ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 209 (2022). С. 16–24
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-16-24

УДК 517.958

О ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

© 2022 г. **Ю. А. ГЛАДЫШЕВ, Е. А. ЛОШКАРЕВА**

Аннотация. В работе показано применение метода обобщенных степеней для построение класса решений уравнения Дирака в случае свободной частицы. Указаны возможные обобщения метода, приведены примеры.

***Ключевые слова*:** обобщенная степень, уравнение Дирака, оператор, квантовая электродинамика.

ON THE CONSTRUCTION OF GENERALIZED POWERS FOR THE DIRAC EQUATION OF QUANTUM ELECTRODYNAMICS

© 2022 **Yu. A. GLADYSHEV, E. A. LOSHKAREVA**

Abstract. The paper is devoted to applications of the method of generalized powers for constructing a class of solutions of the Dirac equation in the case of a free particle. Possible generalizations of the method are indicated and examples are given.

***Keywords and phrases*:** generalized power, Dirac equation, operator, quantum electrodynamics.

***AMS Subject Classification*:** 46S05, 47S05

1. Введение. Понятие обобщенных степеней было введено Л. Берсом [6] с целью дальнейшего обобщения методов ТФКП на системы с переменными коэффициентами. Было дано приложение этого понятия для решения задач газодинамики. Этот способ построения последовательности линейно независимых решений далее развивался в работах ряда авторов [1, 2, 4].

Эти вопросы для одного переменного были представлены в [5]. Были введены новые конструкции типа обобщенных степеней с особыми свойствами. Указаны интегральные свойства обобщенных степеней. Было дано приложение метода в теории интерполяции (метод МНК, сплановый метод и т. п.).

Рассмотрение метода обобщенных степеней для большого числа переменных можно найти в монографии [5]. Там же приведено развитие метода для систем уравнений различных типов и порядка производных.

В данном сообщении показано, что метод обобщенных степеней может быть с успехом применен к нахождению большого класса решений системы Максвелла [5, 7] и системы Дирака [4].

После определенной модификации записи системы Дирака выделено два коммутирующих оператора D_1, D_2, что дает возможность построить обобщенные степени. Они удовлетворяют всем требованиям, необходимым для этого, а именно существование особых решений одновременно принадлежащих ядрам операторов D_1, D_2. Выполнено и требование наличия правых обратных для D_1, D_2 операторов I_1, I_2:

$$D_1 I_1 = 1, \quad D_2 I_2 = 1.$$

Отметим, что привлекательной чертой метода обобщенных степеней является то, что все результаты даны в явном аналитическом виде и могут быть численно найдены несложными методами.

2. О форме записи системы Дирака, необходимой для применения обобщенных степеней. Возьмем системе Дирака квантовой электродинамики, например, согласно [3]. После сокращения на $\hbar/i$ и замене знака ψ_4 придем в координатах t, x_1, x_1, x_3 к системе

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+ik\right)\psi_1+\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}-2\dfrac{\partial}{\partial z}\psi_4=0,\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+ik\right)\psi_2+2\dfrac{\partial}{\partial \bar z}\psi_3+\dfrac{\partial\psi_4}{\partial x_3}=0,\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-ik\right)\psi_3+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3}+2\dfrac{\partial}{\partial z}\psi_2=0,\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}-ik\right)\psi_4-2\dfrac{\partial}{\partial \bar z}\psi_1+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где принято $k = mc/\hbar$, скорость света включена в t и введены операторы

$$2\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2},\quad 2\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{2}$$

Эти операторы соответствуют комплексным переменным

$$z = x_1 + ix_2,\quad \bar z = x_1 - ix_2. \tag{3}$$

Определим также операторы

$$d_{22}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+ik\right)E(2),\quad d_{11}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-ik\right)E(2), \tag{4}$$

где $E(2)$ — единичная матрица размерности 2. На основе (2) определим пространственные операторы

$$2D_3=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_3} & 2\dfrac{\partial}{\partial z}\\ -2\dfrac{\partial}{\partial \bar z} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix},\quad 2\bar D_3=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_3} & -2\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2\dfrac{\partial}{\partial \bar z} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

По (1)—(5) запишем систему

$$\begin{cases} d_{22}v_1+2\bar D_3 v_2=0,\\ d_{11}v_2+2D_3v_1=0,\end{cases}, \tag{6}$$

где v_1, v_2 — вектор-столбцы

$$v_1=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Решение системы (6), так же как и системы (1), определено в четырехмерном комплексном пространстве (обозначим его $L_c(4)$), ибо v_1, v_2 — двумерные вектор-столбцы с комплексными компонентами. В квантовой электродинамике, имея в виду закон их преобразования при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, их называют спинорами. Если считать, что все компоненты спинора ψ дважды непрерывно дифференцируемы, то из (6) найдем

$$d_{22}d_{11}v_i-4\bar D_3D_3v_i=0,\quad i=1,2, \tag{8}$$

т.е. удовлетворяют уравнению Клейна, ибо

$$d_{22}d_{11}v_i-4D_3\bar D_3=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta(3)+k^2. \tag{9}$$

Здесь в скобках после оператора Δ указано число независимых переменных.

Введем так называемую присоединенную систему, переставив операторы d_{11}, d_{22}:

$$\begin{cases} d_{11}\tilde{v}_1 + 2\bar{D}_3\tilde{v}_2 = 0, \\ d_{22}\tilde{v}_2 + 2D_3\tilde{v}_1 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ — ее решение. Очевидно,

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_3 \\ \tilde{\psi}_4 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Пространство решений $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$ присоединенной системы — также комплексное и четырехмерное — следует рассматривать как особое присоединенное пространство. Обозначим его $\tilde{L}_c(4)$.

3. Общие принципы построения обобщенных степеней для системы Дирака. В п. 2 система была записана в форме, когда выделены два оператора D_1, D_2. Для возможности построения обобщенных степеней необходимо свойство перестановочности этих операторов. Но эти операторы не коммутируют, в чем можно убедиться непосредственно. Однако они имеют вид, который допускает, как это показано в [5], построение на их основе коммутирующих операторов. Приведем эти соображения, следуя монографии [5].

Пусть заданы два матричных дифференциальных оператора вида

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} \\ d_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

причем любой оператор из набора D_1 коммутирует с любыми операторами, входящими в матрицу во втором операторе D_2. Легко установить, что они не коммутируют даже при этом условии. Как показано в [5], операторы

$$D_{1C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{22} \\ d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{2C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{12} \\ 0 & 0 & d_{21} & 0 \\ 0 & d_{12} & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

коммутируют. Операторы D_{1C}, D_{2C} действуют в 8-мерном комплексном пространстве. Векторы этого пространства обозначим заглавной большой буквой V, а двумерные компоненты — v_i.

Далее примем, что d_{11}, d_{22} определены в (4). Введем операторы D_{12}, D_{21} соотношениями

$$d_{12} = 2\bar{D}_3, \quad d_{21} = 2D_3,$$

где D_3, $\bar{D}_3$ были определены в (5). В этом случае легко убедиться, что система

$$(D_{1C} + D_{2C})V = 0 \tag{14}$$

включает как основную систему (6), так и присоединенную (10). Система (14) содержит 8 уравнений для восьми комплексных функций ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{\psi}_3$, $\tilde{\psi}_4$. Это следует из соотношений

$$v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{v_{11}}{v_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\psi_1}{\psi_2} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{v_{21}}{v_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\psi_3}{-\psi_4} \end{pmatrix},$$

и соответственно

$$v_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{v_{31}}{v_{32}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{\psi}_1}{\tilde{\psi}_2} \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} \dfrac{v_{41}}{v_{42}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{\psi}_3}{\tilde{\psi}_4} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что это увеличение (удвоение размерности) носит принципиальный характер и связано с тем, что построение бинарных обобщенных степеней требует выполнение условий коммутативности основных операторов D_{1c}, D_{2c}.

Отметим, что из (14) следует возможность введения «потенциалов» W для уравнения Дирака, определив их следующим образом:

$$V = (D_{1c} - D_{2c})W.$$

Вследствие коммутативности D_{1c}, D_{2c} имеем

$$(D_{1c}^2 - D_{2c}^2)W = 0.$$

Используя (13), получаем уравнение для каждой компоненты спинора W.

Для возможности построения обобщенных степеней важно существование правых обратных операторов. Можно убедиться, что если операторы d_{ik}, $i,k=\overline{1,2}$, имеют соответствующие правые обратные I_{ik}:

$$d_{ik}I_{ik}=1;$$

для I_{1C}, I_{2C} имеем

$$I_{1C}=\begin{pmatrix}0&0&I_{22}&0\\0&0&0&I_{11}\\I_{11}&0&0&0\\0&I_{22}&0&0\end{pmatrix},\quad I_{2C}=\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{1}{2}I_3\\0&0&\frac{1}{2}\bar{I}_3&0\\0&\frac{1}{2}I_3&0&0\\\frac{1}{2}\bar{I}_3&0&0&0\end{pmatrix}=D_{1c}I_{1c}=D_{2c}I_{2c}=1. \tag{15}$$

Более подробно вопрос о конкретном виде и особенностях операторов обсуждается ниже.

Последнее основное требование состоит в существовании обобщенной константы. Это вектор C с компонентами c_i, $i=\overline{1,4}$, удовлетворяющий системе

$$d_{22}c_1=d_{11}c_2=d_{11}c_3=d_{22}c_4=d_{21}c_1=d_{12}c_2=d_{21}c_3=d_{12}c_4=0. \tag{16}$$

Напомним, что c_i — двумерные комплексные векторы. Более подробно этот вопрос будет изучен в п. 4, 5.

Для построения бинарных обобщенных степеней требуется надо найти произведение типа I_{1C}^p, I_{2C}^q и подействовать на обобщенную константу

$$\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}C=p!q!I_{1C}^pI_{2C}^qC. \tag{17}$$

Из свойств операторов I_{1C}, I_{2C} вытекают очевидные соотношения

$$D_{1C}\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}C=p\mathrm{X}_1^{(p-1)}\mathrm{X}_2^{(q)}C,\quad D_{2C}\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}C=q\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q-1)}C. \tag{18}$$

Запишем их в развернутой форме:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}C=p!q!\begin{pmatrix}(I_{22}I_{11})^i(I_{21}I_{12})^jc_1\\(I_{11}I_{22})^i(I_{12}I_{21})^jc_2\\(I_{11}I_{22})^i(I_{21}I_{12})^jc_3\\(I_{22}I_{11})^i(I_{12}I_{21})^jc_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}c_1\\\tilde{\mathrm{X}}_1^{(p)}\tilde{\mathrm{X}}_2^{(q)}c_2\\\tilde{\mathrm{X}}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}c_3\\\mathrm{X}_1^{(p)}\tilde{\mathrm{X}}_2^{(q)}c_4\end{pmatrix}, && p=2i,\ q=2j,\\
&\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}C=p!q!\begin{pmatrix}(I_{22}I_{11})^iI_{21}(I_{12}I_{21})^jc_4\\(I_{11}I_{22})^iI_{12}(I_{21}I_{12})^jc_3\\(I_{11}I_{22})^iI_{21}(I_{12}I_{21})^jc_2\\(I_{22}I_{11})^iI_{12}(I_{21}I_{12})^jc_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}c_4\\\tilde{\mathrm{X}}_1^{(p)}\tilde{\mathrm{X}}_2^{(q)}c_3\\\tilde{\mathrm{X}}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}c_2\\\mathrm{X}_1^{(p)}\tilde{\mathrm{X}}_2^{(q)}c_1\end{pmatrix}, && p=2i,\ q=2j+1,\\
&\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}C=p!q!\begin{pmatrix}I_{22}(I_{11}I_{22})^i(I_{21}I_{12})^jc_3\\I_{11}(I_{22}I_{11})^i(I_{12}I_{21})^jc_4\\I_{11}(I_{22}I_{11})^i(I_{21}I_{12})^jc_1\\I_{22}(I_{11}I_{22})^i(I_{12}I_{21})^jc_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}c_3\\\tilde{\mathrm{X}}_1^{(p)}\tilde{\mathrm{X}}_2^{(q)}c_4\\\tilde{\mathrm{X}}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}c_1\\\mathrm{X}_1^{(p)}\tilde{\mathrm{X}}_2^{(q)}c_2\end{pmatrix}, && p=2i+1,\ q=2j,\\
&\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}C=p!q!\begin{pmatrix}I_{22}(I_{11}I_{22})^iI_{21}(I_{12}I_{21})^jc_2\\I_{11}(I_{22}I_{11})^iI_{12}(I_{21}I_{12})^jc_1\\I_{11}(I_{22}I_{11})^iI_{21}(I_{12}I_{21})^jc_4\\I_{22}(I_{11}I_{22})^iI_{12}(I_{21}I_{12})^jc_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{X}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}c_2\\\tilde{\mathrm{X}}_1^{(p)}\tilde{\mathrm{X}}_2^{(q)}c_1\\\tilde{\mathrm{X}}_1^{(p)}\mathrm{X}_2^{(q)}c_4\\\mathrm{X}_1^{(p)}\tilde{\mathrm{X}}_2^{(q)}c_3\end{pmatrix}, && p=2i+1,\ q=2j+1.
\end{aligned} \tag{19}$$

Ниже будет приведено подробное рассмотрение специфики построения обобщенных степеней для уравнения (14) и указан вид обобщенной константы.

В формулы (19) входят обобщенные константы, обозначенные c_i. Решения C должны удовлетворять соотношениям

$$D_{1c}C=D_{2c}C=0, \tag{20}$$

т.е. они принадлежат ядрам указанных операторов. Установим структуру этих функций, учитывая условие (20). Будем искать их методом разделения переменных, ибо это самый простой способ удовлетворить (20). Для обобщенных констант имеем

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{10}e^{-ikt}c_1(\bar{z}_3), \qquad c_2 = c_{20}e^{ikt}c_2(z_3), \\ c_3 &= c_{30}e^{ikt}c_3(\bar{z}_3), \qquad c_4 = c_{40}e^{-ikt}c_4(z_3). \end{aligned} \tag{21}$$

Вид первого сомножителя очевиден из вида операторов d_{11}, d_{22}. Второй сомножитель является двухкомпонентным спинором. Конкретные выражения для функций $c_1(\bar{z}_3)$, $c_2(z_3)$, $c_3(\bar{z}_3)$, $c_4(z_3)$ обсуждаются в п. 4, 5.

Теорема 1. *Линейная комбинация V_n вида*

$$V_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n C_n^i X_1^{(n-1)} X_2^{(i)} C$$

является элементом ядра оператора

$$\bar{D}_z = \frac{1}{2}(D_{1c} + D_{2c}),$$

где D_{1c}, D_{2c} определены в (13)*, а бинарные степени — в* (19)*.*

Доказательство основано на использовании свойства (17) бинарных степеней.

Полезно ввести для V_n символическое выражение

$$V_n = (X_1 + X_2)^n C. \tag{22}$$

Тогда результат теоремы 1 примет вид

$$\bar{D}_z(4) Z^n C = 0. \tag{23}$$

Теорема 2. *Имеет место формула дифференцирования $\bar{D}_z(4)Z^nC = nZ^{n-1}C$.*

Доказательство основано на использовании формулы $D_z(4) = \frac{1}{2}(D_{1c} - D_{2c})$.

Теорема 3. *При условии покомпонентной сходимости к функциям класса $C^{(i)}$ решение уравнения* (14) *задается рядом*

$$f(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} Z^{(i)} C.$$

4. Построение обобщенных степеней метагармонического семейства. Поскольку операторы d_{11}, d_{22} можно представить в виде

$$d_{11} = e^{ikt}\frac{d}{dt}(e^{-ikt}\ldots), \quad d_{22} = e^{-ikt}\frac{d}{dt}(e^{ikt}\ldots),$$

правые обратные имеют вид

$$I_1 = e^{-ikt}\int\limits_{t_0}^{t} d\xi e^{ik\xi}\ldots, \quad I_2 = e^{ikt}\int\limits_{t_0}^{t} d\xi e^{-ik\xi}\ldots$$

Перейдем к непосредственному вычислению обобщенных степеней. Путем прямого интегрирования на основе (3) найдем несколько степеней. Легко видеть, что для их нахождения надо найти выражения

$$X^{(2i)} = (2i)!(I_{22}I_{11})^i e^{-ikt}c_1, \quad \tilde{X}^{(2i+1)} = (2i+1)! I_{11}(I_{22}I_{11})^i e^{-ikt}c_2, \tag{24}$$

введенные Берсом (см. [6]). Прямое интегрирование приводит к следующим формулам:

$$\tilde{X}^{(0)}e^{-at}c = ce^{-at},$$

$$X^{(1)}e^{-at}c = \frac{1}{2a}(e^{at} - e^{-at})c,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}^{(2)}e^{-at}c &= \frac{2}{(2a)^2}[e^{at}+(-1+2at)e^{-at}]c,\\
X^{(3)}e^{-at}c &= \frac{3!}{(2a)^3}[(-2+2at)e^{at}+(2+2at)e^{-at}]c,\\
\tilde{X}^{(4)}e^{-at}c &= \frac{4!}{(2a)^4}[(-3+2at)e^{at}+(3+4at+2a^2t^2)e^{-at}]c,\\
X^{(5)}e^{-at}c &= \frac{5!}{(2a)^5}[(6-6at+2a^2t^2)e^{at}+(-6-6at-2a^2t^2)e^{-at}]c,\\
\tilde{X}^{(6)}e^{-at}c &= \frac{6!}{(2a)^6}\left[(10-8at+4a^2t^2)e^{at}+\left(-10-12at-6a^2t^2-\frac{4}{3}a^3t^3\right)e^{-at}\right]c,
\end{aligned}$$

где $a=ik$. На основе этих соотношений можно прийти к определенному выводу о структуре этих выражений. Прежде всего имеем

$$X^{(n)}(t,0)=m_1e^{at}+m_2e^{-at}. \tag{25}$$

Здесь $m_1(t)$, $m_2(t)$ — некоторые многочлены от t, причем имеем в явной форме

$$\tilde{X}^{(2i)}=\left(\sum_{k=0}^{i-1}a_k^{(2i)}t^k\right)e^{at}+\left(\sum_{k=0}^{i}b_k^{(2i)}t^k\right)e^{-at}, \tag{26}$$

$$X^{(2i+1)}=\left(\sum_{k=0}^{i}a_k^{(2i+1)}t^k\right)e^{at}+\left(\sum_{k=0}^{i}b_k^{(2i+1)}t^k\right)e^{-at}. \tag{27}$$

Для нахождения коэффициентов основных многочленов m_1, m_2 воспользуемся основным свойством $\tilde{X}^{(2i)}$ и $X^{(2i+1)}$:

$$d_{11}X^{(2i+1)}=(2i+1)\tilde{X}^{(2i)}. \tag{28}$$

Применим оператор $d/dx-a$ к $X^{(2i+1)}$:

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\sum_{k=0}^{i}a_k^{(2i+1)}t^k\right)e^{at}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{i}a_k^{(2i+1)}kt^k=\sum_{k=0}^{i-1}a_k^{(2i)}t^k=\sum_{k=0}^{i-1}a_{k+1}^{(2i+1)}(k+1)t^k. \tag{29}$$

Поскольку это соотношение справедливо при любом t, имеем

$$a_{k+1}^{(2i+1)}(k+1)=a_k^{(2i)}. \tag{30}$$

Предполагая, что $a_k^{(2i)}$ известно, найдем $a_{k+1}^{(2i+1)}$ через $a_k^{(2i)}$. Однако $a_0^{(2i+1)}$ не определяется из этих соотношений; оно будет определено далее из условий обращения обобщенных степеней при $t=0$ в нуль.

Для примера рассмотрим переход от $\tilde{X}^{(2)}$ к $\tilde{X}^{(3)}$ согласно (24):

$$a_D^{(2)}=\frac{1}{(2a)^2}=a_1^{(3)}=\frac{2a}{(2a)^3},$$

откуда $a_1^{(3)}=2a$, что совпадает с (24). Для перехода от $\tilde{X}^{(4)}$ к $\tilde{X}^{(5)}$ находим

$$a_1^{(5)}=\frac{1}{1}a_0^{(4)}=-3=-\frac{6a}{(2a)^3},\quad a_2^{(5)}=\frac{1}{2}\frac{2a}{(2a)^4}=\frac{2a^2}{(2a)^5},$$

что также совпадает с (24).

Перейдем к нахождению коэффициентов $b_k^{(2i+1)}$ многочлена m_2. Часть при e^{-at} имеет вид

$$\sum_{k=0}^{i}b_k^{(2i+1)}t^ke^{-at}. \tag{31}$$

Применяя d_{11} к равенству

$$\left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\sum_{k=0}^{i} b_k^{(2i+1)} t^k e^{at}\right)=\sum_{k=0}^{i} b_k^{(2i+1)} k t^{k-1}-2a\sum_{k=0}^{i} b_k^{(2i+1)} t^k=\sum_{k=0}^{i} b_k^{(2i)} t^k$$

или

$$\sum_{k=0}^{i-1} b_{k+1}^{(2i+1)}(k+1)t^k-2a\sum_{k=0}^{i} b_k^{(2i+1)} t^k=\sum_{k=0}^{i} b_k^{(2i)} t^k, \tag{32}$$

приходим к соотношению

$$b_{k+1}^{(2i+1)}-2ab_k^{(2i+1)}=b_k^{(2i)}.$$

Особенность таких рекуррентных соотношений состоит в том, что их надо использовать начиная с $k=i$, что дает

$$-2ab_i^{(2i+1)}=b_i^{(2i)},$$

и так далее до $k=0$. Например, согласно (24) найдем

$$b_2^{(4)}=-\frac{2a}{(2a)^4},\quad b_2^{(5)}=\frac{2a^3}{(2a)^5}.$$

Формула для перехода от $X^{(2i+1)}$ к $\tilde{X}^{(2i+2)}$ находятся аналогично.

Следует обратить внимание на то, что нечетные степени антисимметричны относительно обращения времени, а четные полностью несимметричны. Общая для всех степеней структура (25) должна влиять на решение системы Дирака. В данном случае обобщенные степени суть комплексные функции действительного переменного. Для изучения их поведения необходимо отделить действительную $X_1^{(n)}$ и мнимую $X^{(n)}$ части. Многочлены, входящие в выражение степени, обозначим m_1 и m_2:

$$X^{(n)}e^{ikt}c=m_1e^{ikt}+m_2e^{-ikt}, \tag{33}$$

а их действительные и мнимые части — m_{11}, m_{12} и m_{21}, m_{22}:

$$m_1=m_{11}+im_{12},\quad m_2=m_{21}+im_{22}.$$

Учитывая формулу Эйлера, запишем

$$X^{(n)}e^{-ikt}c_1=(m_{11}+m_{21})\cos kt+(-m_{12}+m_{11})\sin kt+i((m_{12}+m_{22})\cos kt+(m_{11}-m_{21})\sin kt). \tag{34}$$

Достаточно проанализировать действительную часть. Прежде всего отметим наличие основной (несущей) частоты k, определенной параметром m (m — масса частицы).

Для исследования поведения обобщенных степеней следует вернуться к формуле (25). Подставив (33) в выражение (17) и используя формулу Эйлера, найдем

$$X^{(n)}e^{-at}c=(m_{11}+m_{21})\cos kt+(-m_{12}+m_{11})\sin kt+i((m_{12}+m_{22})\cos kt+(m_{11}-m_{21})\sin kt). \tag{35}$$

Для первой степени непосредственно найдем

$$X^{(1)}e^{-at}c=\frac{1}{2ik}(e^{ikt}-e^{-ikt})=\frac{1}{2k}\sin kt.$$

Эта степень ограничена, в отличие от обычного монотонного выражения $X^{(1)}$ при действительных a_1, a_2. Она имеет колебательный характер, определенный массой частицы. Но уже функция $X^{(2)}e^{-ikt}c$, сохраняя колебательный характер, демонстрирует возрастание амплитуды колебаний по закону $t\sin kt$.

При более высоких порядках обобщенных степеней степень возрастания увеличивается. Однако возникает вопрос о характере возрастания многочленов $m_1(t)$, $m_2(t)$. Вопрос о монотонности или немонотонности поведения этих определяющих амплитуду колебаний многочленов пока остается открытым.

5. Построение обобщенных степеней для случая трех пространственных переменных. Часть обобщенных степеней, выраженная как функция времени (метагармонические степени), очевидно определяет энергетическую сторону физического процесса. Это подтверждается тем, что в оператор d_{11}, d_{22} входит масса частицы. Часть, зависящая от пространственных координат, а именно $X_2^{(i)}$ выражает свойство момента импульса частицы, в том числе и спин. Она тесно связана с уравнением Лапласа.

Поиски простого алгебраического метода построения трехмерного уравнения Лапласа и соответствующих систем первого порядка проводились многими исследователями (см. [1]). Большие надежды возлагались на кватернионы, как дальнейшее расширение аппарата комплексных функций. Однако алгебраическая структура тела кватернионов не находилась в соответствии с дифференциальным уравнением Лапласа и не приводит к методу построения его решений. Метод обобщенных степеней в известном виде — это попытка продвинуться в том же направлении.

Будем использовать введенные ранее операторы (5). Разделим их на два оператора, которые коммутируют между собой:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2\dfrac{\partial}{\partial z} \\ -2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Они имеют правые обратные вида

$$I_1 = \begin{pmatrix} \int\limits_{x_0} dz \ldots & 0 \\ 0 & \int\limits_{x_0} dz \ldots \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0} d\bar{z} \ldots \\ \frac{1}{2}\int\limits_{x_0} dz \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Решение задается как вектор вида

$$C = \begin{pmatrix} c_1(z) \\ c_1(\bar{z}) \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Бинарные обобщенные степени найдем по формулам

$$\mathrm{X}_1^{(\rho)}\mathrm{X}_2^{(q)}C = \frac{(-1)^j q! l!}{2^q} \begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{x_3^\rho z_2^{(j+l)} \bar{z}_2^j c_{10}}{(j+l)! j!} \\ -\dfrac{x_3^\rho z_2^j \bar{z}_2^{(j+l)} c_{20}}{j!(j+l)!} \end{pmatrix}, & q = 2j \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{x_3^\rho z_2^j \bar{z}_2^{(j+l+1)} c_{20}}{j!(j+l+1)!} \\ \dfrac{x_3^\rho z_2^{(j+l+1)} \bar{z}_2^j c_{10}}{(j+l+1)! j!} \end{pmatrix}, & q = 2j+1, \end{cases} \tag{39}$$

где $c_1(z) = c_{10} z^l$, $c_2(z) = c_{20}\bar{z}^l$. Если l целое и положительное, то результат достаточно прост. Если l дробное или отрицательное, то результат более сложен и для его записи следует использовать специальные функции.

Последним этапом в построении симметризованных обобщенных степеней будет рассмотрение определенной линейной комбинации обобщенных степеней вида

$$V_{m,n} = \sum_{i=0}^{m,n} \mathrm{X}_1^{(m+n-i)} \mathrm{X}_2^{(i)} a_i^{(m,n)} C, \tag{40}$$

обладающей свойством

$$DV_{m,n} = nV_{m,n-1}, \quad \bar{D}V_{m,n} = mV_{m-1,n}. \tag{41}$$

Они получены на основе принципа соответствия и в символичной форме могут быть представлены в виде
$$V_{m,n} = \bar{Z}^m Z^n C.$$
Как было указано выше, для построения обобщенных степеней необходимо иметь правый обратный к $D_3(\bar{D}_3)$ оператор $I_3(\bar{I}_3)$. Используем для этого симметризованные трехмерные степени $\bar{Z}^m$, Z^n, C. Поэтому оператор интегрирования I_3 можно определить в полном формальном соответствии с комплексными степенными функциями от z_2, $\bar{z}_2$ следующим образом:
$$I_3 \bar{z}^m z^n c = \frac{1}{n} \bar{z}^m z^{n+1} c, \quad \bar{I}_3 \bar{z}^m z^n c = \frac{1}{m} \bar{z}^{m+1} z^{n+1} c.$$

6. Заключение. В работе показано, каким образом метод обобщенных степеней может быть использован для построения решений уравнения Дирака, которое дает описание движения частицы с полуцелым спином. Обратим внимание, что метод использован трижды. Первоначально на самом простом и известном уровне сопряженных комплексных переменных $z_2 = x_1 + ix_2$, $\bar{z}_2 = x_1 - ix_2$. Далее для построения решения трехмерного уравнения Лапласа в матричной форме. На последнем этапе этот метод включает временную часть, при этом размерность искомой функции возрастает до 8.

Специфика временной обобщенной степени будет сказываться непосредственно на решении, ибо обобщенные степени входят во все слагаемые. В этом случае имеются решения, которые полностью удовлетворяют условию обратимости, но есть и решения, которые этому условию не удовлетворяют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложение в математической физике. — Калуга: Изд-во КГУ, 2011.
2. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса// Вестн. Калуж. ун-та. — 2020. — № 2 (47). — С. 77–80.
3. *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами—Берса и его приложения в математической физике. — Калуга: Изд-во КГУ, 1997.
4. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* О приложении метода обобщенных степеней Берса для решения уравнения Дирака// в кн.: Тр. Междунар. конф. «Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания». — Калуга, 2021. — С. 300–301.
5. *Соколов А. А., Иваненко Д. Д.* Квантовая террия поля. — М., 1952.
6. *Bers L., Gelbart A.* On a class of differential equation in mechanics of continua// Q. Appl. Math. — 1943. — *1*, № 2. — P. 168–189.
7. *Gladyshev Yu. A., Loshkareva E. A. On one physical interpretation of generalized Cauchy–Riemann conditions* J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1902*. — 012037.

Гладышев Юрий Александрович
Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского
E-mail: `losh-elena@yandex.ru`

Лошкарева Елена Анатольевна
Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского
E-mail: `losh-elena@yandex.ru`