



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 220 (2023). С. 86–98
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-220-86-98

УДК 514.113, 515.12

КРИТЕРИИ ПРЯМОЛИНЕЙНОСТИ КРИВОЙ

© 2023 г. И. В. ПОЛИКАНОВА

Аннотация. Установлены следующие критерии прямолинейности кривой:

1. Кривая в аффинном n -мерном пространстве прямолинейна тогда и только тогда, когда всякая её хорда имеет со стягиваемой ею дугой общую точку, отличную от их общих концов.
2. Кривая в евклидовом 3-мерном пространстве прямолинейна тогда и только тогда, когда всякие две её ориентированные дуги подобны.
3. Спряmlяемая кривая в евклидовом n -мерном пространстве прямолинейна тогда и только тогда, когда всякие две её ориентированные дуги подобны.

Ключевые слова: критерии прямолинейности кривой, кривая с подобными дугами, прямая линия, фрактальная кривая, кривая с аффинно эквивалентными дугами.

CRITERIA FOR THE STRAIGHTNESS OF A CURVE

© 2023 I. V. POLIKANOVA

ABSTRACT. The following three criteria for the straightness of the a are proved:

1. A curve in an affine n -dimensional space is rectilinear if and only if each of its chords has a common point with the arc contracted by it, which is different from their common ends.
2. A curve in a Euclidean 3-dimensional space is rectilinear if and only if any two of its oriented arcs are similar.
3. A rectifiable curve in a Euclidean n -dimensional space is rectilinear if and only if any two of its oriented arcs are similar.

Keywords and phrases: criterion for the straightness of a curve, curve with similar arcs, straight line, fractal curve, curve with affine equivalent arcs.

AMS Subject Classification: 53A04, 54A05

1. Введение. При том, что на свойствах прямой основана вся планиметрия со стереометрией, критериев прямолинейности кривой не так уж и много. И, хотя многие утверждения о геометрических местах точек, представляющих собой прямую, можно переформулировать в виде критериев, следует подчеркнуть, что они относятся к множеству точек, находящихся во взаимном отношении к другим основным объектам — прямым и плоскостям, подчиняющимся системе аксиом. Чаще всего свойства прямой, некоторые из которых могут служить её критериями, обнаруживаются при разработке новых разделов математики. Так, в аналитической геометрии весьма эффективен критерий прямой как алгебраической линии 1-го порядка на плоскости, получивший обобщение в n -мерном аффинном пространстве A^n через представление кривой в виде трансверсального пересечения $n - 1$ гиперплоскостей с соответствующим аналитическим заданием. Математический анализ выявил, что прямая на плоскости является графиком линейной функции. Дифференциальная геометрия описывает прямую как кривую нулевой кривизны во всех точках и геодезическую в евклидовом пространстве, вариационное исчисление — как экстремаль функционала длины при натуральной параметризации в евклидовом пространстве.

Указанные критерии прямолинейности кривой предполагают либо гладкость линии, либо её спрямляемость, а хотелось бы получить характеристику, определяемую исключительно топологическими свойствами кривой, как одномерного связного многообразия в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$. Поиску таких критериев и посвящена данная статья. *Прямолинейность кривой* означает, что она является прямой или её связной частью.

Активное развитие сравнительно новой ветви геометрии — фрактальной, изучающей объекты в евклидовом пространстве, конструктивные части которых подобны между собой, подвигло нас заняться исследованием вопроса о виде кривых, *обладающих свойством подобия дуг*, иначе, *кривых с подобными дугами*. Кривая (синоним «линия») обладает «свойством подобия дуг», если для любых двух ориентированных дуг кривой существует преобразование подобия пространства, отображающее одну дугу на другую с сохранением ориентации, т.е. начало дуги отображается в начало другой дуги, а конец — в конец.

Гипотеза. Единственными линиями в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, обладающими свойством подобия дуг, являются прямые.

В классе спрямляемых кривых данный факт тривиален и составляет содержание теоремы 7. Для неспрямляемых кривых в $\mathbb{E}^n$ гипотеза пока не доказана. Так что ещё остаётся возможность отыскать альтернативу прямой в классе фрактальных кривых, которые, как правило, неспрямляемы (фрактальная кривая «канторова лестница» является спрямляемой кривой длины 2) и имеют дробную размерность [2] (у прямой размерность равна 1). В отличие от прямой, у которой все сегменты подобны между собой, у фрактальных кривых подобны отдельные конструктивные части, хотя и в бесконечном количестве, но не всякие две связные части. Стоит также отметить, что связные части прямой не подобны самой прямой, тогда как у многих фракталов (например, кривая Коха) целое подобно своим конструктивным частям. Впрочем, прямолинейный отрезок подобен своим дугам. Однако существование кривых с подобными дугами, отличных от прямой, представляется нам маловероятным: попытка построить фрактальную кривую в $\mathbb{E}^3$, обладающую свойством подобия дуг, (в процессе доказательства теоремы 8) не увенчалась успехом.

Главный результат. В $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{E}^3$ единственными линиями, обладающими свойством подобия дуг, являются прямые или их связные части.

Методы обоснования — топологические и стереометрические. Основные инструменты:

1. критерий прямолинейности (теорема 6): *кривая в $\mathbb{A}^n$ прямолинейна тогда и только тогда, когда всякая её хорда имеет пересечение с кривой в своей внутренней точке*,
2. теоремы 2–4 о разбиении дуги на конгруэнтные части,
3. теоремы синусов и косинусов для трёхгранных углов.

Обозначения. Точки кривой обозначаются заглавными буквами латинского алфавита; далее: AB — ориентированная дуга с началом A и концом B (точками A и B в случае незамкнутой кривой определена однозначно); иногда удобно обозначать дугу AB , содержащую точки $K, \dots, L$, через $A(K \dots L)B$, если точки записаны в естественном порядке следования на кривой:

$$A - K - \dots - L - B;$$

тем же способом обозначается и прямая, проходящая через точки A и B , что всякий раз оговаривается; $[AB]$ — прямолинейный отрезок с концами A, B ; (AB) — луч с вершиной A , проходящий через точку B ; $|AB|$ — длина отрезка $[AB]$; (ABC) — плоскость, проходящая через неколлинеарные точки A, B, C .

Подобием с коэффициентом $k > 0$ называется преобразование f пространства $\mathbb{E}^n$ такое, что $|f(A)f(B)| = k \cdot |AB|$ для любой пары точек A и B . Подобие с коэффициентом $k = 1$ называется *движением*. Подобия и движения являются гомеоморфизмами пространства $\mathbb{E}^n$ на себя. В дальнейшем преобразование подобия пространства будем называть кратко подобием. Множество F называется *конгруэнтным* множеству G , если F является образом G при некотором движении, обозначим $F \cong G$. Конгруэнтность множеств является отношением эквивалентности. Поэтому допустима запись $F \cong G \cong H$. Конгруэнтные отрезки, углы, треугольники будем обозначать более привычным нам знаком равенства и называть равными.

2. Теоремы о разбиении дуги на конгруэнтные части. В данном разделе с помощью теоремы 1 о компактных множествах устанавливается единственность разбиения дуги на n конгруэнтных частей при условии, что такое разбиение существует (теорема 2). Далеко не всякая дуга допускает разбиение на конгруэнтные части. Однако, если такое разбиение существует, то и любая подобная ей дуга разбивается на такое же количество конгруэнтных дуг (теорема 3). Данные результаты установлены автором ранее [3] в связи с исследуемым вопросом.

Условимся обозначать строгое и нестрогое включения соответственно $\subset$ и $\subseteq$.

Теорема 1. *Никакое множество в $\mathbb{E}^n$ не конгруэнтно собственному компактному подмножеству.*

Доказательство. Предположим противное: существуют в $\mathbb{E}^n$ множества X , Y такие, что X — компактно, $X \subset Y$ и $Y = f(X)$ при некотором движении f . Выберем произвольно точку $y \in Y \setminus X$. В силу компактности X нижняя грань расстояний $r = \inf_{x \in X} |xy|$ положительна. Множество Y — компактно, будучи образом компактного множества X при непрерывном отображении, каким является движение f . Поэтому из всякого его покрытия открытыми шарами с радиусами $r/2$ можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть n — минимальное число шаров с радиусами $r/2$, достаточное для покрытия множества Y и $\Omega = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ — одно из таких покрытий:

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i.$$

Так как $X \subset Y$, то данное семейство шаров будет являться покрытием и для X . Существует шар $B_j \in \Omega$, содержащий точку y и, значит, целиком содержащийся в открытом шаре с центром y радиуса r . Ввиду определения числа r шар B_j не имеет общих точек с множеством X . Поэтому, удалив его (и другие, не пересекающиеся с X шары) из семейства Ω , получим покрытие множества X шарами (при соответствующей перенумерации) $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$:

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_i,$$

где $m < n$. Тогда $Y = f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^m f(B_i)$. При движении открытые шары отображаются в открытые шары того же радиуса. Поэтому последнее соотношение означает, что множество Y покрывается семейством открытых шаров $\{f(B_1), f(B_2), \dots, f(B_m)\}$ с радиусами $r/2$, причём в количестве меньшем, чем n . Полученное противоречие доказывает ложность допущения. $\square$

В дальнейшем под *кривой* понимаем одномерное связное многообразие, вложенное в аффинное пространство, *дуга* кривой — образ числового промежутка $[a, b]$ при его вложении в кривую, *хорда* — произвольный отрезок с концами, принадлежащими кривой, возможно, пересекающий кривую в нескольких точках.

Пусть гомеоморфизм $\varphi: [a, b] \rightarrow \gamma$ задаёт дугу AB на кривой γ . Всякий набор чисел $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ таких, что $a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < b$, определяет $n - 1$ внутренних точек $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ на γ и однозначно определяет n дуг $\check{a}_i = A_{i-1}A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ($A_0 = A$, $A_n = B$), получающих естественный порядок на γ и обладающих тем свойством, что $\check{a}_i \cap \check{a}_{i+1} = A_i$, $\check{a}_i \cap \check{a}_j = \emptyset$ при $|i - j| > 1$. В этом случае будем говорить о *разбиении дуги AB точками $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ на части или дуги* и записывать $AB = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n$.

Предложение 1. *Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ — два набора внутренних точек дуги с концами $A_0 = B_0$ и $A_n = B_n$, разбивающих её на n частей, и существует номер i , для которого $A_i \neq B_i$. Тогда найдутся номера $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что $A_{i-1}A_i \subset B_{j-1}B_j$.*

Доказательство. Пусть наборы чисел $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ и $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ числового промежутка $[a, b]$ определяют разбиения $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ дуги AB на n частей. Полагаем: $a = t_0 = s_0$ и $b = t_n = s_n$. Докажем индукцией по числу внутренних точек, что найдутся номера $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что $[t_{i-1}, t_i] \subset [s_{j-1}, s_j]$.

$n - 1 = 1$. Тогда $t_1 \neq s_1$. Значит, либо $t_1 < s_1$, либо $t_1 > s_1$. В первом случае $[t_0, t_1] \subset [s_0, s_1]$. Во втором случае $[t_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$. Утверждение доказано.

Пусть утверждение справедливо для числа точек $k < n - 1$ при $n > 2$. Докажем утверждение для двух наборов, состоящих из $n - 1$ внутренних точек $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ и $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$. Если $t_1 < s_1$, то $[t_0, t_1] \subset [s_0, s_1]$. Если $t_1 = s_1$, то для промежутка $[t_1, b]$ и двух наборов внутренних точек $t_2, \dots, t_{n-1}$ и $s_2, \dots, s_{n-1}$ согласно индукционному предположению найдутся номера $i, j \in \{2, \dots, n\}$ такие, что $[t_{i-1}, t_i] \subset [s_{j-1}, s_j]$. Утверждение доказано. Пусть теперь $t_1 > s_1$. Рассмотрим на промежутке $[s_1, b]$ два набора внутренних точек: $t_2, \dots, t_{n-1}$ и $s_2, \dots, s_{n-1}$. Если для всех $i \in \{2, \dots, n\}$ справедливы равенства $t_i = s_i$, то $[t_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$, и утверждение доказано. Если же существует номер $i \in \{2, \dots, n - 1\}$, для которого $t_i \neq s_i$, то по индукционному предположению найдутся номера $i, j \in \{2, \dots, n - 1\}$ такие, что либо $[t_i, t_{i+1}] \subset [s_j, s_{j+1}]$, либо $[s_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$. Так как $t_1 \in [s_1, t_2]$, то последнее включение влечёт: $[t_1, t_2] \subset [s_1, s_2]$. Доказано.

Утверждение для дуг следует из доказанного выше ввиду инъективности вложения числового отрезка $[a, b]$ в линию. $\square$

Замечание 1. Так как оба набора точек в предложении 1 равноправны, то при тех же условиях найдутся номера $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что $B_{k-1}B_k \subset A_{l-1}A_l$.

Будем говорить, что дуга AB разбивается точками $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ на n конгруэнтных частей (дуг), если её разбиение $AB = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n$ этими точками на части обладает свойством: $\check{a}_i \cong \check{a}_j$ для всех $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема 2. Если дуга допускает разбиение на n конгруэнтных частей, то такое разбиение единственно.

Доказательство. Допустим существование двух различных разбиений дуги AB линии γ на n конгруэнтных частей: $\gamma = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n = \check{b}_1 \cup \check{b}_2 \cup \dots \cup \check{b}_n$. Это означает, что определяющие их наборы внутренних точек $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ линии γ не совпадают. По предположению 1 найдутся номера i, j, k, l такие, что $\check{a}_i \subset \check{b}_j$, $\check{b}_k \subset \check{a}_l$. Так как $\check{a}_i \cong \check{a}_l$ и $\check{b}_j \cong \check{b}_k$, то существуют движения f и g такие, что $\check{a}_l = f(\check{a}_i)$ и $\check{b}_j = g(\check{b}_k)$. Тогда справедливо:

$$\check{a}_i \subset \check{b}_j = g(\check{b}_k) \subset g(\check{a}_l) = g(f(\check{a}_i)) = (g \circ f)(\check{a}_i).$$

Получили: $\check{a}_i \subset (g \circ f)(\check{a}_i)$, что противоречит теореме 1. Значит, $A_i = B_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Очевидно, что хорды, стягивающие конгруэнтные дуги, равны. Предложение 1 и теорема 2 остаются верными, если концы дуги AB совпадают.

Теорема 3. Если дуга γ разбивается на n конгруэнтных частей: $\gamma = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n$ и f — подобие, то дуга $f(\gamma)$ также разбивается на n конгруэнтных частей:

$$f(\gamma) = f(\check{a}_1) \cup f(\check{a}_2) \cup \dots \cup f(\check{a}_n).$$

Доказательство. Дуги $\check{b}_i = f(\check{a}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, задают разбиение дуги $f(\gamma)$. Так как $\check{a}_i = g_i(\check{a}_1)$ при некоторых движениях g_i , то

$$\check{b}_i = f(g_i(\check{a}_1)) = f(g_i(f^{-1}(\check{b}_1))) = f \circ g_i \circ f^{-1}(\check{b}_1).$$

Остаётся заметить, что композиция подобий $f \circ g_i \circ f^{-1}$ есть подобие с коэффициентом 1, т.е. движение. Поэтому $\check{b}_i \cong \check{b}_1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, и $f(\gamma) = \check{b}_1 \cup \check{b}_2 \cup \dots \cup \check{b}_n$ является разбиением дуги $f(\gamma)$ на конгруэнтные дуги. $\square$

Для наших целей предпочтительнее иная формулировка теоремы 3:

Точки разбиения дуги на конгруэнтные части при подобном преобразовании отображаются в точки разбиения её образа на конгруэнтные части.

Теорема 4. Дуга, допускающая разбиение на n конгруэнтных дуг, каждая из которых разбивается на m конгруэнтных дуг, разбивается на nm конгруэнтных дуг.

Доказательство. Пусть $\gamma = \check{a}_1 \cup \check{a}_2 \cup \dots \cup \check{a}_n$, где $\check{a}_i = f_i(\check{a}_1)$ при некоторых движениях f_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $\check{a}_i = \check{a}_{i1} \cup \check{a}_{i2} \cup \dots \cup \check{a}_{im}$, где $\check{a}_{ij} \cong \check{a}_{i1}$ при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда набор дуг $(\check{a}_{ij})$ является разбиением дуги γ на nm конгруэнтных частей. Действительно, по

теореме 3 набор дуг $(f_i(\check{a}_{1j}))$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ определяет разбиение дуги $\check{a}_i$ на m конгруэнтных частей. По теореме 2 о единственности разбиения дуги на определённое число конгруэнтных частей $f_i(\check{a}_{1j}) = \check{a}_{ij}$. Значит, $\check{a}_{11} \cong \check{a}_{1j} \cong \check{a}_{ij}$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Если дуга разбивается на nm конгруэнтных частей, то отсюда не следует, что она разбивается на n конгруэнтных частей. Например, если в синусоиде $y = \sin x$, $x \in [0, 4\pi]$, дугу, определённую на $[3\pi, 4\pi]$, заменить на симметричную ей относительно оси Ox , то получим кривую, допускающую разбиение на 4 конгруэнтные дуги, но не на 2 конгруэнтные части.

3. Некоторые критерии прямолинейности кривой. В данном разделе доказывается критерий выпуклости замкнутого множества в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ (теорема 5), использующийся при выводе критериев прямолинейности кривой в аффинном (теорема 6) и евклидовом (теорема 7) пространствах.

Теорема 5. *Для выпуклости замкнутого множества в $\mathbb{A}^n$ необходимо и достаточно, чтобы всякий отрезок с концами, принадлежащими этому множеству, содержал по крайней мере ещё одну точку этого множества.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность условия. Допустим противное: замкнутое множество Ω в $\mathbb{A}^n$, обладающее указанным в теореме свойством, невыпукло. Тогда существует отрезок $[XY]$ с концами в Ω , некоторая точка которого Z не принадлежит множеству Ω . Пусть ϕ — гомеоморфизм числовой прямой $\mathbb{R}$ на прямую $l \subset \mathbb{A}^n$, проходящую через X, Y , определяемый формулой $\phi(\lambda) = \lambda Y + (1 - \lambda)X$. Так как Ω — замкнутое множество в $\mathbb{A}^n$, то $l \setminus \Omega$ — открытое множество в индуцированной топологии на l , а его прообраз при гомеоморфизме ϕ есть открытое множество в $\mathbb{R}$, содержащее число $t = \phi^{-1}(Z)$. Пусть τ — его связная компонента, содержащая t . Известно, что связные компоненты открытого множества в $\mathbb{R}$ представляют собой интервалы (подмножества $\mathbb{R}$ вида (a, b) , возможно $a = -\infty$, $b = +\infty$), концы которых принадлежат его замкнутому дополнению [1, теорема 21, с. 135]. Поскольку $Z \in [XY]$, то $t \in (0, 1)$. Поэтому τ — открытый интервал $(t_1, t_2) \subset (0, 1)$ с концами в $\phi^{-1}(\Omega) \cap [0, 1]$. Тогда прямолинейный отрезок с концами в точках $\phi(t_1) \in \Omega$, $\phi(t_2) \in \Omega$ не содержит других точек множества Ω , что противоречит определению множества Ω . Сделанное допущение ложно, и Ω — выпуклое множество. $\square$

Замечание 4. Теорема 5 обобщает аналогичное утверждение, относящееся к замкнутым множествам в рефлексивных банаховых пространствах [6]. Для незамкнутых множеств утверждение неверно. Например, множество рациональных чисел числового отрезка обладает свойством, что между любыми его двумя рациональными числами содержится рациональное число, однако оно невыпукло.

Теорема 6. *Кривая в $\mathbb{A}^n$ прямолинейна тогда и только тогда, когда всякая её хорда пересекает стягиваемую ею дугу в своей внутренней точке.*

Доказательство. Если кривая прямолинейна, то всякая её хорда совпадает со стягиваемой ею дугой, и их пересечение содержит внутренние точки хорды. Наоборот, всякая дуга кривой, обладающей указанным в теореме свойством, по теореме 5 есть выпуклое множество, а следовательно, является прямолинейным отрезком. Кривая, окрестность каждой точки которой прямолинейна, сама прямолинейна. $\square$

Далее будем рассматривать кривые в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$.

Предложение 2. *Если кривая обладает свойством подобия дуг, то дуги её, стягиваемые равными хордами, конгруэнтны.*

Доказательство. Пусть дуги $\check{a}_1$ и $\check{a}_2$ кривой, обладающей свойством подобия дуг, стягиваются равными хордами. Существует подобие f с коэффициентом k , отображающее дугу $\check{a}_1$ на $\check{a}_2$. При этом концы A_1, B_1 дуги $\check{a}_1$ отображаются в концы A_2, B_2 дуги $\check{a}_2$. Значит,

$$|A_2 B_2| = k \cdot |A_1 B_1|.$$

Поскольку $|A_2B_2| = |A_1B_1|$, то $k = 1$, подобие f является движением, и $\check{a}_1 \cong \check{a}_2$. $\square$

Предложение 3. *Кривая, обладающая свойством подобия дуг, незамкнута.*

Доказательство. Допустим противное: линия γ , обладающая свойством подобия дуг, замкнута, её можно рассматривать как дугу AD , у которой точки A и D совпадают. Возьмём произвольно на ней точки B, C так, что $A - B - C - D$. Тогда, поскольку дуги AB и BD стягиваются одной хордой, по предложению 2 справедливо: $AB \cong BD$. Следовательно, существует точка C' такая, что $A - C' - B$ и $AC' \cong CD$. Поскольку дуги AC и CD стягиваются одной хордой, то $AC \cong CD$. Так как конгруэнтность транзитивна, то $AC' \cong AC$. Пришли к противоречию с теоремой 2. Допущение ложно. $\square$

Точку B назовём *серединой дуги* AC , если дуги AB и BC конгруэнтны.

Предложение 4. *Если кривая обладает свойством подобия дуг, то при любом натуральном числе $m > 1$ всякая её дуга AC допускает разбиение на 2^m конгруэнтных дуг ранга m . Если a — длина хорды $[AC]$ и $\angle ABC = \alpha$, где B — середина дуги AC , то длина каждой из хорд, стягивающей дугу ранга m , равна*

$$\frac{a}{2^m \sin^m \frac{\alpha}{2}}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть B — точка пересечения дуги AC кривой γ , обладающей свойством подобия дуг, с гиперплоскостью, проходящей через середину отрезка $[AC]$ перпендикулярно ему. Тогда $|AB| = |BC|$ и по предложению 2 справедливо: $AB \cong BC$. Это означает, что B — середина дуги AC . Из равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ найдём:

$$|AB| = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

(Если $B \in [AC]$, то $\alpha = \pi$, и формула остаётся верной). Деля тем же способом каждую из дуг ранга $m - 1$ пополам и применяя теорему 4 и математическую индукцию, придём к требуемому утверждению. $\square$

Из предложения 4 и теоремы 2 следует, что всякая дуга AC кривой, обладающей свойством подобия дуг, имеет единственную середину. При $\alpha < \pi/3$ дробь (1) при $m \rightarrow \infty$ стремится к ∞ , что противоречит ограниченности и компактности дуги AC . Тем самым доказано следующее предложение.

Предложение 5. *Если B — середина дуги AC кривой, обладающей свойством подобия дуг, то $\angle ABC \geq \pi/3$.*

Теорема 7. *Спряmlяемая кривая в $\mathbb{E}^n$ прямолинейна тогда и только тогда, когда обладает свойством подобия дуг.*

Доказательство. Если кривая в $\mathbb{E}^n$ прямолинейна, то всякие две её дуги, представляющие собой прямолинейные отрезки, очевидно, подобны. Пусть, наоборот, спрямляемая кривая γ в $\mathbb{E}^n$ обладает свойством подобия дуг. Пусть B — середина её произвольной дуги AC . Всякая дуга спрямляемой кривой сама спрямляема, причём конгруэнтные спрямляемые дуги имеют равные длины. Обозначим общее значение длин конгруэнтных дуг AB и BC за l . Тогда длина дуги AC равна $2l$. Так как дуги AC и AB подобны, а отношение длин подобных дуг равно коэффициенту подобия k , то, следовательно, $k = 2$. С другой стороны, из рассмотрения равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ с углом $\angle ABC = \alpha$ видно, что коэффициент подобия дуг AC и AB равен

$$\frac{|AC|}{|AB|} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \Rightarrow \alpha = \pi.$$

Значит, B — середина хорды $[AC]$. Таким образом, всякая хорда кривой γ пересекает стягиваемую ею дугу в своей середине. По теореме 6 кривая γ прямолинейна. $\square$

Предложение 6. Если какая-либо хорда кривой, обладающей свойством подобия дуг, пересекает стягиваемую ею дугу в своей внутренней точке, то кривая прямолинейна.

Доказательство. Пусть хорда $[AB]$ кривой γ , обладающей свойством подобия дуг, пересекает стягиваемую ею дугу AB в своей внутренней точке C . Так как дуга AB подобна всякой дуге $MN \subset \gamma$, а подобие сохраняет коллинеарность точек и простое отношение трёх точек, то хорда $[MN]$ пересекает дугу MN также в своей внутренней точке. Согласно теореме 6 кривая γ прямолинейна. $\square$

4. Кривые с подобными дугами в $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{E}^3$.

Теорема 8. Кривая в $\mathbb{E}^3$ прямолинейна тогда и только тогда, когда обладает свойством подобия дуг.

Доказательство. Если кривая в $\mathbb{E}^3$ прямолинейна, то всякие две её дуги, представляющие собой прямолинейные отрезки, очевидно, подобны. Остаётся доказать, что кривая γ в $\mathbb{E}^3$, обладающая свойством подобия дуг, прямолинейна. Ввиду предложения 6 достаточно убедиться, что существует хорда, пересекающая стягиваемую ею дугу в своей внутренней точке. Допустим, что это не так, т.е. никакая хорда кривой γ не имеет со стягиваемой ею дугой общих точек, кроме концов.

Пусть AC — произвольная дуга кривой γ , B — её середина, K, M — середины дуг AB и BC соответственно, $\angle ABC = \alpha$. По теореме 4 точки K, B, M разбивают дугу AC на конгруэнтные части. Тогда: $|AK| = |KB| = |BM| = |MC|$, $|AB| = |BC|$. Ввиду допущения, $B \notin [AC]$. Поэтому $0 < \alpha < \pi$.

Случай I. Точки K, M лежат в плоскости (ABC) .

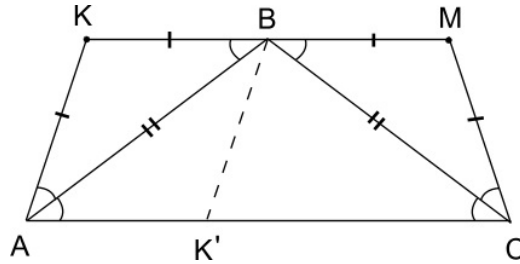


Рис. 1. Случай I.

Поскольку дуга $A(K)B$ подобна дуге $A(B)C$, то по теореме 3 точка K соответствует при этом подобии точке B . Поэтому треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AKB$ подобны и

$$\angle BAC = \angle BCA = \angle KAB = \angle KBA = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Если бы точка K располагалась по ту же сторону прямой AB , что и точка C , то она принадлежала бы лучу $[AC)$ (на рис. 1 она помечена со штрихом). Причём, так как по предположению 5 справедливо неравенство $\alpha \geq \pi/3$, то

$$\angle KBA \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \leq \angle CBA.$$

Значит, точка K либо совпадает с C , либо является внутренней точкой хорды $[AC]$. Но с точкой C она не может совпадать, так как иначе кривая γ имела бы точку самопересечения $C = K$ в противоречии с нашим определением кривой как одномерного многообразия. Также точка K не может быть внутренней точкой хорды $[AC]$ ввиду исходной посылки. Следовательно, точка K расположена по другую сторону прямой AB , чем точка C . Поэтому углы $\angle BAC$ и $\angle KBA$ — равные накрест лежащие при прямых BK, AC и секущей AB . Отсюда вытекает параллельность прямых: $BK \parallel AC$. Аналогично убеждаемся, что $BM \parallel AC$ (рис. 1). Значит, хорда $[KM]$ пересекает дугу KM в точке B — середине $[KM]$, что противоречит исходному допущению. Данный случай невозможен.

Случай II. Точки K, M не лежат в плоскости (ABC) .

Пусть Q, P — середины хорд $[AC]$ и $[MK]$ соответственно. По свойствам кривой γ существует подобие f , отображающее дугу $A(KBM)C$ в дугу $C(MBK)A$. По предложению 2 оно является движением. По теореме 3

$$A \rightarrow C, \quad K \rightarrow M, \quad B \rightarrow B, \quad M \rightarrow K, \quad C \rightarrow A.$$

По свойствам подобия $[AC] \rightarrow [CA]$ и $[KM] \rightarrow [MK]$, откуда $Q \rightarrow Q, P \rightarrow P$. Здесь и в дальнейшем стрелкой $\rightarrow$ обозначаем, во что отображаются точки, отрезки, дуги и прочее при рассматриваемом в данный момент отображении. Таким образом, B, P, Q — неподвижные точки движения f , причём B не совпадает с Q . Множество неподвижных точек нетождественного движения пространства $\mathbb{E}^3$ есть либо плоскость, либо прямая, либо точка, либо пустое множество, в нашем случае — 2 варианта:

II-1 плоскость σ , проходящая через прямую BQ (и точку P), и тогда движение f представляет собой симметрию относительно плоскости σ ;

II-2 прямая BQ , и тогда f является поворотом вокруг BQ на угол $\angle AQC = \pi$, т.е. симметрией относительно оси BQ .

II-1. f — симметрия относительно плоскости σ , содержащей точки B, Q, P . По определению симметрии относительно плоскости, учитывая, что $A \rightarrow C, M \rightarrow K$, можем записать: $[AC] \perp \sigma$ и $[MK] \perp \sigma$. Следовательно, $[AC] \parallel [MK]$. Поэтому $P \notin BQ$, иначе точки K, M лежали бы в плоскости (ABC) , что не соответствует рассматриваемому случаю. Значит, $\sigma = (BPQ)$. Обозначим: $AB = b, \angle ABC = \alpha \geq \pi/3$. Точки A и K лежат по одну сторону плоскости σ , так как иначе дуга AK пересекала бы σ в некоторой своей внутренней точке, являющейся и точкой пересечения симметричной ей дуги CM с σ , и эта точка была бы точкой самопересечения кривой γ , что противоречило бы определению кривой как одномерного многообразия. То же самое можно сказать и про точки C и M (рис. II-1).

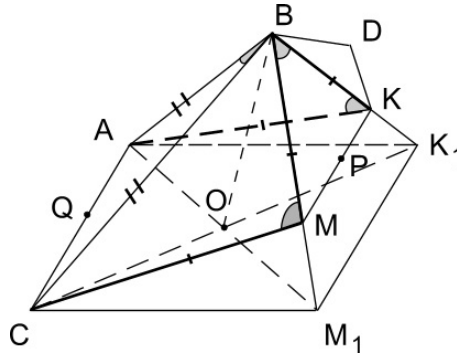


Рис. 2. Случай II-1.

Отложим на лучах $[BK]$ и $[BM]$ от вершины B такие равные отрезки, что

$$|AB| = |BC| = |BK_1| = |BM_1| = b. \quad (2)$$

Так как $[BK] \rightarrow [BM]$ при движении f , то $K_1 \rightarrow M_1$. Пары точек A и C, K и M, K_1 и M_1 симметричны относительно плоскости σ . Поэтому отрезки $[AC], [KM], [K_1M_1]$ параллельны. Так как дуги $A(K)B, K(B)M, B(M)C$ подобны дуге $A(B)C$ (при различных преобразованиях подобия), то по теореме 3

$$\angle ABC = \angle AKB = \angle KBM = \angle BMC = \alpha. \quad (3)$$

Треугольники $\triangle AKB, \triangle KBM, \triangle BMC$ — равнобедренные, с равными боковыми сторонами. Ввиду (3) они равны. Значит, $|MK| = |AB|$ и

$$\angle CAB = \angle ABK = \angle BKM = \angle CBM = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Из (2), (3) видно, что

$$\triangle ABC = \triangle K_1BM_1 \Rightarrow |AC| = |K_1M_1|.$$

Таким образом, четырёхугольник AK_1M_1C — параллелограмм (противоположные стороны $[AC]$ и $[K_1M_1]$ равны и параллельны). Пусть O — ортогональная проекция точки B на плоскость параллелограмма AK_1M_1C . Ввиду (2) боковые рёбра пирамиды BAK_1M_1C равны и проектируются в равные отрезки:

$$|AO| = |CO| = |K_1O| = |M_1O|.$$

Значит, вокруг параллелограмма AK_1M_1C можно описать окружность, поэтому он является прямоугольником, а O — точка пересечения его диагоналей.

Пусть D — середина дуги BK , U — середина дуги BM .

Так как дуги $A(KD)B$ и $M(BD)K$ подобны (а по предложению 2 и конгруэнтны), то по теореме 3

$$A \rightarrow M, \quad K \rightarrow B, \quad D \rightarrow D, \quad B \rightarrow K \Rightarrow (AKB) \rightarrow (MBK), \quad (KDB) \rightarrow (BDK).$$

Поэтому двугранные углы между парами плоскостей (AKB) и (KDB) , (MBK) и (BDK) равны. Из подобия дуг $A(KD)B$ и $A(BM)C$ ввиду конгруэнтностей

$$AK \cong KB, \quad AB \cong BC, \quad KD \cong DB, \quad BM \cong MC,$$

опираясь на теорему 3, выводим:

$$A \rightarrow A, \quad K \rightarrow B, \quad D \rightarrow M, \quad B \rightarrow C \Rightarrow (AKB) \rightarrow (ABC), \quad (KDB) \rightarrow (BMC).$$

Поэтому двугранные углы между парами плоскостей (AKB) и (KDB) , (ABC) и (BMC) равны. Поскольку в пирамиде BAK_1M_1C двугранные углы при боковых рёбрах равны, то двугранный угол между (ABC) и (BMC) равен двугранному углу между (ABK) и (KBM) . Итак, угол между плоскостями (AKB) и (KDB) равен углу между плоскостями (AKB) и (KBM) . Это означает, что либо $D \in (KBM)$, и тогда $U \in (KBM)$, и мы находимся в ситуации случая I при рассмотрении дуги $K(DBU)M$, приводящей к противоречию, либо плоскости (ABK) , (KDB) и (KBM) , пересекающиеся по прямой, содержащей ребро $[BK]$, образуют друг с другом равные тупые углы, составляющие в сумме 2π . Значит, каждый из них равен $2\pi/3$. Получили, что каждая пара плоскостей образует друг с другом пару углов, равных $2\pi/3$ и $\pi/3$. Известно, что сумма двугранных углов выпуклого n -гранного угла больше $(n-2)\pi$. Поэтому сумма четырёх равных двугранных углов четырёхгранного угла с вершиной B в пирамиде BAK_1CM_1 больше 2π . Следовательно, каждый из этих двугранных углов больше $\pi/2$ и равен $2\pi/3$. Покажем, что это невозможно, применив теорему косинусов к трёхгранному углу с вершиной B в пирамиде $BACM_1$. Для этого найдём плоские углы при его вершине B . Из (3) и (4) имеем:

$$\angle ABC = \alpha, \quad \angle M_1BC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Угол $\angle ABM_1$ найдём по теореме косинусов для треугольника $\triangle ABM_1$, предварительно выразив его сторону $|AM_1|$ по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACM_1 :

$$|AM_1|^2 = |AC|^2 + |CM_1|^2.$$

Стороны $|AC|$ и $|CM_1|$ выразим из равнобедренных треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle CBM_1$ соответственно, принимая во внимание (3), (4):

$$|CM_1| = 2|BC| \sin \left(\frac{1}{2} \angle CBM_1 \right) = 2b \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right),$$

$$|AC| = 2|BC| \sin \left(\frac{1}{2} \angle ABC \right) = 2b \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Учитывая, что

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2},$$

запишем:

$$|AM_1|^2 = 4b^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right) + 4b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4b^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 2b^2 \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right).$$

Тогда теорема косинусов для $\triangle ABM_1$ запишется так:

$$|AM_1|^2 = |AB|^2 + |BM_1|^2 - 2|AB| \cdot |BM_1| \cdot \cos(\angle ABM_1)$$

или

$$2b^2 \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) = 2b^2 - 2b^2 \cdot \cos(\angle ABM_1).$$

Отсюда находим

$$\cos(\angle ABM_1) = \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}\right).$$

Запишем теорему косинусов для трёхгранного угла с вершиной B в пирамиде $BACM_1$:

$$\cos(\angle ABM_1) = \cos(\angle ABC) \cdot \cos(\angle M_1BC) + \sin(\angle ABC) \cdot \sin(\angle M_1BC) \cdot \cos \beta,$$

где за β обозначена величина двугранного угла при ребре $[BC]$. Подставляя значения косинусов и синусов углов, получим равенство:

$$\sin \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right). \quad (5)$$

Преобразуем правую часть равенства, применив формулы приведения:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha &= \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = -\sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = \\ &= -\sin \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = -\sin^3 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Тогда формула (5) примет вид

$$\sin \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = -\sin^3 \frac{\alpha}{2} \iff \sin^3 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Так как $\sin(\alpha/2) \neq 0$, то можно поделить обе части равенства на $\sin(\alpha/2)$. Тогда

$$1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow 1 - \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi.$$

Это противоречит допущению, что $B \notin [AC]$.

II-2. f — симметрия относительно оси BQ . Обозначим, как и прежде,

$$AB = b, \quad \angle ABC = \alpha \geq \pi/3.$$

Отложим на лучах $[BK]$ и $[BM]$ от вершины B равные отрезки такие, что выполнены соотношения (2). Так как $[BK] \rightarrow [BM]$ при осевой симметрии f , то $K_1 \rightarrow M_1$. Кроме того, $A \rightarrow C$. По определению осевой симметрии ось BQ перпендикулярна отрезкам $[K_1M_1]$ и $[AC]$ и делит их пополам. Рассматривая подобие дуг $A(K)B$, $K(B)M$, $B(M)C$ и $A(B)C$ (при различных преобразованиях подобия) так же, как в случае II-1, убеждаемся в равенстве равнобедренных треугольников $\triangle АКВ$, $\triangle KBМ$, $\triangle ВМС$ и справедливости (3) и (4). В силу (2) и (3) $\triangle ABC = \triangle K_1BM_1$, а значит, $|AC| = |K_1M_1|$ и равны высоты в этих треугольниках, опущенные из вершины B и лежащие на оси симметрии BQ , а, стало быть, и равные $[BQ]$ — медиане в $\triangle ABC$. Таким образом, равные отрезки $[K_1M_1]$ и $[AC]$ пересекаются в точке Q и делятся ею пополам. Поэтому четырёхугольник AK_1CM_1 является прямоугольником, расположенным в плоскости, перпендикулярной прямой BQ .

Рассмотрим пирамиду BAK_1CM_1 (рис. 3). Пусть V , D , U , W — середины дуг AK , KB , BM , MC соответственно. По теореме 4 точки V , K , D , B , U , M , W разбивают дугу AC на 8 конгруэнтных дуг. Тогда

$$|AV| = |VK| = |KD| = |DB| = |BU| = |UM| = |MW| = |WC|.$$

Применяя рассуждения пункта II-1 к подобным дугам $A(KD)B$ и $M(BD)K$, $A(KD)B$ и $A(BM)C$, приходим к равенству углов между парами плоскостей (AKB) и (KDB) , (ABC) и (BMC) . При осевой симметрии f выполняется: $(ABC) \rightarrow (CBA)$, $(BMC) \rightarrow (BKA)$. Поэтому углы между плоскостями (ABC) и (BMC) равны углам между плоскостями (ABC) и (BKA) . В то же время, в трёхгранном угле с вершиной B в пирамиде BAK_1Q против равных плоских углов

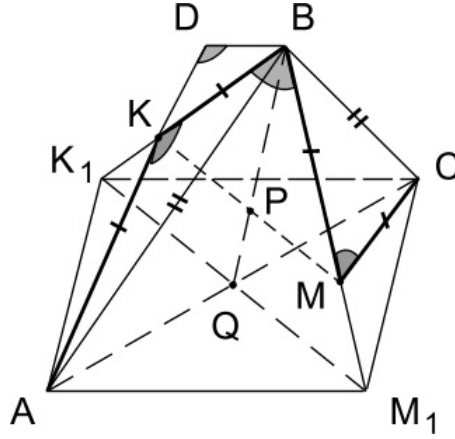


Рис. 3. Случай II-2.

$\angle ABQ$ и $\angle K_1BQ$ лежат равные двугранные углы, что следует из теоремы синусов для трёхгранного угла. Поэтому углы между плоскостями (ABK) и (KDB) равны углам между плоскостями (ABK) и (KBM) . Это означает, что либо $D \in (KBM)$, и тогда по определению осевой симметрии $U \in (KBM)$, и мы находимся в ситуации случая I при рассмотрении дуги $K(DBU)M$, приводящей к противоречию, либо плоскости (ABK) , (KDB) и (KBM) , пересекающиеся по прямой, содержащей ребро $[BK]$, образуют друг с другом равные тупые углы, составляющие в сумме 2π . Значит, каждая из рассмотренных выше пар плоскостей образует друг с другом пару углов в $2\pi/3$ и $\pi/3$. Применим теорему косинусов к трёхгранному углу с вершиной B в пирамиде $BAQK_1$.

$$\cos(\angle ABQ) = \cos(\angle ABK_1) \cdot \cos(\angle QBK_1) + \sin(\angle ABK_1) \cdot \sin(\angle QBK_1) \cdot \cos \beta,$$

где за β обозначена величина двугранного угла при ребре $[BK_1]$, равная, как установлено выше, $2\pi/3$ или $\pi/3$. Подставляя значения косинусов и синусов углов, получим равенство:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\pm \frac{1}{2} \right)$$

или

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

При $\beta = 2\pi/3$ имеем:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \quad \text{или} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi,$$

что противоречит допущению, что $B \notin [AC]$.

При $\beta = \pi/3$ имеем:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi \quad \text{или} \quad \alpha = 2 \arcsin \frac{2}{3}.$$

Противоречие на этом этапе не достигается. Значит, треугольники $\triangle АКВ$ и $\triangle СМВ$ составляют с треугольником $\triangle АВС$ острые углы, равные $\pi/3$, и расположены по разные стороны от него. У нас появляется шанс построить фрактальную кривую, разбив ломаную, полученную на предыдущем шаге (исходная ломаная — ABC), на пары последовательных сторон и заменив каждую из этих пар на уменьшенную копию четырёхзвенной ломаной, подобной $AKBMC$, изображённой на рис. 3 с последующим повторением этой процедуры. Покажем, что данное построение не приводит к успеху. Заметим, что угол между треугольниками, имеющими общее ребро, это угол между определяемыми ими полуплоскостями с общей граничной прямой, содержащей общее ребро, он изменяется в пределах от 0 до π , тогда как угол между плоскостями принято считать изменяющимся от 0 до $\pi/2$. Иными словами, угол между полуплоскостями и угол между плоскостями это не одно и то же. Этот нюанс следует учесть при рассмотрении следующей конструкции.

Рассмотрим развёртку на плоскость ломаной $AVKDBUMWC$, вершины которой осуществляют разбиение дуги AC кривой γ на 8 равных дуг (рис. 44).

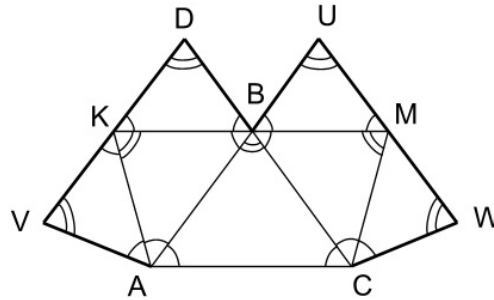


Рис. 4. Развёртка ломаной $AVKDBUMWC$.

Здесь ломаная $AKBMC$ такая же, как на рис. 1, с углом $\angle ABC = 2 \arcsin(2/3)$, а ломаные $AVKDB$ и $BUMWC$ подобны $AKBMC$ с коэффициентом подобия $1/\sin(\alpha/2) = 3/4$. Повернём треугольники 1-го ранга $\triangle AKB$ и $\triangle BMC$ вокруг отрезков $[AB]$ и $[BC]$ соответственно на угол $2\pi/3$ так, чтобы они лежали по разные стороны плоскости (ABC) (как на рис. 3). Так как дуги AB и BC подобны дуге AC , то после этого, чтобы все вершины ломаной встали на свои места на γ , надо будет поворачивать боковые треугольники на угол $2\pi/3$ вокруг их общих сторон с треугольниками 1-го ранга. Попробуем выяснить, в каком направлении надо повернуть треугольники 2-го ранга $\triangle KDB$ и $\triangle MUB$, прилегающие к вершине B . Учитывая, что двугранный угол при ребре $[K_1B]$ в пирамиде BAK_1Q равен $\pi/3$, замечаем, что поворот треугольника $\triangle KDB$ вокруг $[KB]$ на угол $2\pi/3$ в одном направлении поместит его в плоскость (KBM) . А этот случай был отвергнут ранее, как невозможный. Поворот в другом направлении (складывание «гармошкой») приведёт к тому, что двугранный угол, образованный треугольниками $\triangle KDB$ и $\triangle KBM$ будет равен $2\pi/3$. С другой стороны, так как дуга $A(KBM)C$ подобна дуге $K(DBU)M$, то по теоремам 2, 3 при этом отображении

$$\begin{aligned} A \rightarrow K, \quad K \rightarrow D, \quad B \rightarrow B, \quad M \rightarrow U, \quad C \rightarrow M \Rightarrow \\ \Rightarrow \triangle ABC \rightarrow \triangle KBM, \quad \triangle AKB \rightarrow \triangle KDB, \quad \triangle BMC \rightarrow \triangle BUM. \end{aligned}$$

Поэтому треугольники $\triangle KDB$ и $\triangle BUM$ должны составлять с треугольником $\triangle KBM$ углы, равные $\pi/3$. Опять получили противоречие.

Итак, во всех рассмотренных случаях предположение, что никакая хорда кривой γ не пересекает стягиваемую ею хорду в своей внутренней точке, приводит к противоречию. На основании предложения 6 заключаем, что кривая γ прямолинейна. $\square$

Рассуждения, относящиеся к случаю I, применённые к кривой в $\mathbb{E}^2$, приводят к утверждению:

Предложение 7. *Кривая в $\mathbb{E}^2$ прямолинейна тогда и только тогда, когда обладает свойством подобия дуг.*

5. Заключение. Подводя итоги, можно сказать, что проблема определения кривых, обладающих свойством подобия дуг в пространствах $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{E}^3$, полностью решена: все такие кривые прямолинейны. В n -мерном евклидовом пространстве аналогичный результат получен в классе спрямляемых кривых.

Трудности, возникшие при решении данной проблемы, побудили нас обобщить задачу, именно: выявить кривые в аффинном пространстве, всякие две дуги которых аффинно-эквивалентны. Автором доказано [4], что в классе гладких кривых (класс гладкости равен размерности пространства) единственными кривыми с аффинно-эквивалентными дугами являются *эники* разных степеней, т.е. кривые, задаваемые в некоторой аффинной системе координат параметризацией

$$\vec{r} = (t, t^2, \dots, t^k, 0, \dots, 0), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R},$$

и называемые в евклидовом пространстве *кривыми моментов*. Здесь верхние индексы означают степени. Поскольку подобия являются аффинными преобразованиями, то линии с подобными дугами естественно оказываются эниками, и нетрудно обосновать их линейность. Однако жёсткое условие гладкости сводит на нет ценность такого следствия ввиду тривиальности вывода прямолинейности кривой с подобными дугами в классе спрямляемых кривых. Условие гладкости диктуется применяемыми методами исследования. В случае аффинной плоскости гладкость кривой априори не предполагается, но она устанавливается в ходе исследования [5]. Доказано, что единственными кривыми с аффинно-эквивалентными дугами в $\mathbb{A}^2$ являются прямые и параболы. Поскольку последние свойством подобия дуг не обладают, то им обладают только прямые и их связные части. Однако приведённое выше непосредственное доказательство этого факта (случай I теоремы 8) гораздо проще.

Надеемся, что проведённое исследование негладких кривых с подобными дугами в $\mathbb{E}^3$ прольёт свет как на пути решения проблемы кривых с подобными дугами в $\mathbb{E}^n$, так и на решение проблемы кривых с аффинно-эквивалентными дугами в классе негладких кривых хотя бы в $\mathbb{A}^3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — СПб: Лань, 2010.
2. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. — РХД: Ижевск, 2001.
3. Поликанова И. В. О разбиении линии на конгруэнтные части// Тр. Всеросс. молодежн. шк.-семина «Анализ, геометрия и топология». Ч. 1 (Барнаул, 2-4 октября 2013). — Барнаул, 2013. — С. 143–148.
4. Поликанова И. В. О линиях с аффинно-эквивалентными дугами в n -мерном аффинном пространстве// Сиб. мат. ж. — 2022. — 63, № 1. — С. 180–196.
5. Поликанова И. В. О плоских линиях с аффинно-эквивалентными дугами// Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — № 15. — С. 882–889.
6. Стрекаловский А. С. Введение в выпуклый анализ. — Иркутск, 2009.

Поликанова Ирина Викторовна

Алтайский государственный педагогический университет, Барнаул

E-mail: Anirix1@yandex.ru