ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 209 (2022). С. 108–116
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-108-116

УДК 517.9, 531.01

НЕКОТОРЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе получены тензорные инварианты (дифференциальные формы) однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

SOME TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS ON THE TANGENT BUNDLES OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we construct tensor invariants (differential forms) of homogeneous dynamical systems on the tangent bundles of smooth two-dimensional manifolds. We establish the relationship between the presence of such invariants and the existence of complete sets of first integrals, which are necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems. Due to force fields, systems considered are dissipative; they are generalizations of systems considered earlier.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

1. Введение. Как известно (см. [14,15,60]), наличие достаточного количества не только первых интегралов (скалярных инвариантов), но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт естественен (см. [1,2]). Для систем, обладающих притягивающими или

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

 © ВИНИТИ РАН, 2022

отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций (см. [25, 55, 56]).

Так, например, задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий (см. [26, 28, 29, 37]). Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (см. [56]).

В работе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем (ср. [5, 6, 16, 18]). При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

2. Пример системы с одной степенью свободы. Рассмотрим следующую гладкую динамическую систему на плоскости с одной степенью свободы α:

$$\dot{\alpha} = -\omega + b\delta(\alpha), \quad \dot{\omega} = F(\alpha), \tag{1}$$

которая эквивалентна следующему уравнению:

$$\ddot{\alpha} - b\tilde{\delta}(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) = 0, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

Пара гладких функций $(F(\alpha), \delta(\alpha))$ определяет силовое поле в системе: функция $F(\alpha)$ описывает консервативную составляющую поля, а функция $\delta(\alpha)$ — возможные рассеяние или подкачку энергии в системе. При $b = 0$ консервативная система (1) обладает гладким интегралом энергии:

$$\frac{\omega^2}{2} + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_0 = \text{const}; \tag{2}$$

при этом ее фазовый поток сохраняет площадь на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, т.е. сохраняется дифференциальная 2-форма

$$d\alpha \wedge d\omega \tag{3}$$

площади с единичной плотностью. При интегрировании системы можно использовать или первый интеграл энергии (2), или факт сохранения фазовой площади (3).

Иначе обстоит дело в случае $b \neq 0$. Поскольку у системы (1) появляются, вообще говоря, притягивающие или отталкивающие (асимптотические) предельные множества, первый интеграл системы — трансцендентная функция (в смысле комплексного анализа; см. [41, 43, 45]). Приведем ее для следующего важного случая:

$$F(\alpha) = \lambda\delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Действительно, первый интеграл имеет вид

$$\begin{gathered}\Phi_1(\alpha, \omega) = \delta(\alpha)\exp\Psi(t) = C_1 = \text{const}, \\ \Psi(t) = \int \frac{(t-b)dt}{t^2 - bt + \lambda}, \quad t = \frac{\omega}{\delta(\alpha)};\end{gathered} \tag{5}$$

при этом асимптотические предельные множества находятся из системы алгебраических равенств

$$\delta(\alpha) = 0, \quad \omega = 0 \tag{6}$$

(см. также [13]).

Поскольку появляются асимптотические предельные множества, не существует никакой даже абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью меры фазовой плоскости (ср. с [7, 9, 62]). Но можно (наряду с первым интегралом) предъявить инвариантную дифференциальную 2-форму с коэффициентами, являющимися трансцендентными функциями.

Действительно, если $\mu_1 \neq 0$ — один из корней уравнения $\mu^2 - b\mu + \lambda = 0$ (для простоты действительный), то искомая 2-форма имеет вид

$$\begin{gathered} T_1(\alpha,\omega) = \exp\left\{-\frac{1}{\mu_1}\Psi(t)\right\} d\alpha \wedge d\omega, \\ \Psi(t) = \int \frac{(t-b)dt}{t^2 - bt + \lambda}, \quad t = \frac{\omega}{\delta(\alpha)}. \end{gathered} \tag{7}$$

3. Инварианты систем уравнений геодезических. Рассмотрим гладкое двумерное риманово многообразие $M^2\{\alpha,\beta\}$ с аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\dot\alpha,\dot\beta;\alpha,\beta\}$ (ср. с [56]). Для этого изучим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha = z_2 f_2(\alpha), \quad \dot\beta = z_1 f_1(\alpha), \tag{8}$$

где $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических [37, 56], например, с тремя ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на поверхностях вращения, плоскости Лобачевского и т. д.):

$$\begin{cases} \ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0, \\ \ddot\beta + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0, \end{cases} \tag{9}$$

т.е. выполнены равенства

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta) \equiv 0. \tag{10}$$

В случае (8) соотношения на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1;\alpha,\beta\}$ примут вид

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= -\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)z_2^2 - f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2 - f_1(\alpha)\Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_2 &= -f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - f_1(\alpha)\cdot 2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)z_1 z_2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2, \end{aligned} \tag{11}$$

а при условиях (10) упростятся:

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= -f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \\ \dot z_2 &= -f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2, \end{aligned} \tag{12}$$

и уравнения (9) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (8), (12) на многообразии $TM^2\{z_2, z_1;\alpha,\beta\}$ с новыми координатами z_1, z_2 на касательном пространстве.

Для полного интегрирования системы (8), (12) необходимо знать, вообще говоря, три независимых тензорных инварианта [60]: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм. При этом, конечно, первые интегралы (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. [51, 52, 54]).

В [37] рассмотрены примеры систем геодезических на двумерной сфере с различными метриками, а в [56] — примеры систем геодезических на двумерных поверхностях вращения и на плоскости Лобачевского.

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)+f_2^2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\equiv 0,\quad \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0, \tag{13}$$

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{14}$$

то система (8), (12) *обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_2,z_1)=z_1^2+z_2^2=C_1^2=\mathrm{const}, \tag{15}$$

$$\Phi_2(z_1;\alpha)=z_1\Phi_0(\alpha)=C_2=\mathrm{const},\quad \Phi_0(\alpha)=f_1(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(b)db\right\}, \tag{16}$$

$$\Phi_3(\alpha,\beta)=\beta\mp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2f_1(b)}{f_2(b)\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(b)-C_2^2}}db=C_3=\mathrm{const}. \tag{17}$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной $\dfrac{d}{dt}=f_2(\alpha)\dfrac{d}{d\tau}$ *и фазовой* $z_1^*=\ln|z_1|$ *— фазовый поток системы* (8), (12) *сохраняет объем на касательном расслоении* $TM^2\{z_2,z_1^*;\alpha,\beta\}$*, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма*

$$dz_2\wedge dz_1^*\wedge d\alpha\wedge d\beta.$$

Система равенств (13) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики к каноническому виду с законом сохранения энергии (15) (или см. ниже (19)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [3, 11]). Ну а поиск как интеграла (15), так и (16) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий (см. [2, 12, 20, 56]).

4. Инварианты потенциальных систем. Несколько модифицируем систему (8), (12), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$ соответственно:

$$\tilde F(z_2,z_1;\alpha)=\begin{pmatrix}F_1(\beta)f_1(\alpha)\\ F_2(\alpha)f_2(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$ примет вид

$$\begin{cases}\dot\alpha=z_2f_2(\alpha),\\[4pt] \dot z_2=F_2(\alpha)f_2(\alpha)-f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2^2-\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2,\\[4pt] \dot z_1=F_1(\beta)f_1(\alpha)-f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2,\\[4pt] \dot\beta=z_1f_1(\alpha);\end{cases} \tag{18}$$

она почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases}\ddot\alpha-F_2(\alpha)f_2(\alpha)+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2=0,\\ \ddot\beta-F_1(\beta)f_1(\alpha)+2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta=0,\end{cases}$$

на касательном расслоении $TM^2\{\dot\alpha,\dot\beta;\alpha,\beta\}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (13), (14)*, то система* (18) *обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_2,z_1)=z_1^2+z_2^2+V(\alpha,\beta)=C_1=\mathrm{const}, \tag{19}$$

$$V(\alpha,\beta)=V_2(\alpha)+V_1(\beta)=-2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F_2(a)da-2\int\limits_{\beta_0}^{\beta}F_1(b)db,$$

а также при $F_1(\beta)\equiv 0$ — первым интегралом (16) и

$$\Phi_3(\alpha,\beta)=\beta\mp\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2f_1(b)}{f_2(b)\sqrt{\Phi_0^2(b)[C_1-V(b,\beta_0)]-C_2^2}}db=C_3=\mathrm{const}. \tag{20}$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной $\dfrac{d}{dt}=f_2(\alpha)\dfrac{d}{d\tau}$ и фазовой $z_1^*=\ln|z_1|$ — фазовый поток системы (18) сохраняет объем на касательном расслоении $TM^2\{z_2,z_1^*;\alpha,\beta\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма

$$dz_2\wedge dz_1^*\wedge d\alpha\wedge d\beta.$$

5. Инварианты систем со знакопеременной диссипацией. Далее несколько модифицируем систему (18), вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b>0$, в первом уравнении системы (21) (в отличие от системы (18)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_2$ соответственно:

$$\tilde F(z_2,z_1;\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}F_1(\beta)f_1(\alpha)\\F_2(\alpha)f_2(\alpha)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1F_1^1(\alpha)\\z_2F_2^1(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$ примет вид

$$\begin{cases}\dot\alpha=z_2f_2(\alpha)+b\delta(\alpha),\\ \dot z_2=F_2(\alpha)f_2(\alpha)-f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2^2-\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)z_1^2+z_2F_2^1(\alpha),\\ \dot z_1=F_1(\beta)f_1(\alpha)-f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_2+z_1F_1^1(\alpha),\\ \dot\beta=z_1f_1(\alpha);\end{cases} \tag{21}$$

она почти всюду эквивалентна следующей системе на касательном расслоении $TM^2\{\dot\alpha,\dot\beta;\alpha,\beta\}$:

$$\begin{cases}\ddot\alpha-\left\{b\tilde\delta(\alpha)+F_2^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\alpha-F_2(\alpha)f_2^2(\alpha)+b\delta(\alpha)F_2^1(\alpha)+\\ \qquad +b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2=0,\\ \ddot\beta-\left\{F_1^1(\alpha)+b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta-F_1(\beta)f_1^2(\alpha)+2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta=0,\end{cases}$$

Здесь, как и выше, $\tilde\delta(\alpha)=d\delta(\alpha)/d\alpha$.

Будем интегрировать систему четвертого порядка (21) при выполнении свойств (13), (14), а также при $F_1(\beta)\equiv 0$. При этом происходит отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\begin{cases}\dot\alpha=z_2f_2(\alpha)+b\delta(\alpha),\\ \dot z_2=F_2(\alpha)f_2(\alpha)-\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha)z_1^2+z_2F_2^1(\alpha),\\ \dot z_1=\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha)z_1z_2+z_1F_1^1(\alpha),\end{cases} \tag{22}$$

при наличии также четвертого уравнения

$$\dot\beta=z_1f(\alpha). \tag{23}$$

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)\frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)| = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \tag{24}$$

где $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$, $\Delta(\alpha) = \delta(\alpha)/f_2(\alpha)$, а для некоторых $\lambda_2^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, должны выполняться равенства

$$\begin{gathered} F_2(\alpha) = \lambda_2^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_2^0\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha); \\ F_k^1(\alpha) = f_2(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha) = \lambda_k^1\tilde{\Delta}(\alpha)f_2(\alpha), \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{25}$$

Условие (24) назовем «геометрическим», а условия из группы (25) — «энергетическими».

Условие (24) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (25) названы энергетическими в том числе потому, что силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду также относительно функции $\Delta(\alpha)$ (см. также [46, 47, 49, 51]).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (24) *и* (25). *Тогда система* (22), (23) *обладает тремя независимыми, вообще говоря, трансцендентными* [10, 24] *первыми интегралами.*

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [10]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\Theta_1(z_2, z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right) = \\ = \frac{f_2^2(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + (b - \lambda_1^1)z_2\delta(\alpha)f_2(\alpha) - \lambda_2^0\delta^2(\alpha)}{z_1\delta(\alpha)f_2(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{26}$$

При этом дополнительные первые интегралы имеют следующие структуры:

$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{27}$$

$$\Theta_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(\Delta(\alpha), \beta, \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right) = C_3 = \mathrm{const}. \tag{28}$$

Выражение функций (26)—(28) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$ дополнительный первый интеграл системы (22) найдется из дифференциального соотношения

$$d\ln|\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_2)du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad u_2 = \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{z_1}{\Delta(\alpha)},$$

$$U_1(u_2) = u_2^2 + (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0, \quad U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)}\right\}, \quad C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. *Если для систем вида* (22), (23) *существуют первые интегралы вида* (26)—(28), *то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие три инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами* (*ср. с* [31, 32, 34, 35]):

$$\rho_1(z_2, z_1; \alpha)dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(z_2, z_1; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda_1^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \frac{u_2^2 + u_1^2 - (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0}{u_1},$$

$$\rho_2(z_2, z_1; \alpha)dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_2(z_2, z_1; \alpha) = \Delta(\alpha) \exp\left\{(b+\lambda_1^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \exp\left\{-\int \frac{(b+u_2)du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\},$$
$$\rho_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha \wedge d\beta,$$
$$\rho_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \exp\left\{(b+\lambda_1^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot G_3\left(\Delta(\alpha), \beta, \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)}\right),$$

но зависимые с первыми интегралами (26)—(28).

Для полной интегрируемости системы (22), (23) можно использовать или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм (ср. [33, 36, 40]).

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [23, 56]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [10, 24]).

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения, касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к двумерной сфере, а также более общих систем на расслоении двумерных поверхностей вращения и плоскости Лобачевского (см. [21–23]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
13. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
14. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
15. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
16. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
17. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
18. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.

20. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
21. *Трофимов В. В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209-–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
28. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
36. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479—481.
38. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
39. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
40. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
41. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
43. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.

45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
49. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
60. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
61. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
62. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`