ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 209 (2022). С. 77–87
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-77-87

УДК 519.24

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕЧЕТКИЕ СРЕДНИЕ СИСТЕМ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

© 2022 г. **В. Л. ХАЦКЕВИЧ**

Аннотация. В настоящей работе изучены линейные средние систем нечетких чисел. Введен и изучен класс нелинейных нечетких средних систем нечетких чисел. Установлены нечеткие аналоги известных числовых неравенств для средних.

Ключевые слова: нечеткие средние систем нечетких чисел, нечеткие операторы осреднения, неравенства между нечеткими средними.

LINEAR AND NONLINEAR FUZZY AVERAGES OF SYSTEMS OF FUZZY NUMBERS

© 2022 **V. L. KHATSKEVICH**

Abstract. Linear averages of systems of fuzzy numbers are examined. A class of nonlinear fuzzy average systems of fuzzy numbers is introduced and studied. Fuzzy analogs of numerical inequalities for means are established.

Keywords and phrases: fuzzy means of systems of fuzzy numbers, fuzzy averaging operators, inequalities between fuzzy means.

AMS Subject Classification: 60K10

1. Введение. Теория нечетких множеств представляет собой современный аппарат формализации различных видов неопределенностей, возникающих при моделировании реальных систем любой природы (см., например, [1, 3, 4]).

Известно, какую важную роль играют различные средние, отражая существенные свойства заданной совокупности чисел.

В настоящей работе изучены взвешенные линейные нечеткие средние систем нечетких чисел. Выделен класс нелинейных нечетких средних систем нечетких чисел, являющийся модификацией на нечеткие числа общего класса диссипативных числовых средних. Установлены экстремальные свойства нечетких средних и систем нечетких чисел. Рассмотрены операторы осреднения, соответствующие введенным средним и исследованы их свойства. Кроме того, установлены неравенства между различными нечеткими средними, аналогичные известным числовым неравенствам.

Ниже $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Под нечетким числом $\tilde{z}$, заданным на универсальном пространстве $\mathbb{R}$, будем понимать совокупность упорядоченных пар $(\mu_{\tilde{z}}(x), x)$, где функция принадлежности $\mu_{\tilde{z}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, определяет степень принадлежности $\forall x \in \mathbb{R}$ множеству $\tilde{z}$.

При этом дополнительно будем предполагать выполнение следующих условий (ср. [4, гл. 2-4], [3, гл. 1]):

(i) носитель нечеткого числа — замкнутое и ограниченное (компактное) множество действительных чисел: $\mathrm{Supp}(\tilde{z}) \subset \mathbb{R}$;

(ii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_{\tilde{z}}(x)$ выпукла;

(iii) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_{\tilde{z}}(x)$ нормальна, т.е.

$$\sup_x \mu_{\tilde{z}}(x) = 1;$$

(iv) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_{\tilde{z}}(x)$ полунепрерывна сверху.

Совокупность таких нечетких чисел будем обозначать J.

Будем использовать интервальное представление нечетких чисел. Как известно, интервал α-уровня нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяется соотношением

$$Z_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) \geqslant \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1], \quad Z_0 = \mathrm{Supp}(\tilde{z}).$$

Согласно предположениям (i)—(iv) на нечеткие числа все α-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую (нижнюю) границу интервала через $z^-(\alpha)$, а правую (верхнюю) — $z^+(\alpha)$, т. о. $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Иногда $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют соответственно левым и правым индексами нечеткого числа.

Подчеркнем, что предположения (i)—(iv) обеспечивают следующие свойства: функция $z^-(\alpha)$ ограничена, не убывает, непрерывна слева на $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0; функция $z^+(\alpha)$ ограничена, не возрастает, непрерывна слева на $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Суммой нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с α-интервалами $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ называют нечеткое число с α-интервалами $[z^-(\alpha)+u^-(\alpha), z^+(\alpha)+u^+(\alpha)]$. Умножение на положительное число означает умножение индексов на это число; а умножение на отрицательное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами.

Два нечетких числа равны, если совпадают все их соответствующие α-интервалы.

Пример 1. Трапецеидальное нечеткое число $\tilde{z} = (a,b,c,d)$ при $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ характеризуется функцией принадлежности

$$\mu_{abcd}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a,b); \\ 1, & \text{если } x \in [b,c]; \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & \text{если } x \in (c,d]; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По определению, левый и соответственно правый индексы трапецеидального числа имеют вид

$$z^-_{abcd}(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad z^+_{abcd}(\alpha) = -(d-c)\alpha + c.$$

2. Линейные нечеткие средние систем нечетких чисел, операторы осреднения. Пусть заданы такие вещественные числа $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, что

$$\beta_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = 1.$$

Рассмотрим взвешенное нечеткое среднее нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$

$$\tilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{z}_i. \tag{1}$$

Такого рода средние играют важную роль в статистике нечетких чисел (см., например, [16]).

Обозначим через $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ левые и правые индексы нечетких чисел $\tilde{z}_i$, фигурирующих в формуле (1). Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Левый и правый индексы нечеткого среднего $\tilde{z}_{cp}$, определяемого формулой* (1), *равны соответственно*

$$z^-_{cp}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^-(\alpha), \quad z^+_{cp}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^+(\alpha).$$

Лемма 1 вытекает из определения интервального сложения нечетких чисел и умножения на положительное число.

Пример 2. Пусть в формуле (1) все нечеткие числа $\tilde{z}_i$ — трапецеидальные $\tilde{z}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда нечеткое среднее таких чисел имеет вид

$$\tilde{z}_{\text{ср}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i d_i\right).$$

Рассмотрим совокупность J^n векторов с нечеткими компонентами (нечетких векторов) вида $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$, где нечеткие числа $\tilde{z}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям (i)—(iv) введения. Для двух нечетких векторов $\tilde{Z}$ и $\tilde{W}$ их сумму и умножение на числа будем понимать покоординатно.

Рассмотрим оператор осреднения $A_\beta : J^n \to J$, определяемый для заданного $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$ $\tilde{Z} \in J^n$ взвешенной суммой (1)

$$A_\beta(\tilde{Z}) = \tilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{z}_i. \tag{2}$$

Теорема 1. *Оператор осреднения $A_\beta : J^n \to J$, определяемый формулой* (2), *является линейным.*

Доказательство. Покажем аддитивность A_β. Пусть заданы нечеткие векторы $\tilde{Z}, \tilde{W} \in J_n$. В соответствии с леммой 1 левый и правый индексы $A_\beta(\tilde{Z})$ совпадают с соответственно

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^-(\alpha), \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i^+(\alpha).$$

Аналогично для $A_\beta(\tilde{W})$, левый и правый индексы имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i^-(\alpha), \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i^+(\alpha).$$

Тогда левый и правый индексы суммы $A_\beta(\tilde{Z}) + A_\beta(\tilde{W})$ имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (\tilde{z}^-(\alpha) + w^-(\alpha)), \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\tilde{z}_i^+(\alpha) + w_i^+(\alpha)),$$

т.е. совпадают соответственно с левым и правым индексом нечеткого числа $A_\beta(\tilde{Z} + \tilde{W})$; это и означает аддитивность.

Однородность есть следствие формулы (2) и определения интервального умножения нечетких чисел на положительное (и отрицательное) число. □

Утверждение 1. *Пусть $\tilde{Z}$ — заданный нечеткий вектор с компонентами $\tilde{z}_i$, а $\tilde{v}$ — фиксированное нечеткое число. Пусть $\tilde{W}$ — нечеткий вектор с компонентами $\tilde{w}_i = \tilde{z}_i + \tilde{v}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда справедлива формула*

$$A_\beta(\tilde{W}) = A_\beta(\tilde{Z}) + \tilde{v}.$$

Утверждение 1 следует из определения (2) с учетом леммы 1 и правила арифметических действий с интервальными нечеткими числами; оно является «нечетким» аналогом известного свойства «переносимости» числового среднего арифметического.

Нечеткое среднее (1) обладает определенным экстремальным свойством. Чтобы это показать, рассмотрим на множестве J нечетких чисел метрику, определяемую для $\tilde{z}$, $\tilde{w} \in J$ формулой

$$d(\tilde{z}, \tilde{u}) = \left(\int_0^1 ((z^-(\alpha) - u^-(\alpha))^2 + (z^+(\alpha) - u^+(\alpha))^2) d\alpha\right)^{1/2}, \tag{3}$$

где $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы α-уровней чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ соответственно. Метрика (3) ранее введена и исследована в [9].

Пусть задан нечеткий вектор $\tilde{Z} \in J^n$ с компонентами $(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$. Фиксируем набор $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i d^2(\tilde{z}_i, \tilde{w}) \to \min \quad \forall \tilde{w} \in J;$$

более подробно,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_0^1 \Big(\big(z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha)\big)^2 + \big(z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha)\big)^2 \Big) d\alpha \to \min \quad \forall \tilde{w} \in J. \tag{4}$$

Теорема 2. *Решением задачи* (4), *причем единственным, является нечеткое число* $\tilde{z}_{cp}$.

Доказательство. Фиксируем $\alpha \in (0, 1]$ и рассмотрим совокупность чисел $z_1^-(\alpha), \ldots, z_n^-(\alpha)$. Согласно лемме 1 левый индекс нечеткого числа $\tilde{z}_{\text{ср}}$, а именно $z_{\text{ср}}^-(\alpha)$ является взвешенным средним этой совокупности. Тогда по экстремальному свойству для числовых средних (см., например, [2, гл. 1]) $z_{\text{ср}}^-$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^-(\alpha) - z_{\text{ср}}^-(\alpha))^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha))^2 \quad \forall w \in J.$$

Аналогично, $z_{\text{ср}}^+(\alpha)$ является взвешенным средним совокупности чисел $z_1^+(\alpha), \ldots, z_n^+(\alpha)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^+(\alpha) - z_{\text{ср}}^+(\alpha))^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha))^2 \quad \forall w \in J.$$

Складывая левые и правые части этих неравенств и интегрируя полученное соотношение по α от 0 до 1, получим требуемое утверждение. $\square$

Следствие 1. *Нечеткое среднее*

$$\hat{z}_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_i$$

является единственным решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^1 \Big(\big(z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha)\big)^2 + \big(z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha)\big)^2 \Big) d\alpha \to \min \quad \forall \tilde{w} \in J.$$

Этот результат является обобщением классического характеристического экстремального свойства среднего арифметического (см., например, [2, гл. I, § 5]).

Посмотрим на результат теоремы 2 с другой стороны. Рассмотрим дискретную нечетко-случайную величину Z, принимающую значения $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$ с вероятностями $\beta_1, \ldots, \beta_n$ соответственно. Математическое (нечеткое) ожидание $\tilde{m}$ этой случайной величины естественно определить формулой (2), т.е.

$$\tilde{m} = M(Z) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{z}_i.$$

Взвешенное отклонение данного нечеткого элемента $\tilde{w}$ от заданной системы нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$ определим формулой (4).

Теорема 2 утверждает, что взвешенное отклонение достигает своего минимального значения при $\tilde{w} = M(Z)$. Оно равно дисперсии нечеткой случайной величины Z, определенной в соответствии с работой [11] и равной

$$var(Z) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int_0^1 \Big(\big(z_i^-(\alpha) - m^-(\alpha)\big)^2 + \big(z_i^+(\alpha) - m^+(\alpha)\big)^2 \Big) d\alpha.$$

Определим метрику на множестве J^n формулой

$$d_n^2(\tilde{Z}, \tilde{W}) = \sum_{i=1}^{n} d^2(\tilde{z}_i, \tilde{w}_i),$$

где $\tilde{z}_i$ и $\tilde{w}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ — компоненты векторов $\tilde{Z}$ и $\tilde{W}$, а d — метрика на J, определенная формулой (3).

Утверждение 2. *Оператор осреднения $A_\beta : J^n \to J$, определенный формулой* (2)*, обладает свойством непрерывности.*

Это утверждение вытекает из соотношения

$$d^2(A_\beta(\tilde{Z}), A_\beta(\tilde{W})) \leqslant n d_n^2(\tilde{Z}, \tilde{W}),$$

полученного с использованием леммы 1 и элементарных неравенств.

3. Нечеткие медианы систем нечетких чисел. Коснемся вопроса об усреднении системы нечетких чисел посредством медиан. В отличие от средних арифметических они нивелируют наблюдения, отклоняющиеся от общей картины (выбросы). В этом смысле они являются робастными оценками эмпирических данных.

Как известно (см., например, [17]), нечеткой медианой системы нечетких чисел $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ называется нечеткое число $\tilde{z}_{\mathrm{Me}} = \tilde{\mathrm{M}}\mathrm{e}(\tilde{Z})$ с левым индексом $z_{\mathrm{Me}}^-(\alpha) = \mathrm{Me}\{z_1^-(\alpha), \dots, z_n^-(\alpha)\}$ и правым индексом $z_{\mathrm{Me}}^+(\alpha) = \mathrm{Me}\{z_1^+(\alpha), \dots, z_n^+(\alpha)\}$. Как обычно, в случае неоднозначности под числовой медианой понимаем полусумму центральных членов. Другое определение нечеткой медианы используется, например, в [16, гл. 7].

Для нечеткого вектора $\tilde{Z}$ рассмотрим оператор осреднения $A_{\mathrm{Me}} : J^n \to J$, задаваемый равенством

$$A_{\mathrm{Me}}(\tilde{Z}) = \tilde{\mathrm{M}}\mathrm{e}(\tilde{Z}). \tag{5}$$

Утверждение 3. *Оператор осреднения* (5) *является линейным.*

Доказательство. Покажем аддитивность. Пусть $\tilde{Z}, \tilde{W} \in J^n$ с компонентами $\tilde{z}_i$, $\tilde{w}_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Фиксируем $\alpha \in (0, 1]$. Не ограничивая общности, можно считать, что имеет место, например, следующая упорядоченность для левых индексов:

$$z_1^-(\alpha) \leqslant z_2^-(\alpha) \leqslant \ldots \leqslant z_n^-(\alpha), \quad w_1^-(\alpha) \leqslant w_2^-(\alpha) \leqslant \ldots \leqslant w_n^-(\alpha).$$

Пусть $z_{\mathrm{Me}}^-(\alpha)$ и $w_{\mathrm{Me}}^-(\alpha)$ — левые индексы соответствующих медиан. Согласно предположению, нечеткое число $\tilde{v} = \tilde{z} + \tilde{w}$ имеет левые индексы

$$v_i^-(\alpha) = z_i^-(\alpha) + w_i^-(\alpha).$$

Поэтому сохраняется порядок $v_1^-(\alpha) \leqslant v_2^-(\alpha) \leqslant \ldots \leqslant v_n^-(\alpha)$. Следовательно, для медианы $\tilde{v}_{\mathrm{Me}}$ суммы нечетких чисел $\tilde{z} + \tilde{w}$ справедливо равенство

$$v_{\mathrm{Me}}^- = z_{\mathrm{Me}}^-(\alpha) + w_{\mathrm{Me}}^-(\alpha).$$

Аналогично для правых индексов; аддитивность доказана.

Однородность при умножении на положительное число k обеспечивается неравенством

$$kz_1^-(\alpha) \leqslant kz_2^-(\alpha) \leqslant \ldots \leqslant kz_n^-(\alpha).$$

В случае умножения на отрицательное число $-k$ ($k > 0$) левые индексы чисел $-k(\tilde{z}_i)$ ($i = 1, \ldots, n$) образуют последовательность

$$-kz_1^+(\alpha) \geqslant -kz_2^+(\alpha) \geqslant \ldots \geqslant -kz_n^+(\alpha),$$

а правые индексы — последовательность

$$-kz_1^-(\alpha) \geqslant -kz_2^-(\alpha) \geqslant \ldots \geqslant -kz_n^-(\alpha),$$

так что медиана $\tilde{\mathrm{Me}}(-k\tilde{Z})$ семейства нечетких чисел $\{-k\tilde{z}_i\}$ ($i = 1, \ldots, n$) имеет левый индекс $-kMe\{z_1^+(\alpha), \ldots, z_n^+(\alpha)\}$ и правый индекс $-kMe\{z_1^-(\alpha), \ldots, z_n^-(\alpha)\}$, что совпадает с левым и правым индексами нечеткого числа $-k\tilde{\mathrm{Me}}(\tilde{Z})$. $\square$

Рассмотрим на множестве нечетких чисел метрику

$$r(\tilde{z}, \tilde{w}) = \int\limits_0^1 (|z^-(\alpha) - w^-(\alpha)| + |z^+(\alpha) - w^+(\alpha)|)d\alpha,$$

где $z^\pm(\alpha)$ и $w^\pm(\alpha)$ — левые и правые индексы нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{w}$ соответственно.

Имеет место следующее экстремальное свойство нечеткой медианы.

Утверждение 4. *Пусть $\tilde{z}_{\mathrm{Me}}$ — нечеткая медиана системы нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^n r(\tilde{z}_i, \tilde{z}_{\mathrm{Me}}) \leqslant \sum_{i=1}^n r(\tilde{z}_i, \tilde{z}_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Доказательство. Фиксируем $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим числовую последовательность левых индексов $z_1^-(\alpha), \ldots, z_n^-(\alpha)$. По определению числа $z_{\mathrm{Me}}^-(\alpha)$ и свойству числовых медиан имеем

$$\sum_{i=1}^n |z_i^-(\alpha) - z_{\mathrm{Me}}^-(\alpha)| \leqslant \sum_{i=1}^n |z_i^-(\alpha) - z_j^-(\alpha)| \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Аналогично, для правых индексов

$$\sum_{i=1}^n |z_i^+(\alpha) - z_{\mathrm{Me}}^+(\alpha)| \leqslant \sum_{i=1}^n |z_i^+(\alpha) - z_j^+(\alpha)| \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Суммируя левые и правые части указанных неравенств, а затем интегрируя полученный результат по α от 0 до 1, получаем требуемое утверждение. $\square$

Замечание 1. Вместо метрики r можно рассмотреть метрику

$$r' = r'(\tilde{z}, \tilde{w}) = \sup_{0<\alpha\leqslant 1} \Big\{ |z^+(\alpha) - w^+(\alpha)| + |z^-(\alpha) - w^-(\alpha)| \Big\}.$$

Ясно, что оператор осреднения (5) непрерывен по метрике r'.

Отметим, что в [17] рассматриваются вопросы аппроксимации медианы нечетко-случайной величины медианами нечетких выборок. Представленные в настоящей статье результаты не обсуждаются.

4. Нелинейные нечеткие средние систем нечетких чисел и нелинейные операторы осреднения. Перейдем к рассмотрению нелинейных нечетких средних систем нечетких чисел. Определим понятие функции от нечеткого числа, используя интервальный подход. Заметим, что определение функции от нечеткого числа связано с принципом нечеткого обобщения Л. Заде (см., например, [18–20]).

В работе С. Намиаса [14] ему придан следующий вид. Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, обладающая обратной g^{-1}. Тогда для нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ функция принадлежности нечеткого числа $g(\tilde{z})$ определяется формулой

$$\mu_{g(\tilde{z})}(x) = \sup_{u: g(u)=x} \mu_{\tilde{z}}(u) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Лемма 2. *Пусть $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая вещественная функция. Если $\tilde{z}$ — нечеткое число с левым и правым индексами $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$, то $\phi(z^-(\alpha))$ и $\phi(z^+(\alpha))$ — соответственно левый и правый индексы нечеткого числа $\phi(\tilde{z})$. Если $\phi(x)$ — непрерываная монотонно убывающая функция, то $\phi(z^+(\alpha))$ и $\phi(z^-(\alpha))$ — левый и правый индексы $\phi(\tilde{z})$ соответственно.*

Доказательство. В [15] показано, что при выполнении условий (i), (iv) введения на нечеткое число $\tilde{z}$ и для непрерывной функции $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ справедливо утверждение, что α-интервал $[\phi(\tilde{z})]_\alpha$ нечеткого числа $\tilde{z}$ при любом $\alpha \in (0, 1]$ совпадает с интервалом $\phi(Z_\alpha)$, где Z_α — α-интервал нечеткого числа $\tilde{z}$. Тогда в силу предположения о монотонном возрастании (либо убывании) функции ϕ получим требуемый результат. □

Замечание 2. В условиях леммы 2 левый индекс интервала α-уровня нечеткого числа $\phi(\tilde{z})$ возрастает по α, а правый — убывает по α. Этот факт — с учетом монотонного возрастания $z^-(\alpha)$ и монотонного убывания $z^+(\alpha)$ — следует из того, что суперпозиция монотонно возрастающих функций (либо монотонно убывающих) есть монотонно возрастающая функция, а суперпозиция монотонно убывающей и монотонно возрастающей (либо монотонно возрастающий и монотонно убывающей) есть монотонно убывающая функция.

Пусть заданы нечеткие числа $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$, и действительные числа $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, причем $\beta_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Рассмотрим нелинейные средние общего вида для заданной строго монотонно возрастающей (убывающей) функции $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\tilde{z}_\phi = \phi^{-1}\biggl(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi(\tilde{z}_i)\biggr). \tag{7}$$

Функцию ϕ в этом случае называют определяющей.

Для системы вещественных чисел $z_1, \ldots, z_n$ определение (7) есть классическое определение нелинейного ассоциативного среднего общего вида (см., например, [2, гл. I], [7, гл. III]).

В случае определяющей функции $\phi_p(x) = x^p$ $(p > 1)$ (или $0 < p < 1$) в (7) получаем аналог взвешенной средней степенной, при $\phi_G(x) = \log_a x$ $(a > 1)$ — аналог взвешенной средней геометрической, при $\phi_H(x) = 1/x$ — аналог взвешенной средней гармонической. Эти средние могут быть полезны в статистике нечетких данных, так же как соответствующие им числовые нелинейные средние в классической статистике.

Отметим, что в случае определяющих функций ϕ_p и ϕ_G, учитывая их области определения, следует рассматривать совокупности положительных нечетких чисел $\tilde{z}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ в том смысле, что $z_i^-(\alpha) > 0$ для всех $\alpha \in [0, 1]$. В случае определяющей функции ϕ_H можно рассматривать как положительные, так и отрицательные (т.е. $z_i^+(\alpha) < 0$) нечеткие числа.

Лемма 3. *Левый и правый индексы нечеткого числа, определяемого формулой* (7)*, равны соответственно*

$$\phi^{-1}\biggl(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi(z_i^-(\alpha))\biggr), \quad \phi^{-1}\biggl(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi(z_i^+(\alpha))\biggr),$$

где $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ — левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{z}_i$.

Доказательство. Проведем рассуждения для левых индексов в предположении, что функция ϕ монотонно возрастает. Заметим, что нечеткое число

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi(\tilde{z}_i)$$

в силу монотонного возрастания функции ϕ на основании леммы 2 и по правилу интервального сложения нечетких чисел и умножения их на положительные числа имеет левый индекс

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi(z_i^-(\alpha)).$$

Так как ϕ^{-1} — также монотонно возрастающая функция (вместе с ϕ), то нечеткое число

$$\phi^{-1}\biggl(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\phi(\tilde{z}_i)\biggr)=\bar{z}_\phi$$

имеет левый индекс

$$\phi^{-1}\biggl(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\phi(z_i^-(\alpha))\biggr).$$

Аналогично для правых индексов. Случай монотонного убывания функции ϕ в силу леммы 2 приводит к такому же результату. □

В силу леммы 2 согласно определению (7) из теоремы 2 получаем следующий факт.

Теорема 3. *Нечеткое число $\phi(\tilde{z}_\phi)$ является решением экстремальной задачи*

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i d^2\bigl(\phi(\tilde{z}_i),\tilde{w}\bigr)\to\min\quad\forall\tilde{w}\in J,$$

где d — расстояние между нечеткими числами, определяемое формулой (3).

Определим теперь для фиксированного набора чисел $\beta_i\geqslant 0$ $(i=1,\dots,n)$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=1$, и заданной непрерывной строго монотонной функции $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ нечеткий нелинейный оператор осреднения $F_{\beta,\phi}:J^n\to J$ равенством

$$F_{\beta,\phi}(\tilde{Z})=\phi^{-1}\biggl(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\phi(\tilde{z}_i)\biggr).\tag{8}$$

Ниже индекс β будем опускать и обозначать оператор, задаваемый формулой (6), символом F_ϕ.

Отметим, что важные частные случаи нелинейного оператора осреднения (8) обладают свойством положительной однородности. Рассмотрим, например, случай определяющей функции $\phi_p(x)=x^p$.

Утверждение 5. *Для заданной системы положительных нечетких чисел $\tilde{z}_1,\dots,\tilde{z}_n$ нелинейный оператор осреднения* (8) *с определяющей функцией $\phi_p(x)=x^p$ при $p>0$ положительно однороден.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай $p>1$, когда функция x^p монотонно возрастает при $x>0$. Фиксируем число $k>0$. Рассмотрим нечеткое число

$$F_\phi(k\tilde{Z})=\phi^{-1}\biggl(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\phi(k\tilde{z}_i)\biggr).$$

По лемме 3 его левый индекс равен

$$\phi^{-1}\biggl(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\phi(kz_i^-(\alpha))\biggr);$$

в случае $\phi_p(x)=x^p$ имеем

$$\biggl(\sum_{i=1}^{n}\beta_i(kz_i^-(\alpha))^p\biggr)^{1/p}=k\biggl(\sum_{i=1}^{n}\beta_i(z_i^-(\alpha))^p\biggr)^{1/p},$$

что совпадает с левым индексом нечеткого числа

$$\biggl(\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\tilde{z}_i)^p\biggr)^{1/p},$$

умноженным на число k. Аналогично для правых индексов. Таким образом оператор F_{ϕ_p} положительно однороден. Аналогично (с учетом леммы 3) рассматривается случай $0<p<1$, когда x^p монотонно убывает. □

Замечание 3. Утверждение 5 верно и в случае $p = -1$ для средних гармонических, когда $\phi_H(x) = x^{-1}$ $(x > 0)$.

Замечание 4. Утверждение 5 верно также для средних геометрических в случае $\phi_G(x) = \ln x$ $(x > 0)$. Оно получается с помощью предельного перехода в левых и правых индексах $F_{\phi_p}(k\tilde{Z})$ при $p \to 0+$ (см., например, [2, гл. I, § 2]).

Рассмотрим совокупность нечетких чисел J_0, индексы которых непрерывны и ограничены при $\alpha \in (0, 1]$. Для элементов $\tilde{z}, \tilde{w} \in J_0$ зададим метрику по формуле

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{w}) = \sup_{0<\alpha\leqslant 1} \max\bigl\{|z^+(\alpha) - w^+(\alpha)|,\ |z^-(\alpha) - w^-(\alpha)|\bigr\}. \tag{9}$$

Подобные метрики встречаются в нечетком анализе (см., например, [13]).

Рассмотрим множество нечетких векторов J_0^n вида $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$, компоненты которого принадлежат J_0. На этом множестве зададим метрику формулой

$$\rho_n(\tilde{Z}, \tilde{W}) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\tilde{z}_i, \tilde{w}_i),$$

где ρ определяется формулой (9).

С помощью леммы 3 устанавливается следующее утверждение.

Утверждение 6. *Пусть $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго монотонная непрерывная функция. Тогда нелинейный оператор осреднения $F_\phi : J_0^n \to J_0$, определяемый формулой* (8)*, непрерывен.*

Поясним, что здесь непрерывность понимается в том смысле, что малым приращениям $\rho_n(\tilde{Z}, \tilde{W})$ соответствуют малые приращения $\rho(F_\phi(\tilde{Z}), F_\phi(\tilde{W}))$.

5. Сравнение нелинейных нечетких средних для различных определяющих функций. Обсудим вопрос о сравнении нечетких средних. В литературе содержатся различные показатели сравнения (ранжирования) нечетких чисел. Мы будем рассматривать следующий критерий сравнения нечетких чисел, заданных в интервальной форме.

Будем писать $\tilde{z} \prec \tilde{w}$ для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{w}$, если одновременно

$$z^-(\alpha) \leqslant w^-(\alpha), \quad z^+(\alpha) \leqslant w^+(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1]. \tag{10}$$

Такое определение используется, например, в книге [6, гл. 4, 5]. В частности, там приведена эквивалентная формулировка в терминах функций принадлежности нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{w}$. Именно, $\tilde{z} \prec \tilde{w}$, если

(i) для всех $w \in \mathbb{R}$ найдется вещественное число z, удовлетворяющее неравенству $\mu_{\tilde{z}}(z) \geqslant \mu_{\tilde{w}}(w)$;
(ii) для любого $z \in \mathbb{R}$ найдется такое вещественное число $w \geqslant z$, что $\mu_{\tilde{z}}(z) \leqslant \mu_{\tilde{w}}(w)$.

По существу, определение (10) вводит отношение частичной упорядоченности на множестве нечетких чисел.

Пример 3. Пусть $\tilde{z}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ и $\tilde{z}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ — трапецеидальные нечеткие числа. Соотношение $\tilde{z}_1 \prec \tilde{z}_2$ для них означает выполнение следующих условий: первое из соотношений (10) эквивалентно совокупности условий $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$; а второе — совокупности условий $d_1 \leqslant d_2$ и $c_1 \leqslant c_2$.

Справедливо следующее утверждение о соотношениях между нелинейными средними.

Теорема 4. *Пусть $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ — совокупность нечетких чисел. Пусть $\phi(x)$ — непрерывная вогнутая (выпуклая вниз) возрастающая функция, либо выпуклая (вверх) убывающая функция. Тогда справедливо соотношение $\tilde{z}_{cp} \prec \tilde{z}_\phi$. Здесь нечеткие средние $\tilde{z}_{cp}$ и $\tilde{z}_\phi$ определяются формулами* (1) *и* (7) *соответственно.*

Если $\phi(x)$ — непрерывная выпуклая вниз убывающая функция либо выпуклая вверх возрастающая функция, то $\tilde{z}_{cp} \succ \tilde{z}_\phi$.

Доказательство. Рассмотрим, например, первый случай, когда функция ϕ выпукла вниз и монотонно возрастает. В соответствии с (8) нужно показать, что

$$z_{\text{ср}}^-(\alpha) \leqslant z_\phi^-(\alpha), \quad z_{\text{ср}}^+(\alpha) \leqslant z_\phi^+(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0,1]. \tag{11}$$

Проведем рассуждения для левых индексов. Заметим, что нечеткое число

$$\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(\tilde{z}_i)\right) = \bar{z}_\phi$$

имеет левый индекс

$$\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(z_i^-(\alpha))\right).$$

Зафиксируем $\alpha \in (0,1]$. В силу свойства выпуклости вниз функции $\phi(x)$ функция $g(x) = \phi^{-1}(x)$ выпукла вверх. Тогда, как известно (см., например, [7, гл. III]), для любых чисел $y_1, \ldots, y_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$, удовлетворяющих условиям $\beta_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^n \beta_i = 1$, выполнено неравенство

$$g\left(\sum_{i=1}^n \beta_i y_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^n \beta_i g(y_i).$$

Полагая здесь $y_i = \phi(z_i^-(\alpha))$ и используя равенство $\phi^{-1}(\phi(y)) = y$, получим

$$\phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \phi(z_i^-(\alpha))\right) \geqslant \sum_{i=1}^n \beta_i z_i^-(\alpha),$$

т.е. соотношение (11) для левых индексов. Аналогичные рассуждения справедливы для правых индексов. □

В частности, теорема 4 справедлива при $\beta_i = 1/n$ $(i = 1, \ldots, n)$, когда $\tilde{z}_{\text{ср}}$ есть средняя арифметическая.

Пусть заданы положительные нечеткие числа $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$. Обозначим среднее (7) при определяющих функции $\phi_p(x)$, $\phi_G(x)$ и $\phi_H(x)$ через $\tilde{z}_p$, $\tilde{z}_G$ и $\tilde{z}_H$ соответственно. Из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Справедливо соотношение $\tilde{z}_{cp} \prec \tilde{z}_p$ при $p > 1$ и $\tilde{z}_{cp} \succ \tilde{z}_p$ при $0 < p < 1$.*

Доказательство. Функция $\phi_p(x) = x^p$ при $p > 1$ выпукла вниз и монотонно возрастает, а при $0 < p < 1$ выпукла вверх и монотонно возрастает для $x > 0$. Тогда теорема 4 дает нечеткий аналог неравенства между средними степенными и средней арифметической. □

Следствие 3. *Справедливо соотношение $\tilde{z}_G \prec \tilde{z}_{cp}$.*

Доказательство. В этом случае определяющая функция в (7) есть $\phi_G(x) = \log_a(x)$ $(a > 1)$. Она выпукла вверх и монотонно возрастает при $x > 0$. Теорема 4 представляет собой аналог для нечетких чисел известного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (см., например, [15, гл. II, § 2.5]) для вещественных чисел. □

Следствие 4. *Имеет место соотношение $\tilde{z}_H \prec \tilde{z}_{cp}$.*

Доказательство. Определяющая функция $\phi_H(x) = 1/x$ выпукла вниз и монотонно убывает при $x > 0$. Теорема 4 дает нечеткий аналог неравенства между средним арифметическим и средним гармоническим. □

6. Заключение. Линейные средние нечетких чисел и их систем достаточно хорошо изучены (см., например, [16, гл. 7], [10, 12, 17]). Однако результаты, установленные в настоящей статье, ранее не освещались. Они могут найти применение, в частности, для «нечеткой» задачи агрегирования, когда агрегируемая информация представляет собой набор нечетких чисел (ср., например, [5]).

Полученные в данной работе результаты по нелинейным средним систем нечетких чисел являются, по-видимому, пионерскими. Они могут быть использованы в статистике «нечетких» данных, так же как соответствующие числовые средние в «обычной» статистике, где среднее подбирается в зависимости от задачи.

Представляется возможным развитие результатов настоящей статьи в направлении (бесконечных) рядов нечетких чисел и интегралов.

В заключение отметим, что «нечеткий подход» к изучению неопределенности является в некотором смысле альтернативой вероятностному подходу. Близкие к данной работе по тематике результаты для нелинейных средних случайных величин содержатся в недавней работе автора [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверкин А. Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искуственного интеллекта. — М.: Наука, 1986.
2. *Джини К.* Средние величины. — М.: Статистика, 1970.
3. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982.
4. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. — М.: Бином, 2015.
5. *Посадский А. И., Сивакова Т. В., Судаков В. А.* Агрегирование нечетких суждений экспертов/ https://doi.org/10.20948/prepr-2019-101. — Москва: Препринт ИПМ №101, 2019.
6. *Смоляк С. А.* Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. — М.: Наука, 2002.
7. *Харди Г., Пойа Д., Литтлвуд Д.* Неравенства. — М.: МЦНМО, 2008.
8. *Хацкевич В. Л.* О некоторых нелинейных характеристиках центра группирования случайных величин// Изв. вузов. Мат. — 2020. — № 8. — С. 50—58.
9. *Diamond P., Kloeden P.* Metric spaces of fuzzy sets// Fuzzy Sets Syst. — 1990. — *35*, № 2. — P. 241–249.
10. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — *24*. — P. 279–300.
11. *Feng Y,. Hu L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables// Fuzzy Syst. — 2001. — *120*. — P. 487–497.
12. *Fuller R., Majlender P.* On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers// Fuzzy Sets Syst. — 2003. — *136*. — P. 363–374.
13. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — *12*. — P. 215–229.
14. *Nahmias S.* Fuzzy variables// Fuzzy Sets Syst. — 1978. — *1*. — P. 97–110.
15. *Nguyen H. T.* A note on the extension principle for fuzzy sets// J. Math. Anal. Appl. — 1978. — *64*. — P. 369–380.
16. *Nguyen H. T., Wu B.* Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. — Berlin: Springer, 2006.
17. *de la Rosa de Saa S., Gil M. A., Gonsalez-Rodrigues G., Lopez M. T., Lubiano M. A.* Fuzzy rating scale-based questionnaires and their statistical analysis// IEEE Trans. Fuzzy Syst. — 2015. — *23*. — P. 111–126.
18. *Zadeh L. A.* The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning// Inform. Sci. — 1975. — *8*. — P. 199–249.
19. *Zadeh L. A.* The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, II// Inform. Sci. — 1975. — *8*. — P. 301–357.
20. *Zadeh L. A.* The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, III// Inform. Sci. — 1975. — *9*. — P. 43–80.

Хацкевич Владимир Львович
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж
E-mail: `vlkhats@mail.ru`