) - f_1$$

совместимы с этой системой. А значит, все векторные поля симметричной системы

$$\text{span}(f_1, f_2) = \{af_1 + bf_2 | a, b \in C^\infty\}$$

совместимы с исходной системой, что дает совпадение замыкания множеств достижимости исходной и расширенной симметричной систем. Как и исходная, симметричная система имеет полный ранг, а значит, они обе являются вполне управляемыми.

4. Решение задачи оптимального скалярного управления двумя осцилляторами.

4.1. Принцип максимума. Для решения рассматриваемой задачи оптимального управления применим принцип максимума Понтрягина (ПМП) для задачи быстрогодействия, являющегося частным случаем задачи со свободным терминальным временем T (см. [6]). Введем укороченный гамильтониан

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f(x, u) \rangle, \quad \lambda \in T^*M, \quad x = \pi(\lambda). \quad (16)$$

Теорема 4 (принцип максимума Понтрягина). *Если траектория $x(t)$ и соответствующее управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, оптимальны, то существует такая кривая $\lambda_t \in \text{Lip}([0, T], T^*M)$, $\pi(\lambda_t) = x(t)$, что для почти всех $t \in [0, T]$ выполнены следующие условия:*

- (i) $\dot{\lambda}_t = \vec{h}_{u(t)}(\lambda_t)$,
- (ii) $h_{u(t)}(\lambda_t) = \max_{u \in U} h_u(\lambda_t)$,
- (iii) $\lambda_t \neq 0$,
- (iv) $h_{u(t)}(\lambda_t) \equiv \text{const} \geq 0$.

Для решения задачи введем соответствующие линейные на слоях кокасательного расслоения гамильтонианы

$$h_i(\lambda) = \langle \lambda, f_i(x) \rangle.$$

Получаем неканонические координаты, построенные по векторным полям управляемой системы и их коммутаторам, что облегчает запись принципа максимума. Следовательно, укороченный гамильтониан можно переписать в виде

$$h_u(\lambda) = \langle \lambda, f_1 + uf_2 \rangle = h_1(\lambda) + uh_2(\lambda).$$

Выпишем утверждения ПМП согласно теореме 4.

- (i) Гамильтонова система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \{h_u, h_1\} = \{h_1 + uh_2, h_1\} = 0 + u\{h_2, h_1\} = -u\{h_1, h_2\} = -uh_3, \\ \dot{h}_2 &= \{h_u, h_2\} = \{h_1 + uh_2, h_2\} = \{h_1, h_2\} + 0 = h_3, \\ \dot{h}_3 &= \{h_u, h_3\} = \{h_1 + uh_2, h_3\} = \{h_1, h_3\} + u\{h_2, h_3\} = h_4 + 0, \\ \dot{h}_4 &= \{h_u, h_4\} = \{h_1 + uh_2, h_4\} = \{h_1, h_4\} + u\{h_2, h_4\} = h_5 + 0, \\ \dot{h}_5 &= \{h_u, h_5\} = \{h_1 + uh_2, h_5\} = \{h_1, h_5\} + u\{h_2, h_5\} = (-w_1^2 w_2^2)h_2 + (-w_1^2 - w_2^2)h_4. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что если $X, Y \in \text{Vec}(M)$, то $\{h_X, h_Y\} = h_{[X, Y]}$. Вспомогательные коммутаторы:

$$[f_2, f_3] = 0, \quad [f_2, f_4] = 0, \quad [f_1, f_5] = (-\omega_1^2 \omega_2^2)f_2 + (-\omega_1^2 - \omega_2^2)f_4.$$

- (ii) Условие максимума:

$$h_1 + uh_2 \rightarrow \max_{u \in U}. \quad (17)$$

Следовательно, оптимальное управление имеет вид

$$u^* = \varepsilon \text{sign } h_2. \quad (18)$$

Итак, получаем вертикальную подсистему гамильтоновой системы ПМП:

$$\dot{h}_1 = -uh_3, \quad \dot{h}_2 = h_3, \quad \dot{h}_3 = h_4, \quad \dot{h}_4 = h_5, \quad \dot{h}_5 = -\omega_1^2 \omega_2^2 h_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) h_4. \quad (19)$$

4.2. *Исследование вертикальной подсистемы.* Можем отдельно рассмотреть последние 4 уравнения системы (19) в силу того, что они не содержат h_1 . Далее, разрешив подсистему, сможем проинтегрировать первое уравнение по известным u и h_3 . Пусть

$$h = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & b & 0 \end{pmatrix},$$

где $a = -\omega_1^2 \omega_2^2$, $b = -\omega_1^2 - \omega_2^2$. Тогда получаем систему

$$\dot{h} = A_0 h.$$

решение которой имеет вид

$$\vec{h} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ -\omega_1^2 \cos(\omega_1 t) \\ \omega_1^3 \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \cos(\omega_1 t) \\ \omega_1^2 \sin(\omega_1 t) \\ \omega_1^3 \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \sin(\omega_2 t) \\ -\omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \\ \omega_2^3 \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -\sin(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) \\ \omega_2^3 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Таким образом, функция переключения $h_2(t)$ задается выражением

$$h_2(t) = C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) + C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t) \quad (21)$$

и, следовательно, согласно (18) оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) + C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t)). \quad (22)$$

Далее найдем первые интегралы системы (19).

4.3. *Первые интегралы вертикальной подсистемы.*

Лемма 3. Система (19) не имеет первых интегралов в виде линейной комбинации h_2 , h_3 , h_4 , h_5 , но обладает двумя первыми интегралами V_1 , V_2 в виде квадратичных форм:

$$V_1 = \frac{a}{2} h_3^2 - \frac{b}{2} h_4^2 + \frac{1}{2} h_5^2 - a h_4 h_2, \quad (23)$$

$$V_2 = -\frac{a}{2} h_2^2 - \frac{1}{2} h_4^2 - \frac{b}{2} h_3^2 + h_5 h_3. \quad (24)$$

Лемма 4. На решениях вертикальной подсистемы (20) существует функциональная связь между постоянными коэффициентами c_i :

$$2V_1 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^4(c_1^2 + c_2^2) - \omega_2^4(c_3^2 + c_4^2)), \quad (25)$$

$$2V_2 = -(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2(c_1^2 + c_2^2) - \omega_2^2(c_3^2 + c_4^2)). \quad (26)$$

Следствие 1. Из двух первых интегралов (23), (24) можно составить две неотрицательно определенные квадратичные формы

$$V_1^+ = \omega_2^2 \frac{(\omega_1^2 h_2 + h_4)^2}{2} + \frac{(h_3 \omega_1^2 + h_5)^2}{2}, \quad (27)$$

$$V_2^+ = \omega_1^2 \frac{(\omega_2^2 h_2 + h_4)^2}{2} + \frac{(\omega_2^2 h_3 + h_5)^2}{2}. \quad (28)$$

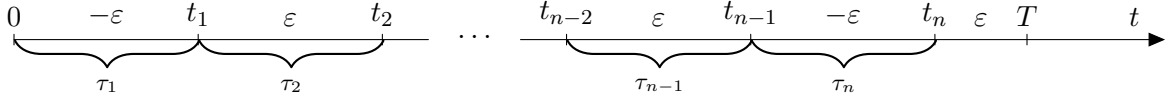


Рис. 1. Связь переменных τ и t для n переключений, начальное управление $-\varepsilon$

5. Исследование закона оптимального управления. Переключение управления будет происходить в моменты времени t_k , определяемые уравнением (22):

$$C_1 \cos(\omega_1 t_k) + C_2 \sin(\omega_1 t_k) + C_3 \cos(\omega_2 t_k) + C_4 \sin(\omega_2 t_k) = 0. \quad (29)$$

В [4] в классе трех переключений была получена параметрическая зависимость оптимального решения от ограничения, наложенного на управление. Стоит обратить внимание на то, что для значений $\varepsilon < \varepsilon_0 \approx 0,605$ оптимальное решение выпадает из класса трех переключений, и количество переключений становится равным четырем и более.

Обозначив через τ_k длительность интервала постоянства управления, запишем решение системы для двух осцилляторов с граничными условиями (3) и (4):

$$q_1(T) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^T \sin(\omega_1(T-t))u(t)dt = 0, \quad (30a)$$

$$p_1(T) = \int_0^T \cos(\omega_1(T-t))u(t)dt = 1, \quad (30b)$$

$$q_2(T) = \frac{1}{\omega_2} \int_0^T \sin(\omega_2(T-t))u(t)dt = 0, \quad (30c)$$

$$p_2(T) = \int_0^T \cos(\omega_2(T-t))u(t)dt = 0. \quad (30d)$$

5.1. Уравнение в вариациях. Введем замену в обратном времени

$$\eta_1 = T - t_1, \quad \eta_2 = T - t_2, \quad \eta_3 = T - t_3. \quad (31)$$

Для того чтобы узнать зависимость критерия задачи $T(\varepsilon)$ в случае трех переключений, нужно исследовать систему, полученную из (10), при $m = 0, 1$,

$$\begin{cases} \cos(\omega_1 T) - 2 \cos(\omega_1 \eta_1) + 2 \cos(\omega_1 \eta_2) - 2 \cos(\omega_1 \eta_3) = -1, \\ \sin(\omega_1 T) - 2 \sin(\omega_1 \eta_1) + 2 \sin(\omega_1 \eta_2) - 2 \sin(\omega_1 \eta_3) = (-1)^m \frac{\omega_1}{\varepsilon}, \\ \cos(\omega_2 T) - 2 \cos(\omega_2 \eta_1) + 2 \cos(\omega_2 \eta_2) - 2 \cos(\omega_2 \eta_3) = -1, \\ \sin(\omega_2 T) - 2 \sin(\omega_2 \eta_1) + 2 \sin(\omega_2 \eta_2) - 2 \sin(\omega_2 \eta_3) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Лемма 5. Пусть для некоторого значения ε с учетом замены (31) существует оптимальное решение задачи быстрогодействия $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, T)$. Тогда для значения $\varepsilon + \delta\varepsilon$ при достаточно малом $\delta\varepsilon$ существует оптимальное решение задачи быстрогодействия $(\eta_1 + \delta\eta_1, \eta_2 + \delta\eta_2, \eta_3 + \delta\eta_3, T + \delta T)$, удовлетворяющее системе уравнений

$$A_1 B_1 = D_1, \quad A_2 B_2 = D_2, \quad (33)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\sin\left(\omega_1\left(T + \frac{\delta T}{2}\right)\right) & 2\sin\left(\omega_1\left(\eta_1 + \frac{\eta_1}{2}\right)\right) & -2\sin\left(\omega_1\left(\eta_2 + \frac{\eta_2}{2}\right)\right) & 2\sin\left(\omega_1\left(\eta_3 + \frac{\eta_3}{2}\right)\right) \\ \cos\left(\omega_1\left(T + \frac{\delta T}{2}\right)\right) & -2\cos\left(\omega_1\left(\eta_1 + \frac{\eta_1}{2}\right)\right) & 2\cos\left(\omega_1\left(\eta_2 + \frac{\eta_2}{2}\right)\right) & -2\cos\left(\omega_1\left(\eta_3 + \frac{\eta_3}{2}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\sin\left(\omega_2\left(T + \frac{\delta T}{2}\right)\right) & 2\sin\left(\omega_2\left(\eta_1 + \frac{\eta_1}{2}\right)\right) & -2\sin\left(\omega_2\left(\eta_2 + \frac{\eta_2}{2}\right)\right) & 2\sin\left(\omega_2\left(\eta_3 + \frac{\eta_3}{2}\right)\right) \\ \cos\left(\omega_2\left(T + \frac{\delta T}{2}\right)\right) & -2\cos\left(\omega_2\left(\eta_1 + \frac{\eta_1}{2}\right)\right) & 2\cos\left(\omega_2\left(\eta_2 + \frac{\eta_2}{2}\right)\right) & -2\cos\left(\omega_2\left(\eta_3 + \frac{\eta_3}{2}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$B_1 = 2 \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega_1 \delta T}{2} \\ \sin \frac{\omega_1 \delta \eta_1}{2} \\ \sin \frac{\omega_1 \delta \eta_2}{2} \\ \sin \frac{\omega_1 \delta \eta_3}{2} \end{pmatrix}, \quad B_2 = 2 \begin{pmatrix} \sin \frac{\omega_2 \delta T}{2} \\ \sin \frac{\omega_2 \delta \eta_1}{2} \\ \sin \frac{\omega_2 \delta \eta_2}{2} \\ \sin \frac{\omega_2 \delta \eta_3}{2} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{m+1} \frac{\omega_1 \delta \varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon + \delta \varepsilon)} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. Если для некоторого значения ε в некоторой окрестности оптимального решения задачи быстрогодействия $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, T)$ для блочной матрицы

$$A_3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

выполнено условие

$$\det A_3 \neq 0, \quad (34)$$

то функция $T(\varepsilon)$ в этой окрестности является непрерывной.

6. Моделирование. Проведем моделирование оптимального решения для случая трех переключений управления при значениях частот осцилляторов $\omega_1 = 1, \omega_2 = 1,4$. Выберем ограничение на управление, равное $\varepsilon = 0,69$.

Численное решение системы (32) дает последовательность интервалов постоянства управления, из которых следуют времена переключений и полное время T :

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,07889841 \\ 0,41936284 \\ 1,77058325 \\ 0,63609919 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,07889841 \\ 2,49826125 \\ 4,2688445 \\ 4,90494369 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

В статье [4] описан способ нахождения констант C_i из уравнения для функции переключения (21). Теперь построим функцию $h_2(t)$ и соответствующее ей оптимальное управление (22), которые показаны на рис. 2.

Красным цветом на рис. 2 выделены точки, соответствующие полученным временам переключений (35). Видно, что они соответствуют нулям функции $h_2(t)$, т.е. для выбранного значения ε решение соответствует выбранному классу управления, состоящему из трех переключений. При приближении ε к ε_0 интервал $\tau_2 \rightarrow 0$, и необходимые условия теоремы 5 перестают выполняться, что показано на рис. 4, 5.

Промоделируем динамику системы (1) с полученным оптимальным управлением. На рис. 3 изображены фазовые портреты системы. Очевидно, система приходит в требуемые терминальные значения фазовых координат.

Для интервала значений $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1]$, в котором решение соответствует управлению с тремя переключениями, построим зависимости $\tau_i(\varepsilon)$, где $i = \overline{1, 4}$.

Аналогичные вычисления можно провести для классов управления, состоящих из четырех, пяти и шести переключений. На рис. 5 показана зависимость оптимального решения T от ограничения на управление ε . Видно, что изменение класса переключений с шести на пять переключений

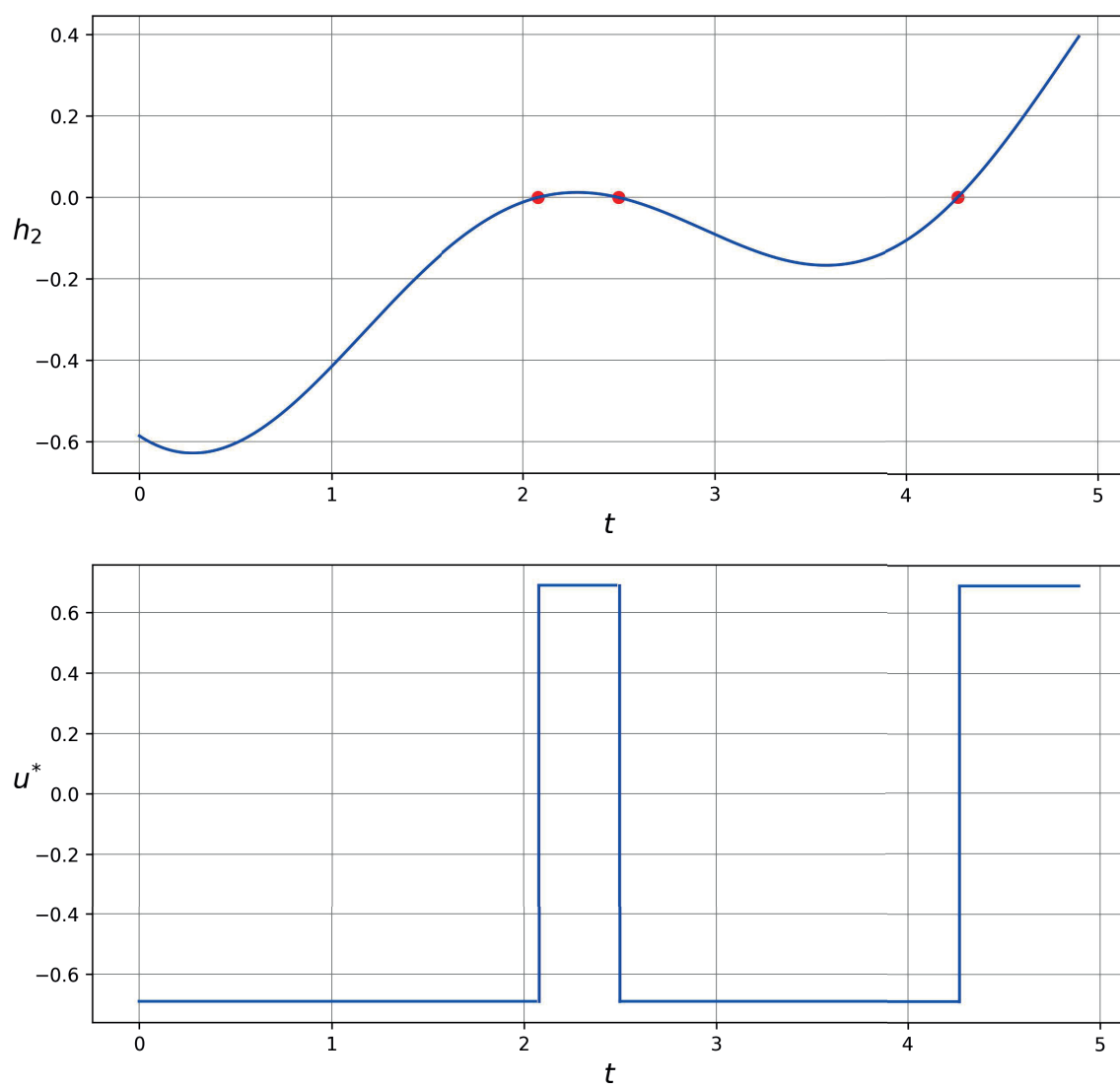
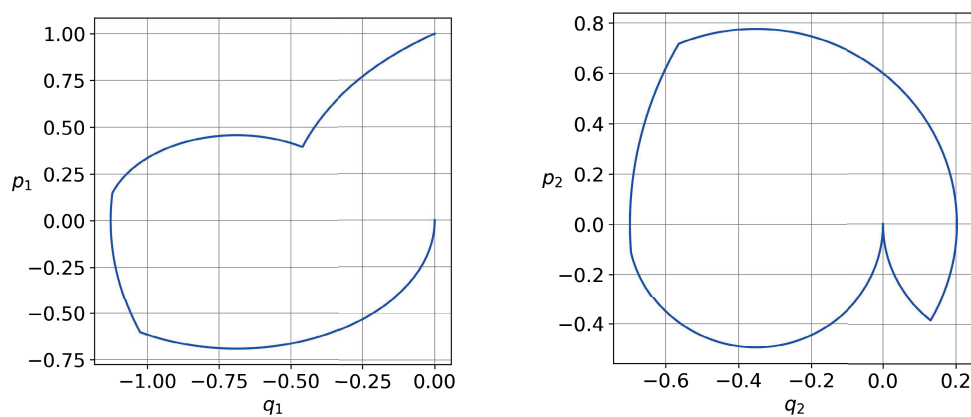
Рис. 2. Зависимость $h_2(t)$ и оптимальное управление u^* при $\varepsilon = 0,69$ 

Рис. 3. Фазовые портреты первого и второго осцилляторов

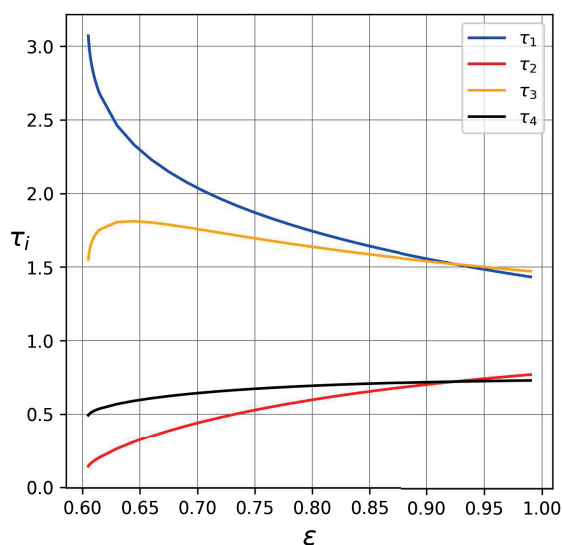


Рис. 4. Зависимость длительностей управления для трех переключений

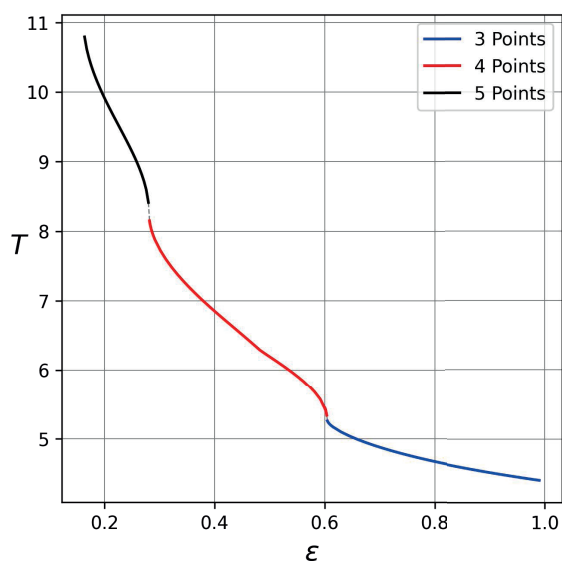


Рис. 5. Зависимость $T(\varepsilon)$

происходит при $\varepsilon_0 = 0,16$, с пяти на четыре — при $\varepsilon_0 = 0,281$, с четырех на три — при $\varepsilon_0 = 0,605$, как было сказано выше.

7. Заключение. В данной работе, посвященной поиску оптимального скалярного управления системой двух независимых несинхронных осцилляторов, были получены следующие результаты.

1. Задача исследована в терминах геометрической формулировки Принципа Максимумы Понтрягина (ПМП).
2. Доказана глобальная управляемость системы с использованием теоремы Суссмана—Джарджевича.
3. Получена и исследована вертикальная подсистема гамильтоновой системы.
4. Для вертикальной гамильтоновой подсистемы найдены два первых интеграла в виде неотрицательных квадратичных форм.
5. Найдены необходимые условия для оптимальных длительностей интервалов управления как система алгебраических уравнений, полученных из уравнений Беллмана и условий максимума гамильтониана ПМП для разных классов управления: для трех, четырех и пяти переключений.
6. Проведено численное моделирование и найдены решения задачи быстродействия для различных значений ε , для случаев трех, четырех и пяти переключений управления; численно проиллюстрирована зависимость $T(\varepsilon)$.

Стоит отметить, что не всегда оптимальное решение находится в выбранном классе переключений, даже если для соседних значений ε оно этому классу удовлетворяет. Например, вместо четырех переключений оптимальным может оказаться управление, состоящее из двух переключений. Исследованию условий нахождения таких аномальных значений ε будет посвящена дальнейшая работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005.
2. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.
3. Галаяев А. А. Скалярное управление группой несинхронных осцилляторов // Автомат. телемех. — 2016. — 9. — С. 3–18.
4. Галаяев А. А., Лысенко П. В. О задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами // в кн.: Тр. 59 Всеросс. науч. конф. МФТИ. — Долгопрудный: МФТИ, 2016. — С. 1–13.

5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.
6. Сачков Ю. Л. Введение в геометрическую теорию управления. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
7. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980.
8. Benzaid Z. Global null controllability of perturbed linear systems with constrained controls// J. Math. Anal. Appl. — 1988. — 136. — P. 201–216.
9. Jakubczyk B. Introduction to Geometric Nonlinear Control. Controllability of Lie Bracket. — Warsaw, 2001.
10. Sussmann H. J., Jurdjevic V. Controllability of nonlinear systems// J. Differ. Equations. — 1972. — 12. — P. 95–116.

Берлин Леонид Михайлович

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: berlin.lm@phystech.edu

Галяев Андрей Алексеевич

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: galaev@ipu.ru

Лысенко Павел Владимирович

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: pashlys@yandex.ru