



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 16–26
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-16-26

УДК 517.9, 532.5, 539.3

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

© 2022 г. П. А. ВЕЛЬМИСОВ, Ю. А. ТАМАРОВА, Ю. В. ПОКЛАДОВА

Аннотация. Рассматриваются начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, представляющие собой математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления», которые предназначены для контроля давления в газожидкостных средах. На основе предложенных моделей исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Для описания динамики рабочей среды и динамики чувствительного элемента используются линейные модели механики жидкости и газа, механики твердого деформируемого тела. Получены дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающие величину перемещения (деформации) чувствительного элемента датчика с законом изменения давления рабочей среды в двигателе. Разработаны аналитические и численные методы решения указанных начально-краевых задач.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, аэрогидроупругость, трубопровод, датчик давления, динамика, метод конечных разностей, метод Галеркина.

ON ONE CLASS OF INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN AEROHYDROELASTICITY

© 2022 P. A. VELMISOV, Yu. A. TAMAROVA, Yu. V. POKLADOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider initial-boundary problems for systems of differential equations, which are mathematical models of the mechanical system “pipeline-pressure sensor” intended for controlling pressure in gas-liquid media. Based on the models proposed, we examine the joint dynamics of the sensitive element of the pressure sensor and the medium in the pipeline. To describe the dynamics of the medium and the dynamics of the sensitive element, we use linear models of fluid and gas mechanics and mechanics of solid deformable bodies. We obtain differential equations with deviating arguments that relate the displacement (deformation) of the sensitive element of the sensor with the pressure law of the medium in the engine. Also, we develop analytical and numerical methods for solving these initial-boundary problems.

Keywords and phrases: differential equation, aerohydroelasticity, pipeline, pressure sensor, dynamics, finite difference method, Galerkin method.

AMS Subject Classification: 35Q35, 35Q74, 65M06

1. Введение. Упругие чувствительные элементы нашли широкое применение в авиационной, ракетно-космической и другой технике в приборах измерения давления различных сред, в топливно-регулирующих системах двигателей, в пилотажно-навигационных приборах и др. Развитие

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, № 19-41-730006).

техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления, характеризующихся экстренными условиями эксплуатации. Датчики измерительных систем, принципы их работы, технические характеристики описываются, например, в работах [1–3, 5, 6, 8, 16, 18, 20, 21, 25, 26].

Все датчики давления независимо от принципа преобразования в той или иной степени критичны к воздействию температур и виброускорений. Вопросам повышению виброустойчивости датчиков, выбору конструкционных и функциональных материалов посвящена работа [9], влияние нестационарной температуры измеряемой среды на погрешность измерения рассмотрено в [22]. Более высокая достоверность измерения обеспечивается размещением датчика давления непосредственно на двигателе, но, как правило, при этом на датчики давления действуют большие диапазоны температур и повышенные виброускорения, что приводит к дополнительной погрешности измерений, и в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика.

Таким образом, возникает задача проектирования механической системы «трубопровод-датчик давления», в которой датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод) и деформацию упругого элемента датчика (расположенного на выходе из трубопровода), и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе. Математические модели системы «трубопровод-датчик давления» в случае несжимаемости рабочей среды рассматривались в работах [10–13, 15, 28–30]. В монографиях [4, 14] представлена совокупность моделей и методов исследования механической системы «трубопровод-датчик давления».

В данной работе исследуется совместная динамика чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе на основе одномерной и двумерной моделей, представляющих собой начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений. В одномерном случае для описания динамики чувствительного элемента используется модель, основой которой является обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее колебательный процесс одностепенной системы. Динамика рабочей среды в трубопроводе описывается дифференциальным уравнением с частными производными, соответствующим линейной теории движения жидкостей или газов в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Рассмотрено несколько способов исследования указанной одномерной начально-краевой задачи:

- (1) аналитическое исследование, позволяющее свести решение задачи к исследованию дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего между собой величину перемещения чувствительного элемента датчика с законом изменения давления рабочей среды в двигателе;
- (2) численно-аналитическое исследование с помощью метода Галеркина;
- (3) численное исследование на основе метода конечных разностей [17, 19].

В двумерном (осесимметричном) случае исследование задачи с помощью введения усредненных характеристик сводится к аналогичному исследованию одномерной модели.

2. Одномерная математическая модель системы «трубопровод-датчик давления».

2.1. Постановка задачи. Математическая постановка начально-краевой задачи, соответствующей одномерной модели механической системы «трубопровод — датчик давления», имеет вид

$$\varphi_{tt} - a_0^2 \varphi_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, t) = P(t), \quad (2)$$

$$\varphi_x(l, t) = \dot{w}(t), \quad (3)$$

$$L(w(t)) \equiv m\ddot{w}(t) + f(\dot{w}(t), w(t)) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, t) - P_*. \quad (4)$$

Здесь $\varphi(x, t)$ — потенциал скорости, описывающий движение рабочей среды в трубопроводе в модели сжимаемой среды; $w(t)$ — закон движения чувствительного (упруго закрепленного) элемента

датчика; ρ_0 , P_0 , a_0 — плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(t)$ — закон изменения избыточного давления ($p = P_0 + P(t)$) рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя); P_* — некоторое внешнее (например, управляющее) воздействие; m — масса элемента; l — длина трубопровода; $f(\dot{w}(t), w(t))$ — некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации $w(t)$ и скорости деформации $\dot{w}(t)$; индексы x , t снизу обозначают частные производные по координате x и времени t , точка сверху — производную по t .

Волновое уравнение (1) описывает движение рабочей среды (газа или жидкости) в трубопроводе; условие (2) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (3) — условие непротекания (условие равенства скорости элемента и скорости рабочей среды на поверхности этого элемента); уравнение (4) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x, t)$ и $w(t)$, которую следует дополнить начальными условиями.

2.2. *Сведение решения задачи к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом.* Общее решение волнового уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x, t) = A\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + B\left(t + \frac{x}{a_0}\right), \quad (5)$$

где

$$A\left(t - \frac{x}{a_0}\right), \quad B\left(t + \frac{x}{a_0}\right)$$

— произвольные функции своих аргументов.

Удовлетворяя условиям (2), (3), (4) получим

$$-\rho_0[A'(t) + B'(t)] = P(t), \quad (6)$$

$$-A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) = a_0\dot{w}(t), \quad (7)$$

$$P_0 - P_* - \rho_0\left[A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] = L(w(t)). \quad (8)$$

Из (7), (8) находим

$$A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) = -\frac{1}{2\rho_0}[P_* - P_0 + L(w(t))] - \frac{a_0}{2}\dot{w}(t), \quad (9)$$

$$B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) = -\frac{1}{2\rho_0}[P_* - P_0 + L(w(t))] + \frac{a_0}{2}\dot{w}(t). \quad (10)$$

Согласно (9), (10)

$$A'(t) = -\frac{1}{2\rho_0}\left[P_* - P_0 + L\left(w\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right)\right] - \frac{a_0}{2}\dot{w}\left(t + \frac{l}{a_0}\right), \quad (11)$$

$$B'(t) = -\frac{1}{2\rho_0}\left[P_* - P_0 + L\left(w\left(t - \frac{l}{a_0}\right)\right)\right] + \frac{a_0}{2}\dot{w}\left(t - \frac{l}{a_0}\right). \quad (12)$$

Подставляя (11), (12) в (6), получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее величину отклонения $w(t)$ чувствительного элемента датчика с законом изменения давления $P(t)$ рабочей среды в двигателе

$$L\left(w\left(t - \frac{l}{a_0}\right)\right) + L\left(w\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right) - \rho_0 a_0 \left[\dot{w}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{w}\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right] = 2[P(t) + P_0 - P_*]. \quad (13)$$

Приведем пример. Пусть

$$L(w(t)) = m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma_1 w(t) + \gamma_3 w^3(t) + \xi w^2(t)\dot{w}(t), \quad (14)$$

где α , ξ — коэффициенты демпфирования; γ_1 , γ_3 — коэффициенты жесткости упругой связи.

Тогда уравнение (13) примет вид

$$\begin{aligned}
m \left[\ddot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + \ddot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \alpha \left[\dot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + \dot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \\
+ \gamma_1 \left[w \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + w \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \gamma_3 \left[w^3 \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + w^3 \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] + \\
+ \xi \left[w^2 \left(t - \frac{l}{a_0} \right) \dot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) + w^2 \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \dot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] - \\
- \rho_0 a_0 \left[\dot{w} \left(t - \frac{l}{a_0} \right) - \dot{w} \left(t + \frac{l}{a_0} \right) \right] = 2[P(t) + P_0 - P_*]. \quad (15)
\end{aligned}$$

Некоторые методы исследования уравнений с отклоняющимся аргументом, подобных уравнению (15), изложены, например, в [7, 23, 24, 27].

Если $l/a_0 = \varepsilon$ — малый параметр (например, для воздуха $a_0 \approx 330$ м/с), то, проводя в (15) разложение по степеням ε и отбрасывая старшие по порядку члены, можно получить приближенное уравнение (без отклонения аргумента t), связывающее $w(t)$ и $P(t)$. Например, в линейной модели ($\gamma_3 = \xi = 0$), оставляя члены порядка единицы и ε^2 , получим

$$\begin{aligned}
(m + \rho_0 l) \ddot{w}(t) + \alpha \dot{w}(t) + \gamma_1 w(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\left(m + \frac{\rho_0 l}{3} \right) w^{(4)}(t) + \alpha \ddot{w}(t) + \gamma_1 \ddot{w}(t) \right] + O(\varepsilon^4) = \\
= P(t) + P_0 - P_*. \quad (16)
\end{aligned}$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно искать классическими методами. Например, если пренебречь демпфированием ($\alpha = 0$), то несложно получить «отклик» $w(t)$ на периодическое изменение давления в двигателе $P(t) = A \sin \omega t$:

$$w(t) = \frac{P_0 - P_*}{\gamma_1} + w_0(c_1, c_2, c_3, c_4, t) + B \sin \omega t, \quad (17)$$

где общее решение однородного уравнения $w_0(c_1, c_2, c_3, c_4, t)$ является ограниченной величиной, а амплитуда вынужденных колебаний B определяется выражением

$$B = \frac{A}{\gamma_1 - (m + \rho_0 l) \omega^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \omega^2 \left[\left(m + \frac{1}{3} \rho_0 l \right) \omega^2 - \gamma_1 \right]}. \quad (18)$$

Согласно (18), имеет место резонанс, когда частота возмущающей силы ω близка к частоте собственных колебаний $\sqrt{\gamma_1 / (m_0 + \rho_0 l)}$, при этом B является величиной порядка $1/\varepsilon^2 \gg 1$.

Если закон изменения давления имеет вид $P(t) = A e^{\lambda t}$, отклик $w(t)$ согласно точной модели (15) в линейном приближении ($\gamma_3 = \xi = 0$) можно искать в виде

$$w(t) = \frac{P_0 - P_*}{\gamma_1} + B e^{\lambda t}.$$

Тогда получим связь между A и B :

$$B = \frac{A}{2 \left[m \lambda^2 + \alpha \lambda + \gamma_1 + \rho_0 a_0 \lambda \operatorname{th} \left(\frac{\lambda l}{a_0} \right) \right] \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda l}{a_0} \right)}.$$

Заметим, что характер свободных колебаний упругого элемента зависит от корней нелинейного алгебраического уравнения

$$m \lambda^2 + \alpha \lambda + \gamma_1 + \rho_0 a_0 \lambda \operatorname{th} \left(\frac{\lambda l}{a_0} \right) = 0.$$

2.3. *Метод Галеркина.* Потенциал скорости $\varphi(x, t)$ представим в виде отрезка ряда по полной на отрезке $[0, l]$ системе функций $g_m(x) = \sin \lambda_m x$, удовлетворяющих однородным граничным условиям $g_m(0) = 0$, $g'_m(l) = 0$, соответствующим условиям (2), (3)

$$\varphi(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{m=1}^M \psi_m(t) \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2l}. \quad (19)$$

Удовлетворяя условиям (2), (3), находим

$$\dot{a} = -\frac{1}{\rho_0} P(t), \quad b = \dot{w}(t). \quad (20)$$

Подставляя (19), (20) в (1), (4), получим

$$\sum_{m=1}^M [\ddot{\psi}_m(t) + a_0^2 \lambda_m^2 \psi_m(t)] \sin \lambda_m x = \frac{1}{\rho} \dot{P}(t) - \ddot{w}(t)x, \quad (21)$$

$$P(t) - \rho_0 l \ddot{w}(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \dot{\psi}_m(t) \sin \lambda_m l = P_* - P_0 + L(w(t)). \quad (22)$$

Согласно методу Галеркина, выполняя условие ортогональности невязки уравнения (21) к базисным функциям $\{\sin \lambda_k x\}_{k=1, \overline{M}}$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\psi}_k(t) + a_0^2 \lambda_k^2 \psi_k(t) = \frac{2}{l \rho_0 \lambda_k} \dot{P}(t) - 2 \ddot{w}(t) \frac{\sin(\lambda_k l)}{l \lambda_k^2}, \quad k = 1, \dots, M. \quad (23)$$

Зададим $L(w(t))$ в виде $L(w(t)) = m \ddot{w}(t) + \alpha \dot{w}(t) + \gamma_1 w(t)$ и продифференцируем уравнение (22):

$$\dot{P}(t) - \rho_0 l \ddot{w}(t) - \rho_0 \sum_{m=1}^M \ddot{\psi}_m(t) \sin \lambda_m l = m \ddot{w}(t) + \alpha \dot{w}(t) + \gamma_1 w(t). \quad (24)$$

Дополняя систему обыкновенных дифференциальных уравнений (23), (24) для функций $w(t)$, $\psi_k(t)$, $k = 1, \dots, M$, начальными условиями, получим задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является основой для проведения численного эксперимента.

2.4. *Метод конечных разностей.* Дополним задачу (1)–(4) начальными условиями:

$$w(0) = S, \quad \dot{w}(0) = Q, \quad (25)$$

$$\varphi(x, 0) = \psi_1(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \psi_2(x). \quad (26)$$

Пусть $L(w(t)) = m \ddot{w}(t) + \alpha \dot{w}(t) + \gamma_1 w(t)$. Проведем численное исследование задачи (1)–(4), (25), (26) методом конечных разностей. Разобьем отрезок $[0, l]$ на N частей точками $x_n = h_x n$, $n = 0, 1, \dots, N$, где $h_x = l/N$, отрезок $[0, T]$ — на K частей точками $t_k = h_t k$, $k = 0, 1, \dots, K$, где $h_t = T/K$. Введем обозначения $\varphi(x_n, t_k) = \varphi_n^k$, $w(t_k) = w^k$.

Явная конечно-разностная аппроксимация уравнений и условий (1)–(4), (25), (26) имеет вид

$$\frac{\varphi_n^{k+1} - 2\varphi_n^k + \varphi_n^{k-1}}{h_t^2} - a_0^2 \frac{\varphi_{n+1}^k - 2\varphi_n^k + \varphi_{n-1}^k}{h_x^2} = 0, \quad (27)$$

$$-\frac{\rho_0}{h_t} (\varphi_0^{k+1} - \varphi_0^k) = P(t_k), \quad (28)$$

$$\frac{\varphi_N^{k+1} - \varphi_{N-1}^{k+1}}{h_x} = \frac{w^{k+1} - w^k}{h_t}, \quad (29)$$

$$\frac{m(w^{k+1} - 2w^k + w^{k-1}))}{h_t^2} + \frac{\alpha(w^k - w^{k-1})}{h_t} + \gamma_1 w^k = P_0 - P_* - \frac{\rho_0(\varphi_N^k - \varphi_{N-1}^{k-1})}{h_t}, \quad (30)$$

$$w^0 = S, \quad w^1 = w^0 + h_t Q, \quad (31)$$

$$\varphi_n^0 = \psi_1(x_n), \quad \varphi_n^1 = \psi_1(x_n) + h_t \psi_2(x_n). \quad (32)$$

Разностная схема (27)–(32) является условно устойчивой. Исследование устойчивости проводилось с использованием спектрального признака Неймана с привлечением критерия Бабенко–Гельфанда [17].

Алгоритм решения системы (27)–(32)

1: задаем начальные условия (31), (32);

2: из уравнения (27) находим значения потенциала φ

$$\varphi_i^{k+1} = 2\varphi_i^k - \varphi_i^{k-1} + \frac{a_0^2 h_t}{h_x^2} (\varphi_{i+1}^k - 2\varphi_i^k + \varphi_{i-1}^k), \quad i = 1, \dots, n-1;$$

3: из условия (28) находим значения потенциала в граничной точке

$$\varphi_0^{k+1} = -\frac{P(t_k)h_t}{\rho_0} + \varphi_0^k;$$

4: из уравнения (30) находим значения функции w

$$w^{k+1} = \frac{(P_0 - P_*)h_t^2}{m} - \frac{\rho_0 h_t}{m} (\varphi_n^k - \varphi_n^{k-1}) + 2w^k - w^{k-1} - \frac{\alpha h_t}{m} (w^k - w^{k-1}) - \frac{\gamma_1 h_t^2}{m} w^k;$$

5: из условия (29) находим

$$\varphi_n^{k+1} = \varphi_{n-1}^{k+1} + \frac{h_x}{h_t} (w^{k+1} - w^k).$$

Цикл повторяется с п. 2 по п. 5 для $k = 1, 2, \dots, K-1$.

2.5. Численный эксперимент. Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда — воздух ($\rho_0 = 1$). Параметры системы: $P_0 = P_* = 10^5$, $a_0 = 331$, $l = 5$, $m = 0, 1$, $\alpha = 200$ (все значения приведены в системе СИ).

С помощью системы Mathematica численно получены решение уравнения (16) и решение системы (23), (24). При решении уравнения (16) начальные условия заданы в виде

$$w(0) = \dot{w}(0) = \ddot{w}(0) = 0.$$

Для расчета системы (23), (24) начальные условия заданы в виде

$$\psi_k(0) = \dot{\psi}_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad w(0) = \frac{P(0)}{\gamma_1}, \quad \dot{w}(0) = \ddot{w}(0) = 0.$$

На основе описанного алгоритма решения системы (27)–(32) разработана программа на C++, позволяющая получать графики функции $w(t)$ при различном задании закона изменения давления $P(t)$. При численном эксперименте было введено разбиение $n = 200$, $K = 100000$, начальные данные заданы в виде: $w(0) = \dot{w}(0) = 0$, $\psi_1(x) = 0$, $\psi_2(x) = 0$.

На рис. 1–3 представлены результаты расчетов при различном задании функции $P(t)$ и параметра γ_1 . Из этих графиков видно, что решение задачи (1)–(4), (25), (26), полученное по методу конечных разностей (рис. 3), и решение, построенное с помощью метода Галеркина (рис. 2), достаточно точно согласуются с численным решением уравнения (16) (рис. 1). Следует отметить значительное влияние параметра γ_1 на амплитуду колебаний подвижного элемента. Отметим также, что расчеты по методу конечных разностей с помощью метода Галеркина и численное решение уравнения (16) дают результаты, хорошо согласующиеся с решением (17), (18).

Замечание. Для несжимаемой среды в одномерной модели потенциал скорости имеет вид

$$\varphi(x, t) = \theta(t)x + \beta(t).$$

Давление определяется согласно нелинейному интегралу Лангранжа–Коши

$$p = P_0 - \rho_0 \left(\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 \right)$$

и имеет вид

$$p(x, t) = P_0 - \rho_0 \left[\dot{\theta}(t)x + \dot{\beta}(t) + \frac{1}{2} \theta^2(t) \right].$$

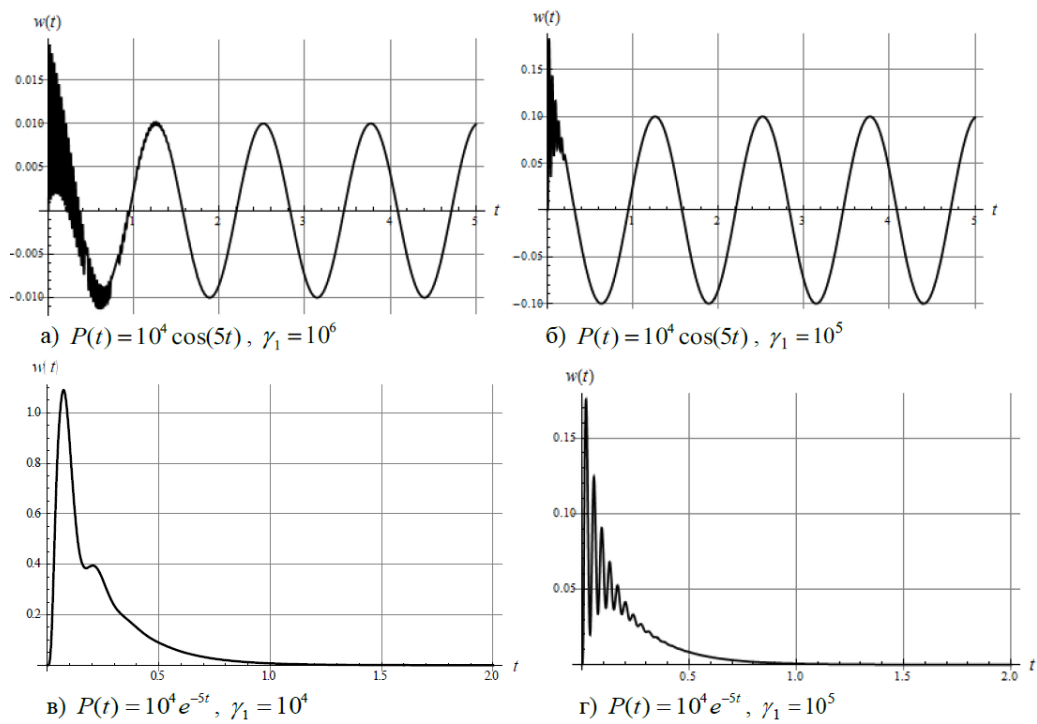
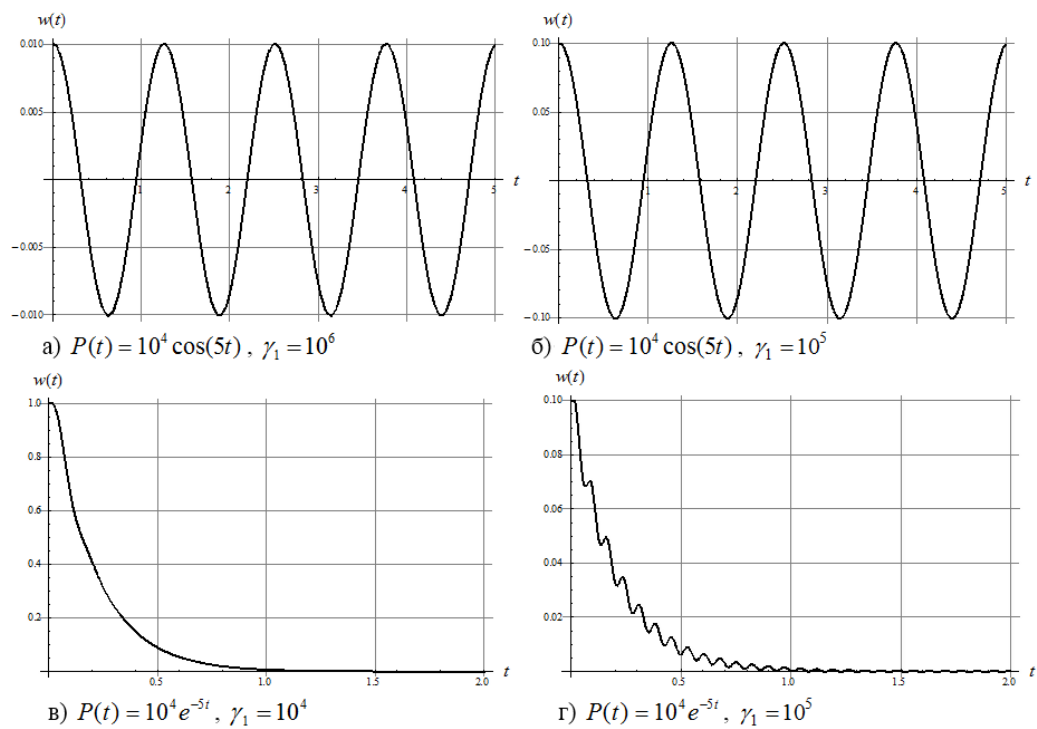


Рис. 1. Графики отклонения подвижного элемента датчика (решение уравнения (16)).

Рис. 2. Графики отклонения подвижного элемента датчика (метод Галеркина $M = 10$).

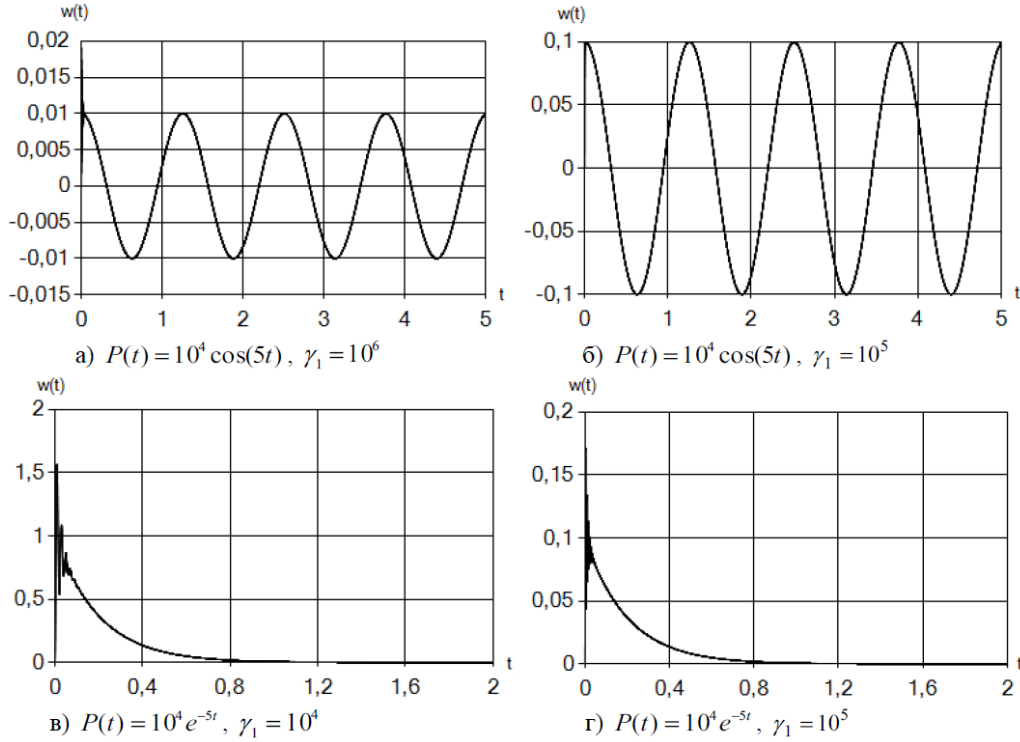


Рис. 3. Графики отклонения подвижного элемента датчика (метод конечных разностей).

Тогда, удовлетворяя условиям $p(0, t) = P_0 + P(t)$, $\varphi_x(l + w, t) = \dot{w}(t)$, получим уравнение, связывающее $w(t)$ и $P(t)$:

$$(m + \rho_0 l + \rho_0 w) \ddot{w} + f(\dot{w}, w) = P_0 - P_* + P(t).$$

3. Двумерная модель механической системы «трубопровод — датчик давления».

3.1. Постановка задачи. Приведем математическую постановку, соответствующую осесимметричной модели механической системы «трубопровод — датчик давления» в предположении, что рабочая среда является идеальной и сжимаемой:

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left(\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (33)$$

$$\varphi_r(x, R, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (34)$$

$$\varphi_x(l, r, t) = \dot{w}(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (35)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, t) = P(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (36)$$

$$P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, t) - P_* = L(w(r, t)), \quad r \in (0, R). \quad (37)$$

Дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор в уравнении (37), описывающем динамику упругого элемента, может быть задан по-разному в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например

$$L(w(r, t)) = m \ddot{w} + D \nabla^4 w + N \nabla^2 w + \beta \nabla^4 \dot{w} + f(\dot{w}, w), \quad (38)$$

где

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3}.$$

В (33)–(38) $\varphi(x, r, t)$ — потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе; $w(r, t)$ — деформация упругого элемента, расположенного в конце трубопровода

$x = l$; ρ_0 , P_0 , a_0 — плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(r, t)$ — заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; P_* — внешнее воздействие на упругий элемент; m и D — погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента; N — сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β — коэффициент внутреннего демпфирования; R — радиус упругого элемента, представляющего собой круглую деформируемую пластину; $f(\dot{w}, w)$ — некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации $w(r, t)$ и скорости деформации $\dot{w}(r, t)$; индексы x , r , t снизу обозначают частные производные по координатам x , r и времени t , точка сверху — производную по t .

Уравнение (33) описывает движение идеального газа (жидкости) в трубопроводе; (34), (35) — условия непротекания стенки $r = R$ трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (36) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (37) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x, r, t)$, $w(r, t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями. Необходимо также задать граничные условия для $w(r, t)$ при $r = R$, соответствующие типу закрепления элемента (например, $w(R, t) = w_r(R, t) = 0$ для жесткого защемления, $w(R, t) = w_{rr}(R, t) = 0$ для шарнирного закрепления).

3.2. Приближенный метод решения. Рассмотрим один из способов решения задачи (33)–(37). Введем усредненные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \int_0^R r \varphi(x, r, t) dr, & \xi(t) &= \int_0^R r w(r, t) dr, \\ G(t) &= \int_0^R r P(r, t) dr, & Q(w) &= \int_0^R r L(w(r, t)) dr.\end{aligned}\tag{39}$$

Тогда, проводя в (33)–(37) интегрирование по r в пределах от 0 до R , с учетом граничного условия (34), получим систему уравнений

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \tag{40}$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t), \tag{41}$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \tag{42}$$

$$(P_0 - P_*) \frac{R^2}{2} - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w). \tag{43}$$

Общее решение уравнения (40) имеет вид

$$\Phi(x, t) = A \left(t - \frac{x}{a_0} \right) + B \left(t + \frac{x}{a_0} \right). \tag{44}$$

Положим $w(r, t) = g(r)\theta(t)$,

$$w_0 = \int_0^R r g(r) dr,$$

где функция $g(r)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента (например, в случае жесткого защемления упругого элемента в точках его границы $r = R$, можно задать $g(r) = 1 - 3(r/R)^2 + 2(r/R)^3$). Тогда

$$\xi(t) = \theta(t) \cdot \int_0^R r g(r) dr = w_0 \theta(t).$$

Пусть, например, $L(w(r, t)) = m\ddot{w} + D\nabla^4 w + N\nabla^2 w + \beta\nabla^4 \dot{w} + \alpha\dot{w} + \gamma w$. Тогда

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t), \tag{45}$$

где

$$m_0 = m \int_0^R r g(r) dr, \quad \alpha_0 = \alpha \int_0^R r g(r) dr + \beta \int_0^R r \nabla^4 g(r) dr,$$

$$\gamma_0 = D \int_0^R r \nabla^4 g(r) dr + N \int_0^R r \nabla^2 g(r) dr + \gamma \int_0^R r g(r) dr.$$

Подставляя (44), (45) в (41)–(43) и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям для одномерного случая (1)–(4), получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее характеристику отклонения упругого элемента $\theta(t)$ с законом изменения давления $G(t)$. Некоторые методы исследования этого уравнения, так же как и численный метод решения задачи (40)–(43), рассмотрены выше при обсуждении одномерной математической модели.

Замечание. Математическая постановка, соответствующая модели механической системы «трубопровод-датчик давления» в предположении, что рабочая среда является идеальной несжимаемой, имеет вид (33)–(37), при этом в уравнении (33) отсутствует член φ_{tt} и функция $\varphi(x, r, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Для решения задач такого типа эффективным является метод Фурье, а также (для плоских задач) методы теории функции комплексного переменного [4, 10–15, 28–30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. — М.: Машиностроение, 1965.
2. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. — М.: Машиностроение, 1981.
3. Андреева Л. Е., Богданова Ю. А. Методы проектирования мембранных упругих элементов. — М.: Машиностроение, 1972.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод–датчик давления». — Ульяновск: УлГТУ, 2008.
5. Аш Ж. и др. Датчики измерительных систем. Кн. 1. — М.: Мир, 1992.
6. Аш Ж. и др. Датчики измерительных систем. Кн. 2. — М.: Мир, 1992.
7. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
8. Белозубов Е. М., Васильев В. А., Запевалин А. И., Чернов П. С. Проектирование упругих элементов нано- и микроэлектромеханических систем // Измерит. техн. — 2011. — № 1. — С. 17–19.
9. Белозубов Е. М., Мокров Е. А., Тихомиров Д. В. Минимизация погрешности тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления при воздействии нестационарной температуры // Датчики и системы. — 2004. — № 1. — С. 26–29.
10. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д. Об одной математической модели системы «трубопровод–датчик давления» // Тр. 4 Междунар. науч.-техн. конф. «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов. Математика». — Ульяновск: УлГТУ, 2001. — С. 43–44.
11. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д. Об одной математической модели системы «трубопровод–датчик давления» // Мат. 11 Межвуз. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи». — Самара: СамГТУ, 2001. — С. 15–17.
12. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическая модель системы «трубопровод-датчик давления» // в кн.: Механика и процессы управления. — Ульяновск: УлГТУ, 2002. — С. 9–15.
13. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическое моделирование механической системы «трубопровод-датчик давления» // Датчики и системы. — 2003. — № 6 (49). — С. 12–15.
14. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. — Ульяновск: УлГТУ, 2018.
15. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы «трубопровод-датчик давления» // Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — 12, № 4. — С. 85–93.

16. Герасимов В. К., Тыжнов Г. И. К вопросу выбора упругого чувствительного элемента для измерения давления// Изв. вузов. Приборостроение. — 1973. — № 6. — С. 80–83.
17. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. — М.: Наука, 1977.
18. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления// Измерит. техн. — 2008. — № 3. — С. 26–30.
19. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
20. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980.
21. Михайлов П. Г., Мокров Е. А., Митрохин С. В., Сергеев Д. А. Особенности метрологического обеспечения современных датчиков пульсаций давлений// Изв. Южн. федер. ун-та. Техн. науки. — 2012. — 130, № 5. — С. 174–179.
22. Мокров Е. А., Лебедев Д. В., Базаев В. П., Ефремов Е. В., Семина И. А., Колчин П. А. О конструктивно-технологическом совершенствовании тензорезисторных тонкопленочных датчиков давлений// Датчики и системы. — 2008. — № 6. — С. 2–7.
23. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
24. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1965.
25. Пирогов С. П. Манометрические трубчатые пружины. — СПб.: Недра, 2009.
26. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
27. Bellman R., Cooke K. L. Differential-Difference Equations. — New York–London: Academic Press, 1963.
28. Velmisov P. A., Garnefska L. V., Gorbokononko V. D. An investigation of mathematical models “pipeline-pressure sensor”// Proc. XXVII Summer School “Applications of Mathematics in Engineering and Economics”. — Sofia, Bulgaria: Heron Press, 2002. — P. 542–548.
29. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline-pressure sensor” system// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — 1353. — 012085.
30. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline-pressure sensor”// AIP Conf. Proc. — 2019. — 2172, № 1. — 030006.

Вельмисов Петр Александрович

Ульяновский государственный технический университет

E-mail: velmisov@ulstu.ru

Тамарова Юлия Александровна

Ульяновский государственный технический университет

E-mail: kazakovau@mail.ru

Покладова Юлия Валерьевна

Ульяновский государственный технический университет

E-mail: pokladovau@inbox.ru