ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 87–96
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-87-96

УДК 517.927.4; 517.988.63

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. **А. Н. НАИМОВ, М. В. БЫСТРЕЦКИЙ**

Аннотация. Исследован вопрос об априорной оценке и существовании периодических решений для двумерной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В терминах свойств главной нелинейной части сформулирована и доказана теорема об априорной оценке периодических решений. В условиях априорной оценки доказана теорема о необходимых и достаточных условиях существования периодических решений.

Ключевые слова: периодическое решение, положительно однородное отображение, априорная оценка, векторное поле, вращение векторного поля, гомотопные пары отображений.

INVESTIGATION OF PERIODIC SOLUTIONS OF A TWO-DIMENSIONAL SYSTEM OF NONLINEAR ORDINARY SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2024 **A. N. NAIMOV, M. V. BYSTRETSKII**

Abstract. The problem of a priori estimate and existence of periodic solutions for a two-dimensional system of nonlinear ordinary second-order differential equations is examined. In terms of the properties of the principal nonlinear part, a theorem on a priori estimate of periodic solutions is formulated and proved. Under the conditions of the a priori estimate, a theorem on necessary and sufficient conditions for the existence of periodic solutions is proved.

Keywords and phrases: periodic solution, positive homogeneous mapping, a priori estimate, vector field, degree of a vector field, homotopic pairs of mappings.

AMS Subject Classification: 34C25, 47H11, 55M25

1. Введение. Статья посвящена исследованию периодических решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x'' = Q\big(t, x' - B(t,x)\big) + f(t,x,x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $Q, B : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^2$ — непрерывные отображения, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $Q(t+\omega, y) \equiv Q(t,y)$, $B(t+\omega, y) \equiv B(t,y)$ при некотором $\omega > 0$;
(ii) $Q(t, \lambda y) \equiv \lambda^m Q(t,y)$ при некотором $m > 1$ и всех $\lambda > 0$;
(iii) $B(t, \lambda y) \equiv \lambda B(t,y)$ при всех $\lambda > 0$;
(iv) $f(t+\omega, y_1, y_2) \equiv f(t, y_1, y_2)$;
(v) $(|y_1| + |y_2|)^{-m} |f(t, y_1, y_2)| \rightrightarrows 0$ при $|y_1| + |y_2| \rightharpoonup \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

В системе уравнений (1) выделена главная нелинейная часть $Q\big(t, x' - B(t,x)\big)$, составленная из положительно однородных отображений Q и B. Отображение f называем возмущением. Цель работы — нахождение условий на Q и B, обеспечивающих существование ω-периодических решений системы уравнений (1) при любом возмущении f. Решение $x \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ системы уравнений (1) называем ω-периодическим, если $x(t+\omega) \equiv x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Если x является ω-периодическим решением системы уравнений (1), то пара (x, x') будет нулем вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(x,y) := \left(x(t) - x(\omega) - \int\limits_0^t y(s)ds, \right.$$
$$\left. y(t) - y(\omega) - \int\limits_0^t \Big(Q\big(s, y(s) - B(s, x(s))\big) + f\big(s, x(s), y(s)\big)\Big) ds \right), \quad (2)$$

определенного в банаховом пространстве $E := C([0,\omega];\mathbb{R}^2) \times C([0,\omega];\mathbb{R}^2)$ с нормой

$$\|(x,y)\|_E := \|x\|_C + \|y\|_C,$$

где

$$\|x\|_C = \max\big\{|x(t)| : t \in [0,\omega]\big\}.$$

И обратно, если пара $(x,y) \in E$ является нулем векторного поля Φ, то $x' = y$ и x будет ω-периодическим решением системы уравнений (1). Таким образом, существование ω-периодических решений системы уравнений (1) сводится к нахождению нулей вполне непрерывного векторного поля Φ.

Существование ω-периодических решений системы уравнений (1) в настоящей работе исследовано по схеме, состоящей из двух этапов. На первом этапе выясняется, при каких условиях на Q и B для ω-периодических решений имеет место априорная оценка

$$\|x\|_C + \|x'\|_C < M, \quad (3)$$

где число M не зависит от x. Если имеет место априорная оценка (3), то вполне непрерывное векторное поле Φ не обращается в ноль на сферах $\|(x,y)\|_E = r$ радиуса $r \geqslant M$. Тогда согласно теории вполне непрерывных векторных полей (см. [1, с. 135]) определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ векторного поля Φ на бесконечности, равное вращению (степени отображения) Φ на сфере $\|(x,y)\|_E = r$ при $r \geqslant M$. На втором этапе, применяя методы вычисления вращения векторных полей, выводится формула вычисления $\gamma_\infty(\Phi)$ через числовые характеристики отображений Q и B. Если $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения (см. [1, с. 138]) существует нуль векторного поля Φ; этим доказывается существование ω-периодических решений.

В многомерном случае, когда главная нелинейная часть не зависит от t, существование периодических решений системы уравнений вида (1) исследовано в [2]. Найдены условия априорной оценки и при этих условиях вычислено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$. Если главная нелинейная часть зависит от t, то вычисление $\gamma_\infty(\Phi)$ весьма проблематично.

В настоящей работе исследовано существование ω-периодических решений двумерной системы уравнений (1) предполагая, что Q и B зависят от t. В отличие от [2], множество нулей главной нелинейной части $Q(t, y - B(t,x))$ состоит лишь из одной поверхности $y = B(t,x)$. Сначала сформулирована и доказана теорема об априорной оценке ω-периодических решений. Затем в условиях априорной оценки, на основе результатов работы [3], доказана теорема о необходимых и достаточных условиях существования ω-периодических решений. Доказательство основано на двух утверждениях: формуле вычисления вращения вполне непрерывного векторного поля, порожденного периодической задачей, и инвариантности существования периодических решений при гомотопии главной нелинейной части. Полученные результаты существенно дополняют работу [2].

2. Основные результаты. Сначала исследуем условия, при которых для произвольного ω-периодического решения $x(t)$ системы уравнений (1) имеет место оценка

$$|x'(t)| \leqslant M_0\big(1 + |x(t)|\big), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где число M_0 не зависит от x.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (i)–(v) *и следующее условие*:

(vi) *при каждом фиксированном* $t_0 \in \mathbb{R}$ *система уравнений*

$$z' = Q(t_0, z), \quad z \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

не имеет ненулевых решений, определенных и ограниченных на $\mathbb{R}$.

Тогда для произвольного ω*-периодического решения* x *системы уравнений* (1) *имеет место оценка* (4).

Например, следующее отображение удовлетворяет условиям теоремы 1:

$$Q_{k_1,k_2}(t,z) = |z_1 - iz_2|^{m-k_2}\left(\Re\left(e^{i2\pi k_1 t/\omega}(z_1 - iz_2)^{k_2}\right),\ \Im\left(e^{i2\pi k_1 t/\omega}(z_1 - iz_2)^{k_2}\right)\right),$$

где $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, k_1, k_2 — целые числа, $k_2 \geqslant 0$, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Для данного примера выполнение условия (vi) можно проверить, используя [1, теорема 14.3, с. 85].

Условия (i)–(vi) пока не достаточны для априорной оценки (3). Например, возьмем $B(t,y) \equiv Ay$, $f(t, y_1, y_2) \equiv Ay_2$, где A — матрица с собственными значениями $\pm i2\pi/\omega$. В этом случае ω-периодические решения автономной системы $y' = Ay$ являются решениями системы уравнений (1), и для этих решений априорная оценка (3) не верна.

Как отмечено в [2], для априорной оценки (3) необходимо учитывать структуру множества нулей главной нелинейной части $Q(t, y - B(t,x))$. В данном случае множество нулей состоит из одной поверхности $y = B(t,x)$. Предположим, что наряду с условиями (i)–(vi) выполнено следующее условие:

(vii) система уравнений $y' = B(t,y)$ не имеет ненулевых ω-периодических решений.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (i)–(vii). *Тогда для* ω*-периодических решений системы уравнений* (1) *имеет место априорная оценка* (3).

Из теоремы 2 вытекает, что если выполнены условия (i)–(vii), то вполне непрерывное векторное поле Φ, заданное формулой (2), не обращается в ноль на сферах $\|(x,y)\|_E = r$ радиуса $r \geqslant M$ пространства $E := C([0,\omega];\mathbb{R}^2) \times C([0,\omega];\mathbb{R}^2)$. Согласно теории вполне непрерывных векторных полей (см. [1, с. 135]) определено вращение $\gamma_\infty(\Phi)$ векторного поля Φ на бесконечности. Если $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения (см. [1, с. 138]) существует нуль векторного поля Φ; это доказывает существование ω-периодических решений. Поэтому представляется актуальным вычисление $\gamma_\infty(\Phi)$ посредством числовых характеристик отображений Q и B.

Для вычисления $\gamma_\infty(\Phi)$ предположим, что выполнены условия (i)–(vi), а также следующие условия:

(viii) система уравнений $y' = \mu B(t,y)$ при любом $\mu \in (0,1]$ не имеет ненулевых ω-периодических решений;

(ix) $\displaystyle\int_0^\omega B(t,y)dt \neq 0$ при $y \neq 0$.

Введем следующие обозначения: $\gamma_0(Q)$, $\gamma\left(\int_0^\omega B(t,\cdot)dt\right)$ — вращения двумерных векторных полей $Q(t_0,\cdot)$, $\int_0^\omega B(t,\cdot)dt : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ на единичной окружности $|y| = 1$, где t_0 фиксировано; $\gamma_1(Q)$ — вращение двумерного векторного поля $Q(t, y_0)$ на единичной окружности $(\cos(2\pi t/\omega), \sin(2\pi t/\omega))$, $t \in [0,\omega]$, при фиксированном ненулевом y_0.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (i)–(vi) *и* (viii), (**??**). *Тогда верна формула*

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma\left(\int_0^\omega B(t,\cdot)dt\right) \cdot \begin{cases} \gamma_0(Q), & \text{если } \gamma_0(Q) < 1,\ \gamma_1(Q)/(1-\gamma_0(Q)) \text{ — целое},\\ 1, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{6}$$

Формула (6) доказана с применением результатов работы [3].

Две пары отображений (Q^0, B^0) и (Q^1, B^1), удовлетворяющие условиям (i)–(iii), (vi), (vii), назовем *гомотопными*, если существует семейство пар отображений $(\tilde{Q}_\lambda, \tilde{B}_\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$, которое непрерывно зависит от λ, удовлетворяет условиям (i)–(iii), (vi), (vii), при каждом $\lambda \in [0,1]$ и $(\tilde{Q}_0, \tilde{B}_0) = (Q^0, B^0)$, $(\tilde{Q}_1, \tilde{B}_1) = (Q^1, B^1)$.

В следующей теореме доказана инвариантность существования ω-периодических решений при гомотопии.

Теорема 4. *Пусть пары отображений (Q^0, B^0), (Q^1, B^1) гомотопны. Если при $Q = \tilde{Q}_0$, $B = \tilde{B}_0$ и любом возмущении f существует ω-периодическое решение системы уравнений* (1)*, то при $Q = \tilde{Q}_1$, $B = \tilde{B}_1$ также существует ω-периодическое решение системы уравнений* (1) *при любом возмущении f.*

Из теорем 3 и 4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Если выполнены условия* (i)–(iii)*,* (vi)*,* (viii)*,* (**??**) *и условие*

$$\gamma\left(\int_0^\omega B(t,\cdot)dt\right)\gamma_0(Q) \neq 0,$$

то существует ω-периодическое решение системы уравнений (1) *при любом возмущении f. Обратно, если выполнены условия* (i)–(iii)*,* (vi)*,* (vii) *и существует ω-периодическое решение системы уравнений* (1) *при любом возмущении f, то имеет место неравенство $\gamma_0(Q) \neq 0$.*

Доказательство теоремы 1. Предположим, что оценка (4) не верна. Тогда найдется такая последовательность ω-периодических решений x_k, $k = 1, 2, \ldots$ системы уравнений (1), что

$$|x_k'(t_k)| > k(1 + |x_k(t_k)|)$$

при некоторых $t_k \in [0, \omega]$, $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$r_k := \|x_k\|_C + \|x_k'\|_C \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Для вектор-функций $y_k(t) = r_k^{-1} x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем:

$$\begin{gathered} \left|y_k'(t_k)\right| > k\left(r_k^{-1} + |y_k(t_k)|\right), \quad \|y_k\|_C + \|y_k'\|_C = 1, \\ y_k(t+\omega) \equiv y_k(t), \quad y_k'(t+\omega) \equiv y_k'(t), \\ r_k^{1-m} y_k''(t) = Q\big(t, y_k'(t) - B(t, y_k(t))\big) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{7}$$

Можно считать, что $t_k \to t_0$ и $\|y_k - y_0\|_C \to 0$ при $k \to \infty$. В данном случае имеем $y_0(t+\omega) \equiv y_0(t)$, $y_0(t_0) = 0$. С другой стороны, покажем, что

$$y_0(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Этим завершится доказательство теоремы 1.

Проверим, что $y_0(t) \not\equiv 0$. Действительно, если $y_0(t) \equiv 0$, то

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |y_k'(t)| = |y_k'(\tau_k)| \to 1, \quad k \to \infty,$$

и для вектор-функций $z_k(t) = y_k'(\tau_k + r_k^{1-m} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем:

$$\begin{gathered} z_k'(t) = Q(\tau_k + r_k^{1-m} t, z_k(t)) + o(1), \quad |z_k(t)| \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}, \\ |z_k(0)| \to 1, \quad k \to \infty. \end{gathered}$$

Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений (5), что противоречит условию (vi). Следовательно, $y_0(t) \not\equiv 0$.

Пусть (α, β) — наибольший интервал, где $y_0(t)$ не обращается в ноль. Покажем, что на любом отрезке $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ имеет место неравенство

$$\limsup_{k \to \infty} \max_{a \leqslant t \leqslant b} \frac{|y_k'(t)|}{|y_k(t)|} < M_1, \tag{9}$$

где

$$M_1 > \max\big\{|B(s,x_0)| : s\in\mathbb{R},\ x_0\in\mathbb{R}^2,\ |x_0|\leqslant 1\big\}.$$

Действительно, если (9) не верно, то при некоторых $s_k\in[a,b]$, $k=k_0,\ldots$, имеем

$$|y_k'(s_k)| > \left(M_1-\frac{1}{k}\right)|y_k(s_k)|,\quad s_k\xrightarrow[k\to\infty]{} s_0.$$

Тогда для вектор-функций

$$z_k(t)=y_k'\big(s_k+r_k^{1-m}t\big),\quad t\in\mathbb{R},\quad k=k_0,\ldots,$$

имеем:

$$|z_k(0)| > \left(M_1-\frac{1}{k}\right)|y_k(s_k)|,\quad |z_k(t)|\leqslant 1,\quad t\in\mathbb{R},$$

и согласно (7)

$$z_k'(t)=Q\Big(s_k+r_k^{1-m}t,\ z_k(t)-B\big(s_k+r_k^{1-m}t,\ y_k(s_k+r_k^{1-m}t)\big)\Big)+o(1),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Переходя к пределу, получаем вектор-функцию $z_0(t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$|z_0(0)|\geqslant M_1|y_0(s_0)|,\quad |z_0(t)|\leqslant 1,\quad z_0'(t)=Q\big(s_0,z_0(t)-B\big(s_0,y_0(s_0)\big)\big),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Учитывая условие (vi), имеем $z_0(t)\equiv B(s_0,y_0(s_0))$. Отсюда в силу выбора M_1 получаем противоречивое неравенство $|z_0(0)|<M_1|y_0(s_0)|$. Таким образом, неравенство (9) верно на любом отрезке $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$.

На фиксированном отрезке $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$ при $k>k_{a,b}$ имеем

$$\ln\frac{|y_k(b)|}{|y_k(a)|}=\int\limits_a^b\big(\ln|y_k(t)|\big)'dt=\int\limits_a^b\left\langle\frac{y_k'(t)}{|y_k(t)|},\frac{y_k(t)}{|y_k(t)|}\right\rangle dt,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидовое скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Учитывая (9) и переходя к пределу, получаем неравенства

$$-M_1(b-a)\leqslant\ln\frac{|y_0(b)|}{|y_0(a)|}\leqslant M_1(b-a).$$

Если α конечно, то в неравенстве справа, устремляя a к α, получаем $y_0(\alpha)\neq 0$, что противоречит выбору α. Значит, $\alpha=-\infty$. Аналогичным образом, из неравенства слева следует, что $\beta=+\infty$. Следовательно, (8) верно. Теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Предположим, что априорная оценка (3) не верна. Тогда существует неограниченная последовательность ω-периодических решений $x_k(t)$, $k=1,2,\ldots$, системы уравнений (1):

$$r_k:=\|x_k\|_C+\|x_k'\|_C\to\infty,\quad k\to\infty.$$

Для вектор-функций $y_k(t)=r_k^{-1}x_k(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots$, имеем:

$$y_k(t+\omega)\equiv y_k(t),\quad y_k'(t+\omega)\equiv y_k'(t),$$

$$\|y_k\|_C+\|y_k'\|_C=1, \tag{10}$$

$$r_k^{1-m}y_k''(t)=Q\Big(t,y_k'(t)-B\big(t,y_k(t)\big)\Big)+o(1),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

Можно считать, что $\|y_k-y_0\|_C\to 0$ при $k\to\infty$. По теореме 1 имеет место оценка

$$|y_k'(t)|<M_0(r_k^{-1}+|y_k(t)|),\quad t\in\mathbb{R},\quad k=1,2,\ldots,$$

поэтому $y_0(t)\not\equiv 0$; иначе получаем противоречие с (10).

Проверим, что при некотором $t_0\in\mathbb{R}$ верно неравенство

$$\limsup_{k\to\infty}\Big|y_k'(t_0)-B\big(t_0,y_k(t_0)\big)\Big|>0. \tag{12}$$

Действительно, если (12) не верно, то при любом $t \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \Big(y_k'(t) - B(t, y_k(t))\Big) = 0.$$

Переходя к пределу в равенстве

$$y_k(t) - y_k(\omega) = \int\limits_0^t y_k'(s)ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

получаем, что y_0 является ненулевым ω-периодическим решением системы уравнений $y' = B(t, y)$. Полученное противоречит условию (vii). Следовательно, (12) верно.

Учитывая (12), без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} y_k'(t_0) = v_0, \quad v_0 - B(t_0, y_0(t_0)) \neq 0.$$

Рассмотрим последовательность вектор-функций $z_k(t) = y_k'(t_0 + r_k^{1-m}t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$. Для них имеем:

$$\lim_{k\to\infty} z_k(0) = v_0, \quad v_0 - B\big(t_0, y_0(t_0)\big) \neq 0,$$

и в силу (10), (11) получаем

$$|z_k(t)| \leqslant 1, \quad z_k'(t) = Q\Big(t_0 + r_k^{1-m}t,\ z_k(t) - B(t_0 + r_k^{1-m}t,\ y_k\big(t_0 + r_k^{1-m}t)\big)\Big) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В пределе получаем ненулевое ограниченное решение $\big(z_0(t) - B(t_0, y_0(t_0))\big)$ системы уравнений (5), что противоречит условию (vi). Теорема 2 доказана. □

3. Формула вычисления вращения. В этом разделе приведем вывод формулы (6).

Пусть выполнены условия (i)–(vii). Рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi_\lambda(x, y) := \Bigg(x(t) - x(\omega) - \int\limits_0^t \Big(\lambda y(s)ds + (1-\lambda)B\big(s, x(s)\big)\Big)ds,$$

$$y(t) - y(\omega) - \int\limits_0^t \Big(Q\big(s, y(s) - \lambda B(s, x(s))\big) + \lambda f\big(s, x(s), y(s)\big)\Big)ds\Bigg), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (13)$$

Докажем существование такого $M_3 > 0$, что

$$\Phi_\lambda(x, y) \neq 0 \quad \text{при любых} \quad (x, y) \in E, \quad \|(x, y)\|_E \geqslant M_3, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (14)$$

Предположим, что такое M_3 не существует. Тогда найдутся такие последовательности $(x_k, y_k) \in E$, $\lambda_k \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$\Phi_{\lambda_k}(x_k, y_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad r_k := \|(x_k, y_k)\|_E \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Для $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) = r_k^{-1}(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем:

$$\tilde{x}_k'(t) = \lambda_k \tilde{y}_k(t) + (1-\lambda_k)B\big(t, \tilde{x}_k(t)\big), \quad \tilde{x}_k(t+\omega) \equiv \tilde{x}_k(t), \quad (15)$$

$$r_k^{1-m}\tilde{y}_k'(t) = Q\Big(t, \tilde{y}_k(t) - \lambda_k B\big(t, \tilde{x}_k(t)\big)\Big) + o(1), \quad \tilde{y}_k(t+\omega) \equiv \tilde{y}_k(t), \quad (16)$$

$$\|\tilde{x}_k\|_C + \|\tilde{y}_k\|_C = 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|\tilde{x}_k - \tilde{x}_0\|_C \to 0$ и $\lambda_k \to \lambda_0$ при $k \to \infty$, где $\tilde{x}_0(t+\omega) \equiv \tilde{x}_0(t)$. Если $\tilde{x}_0(t) \equiv 0$, то для вектор-функций $z_k(t) = \tilde{y}_k(t_k + r_k^{1-m}t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\|\tilde{y}_k\|_C = |\tilde{y}_k(t_k)|$, имеем:

$$z_k'(t) = Q\big(t_k + r_k^{1-m}t,\ z_k(t)\big) + o(1), \quad |z_k(t)| \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

и $|z_k(0)| \to 1$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений (5), что противоречит условию (vi). Следовательно, $\tilde{x}_0(t) \not\equiv 0$.

Заметим, что если при любом $t \in \mathbb{R}$ имеет место предел $\tilde{y}_k(t) - \lambda_k B(t, \tilde{x}_k(t)) \to 0$ при $k \to \infty$, то, переходя к пределу в (15), получаем ненулевое ω-периодическое решение $\tilde{x}_0$ системы уравнений $y' = B(t, y)$, что условию (vii). Поэтому можно считать, что при некотором $t_0 \in \mathbb{R}$ существует ненулевой предел

$$\lim_{k\to\infty} \Big(\tilde{y}_k(t_0) - \lambda_k B\big(t_0, \tilde{x}_k(t_0)\big)\Big) = v_0 \neq 0.$$

Для вектор-функций $w_k(t) = \tilde{y}_k(t_0 + r_k^{1-m} t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, в силу (16) имеем:

$$w_k'(t) = Q\Big(t_0 + r_k^{1-m} t,\ w_k(t) - \lambda_k B\big(t_0 + r_k^{1-m} t,\ x_k\big(t_0 + r_k^{1-m} t\big)\big)\Big) + o(1), \quad |w_k(t)| \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

Переходя к пределу, получаем:

$$w_0'(t) = Q\Big(t_0, w_0(t) - \lambda_0 B\big(t_0, \tilde{x}_0(t_0)\big)\Big), \quad \big|w_0(t)\big| \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$w_0(0) - \lambda_0 B\big(t_0, \tilde{x}_0(t_0)\big) = v_0 \neq 0.$$

Следовательно, $v = w_0 - \lambda_0 B\big(t_0, \tilde{x}_0(t_0)\big)$ является ненулевым ограниченным решением системы уравнений (5), что противоречит условию (vi). Таким образом, утверждение (14) доказано. Из него согласно известным свойствам вращения векторных полей (см. [1, с. 137, 160] вытекают равенства

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Psi_1)\gamma_\infty(\Psi_2), \tag{17}$$

где $\gamma_\infty(\Psi_1)$, $\gamma_\infty(\Psi_2)$ — вращения векторных полей

$$\Psi_1(x) := x(t) - x(\omega) - \int_0^t B\big(s, x(s)\big) ds, \quad \Psi_2(y) := y(t) - y(\omega) - \int_0^t Q\big(s, y(s)\big) ds$$

на сферах больших радиусов пространства $C([0, \omega]; \mathbb{R}^2)$. Для вычисления $\gamma_\infty(\Psi_2)$ применим результаты работы [3]:

$$\gamma_\infty(\Psi_2) = \begin{cases} \gamma_0(Q), & \text{если } \gamma_0(Q) < 1,\ \gamma_1(Q)/(1 - \gamma_0(Q)) \text{ целое}, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{18}$$

Если выполнены условия (viii) и (ix), то верна формула

$$\gamma_\infty(\Psi_1) = \gamma \left(\int_0^\omega B(t, \cdot) dt \right). \tag{19}$$

Действительно, рассмотрим семейство векторных полей

$$\Psi_\lambda(x) := x(t) - x(\omega) - \int_0^t B\big(s, x(s)\big) ds - (1 - \lambda) \int_t^\omega B\big(s, x(s)\big) ds, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Можно непосредственно проверить, что $\Psi_\lambda(x) \neq 0$ при любых $x \in C([0, \omega]; \mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$, $\lambda \in [0, 1]$. Отсюда следует равенство $\gamma_\infty(\Psi_1) = \gamma_\infty(\Psi_0)$. Для векторного поля Ψ_0 согласно определению вращения вполне непрерывных векторных полей в банаховом пространстве (см. [1, с.Ё135]) имеем

$$\gamma_\infty(\Psi_0) = \gamma \left(\int_0^\omega B(t, \cdot) dt \right).$$

Следовательно, формула (19) верна. Из (17)–(19) вытекает формула (6).

4. Инвариантность существования периодических решений. В этом разделе докажем теорему 4. Сначала проверим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 4 *существуют такие положительные числа* M_2, σ_2, *что для любых* $\lambda \in [0,1]$ *и вектор-функции* $x \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, *удовлетворяющей условиям*

$$x^{(j)}(t+\omega) \equiv x^{(j)}(t), \quad j=0,1,2, \quad \|x\|_C + \|x'\|_C > M_2,$$

имеет место оценка

$$\Big\| x'' - \tilde{Q}_\lambda\Big(\cdot, x' - \tilde{B}_\lambda(\cdot,x)\Big)\Big\|_C > \sigma_2\big(\|x\|_C + \|x'\|_C\big)^m. \tag{20}$$

Доказательство. Предположим, что указанные числа M_2, σ_2 не существуют. Тогда найдутся такие последовательности $\lambda_k \in [0,1]$, $x_k \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, $k=1,2,\ldots$, что

$$x_k^{(j)}(t+\omega) \equiv x_k^{(j)}(t), \quad j=0,1,2,$$
$$r_k := \|x_k\|_C + \|x_k'\|_C \to \infty, \quad k \to \infty,$$
$$\Big\| x_k'' - \tilde{Q}_{\lambda_k}\Big(\cdot, x_k' - \tilde{B}_{\lambda_k}(\cdot,x_k)\Big)\Big\|_C < \frac{1}{k}\big(\|x_k\|_C + \|x_k'\|_C\big)^m.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = r_k^{-1}x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots$. Для них имеем:

$$y_k^{(j)}(t+\omega) \equiv y_k^{(j)}(t), \quad j=0,1,2, \qquad \|y_k\|_C + \|y_k'\|_C = 1,$$
$$r_k^{1-m}y_k''(t) = \tilde{Q}_{\lambda_k}\Big(t, y_k'(t) - \tilde{B}_{\lambda_k}\big(t, y_k(t)\big)\Big) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_k \to \lambda_0$ и $\|y_k - y_0\|_C \to 0$ при $k \to \infty$. Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 2, приходим к противоречию. Лемма 1 доказана. □

Доказательство теоремы 4. Докажем, что если при $Q = \tilde{Q}_0$, $B = \tilde{B}_0$ и любом возмущении f существует ω-периодическое решение системы уравнений (1), то при $Q = \tilde{Q}_1$, $B = \tilde{B}_1$ также существует ω-решение системы уравнений (1) при любом возмущении f.

Выберем числа $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_N = 1$ так, чтобы при любых λ_{j-1}, λ_j и вектор-функции $y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющей условиям $y^{(j)}(t+\omega) \equiv y^{(j)}(t)$, $j=0,1$, имело место неравенство

$$\Big\| \tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}\Big(\cdot, y'\tilde{B}_{\lambda_{j-1}}(\cdot,y)\Big) - \tilde{Q}_{\lambda_j}\Big(\cdot, y' - \tilde{B}_{\lambda_j}(\cdot,y)\Big)\Big\|_C \leqslant \frac{1}{4}\sigma_2\big(\|y\|_C + \|y'\|_C\big)^m.$$

Воспользовавшись оценкой (20), покажем, что при каждом $j = 1,\ldots N$ верно следующее утверждение: если при $Q = \tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}$, $B = \tilde{B}_{\lambda_{j-1}}$ и любом возмущении f существует ω-периодическое решение системы уравнений (1), то при $Q = \tilde{Q}_{\lambda_j}$, $B = \tilde{B}_{\lambda_j}$ и любом возмущении f также существует ω-периодическое решение системы уравнений (1).

Зададим произвольное возмущение f. Для любой вектор-функции $y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющей условиям периодичности $y(t+\omega) \equiv y(t)$, $y'(t+\omega) \equiv y'(t)$, в силу условия (v) имеет место неравенство

$$\big\|f(\cdot,y,y')\big\|_C \leqslant \frac{1}{4}\sigma_2\big(\|y\|_C + \|y'\|_C\big)^m + K_{f,\sigma_2};$$

здесь K_{f,σ_2} — положительное число, зависящее лишь от f и σ_2. Выберем число

$$L > \max\Big(M_2, \big(2\sigma_2^{-1}K_{f,\sigma_2}\big)^{1/m}\Big),$$

и определим возмущение

$$g_L(t,y_1,y_2) = f(t,y_1,y_2) + \eta\big(|y_1|+|y_2|\big)\Big(\tilde{Q}_{\lambda_j}\big(t, y_2 - \tilde{B}_{\lambda_j}(t,y_1)\big) - \tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}\big(t, y_2 - \tilde{B}_{\lambda_{j-1}}(t,y_1)\big)\Big),$$

где $\eta(s) \in C(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \eta(s) \leqslant 1$ при всех $s \in \mathbb{R}$, $\eta(s) = 1$ при $|s| \leqslant L$ и $\eta(s) = 0$ при $|s| \geqslant L+1$.

Согласно предположению существует ω-периодическое решение x системы уравнений (1) при $Q = \tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}$, $B = \tilde{B}_{\lambda_{j-1}}$ и возмущении g_L. Проверим, что

$$\|x\|_C + \|x'\|_C \leqslant L,$$

откуда следует, что x является ω-периодическим решением системы уравнений (1) при $Q = \tilde{Q}_{\lambda_j}$, $B = \tilde{B}_{\lambda_j}$ и возмущении f. Действительно, если

$$\|x\|_C + \|x'\|_C > L,$$

то согласно оценке (20) и выбору числа L имеем:

$$\sigma_2\big(\|x\|_C + \|x'\|_C\big)^m < \Big\|x'' - \tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}\Big(\cdot, x' - \tilde{B}_{\lambda_{j-1}}(\cdot, x)\Big)\Big\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \big\|f(\cdot, x, x')\big\|_C + \Big\|\tilde{Q}_{\lambda_j}\Big(\cdot, x' - \tilde{B}_{\lambda_j}(\cdot, x)\Big) - \tilde{Q}_{\lambda_{j-1}}\Big(\cdot, x' - \tilde{B}_{\lambda_{j-1}}(\cdot, x)\Big)\Big\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sigma_2\big(\|x\|_C + \|x'\|_C\big)^m + K_{f,\sigma_2}.$$

Отсюда приходим к противоречию:

$$\|x\|_C + \|x'\|_C \leqslant \big(2\sigma_2^{-1}K_{f,\sigma_2}\big)^{1/m} < L.$$

Теорема 4 доказана. □

Доказательство теоремы 5. *Необходимость.* Пусть выполнены условия (i)–(iii), (vi), (vii) и пусть система уравнений (1) имеет ω-периодическое решение при любом возмущении f. Докажем, что имеет место неравенство $\gamma_0(Q) \neq 0$. Предположим, что $\gamma_0(Q) = 0$. В этом случае пара (Q, B), согласно результатам работы [3], гомотопна паре $(Q_{k_1,0}, B)$, где

$$Q_{k_1,0}(t, y) = |y|^m\left(\cos\frac{2\pi k_1 t}{\omega},\ \sin\frac{2\pi k_1 t}{\omega}\right), \quad k_1 = \gamma_1(Q).$$

Поэтому в наших условиях и в силу теоремы 4 система уравнений

$$x'' = Q_{k_1,0}\big(t, x' - B(t, x)\big) + f(t, x, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{21}$$

имеет ω-периодическое решение при любом возмущении f. С другой стороны, покажем, что при некотором возмущении f система уравнений (21) не имеет ω-периодических решений.

Положим

$$f(t, y_1, y_2) = Ay_2 + g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$g(t) = \left(\cos\frac{2\pi k_1 t}{\omega},\ \sin\frac{2\pi k_1 t}{\omega}\right), \quad A = \frac{2\pi k_1}{\omega}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$A^\top g(t) + g'(t) \equiv 0, \quad \langle g(t), g(t)\rangle \equiv 1, \quad t \in \mathbb{R};$$

здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидовое скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Если x — решение системы уравнений (21) при заданном f, то имеем:

$$\big(\langle x'(t), g(t)\rangle\big)' = \big\langle x''(t), g(t)\big\rangle + \big\langle x'(t), g'(t)\big\rangle =$$
$$= \Big\langle \big|x'(t) - B(t, x(t))\big|^m g(t) + Ax'(t) + g(t),\ g(t)\Big\rangle + \big\langle x'(t), g'(t)\big\rangle =$$
$$= \big|x'(t) - B(t, x(t))\big|^m + \big\langle x'(t), A^\top g(t)\big\rangle + 1 + \big\langle x'(t), g'(t)\big\rangle = \big|x'(t) - B(t, x(t))\big|^m + 1 \geqslant 1.$$

Отсюда следует, что при заданном f система уравнений (21) не имеет ω-периодических решений.

Достаточность. Пусть выполнены условия (i)–(iii), (vi), (viii), (**??**) и условие

$$\gamma\left(\int_0^\omega B(t, \cdot)\,dt\right)\gamma_0(Q) \neq 0.$$

Тогда для векторного поля Φ, заданного формулой (2), в силу теорем 2 и 3 определено его вращение на бесконечности $\gamma_\infty(\Phi)$, причем $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$. Отсюда согласно принципу ненулевого вращения (см. [1, с. 138]) вытекает существование нуля векторного поля Φ, что доказывает существование ω-периодического решения системы уравнений (1) при любом возмущении f. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
2. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н.* О разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Диффер. уравн. — 2024. — *60*, № 3. — С. 312–321.
3. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н., Кобилзода М. М.* О разрешимости одного класса периодических задач на плоскости// Диффер. уравн. — 2021. — *57*, № 2. — С. 203–209.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Наимов Алижон Набиджанович (Naimov Alizhon Nabidzhanovich)
Вологодский государственный университет
(Vologda State University, Vologda, Russia)
E-mail: `naimovan@vogu35.ru`

Быстрецкий Михаил Васильевич (Bystretskii Mikhail Vasil'evich)
Вологодский государственный университет
(Vologda State University, Vologda, Russia)
E-mail: `pmbmv@bk.ru`