ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 3–17
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-3-17

УДК 512.5; 514.744

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ КОНУСЫ ВИНБЕРГА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

© 2022 г. Д. В. АЛЕКСЕЕВСКИЙ

Аннотация. В работе излагаются базисные факты теории Винберга однородных выпуклых конусов, прежде всего специальных конусов Винберга, ассоциированных с клиффордовыми модулями, и их обобщению. Кратко рассмотрены приложения теории конусов к дифференциальной геометрии, физике (включая супегравитацию), информационной геометрии, выпуклому программированию и дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: выпуклый конус, конус Винберга, клиффордов модуль, дифференциальной геометрия.

SPECIAL UNIFORM VINBERG CONES AND THEIR APPLICATIONS

© 2022 D. V. ALEKSEEVSKII

Abstract. In this paper, we present basic facts of Vinberg's theory of homogeneous convex cones, primarily the special Vinberg cones associated with Clifford modules, and their generalization. Applications of the cone theory to differential geometry, physics (including supergravity), information geometry, convex programming, and differential equations are briefly discussed.

Keywords and phrases: convex cone, Vinberg cone, Clifford module, differential geometry.

AMS Subject Classification: 13Jxx

1. Введение. *Выпуклым конусом* называется выпуклая область $\mathcal{V}$ векторного пространства $V = \mathbb{R}^n$, инвариантная относительно растяжений ($\mathbb{R}^+\mathcal{V} = \mathcal{V}$). Конус называется *однородным*, если группа автоморфизмов

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{V}) = \{A \in GL(V),\ A\mathcal{V} = \mathcal{V}\}$$

действует на нем транзитивно. Тогда $\mathcal{V} = \mathrm{Aut}(V)/K$ и существует просто транзитивная треугольная подгруппа $G \subset \mathrm{Aut}(V)$. Э. Б. Винберг развил дифференциальную геометрию выпуклого конуса, в частности, определил выпуклую вместе с логарифмом характеристическую функцию Винберга φ, которая характеризует конус и играет исключительно важную роль в приложениях. Достаточно сказать, что в Интернете словосочетание «Vinberg characteristic function» упоминается 680000 раз. В выпуклом программирований характеристическая функция используется как барьерная функция (А. С. Немировский, Ю. Е. Нестеров). Гессиан характеристической функции является (*канонической*) римановой метрикой и таким образом конус является римановым многообразием.

Геометрия конуса допускает интерпретацию в рамках *информационной геометрии Ченцова—Амари* как геометрии одного из самых важных классов статистических многообразий — экспоненциальных семейств. При этом каноническая метрика есть метрика Фишера—Рао экспоненциального семейства.

Описание широкого класса выпуклых конусов имеет большой интерес для приложений. В начале 1960-х гг. Винберг явно описал все однородные самосопряженные неразложимые выпуклые конусы как конусы положительно определенных эрмитовых матриц в пространстве эрмитовых матриц $\mathrm{Herm}_n(\mathbb{K})$ над алгеброй с делением $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

Обобщая этот результат, он определил понятие матричной T-алгебры $\mathfrak{A}$ как неассоциативной алгебры матриц $X = \|x_{ij}\|$ порядка n, с вещественными диагональными элементами $x_{ii} \in \mathbb{R}$, и недиагональными элементами $x_{ij} \in V_{ij}$, которые принадлежат различным евклидовым пространствам V_{ij}, причем $V_{ji} = V_{ij}^*$. Для определения матричного умножения требуется задать билинейные отображения

$$\beta_{ijk} \colon V_{ij} \times V_{jk} \to V_{ik}, \quad (x_{ij}, x_{jk}) \to x_{ij} \cdot x_{jk},$$

удовлетворяющие ряду аксиом. Важнейшей аксиомой является требование, чтобы при $i < j < k$ отображение β_{ijk} было изометрическим.

Билинейное отображения $\beta \colon V \times U \to W$ евклидовых пространств называется *изометрическим*, если

$$|u \cdot v| = |u||v|, \ \forall u \in U, \ v \in V.$$

Такие отображения известны только в двух случаях:

(i) если $\dim U = \dim V = \dim W$ (*очень специальное изометрическое отображение*) и

(ii) если $\dim U = \dim W$ (*специальное изометрическое отображение*).

Очень специальное отображение определяет (если отождествить U, W с V) в пространстве V структуру евклидовой алгебры Гурвица, которая по теореме Гурвица (A. Hurwitz, 1898) изоморфна $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ или $\mathbb{O}$.

Специальное изометрическое отображение $V \times U \to W$ определяет в $\mathbb{Z}_2$-градуированном пространстве $S = S_0 + S_1 \coloneqq U + W$ структуру $\mathbb{Z}_2$ градуированного модуля над $\mathbb{Z}_2$ градуированной алгеброй Клиффорда $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}^0(V) + \mathrm{Cl}^1(V)$ и обратно любой $\mathbb{Z}_2$ градуированный клиффордов модуль $S = S_0 + S_1$ вместе с допустимой евклидовой метрикой $g_S = \langle \cdot, \cdot \rangle$, такой, что $\langle S_0, S_1 \rangle = 0$, $g_S(\mu_v s, s) = 0$ (где $\mu_v \colon s \mapsto v \cdot s$ — клиффордово умножение) задает специальное изометрическое отображение.

Градуированные модули клиффорда $S = S_0 + S_1$ над любой клифордовой алгеброй $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$ классифицированны M. F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro (1966), а допустимые псевдоримановы метрики — в совместной работе с V.Cortés (1997).

Явная классификация T-алгебр Винберга и однородных выпуклых конусов известна только в двух случаях: когда конус самосопряжен и когда T-алгебра есть специальная T-алгебра Винберга ранга 3, ассоциированная с метрическим клиффордовым модулем.

Оказывается, что последняя конструкция обобщается на индефинитый случай [5], когда g_S есть псевдоевклидова допустимая метрика в градуированном клиффордовом модуле $S = S_0 + S_1$ над произвольной алгеброй Клиффорда $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$. Мы изложим эту конструкцию и кратко рассмотрим применения однородных конусов к супергравитации, информационной геометрии и других дисциплинах.

2. Базовые факты теории выпуклых конусов. Под *выпуклым конусом* мы будем понимать открытый выпуклый конус $\mathcal{V}$ векторного пространтсва $V \simeq \mathbb{R}^m$, не содержащий прямых.

Прямое произведение $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \subset V_1 \times V_2$ двух выпуклых конусов $\mathcal{V}_1 \subset V_1$, $\mathcal{V}_2 \subset V_2$ есть выпуклый конус.

Определение 1. Выпуклый конус называется неприводимым, если он не разлагается в произведение двух выпуклых конусов.

Пусть $\mathcal{V} \subset V$ — выпуклый конус и $\mathrm{Aut}(\mathcal{V}) \subset GL(V)$ — его группа автоморфизмов.

Определение 2.

1. Сопряженный конус $\mathcal{V}^*$ в сопряженном пространстве V^* определяется как выпуклый конус

$$\mathcal{V}^* = \{x' \in V^*, \ x'(y) > 0 \ \forall y \in \mathcal{V}\}$$

линейных форм, положительных на $\mathcal{V}$.

2. Конус называется самосопряженным, если при отождествлении V с V^* с помощью некоторой евклидовой метрики $\mathcal{V} = \mathcal{V}^*$.
3. Характеристическая функция φ выпуклого конуса задается формулой
$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathcal{V}^*} e^{-(x',x)} d\xi', \quad x \in \mathcal{V}, \quad x'i \in \mathcal{V}^*,$$
где dx' — форма объема пространства $V^* = \mathbb{R}^n$.
4. Гессиан $g = \partial^2 \log \varphi$ определяет каноническую риманову метрику в конусе, инвариантную относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{V}) \subset GL(V)$ автоморфизмов.
5. Поверхность уровня $S \coloneqq \{x \in \mathcal{V},\ \varphi(x) = 1\}$ называется характеристической (или детерминантной) гиперповерхностью.
6. Конус $\mathcal{V}$ называется однородным, если группа $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$ действует на нем транзитивно.

В этом случае характеристические гиперповерхности $S_r \coloneqq rS$, $r > 0$ являются орбитами унимодулярной (нормальной) подгруппы $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})_o$ группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$.

Предложение 1 (Э. Б. Винберг)**.**

1. *Характеристическая функция φ есть гладкая положительная функция в конусе $\mathcal{V}$, неограниченно возрастающая при приближении к границе.*
2. *Функции φ и $\ln \varphi$ являются выпуклыми.*
3. *Функция $\ln \varphi$ является $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$-инвариантом, а φ — относительным инвариантом*:
$$\varphi(Ax) = \frac{1}{\det A} \varphi(x), \quad A \in G(\mathcal{V}).$$
В частности, $\varphi(\lambda x) = \lambda^{-n} \varphi(x)$, $\lambda > 0$.
4. *Пусть $x = rx_0$, $x_0 \in S$. Тогда гиперповерхность $S_r \coloneqq rS = \{\varphi(x) = r^{-n}\}$ содержит x и имеет касательное пространство*
$$T_x S_r = \Pi^n_{x^*} = \{y \in V,\ (x^*, y) = n\}.$$
В частности, $x^* \in \mathcal{V}^*$ и $(x^*, x) = n$. Более того, ковектор
$$x^* = \int\limits_{\mathcal{V}^*} e^{(x',x)} x' dx' \Big/ \int\limits_{\mathcal{V}^*} e^{(x,x')} dx' = \int\limits_{\mathcal{V}^* \cap \Pi^n_x} x' dx' \Big/ \int\limits_{\mathcal{V}^* \cap \Pi^n_x} dx'$$
является центром тяжести сечения сопряженного конуса $\mathcal{V}^*$ гиперплоскостью
$$\Pi^n_x = \{x' \in V^*,\ (x, x') = n\}.$$
5. *Отображение $x \mapsto x^*$ есть диффеоморфизм конуса $\mathcal{V}$ на конус $\mathcal{V}^*$.*

Каждая точка x' сопряженного конуса определяет плотность вероятностной меры
$$p_{x'}(x) = \frac{e^{(-x',x)}}{\varphi(x)}.$$
Таким образом, сопряженный конус отождествляется с семейством вероятностных мер в $\mathcal{V}$.

Предложение 2 (Э. Б. Винберг)**.** *Если выпуклый конус $\mathcal{V}$ однороден, то сопряженный конус $\mathcal{V}^*$ тоже однороден, и справедливы следующие утверждения*:

1. *Отображение $*\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ инволютивно*: $(x^*)^* = x$ *и* $\varphi(x) \cdot \varphi(x^*) = \mathrm{const}$.
2. *Пусть*
$$x_{\min} = rx_0 = \int\limits_{\mathcal{V} \cap \Pi} e^{(x',x)} x dx' \Big/ \int\limits_{\mathcal{V} \cap \Pi} e^{(x',x)} dx, \quad x_0 \in S$$
есть центр тяжести сечения конуса $\mathcal{V}$ некоторой гиперплоскостью Π. Тогда гиперплоскость Π касается поверхности уровня $\varphi = \mathrm{const}$ в центре тяжести $x_{\min}$ гиперплоского сечения $\Pi \cap \mathcal{V}$ и $x_{\min}$ есть (единственная) точка минимума функции φ в $\Pi \cap \mathcal{V}$. Иначе говоря,
$$\Pi = T_{x_{\min}}(S_r) = \Pi^n_{x^*_{\min}}, \quad x_{\min} = rx_0, \quad x_0 \in S.$$

3. Клиффордовы алгебры и клиффордовы модули.

Определение 3. Алгебру Клиффорда псевдоевклидова пространств ($V = \mathbb{R}^{p,q}, \langle\cdot,\cdot\rangle$) можно определить как ассоциативную алгебру $\mathrm{Cl}(V)$ с единицей, порожденную пространством V и соотношениями $u \cdot v + v \cdot u = -2\langle u, v\rangle 1$. Векторное пространство $\mathrm{Cl}(V)$ естественным образом отождествляется с внешней алгеброй $\Lambda(V)$.

Базис (e_i) пространства V порождает базис алгебры Клиффорда:

$$e_{i_1\dots i_k} = e_{i_1} \cdot e_{i_2} \dots \cdot e_{i_{k-1}} \cdot e_{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Алгебра Клиффорда допускает $\mathbb{Z}_2$ градуировку $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}^0(V) + \mathrm{Cl}^1(V)$, где $\mathrm{Cl}^0(V)$ (соответственно, $\mathrm{Cl}^1(V)$) порождаются мономами четной (соответственно, нечетной) степени.

3.1. Классификация алгебр Клиффорда. Алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$ имеет размерность 2^n, $n = p + q$, а ее четная подалгебра Cl^0_V — размерность 2^{n-1}. Обе эти алгебры изоморфны либо матричной алгебре $\mathbb{K}(N)$ некоторого порядка N, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$ — алгебра с делением, либо прямой сумме $2\mathbb{K}(N)$ двух таких алгебр.

Определение 4. Говорят, что алгебра $\mathrm{Cl}_{p,q}$ имеет тип $t(\mathrm{Cl}_{p,q}) = r\mathbb{K}$, $r = 1, 2$, если она изоморфна алгебре $r\mathbb{K}(N)$. Градуированный тип определяется как пара

$$(r_0\mathbb{K}' r\mathbb{K}) = \big(t(\mathrm{Cl}^0(V)),\ t(\mathrm{Cl}(V))\big).$$

Градуированный тип алгебры Клиффорда зависит только от сигнатуры $s = p - q$ по модулю 8 и указан в следующей таблице (см. [5]).

s	1	2	3	4	5	6	7	8
$t(s)$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	$\mathbb{C}, \mathbb{H}$	$\mathbb{H}, 2\mathbb{H}$	$2\mathbb{H}, \mathbb{H}$	$\mathbb{H}, \mathbb{C}$	$\mathbb{C}, \mathbb{H}$	$\mathbb{R}, 2\mathbb{R}$	$2\mathbb{R}, \mathbb{R}$

3.2. Метрические модули Клиффорда. Напомним, что любое представление матричной алгебры $\mathbb{K}(N)$ есть прямая сумма $k\mathbb{K}(N)$ несколькиъ копий тавтологического неприводимого представления.

Алгебра $2\mathbb{K}(N)$ имеет два неприводимых представления, определяемые проекцией на первое и второе слагаемое.

Это дает классификацию клиффордовых $\mathrm{Cl}(V)$-модулей: любой $\mathrm{Cl}(V)$-модуль является прямой суммой неприводимых и имеется ровно один клиффордов модуль $S_{p,q}$, если $s := p - q \equiv 1, 2, 4, 5, 6, 8 \pmod 8$ и два неприводимых модуля $S_{p,q}$, $S'_{p,q}$, если $s \equiv 3, 7 \pmod 8$.

$\mathbb{Z}_2$-Градуированные (неприводимые) $\mathrm{Cl}(V)$-модули находятся во взаимно-однозначном сответствии с (неприводимыми) $\mathrm{Cl}^0(V)$-модулями, см. [11]. Градуированному $\mathrm{Cl}(V)$ модулю $S = S_0 + S_1$ отвечает $\mathrm{Cl}^0(V)$ модуль S_0. Обратно, $\mathrm{Cl}^0(V)$ модуль S_0 однозначно продолжается до $\mathbb{Z}_2$ градуированного $\mathrm{Cl}(V)$ модуля

$$S = S_0 + S_1 := \mathrm{Cl}(V) \otimes_{\mathrm{Cl}^0(V)} S^0.$$

Определение 5. $\mathbb{Z}_2$-градуированный $\mathrm{Cl}(V)$-модуль $S = S_0 + S_1$ называется метрическим, если он снабжен псевдоевклидовой метрикой $g_S = \langle\cdot,\cdot\rangle$ для которой операторы клиффордова умножения

$$\mu_v \colon s \mapsto v \cdot s, \quad v \in V, \quad s \in S,$$

кососимметричны ($\langle s \cdot v, v\rangle = 0$). Если метрики g_V, g_S евклидовы, то говорят, что клиффордов модуль евклидов.

Клиффордово умножение $\mu \colon V \times S \to S$ для метрического клиффордова модуля есть изометрическое отображение, т.е.

$$|v \cdot s|^2 := \langle v \cdot s, v \cdot s\rangle = |v|^2 \cdot |s|^2 := \langle v, v\rangle\langle s, s\rangle.$$

3.3. Спинорная группа и ее спинорное представление. Спинорной группой $\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Spin}_{p,q}$ называется связная группа обратимых элементов алгебры $\mathrm{Cl}^0(V)$, порожденная произведениями $v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots v_{2k}$ четного числа элементов $v_i \in V$ с квадратом $v_i^2 = \pm 1$. Естественное представления группа $\mathrm{Spin}(V) \subset \mathrm{Cl}^0(V)$ в пространствах S_0, S_1 называются спинорными представлениями. Группа $\mathrm{Spin}(V)$ также действует присоединенным представлением

$$\mathrm{Ad}_g v = g \cdot v \cdot g^{-1}, \quad g \in \mathrm{Spin}(V), \quad v \in V$$

в пространстве V с ядром $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ и таким образом $\mathrm{Ad}_{\mathrm{Spin}(V)} = SO(V) \simeq \mathrm{Spin}(V)/(\pm 1)$.

4. Специальные псевдоевклидовы однородные конусы.

4.1. Определения. Специальная T-алгебра Винберга $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S)$, ассоциированная с метрическим $\mathrm{Cl}(V)$-модулем S состоит из матриц вида

$$X = \|x_{ij}\| = \begin{pmatrix} x_1 & X_3 & X_2 \\ X_3' & x_2 & X_1 \\ X_2' & X_1' & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & v & s_1 \\ v' & x_2 & s_0 \\ s_1' & s_0' & x_3 \end{pmatrix},$$

где $x_i \in \mathbb{R}$,

$$X_3 = v \in V, \qquad X_1 = s_0 \in S_0, \quad X_2 = s_1 \in S_1$$
$$X_3' = v' \in V^*, \quad X_1' = s_0' \in S_0^*, \quad X_2' = s_1' \in S_1.$$

В пространстве $\mathcal{A}$ определяется инволюция

$$\star : \mathcal{A} \ni X = \|x_{ij}\| \mapsto X^* = \|x_{ij}^*\|$$

где $x_{ij}^* = g \circ x_{ji}$ — сопряженный элемент к x_{ji}.

Матричное умножение верхне (и нижне) треугольных матриц определяется клиффордовым умножением

$$x_{12} \cdot x_{23} = X_3 \cdot X_1 = v \cdot s_0 \in S_1$$

и умножением чисел на векторы и спиноры. Остальные умножения матричных элементов однозначно определяются двумя условиями:

(i) ассоциативность произведений вида

$$x_{ij} \cdot x_{jk} \cdot x_{ki} \in \mathbb{R};$$

(ii) условием $(x_{ij} \cdot x_{jk})^* = x_{jk}^* \cdot x_{ij}^*$, означающим, что отображение $X \to X^*$ есть антиавтоморфизм алгебры $\mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{F},\ X^* = X\}$ подпространство эрмитовых матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & X_3 & X_2 \\ X_3^* & x_2 & X_1 \\ X_2^* & X_1^* & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & v & s_1 \\ v^* & x_2 & s_0 \\ s_1^* & s_0^* & x_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Следующая теорема есть обобщение классического результата Э. Б. Винберга.

Теорема 1 (см. [1,5]).

1. *Специальная алгебра Винберга $\mathcal{A}(S)$ удовлетворяет всем аксиомам матричной T-алгебры Винберга за исключением аксиомы положительности метрики, которая выполняется только если метрики g_V, g_S евклидовы.*
2. *Пространство $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{A},\ X^* = X\}$ эрмитовых матриц есть неассоциативная алгебра относительно йорданова умножения $X \circ Y = \frac{1}{2}(X \cdot Y + Y \cdot X)$, а группа $G = G(S)$ верхнетреугольных матриц с положительными элементами на диагонали есть разрешимая связная односвязная группа Ли, которая действует в пространстве $\mathcal{H}$. Орбита*

$$\mathcal{V} = G(\mathrm{Id}) = \{X = A \cdot A^*,\ A \in G\}$$

единичной матрицы является однородным открытым конусом с просто транзитивным действием группы G. Конус является выпуклым тогда и только тогда, когда g_V, g_S — евклидовы метрики.

Определение 6. Однородный конус $\mathcal{V}$ называется специальным конусом, ассоциированным с метрическим клиффордовым модулем S.

Группа G состоит из матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \alpha_2 & a_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ и $a_{12} \in V$, $a_{23} \in S_0$, $a_{13} \in S_1$. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из всех верхнетреугольных матриц A и линейно действует в пространстве $\mathcal{H}$ эрмитовых матриц по формуле

$$A(X) = T_A X \coloneqq AX + XA^*, \quad A \in \mathfrak{g}, \quad X \in \mathcal{H}.$$

Это действие интегрируется до действия (экспоненциальной) группы Ли $G = \{e^A, A \in \mathfrak{g}\}$, задаваемого формулой

$$e^A(X) = \exp(T_A)X = X + T_A X + \frac{1}{2!}T_A^2 X + \frac{1}{3!}T_A^3 X + \dots.$$

4.2. Свойства специального конуса Винберга. Пусть $\mathcal{V} = \{X = AA^*,\ A \in G\} \subset \mathcal{H}$ — специальный конус Винберга. Так как группа G действует в конусе $\mathcal{V}$ просто транзитивно, метричные элементы α_i, a_{12}, a_{23}, a_{13} определяют (групповые) координаты в конусе (но не в пространстве $\mathcal{H}$). В обозначениях (1) определим, следуя Винбергу, однородные полиномы $p_3(X)$, $p_2(X)$, $h(X)$, $p_1(X)$ степени 1, 2, 4, 3 в пространстве эрмитовых матриц

$$p_3(X) = x_3, \quad p_2(X) = x_2x_3 - |X_1|^2, \quad p_1 = p_3(X)h(X),$$
$$h(X) = x_1x_2x_3 - \sum_{i=1}^{3} x_i|X_i|^2 + 2(X_3 \cdot X_1) \cdot X_2^*.$$

Ограничение этих полиномов на конус в групповых координатах имеет вид

$$p_3 = \alpha_3^2, \quad p_2 = (\alpha_2\alpha_3)^2, \quad h = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2, \quad p_1 = \alpha_3^2 h = (\alpha_1\alpha_2)^2\alpha_3^4.$$

Эти полиномы позволяют описать конус неравенствами и указать его характеристическую функцию.

Теорема 2 (см. [5]). *Конус $\mathcal{V}$ задается неравенствами $p_i(X) > 0$, $i = 1, 2, 3$, а его характеристическая функция φ имеет вид*

$$\varphi^{-1}(X) = (\alpha_1\alpha_2)^{2+n+N}\alpha_3^{2+2N} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2+n+N}a_3^{N-n},$$

где $n = \dim V$, $N = \dim S_0 = \dim S_1$.

Отметим, что при отождествлении сопряженного пространства $\mathcal{H}^*$ с $\mathcal{H}$ с помощью метрики $g(X, Y) = \operatorname{tr} XY$, сопряженный конус $\mathcal{V}^*$ задается неравенствами $p_i^*(X) > 0$, $i = 1, 2, 3$, где сопряженные полиномы имеют вид

$$p_3^*(X) = x_1, \quad p_2^*(X) = x_1x_2 - |X_3|^2, \quad p_1^*(X) = p_3^*(X)h^*(X)$$

и $h^*(X) = h(X)$.

Определение 7. Кубическая функция $h(X) = \frac{p_1(X)}{p_3(X)} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2$ называется кубическим потенциалом конуса (или кубикой), а гиперповерхность $\mathcal{V}_1 = \{h(X) = 1\} \subset \mathcal{V}$ — детерминантной гиперповерхностью.

5. Применения в дифференциальной геометрии и супергравитации. Со специальным однородным конусом $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ (ассоциированным с евклидовым клиффордовым модулем) можно связать ряд важных однородных римановых многообразий, прежде всего однородное специальное аффинное кэлерово многообразие M и однородное специальное проективное кэлерово многообразие, а также специальное гиперкэлерово многообразие и специальное кватернионно кэлерово многообразие с отрицательной кривизной Риччи. Соответствующие конструкции были впервые предложены физиками Де Витом и Ван Пройеном [17] и называются (аффинным и проективным) r-отображениями и c-отображениями. Из работы [4] следует, что специальные кватернионно кэлеровы многообразия, ассоциированные со специальными конусами Винберга, исчерпываются все кватернионно кэлеровы многобразия, допускающие транзитивную разрешимую группу изометрий.

5.1. Аффинные и проективные специальные кэлеровы многообразия. Пусть $\mathcal{V} \subset V = \mathbb{R}^{n+1}$ — специальный однородный конус и $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1 = \{h(x) = 1\}$ — его детерминантная гиперповерхность. Гессианова метрика $g_{\mathcal{V}} = -\partial^2 h(x)$ имеет сигнатуру $(n, 1)$, а ее ограничение $g_{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$ есть риманова метрика.

Определение 8.

1. (Аффинное) специальное (псевдо)кэлерово многобразие есть (псевдо)кэлерово многообразие (M, g, J, ω), снабженное плоской связностью (без кручения) ∇, которая сохраняет кэлерову форму ω ($\nabla\omega = 0$) и удовлетворяет условию
$$(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X, \quad X, Y \in TM.$$
2. Многообразие (M, g, J, ω) называется коническим, если задано такое поле ξ гомотетий ($\mathcal{L}_\xi g = cg$), что
   (a) $\nabla\xi = \nabla^g\xi = \mathrm{id}$, где ∇^g — связность Леви-Чивиты;
   (b) Метрика g положительно определена на $\mathcal{D} \coloneqq \mathrm{span}(\xi, J\xi)$ и отрицательно определена на $\mathcal{D}^\perp$;
   (c) Коммутирующие голоморфные векторные поля $(\xi, J\xi)$ порождают свободное голоморфное действие группы $\mathbb{C}^* = \{\rho e^{i\theta}\} = \{\exp t\xi \cdot \exp\theta J\xi\}$, где $e^{i\theta} = \exp\theta J\xi$ есть группа гомотетий.

Если (M, g, J, ω, ξ) — такое коническое специальное многообразие, то на факторпространстве $\bar{M} = M/\mathbb{C}^*$ индуцируется кэлерова структура $(\bar{g}, \bar{J})$, и кэлерово многообразие $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{J})$ называется проективным специальным кэлеровым многообразием. Простейшим примером этой конструкции является метрика Фубини—Штуди на $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^*$.

Локально структура конического специального кэлерова многообразия M определяется одной голоморфной функцией $F(z)$ (препотенциалом), который в специальных конических голоморфных координатах $z = (z^I)$, $I = 0, 1, \dots, n$ является однородной функцией степени 2 (см. [16]).

Метрика дается формулой
$$g_M = N_{IJ} dz^I d\bar{z}^J, \quad N_{IJ}(z, \bar{z}) = 2\,\mathrm{Im}\, F_{IJ} = 2\,\mathrm{Im}\, \partial_{z^I}\partial_{z^J} F.$$
и имеет кэлеров потенциал $g_M|_U = r^2 = g_M(\xi, \xi)$, где поле гомотетий
$$\xi = z^I \partial_{z^I} + \bar{z}^I \partial_{\bar{z}^I}.$$

5.2. Аффинное r-отображение. Аффинное r-отображение сопоставляет детерминантной гиперповерхности $\mathcal{H}$ специального однородного конуса однородное специальное кэлерово многообразие (M, g, J, ω). Многообразие $M = T\mathcal{H}$ есть кокасательное расслоение детерминантной гиперповерхности. Многообразие $M = T\mathcal{H} = E\mathcal{V}_1$ есть касательное расслоение характеристической гиперповерхности.

Плоская связность ∇ определяет изоморфизм касательного пространства T_vM в точке $v \in T_x\mathcal{V}_1$ в прямую сумму вертикального подпространства $T_v^{\mathrm{vert}}M \simeq T_x\mathcal{V}_1$ и горизонтального подпространства $\mathcal{H} \simeq T_x\mathcal{V}_1$ и тем самым изоморфизм $T_vM \simeq T_x\mathcal{V}_1 \oplus T_x\mathcal{V}_1$. Это позволяет определить в M структуру специального однородного кэлерова многобразия (см. [6]).

5.3. Проективное r-отображение (см. [16]). Пусть $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ — специальный выпуклый однородный конус с лоренцевой метрикой $g = -\partial^2 h(x)$ и $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1$ — характеристическая гиперповерхность с индуцированной метрикой (или очень специальное вещественной многообразие). Проективное r-отображение сопоставляет многообразию $(\mathcal{H}, g|_{\mathcal{H}})$ проективное специальное кэлерово многообразие

$$\bar{M} := \mathbb{R}^n + i\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$$

с индуцированной комплексной структурой J и кэлеровой метрикой $g_{\bar{M}}$, задаваемой в голоморфных координатах $X^\mu := y^\mu + ix^\mu$, $\mu = 1, \dots n$ кэлеровым потенциалом

$$K(X, \bar{X}) = -\log 8h(x^\mu), \quad x^\mu = \operatorname{Re} X^\mu.$$

Это многообразие является проективизацией конического аффинного специального кэлерова многообразия (M, g_M, J_M, ξ), являющегося областью комплексного пространства $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C} \times \bar{M}$. Многообразие M имеет вид

$$M = \{z = z^0(1, X),\ X \in \bar{M} = \mathbb{R}^n + i\mathcal{V},\ z^0 \in \mathbb{C}\}.$$

Его кэлерова структура задается следующими препотенциалом и полем гомотетий:

$$F(z^0, \dots, z^n) = \frac{h(z^1, \dots, z^n)}{z^0}, \quad \xi = \sum_{I=0}^{n} (z^I \partial_{z^I} + \bar{z}^I \partial_{\bar{z}^I}).$$

5.4. c-Отображения.

Определение 9. Риманово $4n$-мерное многообразие (M, g) называется гиперкэлеровым (соотв., кватернионно-кэлеровым), если его группа голономии $\operatorname{Hol}(M)$ содержмится в группе $\operatorname{Sp}(n)$ (соответственно, $\operatorname{Sp}(1) \cdot \operatorname{Sp}(n)$). Любое гиперкэлерово многообразие является кватернионно-кэлеровым и характеризуется как кватернионно-кэлерово многообразие с нулевой кривизной Риччи или как риманово многообразие, обладающее тремя параллельными антикоммутирующими комплексными структурами (∇J_α, $\alpha = 1, 2, 3$) с $J_3 = J_1 J_2$.

Кватернионно-кэлеровы многообразия с ненулевой кривизной Риччи («собственные кватернионно-кэлеровы многобразия») характеризуется как риманово многообразие, обладающее паралллельной кватернионной структурой Q, т. е. параллельным подрасслоением $Q \subset \operatorname{End}(TM)$ локально порожденным антикоммутирующими почти комплексными структурами J_1, J_2, J_3. являются неприводимыми многообразиями Эйнштейна.

С каждым собственным кватернионно-кэлеровым многообразием (N, g, Q) со скалярной кривизной $\mathrm{sc} \neq 0$ связывается (псевдориманово, если $\mathrm{sc} < 0$) гиперкэлерово коническое многообразие $\hat{S}$, определяемое следующим образом.

Рассмотрим $SO(3)$-главное 3-сасакиево расслоение $\pi\colon S \to N$, где слой $S_x = \pi^{-1}(x)$ состоит из базисов $s = (J_1, J_2, J_3)$ пространства Q_x, удовлетворяющих кватернионным соотношениям. Связность Леви-Чивиты ∇^g индуцирует связность в главном расслоении $\pi\colon S \to M$. Пусть

$$\theta = \theta^1 \otimes e_1 + \theta^2 \otimes e_2 + \theta^3 \otimes e_3 \colon TM \to \mathfrak{so}(3)$$

— 1-форма этой связности, где (e_α) — стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$. Метрика g продолжается до (псевдо)римановой метрики

$$g_S = \sum_{\alpha=1}^{3} (\theta^\alpha)^2 + \pi^* g$$

в S, которая называется 3-сасакиевой метрикой. Риманов конус $(\hat{S}, \hat{g}_S := dr^2 + r^2 g_S)$ является гиперкэлеровым многообразием с группой гомотетий, порождаемой полем Эйлера $\xi = r\partial_r$ и параллельными комплексными структурами

$$J_\alpha = g_{\hat{S}}^{-1} \circ \hat{\omega}_\alpha,$$

где

$$\hat{\omega}_\alpha = -d\left(\frac{r^2}{2} \theta^\alpha\right)$$

— точные 2-формы на $\hat{S}$. Такое многообразие $\hat{S}$ называется гиперкэлеровым конусом. Группа $H =: \mathbb{H}^*/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}^+ \cdot SO(3)$ естественно действует на гиперкэлеровом конусе $\hat{S}$ и факторпространство $N = \hat{S}/H$ есть кватернионно кэлерово многообразие.

Естественное расслоение $\hat{S} \to M$ называется расслоением Свана (Andrew Swann), который установил взаимно однозначное соответствие между собственными кватернионно кэлеровыми многообразиями и гиперкэлеровыми конусами. Это соответствие сохраняется и для псевдоримановых кватернионно-кэлеровых многообразий M. Если M имеет сигнатуру $(4k, 4\ell)$, то соответствующий гиперкэлеров конус $\hat{S}$ имеет сигнатуру $(4 + 4\ell, 4k)$ (см. [8]).

Аффинное (или жесткое) c-отображение сопоставляет специальному аффинному кэлерову многообразию (M, g, J, ∇) его кокасательное расслоение $N = T^*M$ с индуцированной гиперкэлеровой структурой (g_N, J_1, J_2, J_3), которая строится с помощью тривиализации касательного расслоения с помощью плоской связности ∇ как для аффинного r-отображения.

Проективное c-отображение сопоставляет проективному специальному кэлерову $(2n-2)$-мерному многообразию $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{J})$, являющемуся проективизацией специального кэлерова конического $2n$-мерного многообразия M, кватернионно кэлерово мноогообразие $\bar{N}$ размерности $4n$, которое является проективизацией гиперкэлерова конуса $\hat{(N)}$ размерности $4n + 4$. Поэтому достаточно сопоставить специальному кэлерову коническому многообразию M гиперкэлеров конус $\hat{N}$. Он строится в два приема. Сначала рассматривается гиперкэлерово многообразие $N = T^*M$, доставляемое аффинным с-отображением, а затем к нему применяется конструкция конификации, предложенная в [7].

5.5. Применения в физике. Конструкции r-отображения и c-отображения возникли в теории супергравитации в работах де Вита и Ван Пройена.

Скалярные поля в пятимерной ($D = 5$, $N = 2$) супергравитации принимают значения в очень специальном вещественном многообразии, задаваемом кубическим однородным полиномом $q(X)$. Как показали де Вит и Ван Пройен (см. [17]) и Кортес (см. [15]), все такие однородные многообразия (в неприводимом случае) исчерпываются гиперповерхностями $\mathcal{V}_1$ специальных конусов Винберга $\mathcal{V}(S)$.

r-Отображение соответствует размерностной редукции к размерности 4. Иначе говоря, в $D = 4$ супергравитации, полученной размерностной редукцией, скалярные поля принимают значение в проективном специальном кэлеровом пространстве $\bar{M}$, являющегося образом детерминантной гиперповерхности при r-отображении. Аналогично, размерностная редукция $D = 4$ супергравитации к $D = 3$ соответствует c-отображению пространства значений $\bar{M}$ скалярных полей в кватернионно кэлерово многообразие $\bar{N}$.

6. Применения в информационной геометрии.

6.1. Об истории создания информационной геометрии. Основной задачей информационной геометрии является изучение дифференциальной геометрии многообразий различных классов вероятностных мер на многообразии M и ее применению к статистике и теории вероятностей, машинному обучению, искусственному интеллекту, математическому программированию и к другим прикладным дисциплинам. С 2018 г. издается журнал «Information Geometry».

Информационная геометрия восходит к работам Р. А. Фишера и его ученика К. Р. Рао по статистике. Важный вклад в создание информационной геометрии внес С. Кульбак, который, обобщая идеи К. Шеннона, ввел основополагающее понятие относительной энтропии, получившей название дивергенции Кульбака—Лейблера или информационного уклонения.

Систематическое развитие информационная геометрия получила только в работах Н. Н. Ченцова (см. [3]) и затем С. И. Амари, и она часто называется на Западе информационной геометрией Ченцова—Амари. Н. Н. Ченцов, заложивший основы этой теории, был учеником А. Н. Колмогорова и работал в Москве.

Парадоксально, что в России сейчас практически отсутствуют исследования по информационной геометрии, а в русской Википедии даже нет статьи о Н. Н. Ченцове и практически отсутствует статья об информационной геометрии. Как написано в статье «Категория: Информационная геометрия» в Википедии «У этой категории нет основной статьи “Информационная геометрия”».

Основной геометрической структурой, изучаемой в информационной геометрии, является дивергенция (или информационное уклонение одной вероятностной меры от другой). С дивергенцией связывается риманова метрика g, называемая метрикой Фишера—Рао, и линейная связность без кручения ∇, введенная Ченцовым, для которой $S = \nabla g$ есть симметрическая 3-форма (тензор Амари—Ченцова). В этом случае сопряженная связность ∇^* тоже не имеет кручения. Пара (g, ∇) называется статистической структурой, а многообразие M со статистической структурой — статистическим многообразием. Если при этом связность является плоской, то (M, g, ∇) называется гессиановым многообразием или иначе дуально плоским многообразием. В этом случае в локальных плоских координатах метрика $g = \partial^2 f(x) = \mathrm{Hess}(f(x))$ есть гессиан некоторой функции.

6.2. Базовые понятия информационной геометрии: дивергенция, метрика Фишера—Рао, связность Ченцова. Дивергенция является гладкой неотрицательной функцией $\mathcal{D}(x, y)$ пары точек многообразия M, обращающейся в нуль только на диагонали так, что точки диагонали являются трансверсально невырожденными точками минимума. Чтобы дать более развернутое определение, введем следующие обозначения.

Многообразие M с локальными координатами x^i мы будем отождествлять с диагональю $M = \{y = x\}$ декартова квадрата $M \times M = \{(x, y)\}$ с локальными координатами $(x^i; y^j)$. Частные производные функции $f(x, y) \in C^\infty(M \times M)$ обозначаются

$$\partial_i f = f_{,i} \coloneqq \partial_{x^i} f, \quad \bar{\partial}_j f = f_{,\bar{j}} \coloneqq \partial_{y^j} f.$$

Положим $\partial f \coloneqq (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$; $\bar{\partial} f \coloneqq (\bar{\partial}_1 f, \dots, \bar{\partial}_n f)$. Если неотрицательная функция $f(x, y)$ обращается в нуль на M, то $\partial f|_M = \bar{\partial} f|_M = 0$ и матрица вторых частных производных

$$\mathrm{Hess}(f)|_M = \partial^2 f|_M = \bar{\partial}^2 f\_M = -\partial\bar{\partial} f|_M \geqslant 0$$

определяет симметрическую неотрицательно определенную симметрическую билинейную форму (гессиан) $g = \partial^2 f|_M$ на многообразии M.

Определение 10. Дивергенция, или информационное уклонение есть неотрицательная функция $\mathcal{D}(x, y)$ пары точек многообразия M, которая обращается в нуль только на диагонали $M \subset M \times M$ и имеет в точках диагонали положительно определенный гессиан $g = \partial^2 \mathcal{D}|_M$, т.е. риманову метрику

$$g = g_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad g_{ij} = -\partial_i \bar{\partial}_j \mathcal{D}(x, x),$$

которая называется метрикой Фишера—Рао.

Частные производные метрики

$$\Gamma_{jk.m}(x) \coloneqq \mathcal{D}_{,jk\bar{m}}(x, x), \quad \Gamma^*_{jk.m}(x) \coloneqq \mathcal{D}_{,\bar{j}\bar{k}m}(x, x).$$

задают пару сопряженных связностей

$$\nabla = \nabla^g + C, \quad \nabla^* = \nabla^* + C$$

без кручения с символами Кристоффеля

$$\Gamma^i_{jk} = g^{im} \Gamma_{jk.m}, \quad (\Gamma^*)^i_{jk} = g^{im} \Gamma^*_{jk.m}.$$

Сопряженность означает, что

$$Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Симметрическая 3-форма

$$S = \nabla g = g \circ C = g_{ij} C^i_{k\ell}$$

называется тензором Амари—Ченцова.

Определение 11. Статистическим многообразием называется риманово пространство (M, g) со связностью $\nabla = \nabla^g + C$ без кручения с симметрической 3-формой $\nabla g = g \circ C$. Здесь ∇^g — связность Леви-Чивиты.

В этом случае сопряженная связность $\nabla^* = \nabla - C$ тоже не имеет кручения. Дивергенция определяет на M структуру статистического многообразия. Статистическое многообразие называется гессиановым (иди дуально плоским), если связность ∇ (а значит, и сопряженная связность ∇^*) плоские.

6.3. Примеры статистических многообразий. Приведем два важных примера статистических многообразий, связанных с самосопряженным конусом $\mathcal{P}(n)$ положительно определенных матриц. Их обобщению на другие однородные выпуклые конуса посвящена большая литература, см., например, [10, 20, 25].

Пример 1 (конус гауссовых нормальных распределений)**.** Стандартная мультивариативная нормальная гауссова мера в евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, g_0)$ имеет вид

$$\gamma_0|dx| = (2\pi)^{n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)|dx|, \quad |x|^2 = g_0(x,x),$$

где $|dx|$ — мера Лебега, а $\gamma_0 = (2\pi)^{n/2}\exp(-|x|^2/2)$ — стандартное гауссово распределение.

Связная аффинная группа $\mathrm{Aff}_n^+ = \{A = (L, a),\ x \mapsto Ax + a\}$ действует транзитивно в конусе $\mathcal{P}(n)$ евклидовых метрик по формуле

$$A^*(g)(x,x) = g_L(x,x) := g(L^{-1}x, L_x^{-1}) = g((LL^*)^{-1}x, x) = g(S^{-2}x, x) = xS^{-2}x^t,$$

где $S := (LL^*)^{1/2} > 0$. Это действие продолжается до транзитивного действия $T_A = T_{(L,a)}$ аффинной группы в пространстве $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ гауссовых распределений по формуле

$$T_A\gamma_0 = \gamma_A = (A^{-1})^*\gamma_0 := \frac{1}{2\pi^{n/2}\det S}\exp\left(-(x-a)S^{-2}(x-a)^t\right) = \\ = \frac{1}{2\pi\sigma^{n/2}}\exp\left(-\frac{(x-a)S_0^{-2}(x-a)^t}{2\sigma^2}\right),$$

где

$$L = \sigma L_0, \quad \det L_0 = 1, \quad S = \sigma S_0, \quad S^2 = LL^* = \sigma^2 L_0 L_0^* = \sigma_2 S_0^2.$$

Отображение

$$\mathcal{N} \ni \gamma_A \mapsto \hat{A} = (\det S)^{-2/(n+1)}\begin{pmatrix} S^2 + a\otimes a^t & a \\ a^t & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{P}(n+1)_1 \subset \mathcal{P}(n+1).$$

есть Aff_n^+-эквивариантный диффеоморфизм многообразия $\mathcal{N} = \mathrm{Aff}_n/SO(n)$ гауссовых распределений на характеристическую (детерминантную) Aff_n-инвариантную гиперповерхность

$$\mathcal{P}(n+1)_1 = \{X \in \mathcal{P}(n+1),\ \det X = 1\}$$

однородного конуса $\mathcal{P}(n+1) = GL(n+1)/SO(n+1)$ положительно определенных матриц. Действие группы Aff_n определяется вложением $\mathrm{Aff}_n \to SL(n+1, \mathbb{R})$:

$$A = (L, a) \mapsto \hat{A} = (\det L)^{\frac{-1}{n+1}}\begin{pmatrix} L & a \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, многообразие гауссовых распределений отождествляется с детерминантной гиперповерхностью $\mathcal{P}(n+1)_1 = SL(n+1, \mathbb{R})/SO(n+1)$ и транзитивное действие группы Aff_n продолжается до действия группы $SL(n+1, \mathbb{R})$. Однородное пространство $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = SL(n+1)/SO(n+1)$ является неприводимым симметрическим пространством. Геодезические этого пространства хорошо известны. Пусть

$$X = A\Lambda A^{-1} \in \mathcal{P}(n+1)_1, \quad A \in SO(n+1),$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{P}(n+1)$ — матрица из собственных чисел λ_i матрицы $X \in \mathcal{P}(n+1)_1$. Тогда геодезическая из единичной матрицы, проходящая через точку X, имеет вид

$$\gamma(t) = A\Lambda(t)A^{-1}, \quad \Lambda(t) := \operatorname{diag}\left(e^{t\log\lambda_1}, \dots, e^{t\log\lambda_{n+1}}\right).$$

Пример 2 (многобразие распределений Висхарда (Whishart distributions, 1928))**.** Пусть $M = \mathcal{P}(n)$ — конус положительно определенных матриц. Для фиксированного числа $m \geqslant n$ пространство распределений Висхарда $\mathcal{N}^m$ отождествляется с конусом $\mathcal{P}(n)$. Распределение, ассоциированное с $V \in \mathcal{P}(n)$, есть

$$P_V(X) := c(V,m)|X|^{m-n-1}\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr} V^{-1}X\right).$$

Пусть Y — $(m\times n)$-матрица, строки которой $Y_1, \dots, Y_m \in \mathbb{R}^n$ суть независимые случайные векторы с нормальным законом распределения с нулевым средним. Распределение Висхарда описывает распределение дисперсии

$$X = \sum_{i-1}^{m} Y_i^t Y_i$$

случайной матрицы Y. Распределения Висхарда обобщаются на другие однородные выпуклые конусы (см. [10]).

6.4. Проблема построения канонической дивергенции на статистическом многообразии. Каждое статистическое многообразие (M, g, ∇) обладает дивергенцией $\mathcal{D}(x,y)$, которая порождает статистическую структуру (g,∇), но такая дивергенция не единственна. Имеется несколько конструкций канонической дисперсии. Отметим работы [18, 19], в которых для любого статистического многообразия (M, g, ∇) строятся две канонических дивергенции D, D^*, таких, что $D^*(p,q) = F(D(q,p))$, где F — некоторая функция. Если статистическое многообразие являеися симметрическим, т. е. его ковариантный тензор кривизны R ковариантно постоянен ($\nabla R = 0$) и удовлетворяет условию

$$R(X,Y,Y,Y) = 0 \quad \forall X, Y \in TM,$$

то $D^*(p,q) = D(q,p)$.

Приведем примеры дивергенций. *Дивергенция Брегмана* (Bregman divergence) выпуклой функции φ в $V = \mathbb{R}^n$ задается формулой

$$D_\psi(\xi :, \xi_0) := \psi(\xi) - \psi(\xi_0) - d\psi(\xi_0)(\xi - \xi_0).$$

Дивергенция Кульбака—Лейблера (Kulbach–Leibler divergence) или относительная энтропия между двумя вероятностными распределениями $p(x)$, $q(x)$ задается формулой

$$D_{KL}(p(x), q(x)) = -\int p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}.$$

6.5. Преобразование Лежандра. Напомним, что преобразование Лежандра сопоставляет выпуклой функции $f(x)$ в области U векторного пространства V сопряженную выпуклую функцию $f^*(\xi)$ в некоторой области $D^* \subset V^*$ сопряженного пространства V^*. Она задается следующим образом. Отображение $D \ni x \mapsto x^* = \partial f(x) = df(x) \in D^* \subset V^*$ есть диффеоморфизм. Сопряженная функция имеет вид

$$f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - f(x) = \sup_{x_1\in D}\left[\langle \xi, x_1\rangle - f(x_1)\right] \tag{3}$$

где $x = x(x^*)$. Дифференцируя (3), получаем

$$\partial f^*(x^*) = x + x^*\frac{\partial x}{\partial x^*} - \partial f(x)\frac{\partial x}{\partial x^*} = x.$$

Отсюда следует, что гессиан

$$\operatorname{Hess} f^*(x^*) = \partial^2 f^*(x^*) = \frac{\partial x(x^*)}{\partial x^*}$$

положителен как обратная матрица к гессиану $\partial x^*(x)/\partial x$.

6.6. Выпуклые конусы как гессиановы многообразия, экспоненциальные семейства и характеристическая функция Винберга. Пусть $\mathcal{V} \subset V$ — выпуклый конус в пространстве $V = \mathbb{R}^n$ со стандартными декартовыми координатами ξ_i и $\mathcal{V}^* \subset V^*$ — сопряженный конус с двойственными координатами x^i, так что $(\xi, x) = \xi_i x^i$. Пусть

$$\varphi(\xi) = \int\limits_{\mathcal{V}^*} e^{-\langle \xi, x\rangle} d\xi$$

— характеристическая функция конуса $\mathcal{V}$. Точка $\xi \in \mathcal{V}$ определяет инвариантную вероятностную меру в конусе $\mathcal{V}^*$ с плотностью

$$p(x,\xi) = p_\xi(x) = \frac{e^{-\langle \xi, x\rangle}}{\varphi(\xi)}.$$

Таким образом конус $\mathcal{V}$ задает семейство вероятностных мер в конусе $\mathcal{V}^*$. Это семейство называется экспоненциальным семейством и является одним из самых популярных статистических многообразий, возникающих в статистике. Как отметил С.-И. Амари (см. [9]), экспоненциальное семейство статистических распределений «не только является типичной статистической моделью, включающей многие хорошо известные семейства вероятностных распределений, такие как дискретное распределение, распределение Гаусса, мультинормальное распределение, гамма распределение и т. д., но и ассоциируется с выпуклой функцией, известной как кумулятивная порождающая функция или свободная энергия».

Положим $\psi(x) = -\log \varphi(x)$. Тогда канонический $\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$-инвариантный диффеоморфизм Винберга записыывается в виде

$$*\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*, \quad \xi \mapsto \xi^* := d\psi(\xi) = \int\limits_{\mathcal{V}} \xi p_\xi(x) dx = E([\xi]).$$

где $\xi^* = d\psi(\xi)$ есть форма Кошуля. Таким образом, $\eta(\xi) = \xi^*$ есть математическое ожидание случайной величины ξ на конусе $\mathcal{V}^*$ с распределением $p_\xi(x)$. Как показал Сасаки, это отображение эквивариантно относительно группы проективных преобразований, сохраняющих $\mathcal{V}$, а значит, и $\mathcal{V}^*$.

Координаты η^i точки $\eta(\xi) \in \mathcal{V}^*$ образуют систему координат сопряженного конуса $\mathcal{V}^*$. Они называются естественными или каноническими параметрами экспоненциального семейства.

Покажем (см. [9]), что преобразование Лежандра $\epsilon(\eta) = (\psi)^*(\eta)$ функции $\psi = -\log\varphi$ есть энтропия $-E(\log p_\xi(x))$ распределения p_ξ. Имеем

$$-E([\log p_{xi}(x)]) = -\int\limits_{\mathcal{V}} p_\xi(x) \log p_\xi(x) dx = \int\limits_{\mathcal{V}} p_\xi(x)[(x,\xi) - \psi(\xi)]dx = (\xi,\eta) - \psi(\xi)) = \psi^*(\eta).$$

Здесь $\eta(\xi) = d\psi(\xi)$ и $\xi = \xi(\eta) = d\epsilon(\eta) = d\psi^*(\eta)$ — обратное преобразование Лежандра.

Заметим также, что дивергенция Брегмана $D_\psi(\eta, \eta')$ совпадает с дивергенцией Кульбака—Лейблера $D_{KL}(p_{\eta'}, p_\eta)$ и имеет вид

$$D_\psi(\xi', \xi) = \psi(\theta') - \psi(\theta) - (\eta, \xi' - \xi) = \int\limits_{\mathcal{V}} p(x,\xi) \log \frac{p(x,\xi)}{p(x,\xi')} dx = D_{KL}(\xi, \xi').$$

Каноническая метрика совпадает с метрикой Фишера и имеет вид

$$g^{\mathrm{can}} = \partial^2 \phi(\xi) = \partial \int\limits_{\mathcal{V}^*} \xi \partial(p(x,\xi)) d\xi = \int\limits_{\mathcal{V}^*} \xi \otimes \xi p(x,\xi) - \left(\int\limits_{\mathcal{V}^*} \xi p(x,\xi) \right)^2 = E\big([\xi \otimes \xi]\big) - E\big([\xi]\big)^2 = \mathrm{Var}(\xi).$$

6.7. Применения в выпуклом программировании. Основная проблема выпуклого программирования (или выпуклой оптимизации) состоит в нахождении минимум выпуклой функции $F(X)$, $X \in V = \mathbb{R}^n$ в выпуклой области $D \subset V$.

Итерационный метод Ньютона состоит в движении шагами в сторону минимума. Шаг Ньютона $X_0 \to X_1$ состоит в аппроксимации функции $F(X)$ в окрестности точки X_0 квадратичной функцией $F(X)_2$ (отрезком ряда Тейлора) и сдвигу в сторону минимума этой квадратичной функции:

$$X_0 \mapsto X_1 = X_0 + t\Delta X_0, \quad \Delta X_0 = -(\operatorname{Hess} F(X))^{-1}\nabla F(X).$$

Проблема состоит в том, что итерация может уводить на границу области. Чтобы этого избежать, надо модифицировать функцию $F(X)$, прибавив к ней барьерную функцию $B(X)$, которая велика в окрестности границы и не меняет минимума функции $F(X)$.

Пример 3 (положительное полуопределенное программирование). Задача состоит в нахождении минимума выпуклой функции $F(X)$ в конусе $\mathcal{P}(n)$ положительно определенных матриц или, более общо, в сечении этого конуса плоскостью $\Pi = \{X, \operatorname{tr} A_1 X = b_1, \dots, \operatorname{tr} A_m X = b_m\}$ коразмерности m. Такая проблема возникает, например, в теории управления [9, 25]. В этом случае барьерной функцией является логарифм характеристической функции

$$B(X) = -\log\det X = 2\log\varphi(X),$$

где $\varphi(X)$ характеристическая функция Винберга, см. [12].

6.8. Применения в теории дифференциальных уравнений. Характеристические гиперповерхности $\varphi = \mathrm{const}$ однородного выпуклого конуса являются однородными аффинными гиперсферами гиперболического типа (средняя кривизна есть отрицательная константа) и все такие гиперсферы исчерпываются характеристическими гиперповерхностями. Характеристическая функция φ есть решение уравнения Монжа—Ампера. Ченг и Яу (см. [13]) развили общую теорию уравнений Монжа—Ампера в выпуклых конусах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Винберг Э. Б.* Теория однородных выпуклых конусов// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1963. — *12.* — С. 303–358.
2. *Кульбак С.* Теория информации и статистика. — М.: Наука, 1967.
3. *Ченцов Н. Н.* Избранные труды. — М.: Ин-т прикл. мат. им. М. В. Келдыша РАН, 2002.
4. *Алексеевский Д. В.* Классификация кватернионных пространств с транзитивной разрешимой группой движений// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — *39*, № 2. — С. 315–362.
5. *Alekseevsky D. V., Cortes V.* Classification of N-(super)-extended Poincare algebras and bilinear invariants of the spinor representation of $\mathrm{Spin}(p,q)$// Commun. Math. Phys. — 1997. — *183*, № 3. — P. 477–510.
6. *Alekseevsky D. V., Cortes V.* Geometric construction of the r-map: from affine special real to special Kähler manifolds// Commun. Math. Phys. — 2009. — *291*, № 2. — P. 579–590.
7. *Alekseevsky D. V., Cortes V., Mohaupt T.* Conification of Kähler and hyper-Kähler manifolds// Commun. Math. Phys. — 2013. — *324*, № 2. — P. 637–655.
8. *Alekseevsky D. V., Cortes V., Dyckmanns M., Mohaupt T.,* Quaternionic Kähler metrics associated with special Kähler manifolds// J. Geom. Phys. — 2015. — *92.* — P. 271–287.
9. *Amari S.* Information Geometry and Its Applications. — Springer, 2016.
10. *Andreson S. A., Wojnar G. G.* Wishard distributions on homogeneous cones// J. Theor. Probab. — 2004. — *17.* — P. 781–818.
11. *Atiah M. F., Bott R., Shapiro A.* Clifford modules// Topology. — 1964. — *3.* — P. 3–38.
12. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
13. *Cheng C.-Y., Yau S. T.* Complete affine hypersurfaces. I. The completeness of affine metrics// Commun. Pure Appl. Math. — 1986. — *34.* — P. 839–866.
14. *Cortés V.* Alekseevskian spaces// Differ. Geom. Appl. — 1996. — *6*, № 2. — P. 129–168.
15. *Cortés V.* Homogeneous special geometry// Transform. Groups. — 1996. — *1*, № 4. — P. 337–373.
16. *Cortés V., Dyckmanns M., Jüngling M., Lindemann D.* A class of cubic hypersurfaces and quaternionic Kahler manifolds of co-homogeneity one/ `arXiv: 1701.07882 [math.DG]`.
17. *de Wit B., Van Proeyen A.* Special geometry, cubic polynomials and homogeneous quaternionic spaces// Commun. Math. Phys. — 1992. — *149.* — P. 307–333.
18. [F-A]*Felice D., Ay N.* Divergence functions in information geometry/ `arXiv: 1903.02379 [math.DG]`.
19. *Felice D., Mancini S., Ay N.* Canonical divergence for measuring classical and quantum complexity/ `arXiv: 1903.09797 [math.ph] ArXiv 1903.09797, p17..`

20. *Forrester P. J.* Octonions in random matrix theory// Proc. Roy. Soc. A. Math. Phys. Eng. Sci. — 2017. — *A473.* — 2016080.
21. *Freedman D. Z., van Proeyen A.* Supergravity. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012.
22. *Ishi H.* Homogeneous cones and their applications to statistics// in: Modern Methods of Multivariate Statistics. — Paris: Hermann, 2014. — P. 135–154.
23. *Lovrić M., Min-Oo M., Ruh E. A.* Multivariate normal distributions parametrized as a Riemannian symmetric space// J. Multivar. Anal. — 2000. — *74*, № 1. — P. 36–48.
24. *Nielsen F., Garcia V.* Statistical exponential families: A digest with flash cards/ `arXiv: 0911.4863v2 [cs.LG]`.
25. *Ohara A.* Geodesics for dual connections and means on symmetric cone// Integral Equations Operator Theory. — 2004. — *50.* — P. 537–548.

Алексеевский Дмитрий Владимирович
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва;
University of Hradec Králové, Czech Republic
E-mail: `dalekseevsky@iitp.ru`