



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 209 (2022). С. 33–41
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-33-41

УДК 517.938.5, 512.7

НОВАЯ БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА В ОДНОЙ МОДЕЛИ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ

© 2022 г. Г. П. ПАЛЬШИН

Аннотация. Рассматривается вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система с двумя степенями свободы, включающая в себя два предельных случая. Первая система описывает динамику двух вихревых нитей в конденсате Бозе—Эйнштейна, заключённом в гармоническую ловушку, вторая — динамику точечных вихрей в идеальной жидкости, ограниченной круговой областью. Для случая вихрей с произвольными интенсивностями приведена явная редукция к системе с одной степенью свободы. Для интенсивностей разных знаков найдена новая бифуркационная диаграмма, которая не встречалась ранее в работах по указанной тематике. Также в явном виде получена разделяющая кривая, которая отвечает за изменение проекции торов Лиувилля без изменения их количества.

Ключевые слова: вихревая динамика, вполне интегрируемая гамильтонова система, бифуркационная диаграмма, интегральное отображение, бифуркации торов Лиувилля, конденсат Бозе—Эйнштейна.

NEW BIFURCATION DIAGRAM IN ONE MODEL OF VORTEX DYNAMICS

© 2022 G. P. PALSHIN

ABSTRACT. We consider a completely Liouville-integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom, which includes two limit cases. The first system describes the dynamics of two vortex filaments in a Bose–Einstein condensate enclosed in a harmonic trap. The second system governs the dynamics of point vortices in an ideal fluid in a circular domain. For the case of vortices with arbitrary intensities, we explicitly reduce the problem to a system with one degree of freedom. For intensities of different signs, we detect a new bifurcation diagram, which has not been previously encountered in works on this topic. Also, we obtain a separating curve, which is related to the change of the projections of Liouville tori without changing their number.

Keywords and phrases: vortex dynamics, completely integrable Hamiltonian system, bifurcation diagram, integral mapping, bifurcations of Liouville tori, Bose–Einstein condensate.

AMS Subject Classification: 76M23, 37J35, 37J06, 34A05

1. Введение. Первые интегрируемые случаи в динамике вихрей были обнаружены сразу после открытия теории вихрей Г. Гельмгольцем [10]. Классическая задача трёх вихрей была исследована Г. Кирхгофом [11] и В. Грёбли [9], а чуть позже А. Гринхилл указал на интегрируемость задачи двух вихрей вблизи цилиндра (см. [8]). Некоторые интегрируемые случаи были описаны Д. Н. Горячевым [2]. Обзор результатов проблемы трёх вихрей можно найти, например, в [5]. Стоит упомянуть и современные исследования трёх вихрей на сфере: А. В. Борисова и В. Г. Лебедева [6], А. В. Борисова и А. Е. Павлова [7], П. Ньютона и Р. Кидамби [13]. В данной работе

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00399).

рассматривается общий случай построения бифуркационной диаграммы двухпараметрического семейства интегрируемых систем, охватывающий как классическую идеальную жидкость, так и случай конденсата Бозе—Эйнштейна. Ранее были получены результаты для случаев, когда интенсивности вихрей положительны (см. [3]) или одного знака (см. [4]). В [14] показано наличие бифуркации четырёх торов в один.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору П. Е. Рябову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Описание модели. Рассматривается интегрируемая модель вихревой динамики, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\Gamma_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}(z_1, z_2), \quad \Gamma_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}(z_1, z_2), \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \left[\Gamma_1^2 \ln(1 - |z_1|^2) + \Gamma_2^2 \ln(1 - |z_2|^2) + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left(\frac{[|z_1 - z_2|^2 + (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)]^\varepsilon}{|z_1 - z_2|^{2(c+\varepsilon)}} \right) \right], \quad (2)$$

где $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$ — координаты k -го вихря в плоской прямоугольной декартовой системе координат, а Γ_k — его интенсивность. Здесь параметр ε является параметром возмущения, а физический параметр c отвечает за взаимодействие между вихрями. Значение параметра $\varepsilon = 0$ приводит систему к первому предельному случаю — к модели двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключённом в гармоническую ловушку (см. [12, 18]). Второй предельный случай — модель пары точечных вихрей в идеальной жидкости, которая ограничена круговой областью, — возникает при значениях параметров $c = 0$ и $\varepsilon = 1$ (см. [1]).

Система (1) допускает дополнительный первый интеграл F , связанный с инвариантностью гамильтониана относительно вращений системы координат:

$$F = \Gamma_1 |z_1|^2 + \Gamma_2 |z_2|^2, \quad (3)$$

а значит, является вполне интегрируемой системой с двумя степенями свободы, согласно теореме Лиувилля. Скобка Ли—Пуассона для фазового пространства $\mathcal{P}$ задаётся следующим образом:

$$\{z_k, z_j\} = -\frac{2i}{\Gamma_k} \delta_{kj}, \quad (4)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера (индикатор равенства элементов). Основную роль при исследовании подобных систем играет бифуркационное множество $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$, представляющее собой образ критического множества $\mathcal{C}$ интегрального отображения $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (множества точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(z) < 2$), где $\mathcal{F}(z) = (F(z), H(z))$, а

$$\mathcal{P} = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1, z_1 \neq z_2\}$$

— фазовое пространство.

3. Построение бифуркационной диаграммы. Введём обозначения F_1 и F_2 для следующих полиномиальных выражений:

$$F_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

$$\begin{aligned} F_2 = & c x_2 (\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2) (x_2^2 + y_2^2 - 1) [x_2 (x_1 x_2 - 1) + x_1 y_2^2] [(x_1^2 - 1) x_2^2 + x_1^2 y_2^2] + \\ & + \Gamma_2 [(x_1^2 - 1) x_2^2 + x_1^2 y_2^2] \left\{ \varepsilon x_2^3 (x_2^2 + y_2^2 - 1)^2 + x_1 (x_1 - x_2) (x_2^2 + y_2^2) [x_2 (x_1 x_2 - 1) + x_1 y_2^2] \right\} + \\ & + \Gamma_1 x_1 (x_2^2 + y_2^2 - 1) \left\{ x_2^2 (x_2 - x_1) (x_2^2 + y_2^2) [x_2 (x_1 x_2 - 1) + x_1 y_2^2] + \varepsilon [(x_1^2 - 1) x_2^2 + x_1^2 y_2^2]^2 \right\}, \end{aligned}$$

а замыкание множества решений системы

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \quad (5)$$

обозначим через $\mathcal{N}$. В таком случае выполняется следующая теорема.

Теорема 1 (см. [15]). *Множество критических точек $\mathcal{C}$ интегрального отображения $\mathcal{F}$ совпадает с множеством решений системы (5). Множество $\mathcal{N}$ является двумерным инвариантным подмногообразием системы (1) с гамильтонианом (2).*

Для определения бифуркационной диаграммы Σ как образа множества критических точек $\mathcal{C}$ интегрального отображения $\mathcal{F}$ удобно перейти к полярным координатам:

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1, \quad x_2 = r_2 \cos \theta_2, \quad y_2 = r_2 \sin \theta_2. \quad (6)$$

Подстановка (6) в первое выражение системы (5) приводит к уравнению $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т.е. $\theta_1 - \theta_2 = 0$ или $\theta_1 - \theta_2 = \pi$.

В случае $\theta_1 = \theta_2 + \pi$ второе уравнение системы (5) сводится к

$$W_1(r_1, r_2) = 0, \quad (7)$$

где

$$W_1(r_1, r_2) = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2) \left\{ [c(1 + r_1 r_2) + \varepsilon] (\Gamma_1 r_1 - \Gamma_2 r_2) - \varepsilon (\Gamma_1 r_1^3 - \Gamma_2 r_2^3) \right\} - r_1 r_2 (r_1 + r_2) (1 + r_1 r_2) [\Gamma_1 (1 - r_2^2) - \Gamma_2 (1 - r_1^2)].$$

В случае $\theta_1 = \theta_2$ второе уравнение системы (5) сводится к

$$W_2(r_1, r_2) = 0, \quad (8)$$

где

$$W_2(r_1, r_2) = W_1(r_1, -r_2).$$

Подстановка (6) в гамильтониан (2) и момент завихренности (3) в случае $\theta_1 = \theta_2 + \pi$ приводит к следующим значениям первых интегралов:

$$\gamma_1 : \begin{cases} h_1(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_1^2 \ln(1 - r_1^2) + \Gamma_2^2 \ln(1 - r_2^2) + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left[\frac{(1 + r_1 r_2)^{2\varepsilon}}{(r_1 + r_2)^{2(c+\varepsilon)}} \right] \right\}, \\ f(r_1, r_2) = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \end{cases} \quad (9)$$

В случае $\theta_1 = \theta_2$

$$\gamma_2 : \begin{cases} h_2(r_1, r_2) = h_1(r_1, -r_2), \\ f(r_1, r_2) = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \end{cases} \quad (10)$$

Системы (9) и (10) вместе с уравнениями (7), (8) неявным образом определяют бифуркационную диаграмму на плоскости $\mathbb{R}^2(f, h)$. На рис. 1 показана бифуркационная диаграмма системы двух вихрей с противоположными по знаку интенсивностями для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0,45$, $c = 1,5$, $\varepsilon = 3$. Здесь приведены следующие значения первых интегралов:

$$h_m = -1,75, \quad h_q = -1,3, \quad m_1 = 0,05, \quad m_2 = 0,0847786118, \quad m_3 = 0,09, \quad m_4 = 0,198, \\ d_1 = (0,1537691986, -1,9791878639), \quad q_1 = -0,15, \quad q_2 = -0,07707, \quad q_3 = -0,075$$

(отметим, что $m_2 \in \gamma_2$ и $d_1 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$). Данная диаграмма схожа с результатами, полученными в [16].

В нашем случае бифуркационное множество определяется как двухпараметрическое семейство. На рис. 2 показан новый тип бифуркационной диаграммы из этого семейства, который не наблюдался ни в одной из работ [15–17]. Такая диаграмма содержит две «петли» с точками возврата, причём одна из петель имеет только одну вертикальную асимптоту. На рисунке также изображена разделяющая кривая γ_3 , отвечающая за изменение проекции торov в прообразе интегрального отображения без изменения их количества. Уравнение для γ_3 можно представить в явном виде:

$$\gamma_3 : h = \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_1^2 \ln \left(1 - \frac{f}{|\Gamma_1|} \right) - \Gamma_1 \Gamma_2 (c + \varepsilon) \ln \left(\frac{f}{|\Gamma_1|} \right) \right\}, \quad 0 < f < |\Gamma_1|.$$

Значения второго интеграла $f = p_k$, $k = 1, \dots, 15$ вдоль линии $h = h_p = -5.7$ представлены в таблице 1, где точки p_2 , p_5 , p_7 , p_{14} лежат на γ_2 , точка $d_2 = (0.6260532, -2.4840538628)$ — на $\gamma_2 \cap \gamma_3$, точка p_{11} — на $(h = h_p) \cap \gamma_3$.

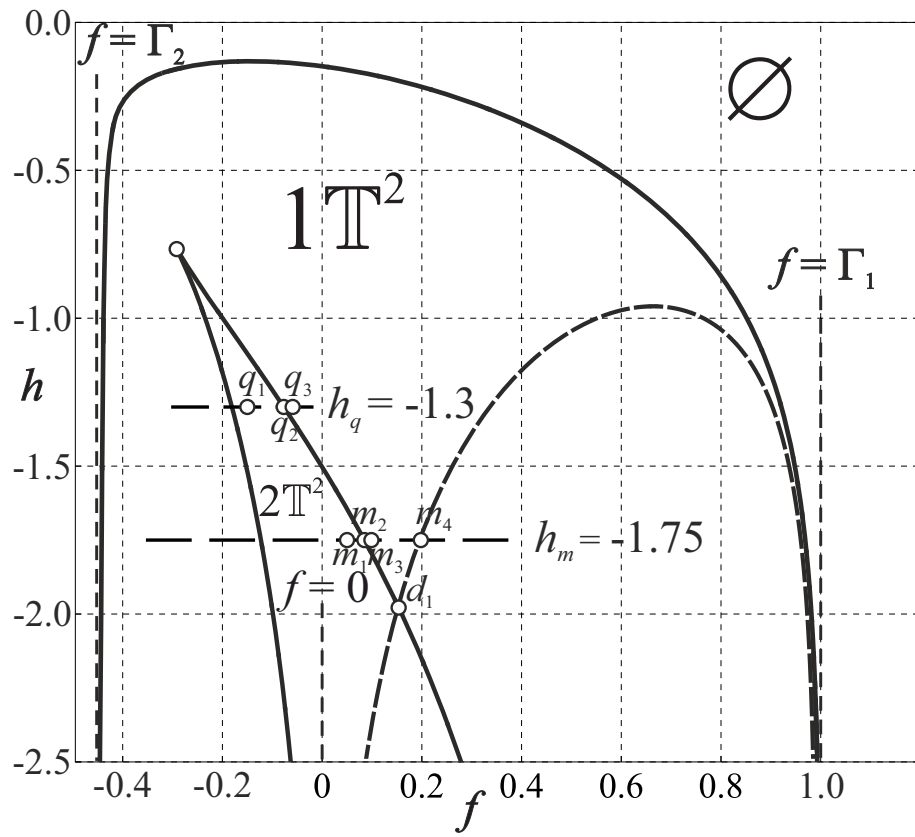


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0.45$, $c = 1.5$, $\varepsilon = 3$.

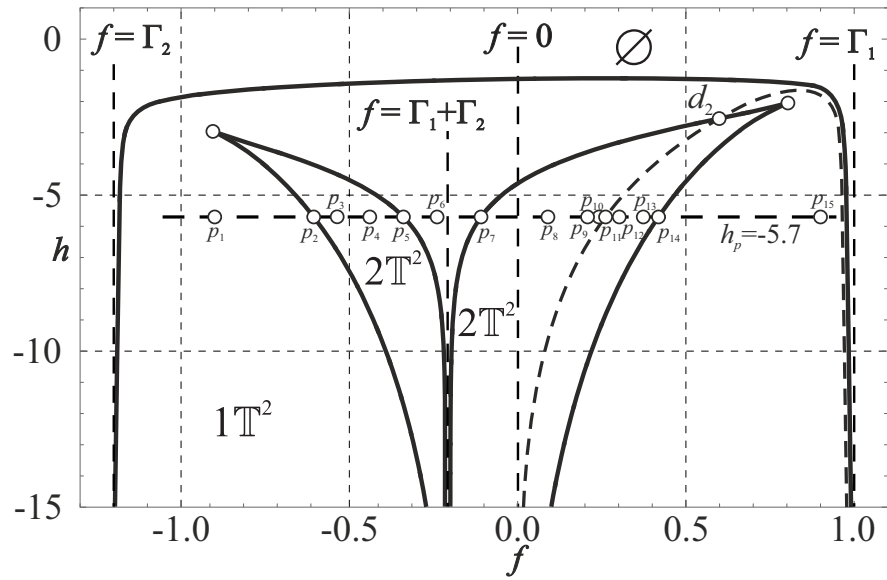


Рис. 2. Новая бифуркационная диаграмма для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -1.2$, $c = 0.09$, $\varepsilon = 7$.

Таблица 1. Значения второго интеграла $f = p_k$.

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
-0,9	-0,591655	-0,59	-0,425	-0,324902
p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}
-0,225	-0,108766	0,09	0,2685	0,25
p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}
0,271816	0,35	0,415	0,418417	0,9

4. Редукция к системе с одной степенью свободы. Для случая двух одинаковых вихрей и двух вихрей с интенсивностями одного знака понижение числа степеней свободы уже было предъявлено в [16] и [15] соответственно. Далее будет рассмотрено явное сведение системы (1) с гамильтонианом (2) к гамильтоновой системе с одной степенью свободы для вихрей с произвольными интенсивностями.

Для понижения числа степеней свободы перейдём от фазовых переменных (x_k, y_k) к новым переменным (u, v, α) :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}} [u \cos(\alpha) - v \sin(\alpha)], & x_2 &= \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)}, \\ y_1 &= \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2)}{\sqrt{|\Gamma_1|}} [u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha)], & y_2 &= \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{|\Gamma_2|}} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)}. \end{aligned}$$

Выбор такой замены продиктован наличием интеграла углового момента завихренности (3), инвариантного относительно группы вращений $SO(2)$. В результате замены переменные (u, v) приобретают значение координат одного из вихрей в координатной системе, которая связана со вторым вихрем, вращающимся вокруг центра завихренности. Обратная подстановка

$$U = \frac{\sqrt{|\Gamma_1|} (x_1 x_2 + y_1 y_2)}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \quad V = \frac{\sqrt{|\Gamma_1|} (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

приводит к каноническим переменным относительно скобки Ли—Пуассона (4):

$$\{U, V\} = -\{V, U\} = \operatorname{sgn} \Gamma_1, \quad \{U, U\} = \{V, V\} = 0.$$

Как было сказано ранее, система остаётся гамильтоновой относительно переменных (u, v) :

$$\dot{u} = \frac{\partial H}{\partial v} \operatorname{sgn} \Gamma_1, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u} \operatorname{sgn} \Gamma_1 \quad (11)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_1^2 \ln \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{|\Gamma_1|} \right) + \Gamma_2^2 \ln \left(1 - \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}{|\Gamma_2|} \right) - \right. \\ &\quad - \Gamma_1 \Gamma_2 (c + \varepsilon) \ln \left[\left(\frac{\operatorname{sgn} \Gamma_1 u}{\sqrt{|\Gamma_1|}} - \frac{\operatorname{sgn} \Gamma_2 \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}}{\sqrt{|\Gamma_2|}} \right)^2 + \frac{v^2}{|\Gamma_1|} \right] + \\ &\quad + \varepsilon \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left[\left(1 - \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) u \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}}{\sqrt{|\Gamma_1| |\Gamma_2|}} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) v^2 [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}{|\Gamma_1| |\Gamma_2|} \right] \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

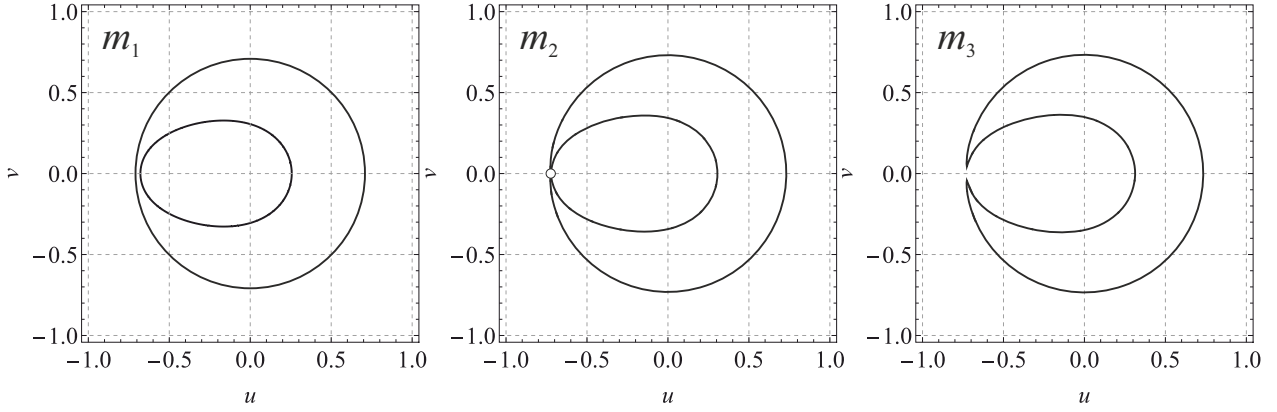


Рис. 3. Линии уровня редуцированного гамильтониана H для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0,45$, $c = 1,5$, $\varepsilon = 3$, соответствующих точкам $m_1 = 0,05$, $m_2 = 0,0847786118$ (точка $m_2 \in \gamma_2$), $m_3 = 0,09$ и значению $h_m = -1,75$.

Угол поворота вращающейся системы координат $\alpha(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\alpha} = \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_2 - f + \operatorname{sgn} \Gamma_1 (u^2 + v^2)} + c \frac{\Gamma_1 |\Gamma_2| \sqrt{|\Gamma_1|}}{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2)} \frac{R_1(u, v)}{Q_1(u, v)} + \\ + \varepsilon \Gamma_1 |\Gamma_2| \sqrt{|\Gamma_2|} \frac{|\Gamma_1| - u^2 - v^2}{\sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) [f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - (u^2 + v^2)]}} \frac{R_2(u, v)}{Q_2(u, v)},$$

где

$$R_1(u, v) = \Gamma_1 (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) - \Gamma_2 u^2,$$

$$Q_1(u, v) = \sqrt{|\Gamma_2|} u \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)} \left[\Gamma_2 (u^2 + v^2) - \Gamma_1 (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) \right] + \\ + \sqrt{|\Gamma_1|} (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) \left[\Gamma_1 (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) - \Gamma_2 (u^2 - v^2) \right],$$

$$R_2(u, v) = \sqrt{|\Gamma_2|} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)} (|\Gamma_1| + u^2 + v^2) - \\ - \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \sqrt{|\Gamma_1|} u \left[|\Gamma_2| + \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) \right],$$

$$Q_2(u, v) = \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) |\Gamma_2| \left[|\Gamma_1| (|\Gamma_1| + 4u^2) + (u^2 + v^2)^2 \right] (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) + \\ + |\Gamma_1| (u^2 + v^2) \left[\Gamma_2^2 + (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)^2 \right] - \\ - 2u \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) \sqrt{|\Gamma_1| |\Gamma_2|} \sqrt{\operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2)} \times \\ \times (|\Gamma_1| + u^2 + v^2) \left[|\Gamma_2| + \operatorname{sgn}(\Gamma_1 \Gamma_2) (f \operatorname{sgn} \Gamma_1 - u^2 - v^2) \right].$$

Критические точки редуцированного гамильтониана (12) определяют стационарные точки системы (11), соответствующие относительным положениям вихрей. При фиксированном значении момента завихренности f , регулярные уровни редуцированного гамильтониана компактны, а движения происходят по замкнутым кривым. Критические значения приведённого гамильтониана определяют бифуркационное множество (7)–(10).

На рис. 3 представлены линии уровня редуцированного гамильтониана H (12) для значений параметра второго интеграла $f = m_1, m_2, m_3$, соответствующих движению вдоль линии $h =$

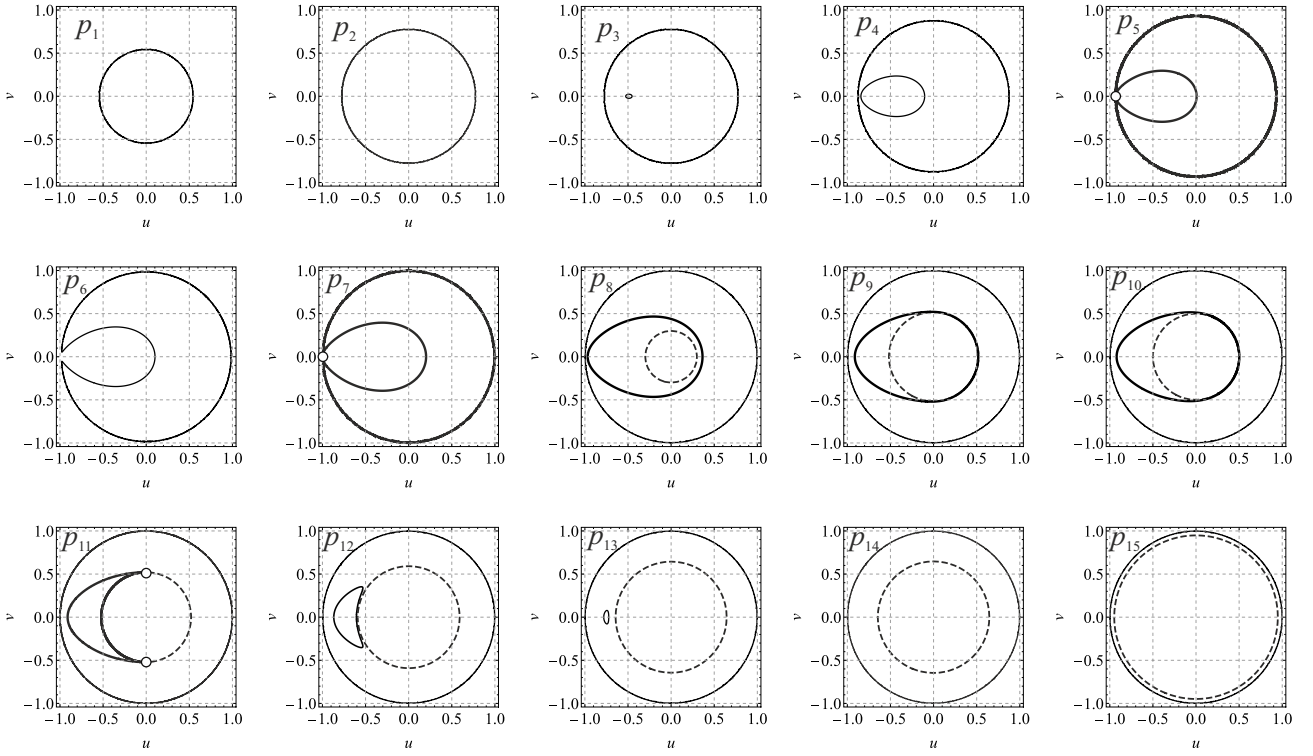


Рис. 4. Линии уровня редуцированного гамильтониана для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -1, 2$, $c = 0,09$, $\varepsilon = 7$, соответствующие точкам (h_p, f_k) на рис. 2, где $h_p = -5,7$, $f_k = p_k$, $k = 1, \dots, 15$ (см. таблицу 1).

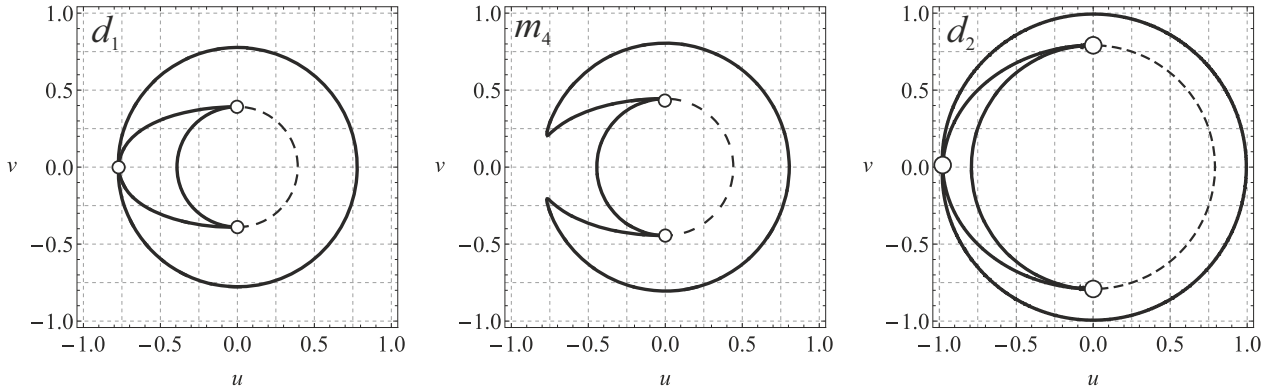


Рис. 5. Линии уровня редуцированного гамильтониана H , соответствующие точкам $d_1 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$, $m_4 \in (h = h_m) \cap \gamma_3$ и $d_2 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

$h_m = -1,75$ бифуркационной диаграммы на рис. 1. Рисунок 4 соответствует бифуркационной диаграмме на рис. 2 и фиксированному значению $h = h_p = -5,7$.

На рис. 5 изображены типичные линии уровня гамильтониана H (12) для случая пересечения одной из ветвей бифуркационной кривой γ_2 и разделяющей кривой γ_3 . Здесь точка $d_1 = (0,1537691986, -1,9791878639) \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ соответствует бифуркационной диаграмме на рис. 1, а $d_2 = (0,626053, -2,4840538628) \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ — диаграмме на рис. 2 с соответствующими параметрами.

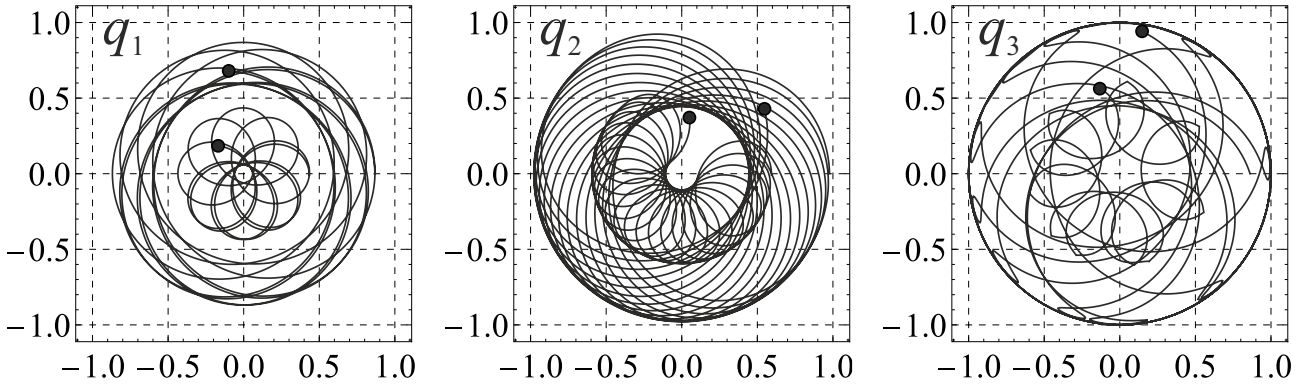


Рис. 6. Траектории вихрей для параметров $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = -0,45$, $c = 1,5$, $\varepsilon = 3$, соответствующие точкам $q_1 = (-0,15, -1,3)$, $q_2 = (-0,07707, -1,3)$ и $q_3 = (-0,075, -1,3)$ бифуркационной диаграммы рис. 1.

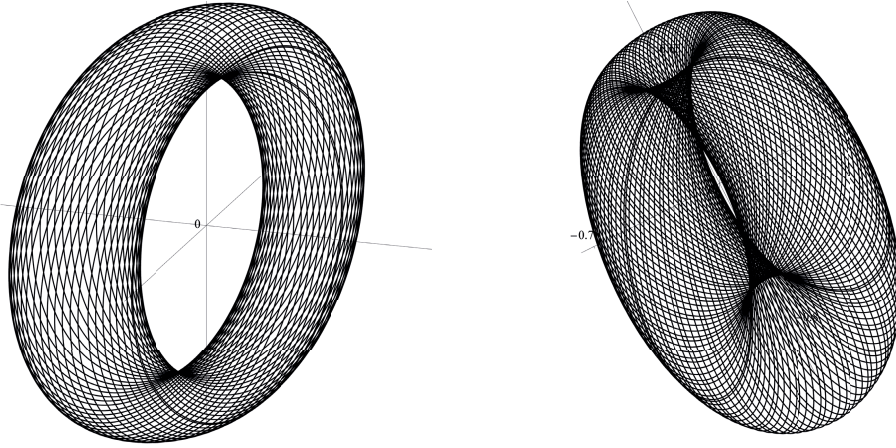


Рис. 7. Абсолютные движения вихрей в виде обмотки тора.

На рис. 6 показано несколько типов вихревых траекторий на плоскости (x, y) , меняющихся при движении вдоль линии $h = h_q = -1,3$ на бифуркационной диаграмме рис. 1 ($q_1 = -0,15$, $q_2 = -0,07707$, $q_3 = -0,075$).

Примеры абсолютного движения вихрей в виде однокомпонентной торической обмотки для значений констант первых интегралов $h_q = -1,3$, $f = q_1 = -0,15$ и $h_p = -5,7$, $f = 0,283$ представлены на рис. 7.

5. Заключение. В работе найдена бифуркационная диаграмма отображения импульса для обобщённой системы, которая описывает как динамику двух вихрей в идеальной жидкости, помещённой внутри кругового цилиндра, так и в конденсате Бозе—Эйнштейна, заключённом в гармоническую ловушку. Стоит напомнить, что в случае двух вихрей одного знака, рассмотренном в [15], бифуркационная диаграмма вихрей в конденсате Бозе—Эйнштейна существенно отличается от диаграммы вихрей в идеальной жидкости. Обнаружено, что, с одной стороны, имеются диаграммы, подобные построенным в [15–17], а с другой стороны, — диаграммы, которые существенно отличаются от тех, что встречались ранее. Также найдено аналитическое выражение для разделяющей кривой γ_3 , не являющейся бифуркационной, но влияющей на проекцию торов в прообразе интегрального отображения. Последний раздел посвящён редукции к гамильтоновой системе с одной степенью свободы для произвольных интенсивностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Математические методы динамики вихревых структур. — М.-Ижевск, 2005.
2. *Горячев Д. Н.* О некоторых случаях движения прямолинейных вихрей// Уч. зап. Моск. ун-та, отд. физ.-мат. — 1899. — № 16. — С. 1–106.
3. *Рябов П. Е.* Бифуркации торов Лиувилля в системе двух вихрей в Бозе—Эйнштейновском конденсате, имеющих положительные интенсивности// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 6. — С. 670–675.
4. *Соколов С. В., Рябов П. Е.* Бифуркационная диаграмма системы двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, имеющих интенсивности одинаковых знаков// Докл. РАН. — 2018. — 480, № 6. — С. 652–656.
5. *Aref H.* Gröbli's solution of the three-vortex problem// Ann. Rev. Fluid Mech. — 1992. — 24. — P. 1–20.
6. *Borisov A. V., Lebedev V. G.* Dynamics of three vortices on a plane and a sphere. II. General compact case// Regul. Chaot. Dynam. — 1998. — 3, № 2. — P. 99–114.
7. *Borisov A. V., Pavlov A. E.* Dynamics and statics of vortices on a plane and a sphere. I// Regul. Chaot. Dynam. — 1998. — 3, № 1. — P. 28–38.
8. *Greenhill A. G.* Plane vortex motion// Quart. J. Pure Appl. Math. — 1877/78. — 15, № 58. — P. 10–27.
9. *Gröbli W.* Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden// Vierteljahrsch. d. Naturforsch. Gesellsch. — 1877. — 22. — P. 37–81.
10. *Helmholtz H.* Über Integrale hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen// J. Reine Angew. Math. — 1858. — 55. — P. 25–55.
11. *Kirchhoff G. R.* Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 1. Mechanik. — Leipzig: Teubner, 1874.
12. *Koukouloyannis V., Voyatzis G., Kevrekidis P. G.* Dynamics of three noncorotating vortices in Bose–Einstein condensates// Phys. Rev. E. — 2014. — 89, № 4. — 042905.
13. *Newton P. K., Kidambi R.* Motion of three point vortices on a sphere// Phys. D. — 1998. — 116, № 1–2. — P. 143–175.
14. *Ryabov P. E.* Bifurcation of four Liouville tori in one generalized integrable model of vortex dynamics// Dokl. Phys. — 2019. — 64, № 8. — P. 325–329.
15. *Ryabov P. E., Shadrin A. A.* Bifurcation diagram of one generalized integrable model of vortex dynamics// Regul. Chaot. Dynam. — 2019. — 24, № 4. — P. 418–431.
16. *Ryabov P. E., Sokolov S. V.* Phase topology of two vortices of identical intensities in a Bose–Einstein condensate// Rus. J. Nonlin. Dynam. — 2019. — 15, № 1. — P. 59–66.
17. *Sokolov S. V., Ryabov P. E.* Bifurcation analysis of the dynamics of two vortices in a Bose–Einstein condensate. The case of intensities of opposite signs// Regul. Chaot. Dynam. — 2017. — 22, № 8. — P. 979–998.
18. *Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-Gonzalez R., Schmelcher P., Hall D. S.* Dynamics of vortex dipoles in confined Bose–Einstein condensates// Phys. Lett. A. — 2011. — 375. — P. 3044–3050.

Пальшин Глеб Павлович

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

E-mail: gleb.palshin@yandex.ru