



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 3–14
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-3-14

УДК 517.9

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРАХ

© 2024 г. А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА, Л. Н. КОСТИНА

Аннотация. В работе введено понятие эквивалентных операторов, т.е. операторов, имеющих одинаковые состояния обратимости, и установлена их связь со слабо подобными и подобными операторами. Найдены состояния обратимости некоторых классов линейных операторов, в частности, оператора с инволюцией и оператора с компактной резольвентой. Рассмотрены подходы к построению эквивалентного оператора. Приведены примеры эквивалентных операторов.

Ключевые слова: состояния обратимости, эквивалентные операторы, сильно эквивалентные операторы, слабо подобные операторы, подобные операторы.

ON EQUIVALENT OPERATORS

© 2024 А. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA, L. N. KOSTINA

ABSTRACT. In this paper, we introduce the concept of equivalent operators, i.e., operators with the same invertibility states, and establish their connection with weakly similar and similar operators. We find the invertibility states of some classes of linear operators, in particular, operators with involution and operators with compact resolvent. We discuss approaches to constructing equivalent operators and give examples of equivalent operators.

Keywords and phrases: invertibility states, equivalent operators, strongly equivalent operators, weakly similar operators, similar operators.

AMS Subject Classification: 47A99, 47B01

1. Введение. В работах [2], [3] было введено понятие состояний обратимости $St_{inv}(A)$ (см. определение 3.1) для линейного замкнутого оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, действующего между банаховыми пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Операторы, имеющие одинаковые состояния обратимости, будем называть эквивалентными (см. определение 3.2). При этом спектры эквивалентных операторов не обязательно должны совпадать. Метод эквивалентных операторов состоит в том, что для изучаемого оператора строится (ставится в соответствие) эквивалентный ему оператор, для которого состояние обратимости известны или проще вычисляемы.

Отметим статьи [3–7, 25–27], в которых обсуждалось понятие состояний обратимости различных операторов и вычислялись состояния обратимости для некоторых классов операторов.

В данной работе сделана попытка систематизации метода эквивалентных операторов, приведены примеры его применения, а также описаны связь и различия подобных и эквивалентных операторов, подобных и слабо подобных операторов.

Отметим также работы [16–20], в которых не используется понятие состояний обратимости, но используются основные результаты из [2], касающиеся совпадения состояний обратимости разностных и дифференциальных операторов.

Работы [8, 28, 29] также не содержат определения состояний обратимости, но в них установлена эквивалентность (в смысле обратимости) некоторых операторов и операторных матриц второго порядка. Наконец, упомянем работу [38], в которой доказана эквивалентность операторного полинома n -й степени операторной матрицы n -го порядка.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 описаны используемые функциональные и операторные пространства. В разделе 3 приведены основные определения (определение 3.1 состояния обратимости оператора и определение 3.2 эквивалентных операторов), несколько лемм, касающихся свойств состояния обратимости, а также примеры операторов, находящихся в определенных состояниях обратимости. В разделе 4 рассмотрены подобные операторы, их свойства и их связь с эквивалентными операторами и слабо подобными операторами. В разделе 5 приведены примеры эквивалентных и спектрально (сильно) эквивалентных операторов. В разделе 6 дано определение фредгольмовых (полуфредгольмовых) операторов и приведены соответствующие примеры.

2. Основные обозначения. Напомним стандартные обозначения. Как обычно, через $\mathbb{Z}$ обозначена группа целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $\text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ — банахово пространство ограниченных линейных операторов (гомеоморфизмов), $\text{End } \mathcal{X} = \text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов (эндоморфизмов) со стандартной нормой

$$\|X\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|, \quad x \in \mathcal{X}, \quad X \in \text{End } \mathcal{X},$$

$\text{Aut } \mathcal{X}$ — группа обратимых операторов (автоморфизмов) из $\text{End } \mathcal{X}$. Символом I обозначен тождественный оператор, а символом $J \in \text{End } \mathcal{X}$ — оператор инволюции. Напомним, что оператор $J \in \text{End } \mathcal{X}$ называется инволюцией, если $J^2 = I$.

Далее в примерах используются следующие функциональные пространства. Символом $l_p = l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{Y})$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначено банахово пространство суммируемых со степенью p (ограниченных при $p = \infty$) последовательностей векторов из банахова пространства $\mathcal{Y}$. Нормы в этих пространствах задаются формулами

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|_{\mathcal{Y}}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|_{\mathcal{Y}}, \quad x \in l_{\infty}.$$

Через $l^{\infty} = l^{\infty}(\mathbb{Z}, \mathcal{Y})$ обозначим пространство всех двусторонних комплексных последовательностей (необязательно ограниченных) $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ с поточечным умножением

$$(xy)(n) = x(n)y(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x, y \in l^{\infty}.$$

Пусть $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$, $p \in [1, \infty)$, — банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и суммируемых со степенью p функций с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathcal{Y}}^p dt \right)^{1/p}, \quad x \in L_p, \quad p \in [1, \infty),$$

со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{Y}$. Через $L_{\infty} = L_{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$ обозначим банахово пространство существенно ограниченных (классов эквивалентности) функций с нормой

$$\|x\|_{\infty} = \text{vrai sup}_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathcal{Y}}.$$

Пространство L_1 является банаховой алгеброй со сверткой функций

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad f, g \in L_1,$$

в качестве операции умножения. Для функций из L_1 определим преобразование Фурье формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in L_1.$$

Преобразование Фурье стандартным образом расширяется на функции из L_2 .

Все введенные функциональные пространства являются однородными (см. [3]).

3. Эквивалентные операторы. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — замкнутый линейный оператор, имеющий плотную в $\mathcal{X}$ область определения $D(A)$. Так как далее мы рассматриваем только замкнутые операторы, то термин замкнутый будем опускать. В $D(A)$ введем норму графика

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}.$$

Определение 3.1 (см. [3]). Рассмотрим следующие условия:

- (1) $\text{Ker } A = \{0\}$ (оператор A инъективен);
- (2) $1 \leq n \leq \dim \text{Ker } A \leq \infty$;
- (3) $\text{Ker } A$ — дополняемое подпространство либо в $D(A)$, либо в $\mathcal{X}$;
- (4) $\text{Im } A = \overline{\text{Im } A}$ (оператор A нормально разрешим), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus \text{Ker } A} \frac{\|Ax\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } A)},$$

$$\text{где } \text{dist}(x, \text{Ker } A) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } A} \|x - x_0\|;$$

- (5) оператор A равномерно инъективен (корректен), т.е. $\text{Ker } A = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$ (в этом случае $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|$);
- (6) $\text{Im } A$ — замкнутое, дополняемое в $\mathcal{Y}$ подпространство и, следовательно, $\gamma(A) > 0$;
- (7) $\text{Im } A$ — замкнутое подпространство из $\mathcal{Y}$ коразмерности $1 \leq m = \text{codim Im } A \leq \infty$, где $\text{codim Im } A = \dim \mathcal{Y} / \dim \text{Im } A$;
- (8) $\text{Im } A = \mathcal{Y}$, т.е. оператор A сюръективен;
- (9) оператор A непрерывно обратим.

Если для оператора A выполнены все условия из совокупности условий $S_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 9$, то будем говорить, что оператор A находится в состоянии S_0 . Множество состояний оператора A обозначим символом $\text{St}_{\text{inv}}(A)$. Множество состояний обратимости, относящиеся к ядру, обозначим $\text{St}_{\text{Ker}}(A)$, по образу — $\text{St}_{\text{Im}}(A)$. Также заметим, что обычно перечисляются не все возможные состояния обратимости из $\text{St}_{\text{inv}}(A)$ ($\text{St}_{\text{Ker}}(A)$, $\text{St}_{\text{Im}}(A)$), а те, которые исследуются у данного конкретного оператора.

Приведенное определение понятия множества состояний обратимости линейных операторов было дано (с некоторыми вариациями) и использовалось в [2–7, 25–27] не только для линейных операторов, но и для линейных отношений. Отметим работу [37], в которой свойства из определения 3.1 рассматривались по отдельности, и для операторов $I - ST$ и $I - TS$, $T, S \in \text{End } \mathcal{X}$, доказывалось одновременное выполнение некоторых отдельных свойств определения 3.1.

Пример 3.1. Очевидно, $\text{St}_{\text{inv}}(I) = \text{St}_{\text{inv}}(J) = \{9\}$ и $\text{St}_{\text{inv}}(A) = \{9\}$ для любого $A \in \text{Aut } \mathcal{X}$.

Пример 3.2. Пусть пространство $\mathcal{X}$ представимо в виде прямой суммы замкнутых подпространств $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ и P_1, P_2 — два проектора, осуществляющих это разложение, т.е. $\mathcal{X}_k = \text{Im } P_k$, $k = 1, 2$. Каждому оператору $A \in \text{End } \mathcal{X}$ поставим в соответствие матрицу

$$A \sim \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij} = P_i A P_j$, $i, j = 1, 2$, $A_{ii} \in \text{End } \mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, $A_{21} \in \text{Hom}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$, $A_{12} \in \text{Hom}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1)$.

Лемма 3.1. Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$. Тогда $\mathcal{X}/\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}/\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1$.

Доказательство следует из представления любого вектора $x \in \mathcal{X}$ в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $x_2 \in \mathcal{X}_2$, и определения фактор-пространства.

Пусть $A_{12} = 0$, т.е. оператор A имеет блочную нижнетреугольную матрицу. Введем следующие подпространства:

$$\mathcal{X}_1^0 = \{x \in \mathcal{X}_1 \mid x \in \text{Ker } A_{11}, A_{21}x \in \text{Im } A_{22}\}, \quad \mathcal{X}_2^0 = \text{Im } A_{22} + A_{21}(\text{Ker } A_{11}).$$

Тогда для оператора A имеет место следующая лемма 3.2, позволяющая вычислить размерности $\dim \text{Ker } A$ и $\text{codim Im } A$.

Лемма 3.2 (см. [40, с. 23]). *Пусть выполнены следующие условия:*

- (i) $\text{Im } A_{11}$ — замкнутое подпространство и $\text{codim Im } A_{11} < \infty$;
- (ii) $\text{Im } A_{22}$ — замкнутое подпространство и $\dim \text{Ker } A_{22} < \infty$;
- (iii) $\dim \mathcal{X}_1^0 < \infty$;
- (iv) $\text{codim } \mathcal{X}_2^0 < \infty$.

Тогда

$$\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } A_{22} + \dim \mathcal{X}_1^0, \quad \text{codim Im } A = \text{codim Im } A_{11} + \text{codim } \mathcal{X}_2^0.$$

Таким образом, оператор A находится в состоянии $\{2, 7\}$ с конечными числами n и m .

Пример 3.3 (см. также [27, пример 2]). Введем два оператора

$$C : l_p = l_p(\mathbb{N}, \mathcal{X}) \rightarrow l_p, \quad R : l_p \rightarrow l_p,$$

действующих по формулам

$$(Cx)(n) = x(n+1), \quad Rx(n) = p(n)x(n-1), \quad (Rx)(1) = 0,$$

где $x \in l_p$ и

$$p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p(n) = \begin{cases} 1 & \text{для нечетных } n, \\ 0 & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Очевидно, что оператор $I - CR$ действует следующим образом:

$$((I - CR)x)(n) = \begin{cases} x(n) & \text{для нечетных } n, \\ 0 & \text{для четных } n, \end{cases}$$

и образ оператора $I - CR$ является замкнутым и дополняемым подпространством в l_p . Поэтому $\text{St}_{\text{inv}}(I - CR) = \{2, 6\}$.

Пример 3.4 (см. [15]). Рассмотрим оператор $I + K$ из $\text{End } \mathcal{X}$, где K — компактный оператор. Если точка -1 не входит в спектр $\sigma(K)$ оператора K , то $\text{St}_{\text{inv}}(I + K) = \{9\}$. Если же $-1 \in \sigma(K)$, то $I + K \notin \text{Aut } \mathcal{X}$, $\dim \text{Ker}(I + K) < \infty$, $\text{St}_{\text{Ker}}(I + K) = \{2\}$, $\text{St}_{\text{Im}}(I + K) = \{7\}$ согласно лемме 3.1.

Определение 3.2. Два линейных оператора $A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_1$ и $A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{Y}_2$ называются эквивалентными, если $\text{St}_{\text{inv}}(A_1) = \text{St}_{\text{inv}}(A_2)$.

Лемма 3.3. *Множество $\text{St}_{\text{inv}}(A)$ не изменится, если оператор $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ умножить слева на $U \in \text{Aut } \mathcal{Y}$ (или справа на $V \in \text{Aut } \mathcal{X}$).*

Доказательство. Пусть $U \in \text{Aut } \mathcal{Y}$, $V \in \text{Aut } \mathcal{X}$. Тогда

$$\dim \text{Ker } AV = \dim \text{Ker } A, \quad \text{Im } AV = \text{Im } A, \quad \text{Ker } UA = \text{Ker } A, \quad \text{Im } UA = U \text{Im } A. \quad \square$$

Замечание 3.1. Константы $\gamma(A)$ и $\gamma(UA)$, а также $\gamma(A)$ и $\gamma(AV)$ отличаются, но в определении 3.1 используется не конкретное значение этих констант, а условие $\gamma(A) > 0$. При $\gamma(A) > 0$ величины $\gamma(UA)$ и $\gamma(AV)$ также положительны.

Следствие 3.1 (см. [27, лемма 1]). Пусть операторы $A \in \text{End } \mathcal{X}$ и $B \in \text{End } \mathcal{Y}$ связаны соотношением $A = UBV$, где U и V — обратимые операторы из $\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ и $\text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, соответственно. Тогда $\text{St}_{\text{inv}}(A) = \text{St}_{\text{inv}}(B)$.

Существует несколько подходов к построению эквивалентного оператора. Один из них состоит в построении таких обратимых операторов U и V , при умножении на которые слева и справа (или справа и слева) получается эквивалентный оператор, множество состояний обратимости которого или хорошо известно, или легко вычисляется.

В случае выполнения условий леммы 3.3 имеют место следующие свойства (см. [27, леммы 2, 9]).

Лемма 3.4.

- (i) Если ядро оператора B дополняемо в $\mathcal{Y}$ и известен проектор $P_{\text{Ker } B} \in \text{End } \mathcal{Y}$ на ядро $\text{Ker } B$, то ядро оператора A также дополняемо в $\mathcal{X}$ и оператор $P_{\text{Ker } A} = V^{-1}P_{\text{Ker } B}V$ является проектором на ядро $\text{Ker } A$.
- (ii) Если образ оператора B замкнут и дополняем в $\mathcal{Y}$, $P_{\text{Im } B} \in \text{End } \mathcal{Y}$ — проектор на $\text{Im } B$, то образ оператора A также дополняем в $\mathcal{X}$ и $P_{\text{Im } A} = UP_{\text{Im } B}U^{-1} \in \text{End } \mathcal{X}$ — проектор на образ $\text{Im } A$.

Для построения эквивалентного оператора не всегда возможно применить конструкцию из леммы 3.3. Поэтому иногда приходится пользоваться более сложной конструкцией и строить сопровождающий оператор.

Определение 3.3 (см. [6, определение 2]). Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Оператор $B \in \text{End } \mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ — комплексное банахово пространство, называется сопровождающим для оператора A , если существуют линейные операторы $R \in \text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $T \in \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, $K : D(A) \rightarrow \mathcal{Y}$, $N : \mathcal{Y} \rightarrow D(A)$, обладающие следующими свойствами:

- (i) $\text{Im } A = R^{-1}(\text{Im } B)$;
- (ii) $\text{Im } B = T^{-1}(\text{Im } A)$;
- (iii) $RT = I + \alpha B$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ — некоторое число;
- (iv) $K : D(A) \rightarrow \mathcal{Y}$ — ограниченный оператор (с нормой графика в $D(A)$);
- (v) $N : \mathcal{Y} \rightarrow D(A)$ — ограниченный оператор, если в $D(A)$ рассматривать норму пространства $\mathcal{X}$;
- (vi) каждый из операторов K и N осуществляет изоморфизм пространств $\text{Ker } A$ и $\text{Ker } B$.

Теорема 3.1 (см. [6, теорема 1]). Оператор A и сопровождающий оператор B эквивалентны.

Таким образом, для построения эквивалентного оператора можно использовать не только лемму 3.3, но и определение 3.3. Именно такой подход используется для дифференциальных операторов, заключающийся в построении сопровождающего разностного оператора (см., например, [7]).

Сравним свойства из определения 3.3 с формулой из леммы 3.3. Для этого положим $\alpha = 0$, т.е. п. (iii) определения 3.3 имеет вид $RT = I$. Так как R и T — обратимые операторы, то $R = T^{-1}$ и $T = U$. В частном случае, в условиях следствия 3.1, операторы K и N взаимно обратны и $V = K$. Таким образом, условия леммы 3.3 можно рассматривать как частный случай более общей схемы построения эквивалентного оператора.

Отметим, что в [7, определение 6] операторы $A \in \text{End } \mathcal{X}$ и $B \in \text{End } \mathcal{Y}$ назывались эквивалентными, если они связаны соотношением $A = UB V$, где $U \in \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ и $V \in \text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ — обратимые операторы. Условия определения 3.1 и [7, определение 6] идентичны.

Определение 3.4. Два оператора $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ и $B : D(B) \subset \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ называются спектрально эквивалентными (или сильно эквивалентными), если они эквивалентны и их спектры совпадают, т.е. $\text{St}_{\text{inv}}(A - \lambda I)^{-1} = \text{St}_{\text{inv}}(B - \lambda I)^{-1}$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. Подобные операторы, слабо подобные операторы, метод операторов преобразования и их связь с эквивалентными операторами.

Определение 4.1. Два оператора $B_i : D(B_i) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует такой обратимый оператор U , что $UD(B_2) = D(B_1)$ и $B_1 Ux = UB_2 x$, $x \in D(B_2)$. Оператор U называется оператором преобразования оператора B_1 в оператор B_2 , или сплетающим оператором (терминологию см. в [30, 35]).

Подобные операторы обладают рядом свойств, перечисленных в следующей лемме.

Лемма 4.1. Пусть A_i , $i = 1, 2$, — подобные операторы и U — оператор преобразования.

- (i) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma_d(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ — дискретный, непрерывный и остаточный спектры оператора A .
- (ii) Если e_0 — собственный вектор оператора A_2 , отвечающий собственному значению λ_0 , то Ue_0 — собственный вектор оператора A_1 , отвечающий тому же собственному значению λ_0 .
- (iii) Если P — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ оператора A_2 , то спектральный проектор $\tilde{P}$, построенный по тому же множеству σ для оператора A_1 , определяется формулой $\tilde{P} = UPU^{-1}$.
- (iv) Если оператор A_2 допускает разложение относительно прямой суммы $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, то оператор A_1 допускает разложение относительно прямой суммы $\mathcal{X} = U\mathcal{X}_1 \oplus U\mathcal{X}_2$.
- (v) Если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной группы операторов $T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ (класса C_0), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной группы операторов вида

$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad T_1 : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}.$$

Из следствия 3.1 и леммы 4.1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.2. Подобные операторы спектрально эквивалентны.

В отличие от подобных операторов, спектры эквивалентных операторов могут не совпадать. Например, пусть $A \in \text{Aut } \mathcal{X}$ и $1 \notin \sigma(A)$. Тогда $A^{-1}A = I$. В спектр оператора $A^{-1}A$ входит единица, которой не было в спектре оператора A . При этом согласно лемме 3.3 операторы A и $A^{-1}A$ эквивалентны.

Отметим, что эквивалентные операторы не обязаны быть подобными.

Также, в случае выполнения условий леммы 3.3, отметим схожесть формулы проекторов на образ и ядро эквивалентных операторов из следствия 3.1 с формулой из п. (iii) леммы 4.1.

Далее остановимся на связи понятия слабо подобия (см. определение 4.2) с понятием эквивалентных матриц (см. определение 4.3) и эквивалентных операторов.

Пусть $\text{Matr}(\mathbb{C}^n)$ — подпространство всех комплексных матриц n -го порядка, $\text{Matr}(n, m, \mathbb{C})$ — пространство матриц размера $n \times m$. В стандартном учебнике [31, с. 92] приводится следующее определение.

Определение 4.2. Две матрицы $A, B \in \text{Matr}(n, m, \mathbb{C})$ называются эквивалентными, если найдутся такие невырожденные матрицы $P \in \text{Matr}(\mathbb{C}^n)$, $Q \in \text{Matr}(\mathbb{C}^m)$, что $A = PBQ$.

Отметим, что основополагающим свойством эквивалентных матриц является равенство их рангов; в множестве $\text{Matr}(n, m, \mathbb{C})$ имеется $\min(n, m) + 1$ классов эквивалентности.

Обобщением понятия эквивалентных матриц является понятие слабо подобия матриц (см. [33, с. 248], [36, с. 46]).

Определение 4.3. Пусть $A, B \in \text{Matr}(\mathbb{C}^n)$. Матрицы A и B называются слабо подобными, если существуют такие невырожденные матрицы $P, Q \in \text{Matr}(\mathbb{C}^n)$, что $A = PBQ$.

Отметим, что подобные матрицы являются слабо подобными и любая невырожденная матрица слабо подобна единичной. Более того (см. [36, с. 51]), каждая матрица $A \in \text{Matr}(\mathbb{C}^n)$ слабо подобна диагональной матрице с единицами и нулями на главной диагонали.

Замечание 4.1. Формула $A = PBQ$ из определения 4.3 полностью идентична условию следствия 3.1. Таким образом, слабо подобные операторы эквивалентны. И слабо подобные операторы, и эквивалентные операторы можно рассматривать как обобщение понятия подобных операторов.

Отметим, что кроме эквивалентных операторов, обобщением понятия подобных операторов являются сплетаемые операторы, т.е. требуется выполнение равенства $AQ = QB$, $QD(B) = D(A)$, но оператор Q , в отличие от подобия, может не быть обратим и (или) ограниченным. Тогда

оператор Q называется сплетающим оператором, A и B — сплетаемыми операторами, а соответствующий метод — методом операторов преобразования.

Посмотреть историю и применение метода операторов преобразования можно в [30, 35, 39, 41]. Важно отметить, что так как оператор Q не обязан быть обратимым (ограниченным), то сплетаемые операторы могут не быть эквивалентными операторами (и подобными операторами).

5. Примеры. В этом разделе приведем примеры эквивалентных операторов.

Пример 5.1 (см. также [27]). Рассмотрим два ограниченных оператора: оператор $I - CR$ из примера 3.3 и оператор $I - RC$, где R и C определены в примере 3.3. Известно (см., например, [21, гл. 1, § 1]), что $\sigma(RC) \setminus \{0\} = \sigma(CR) \setminus \{0\}$; случай $0 \in \sigma(RC)$ также исследован в [13, теорема 6.5]. Непосредственный подсчет показывает, что $(I - RC)x = \{x(1), x(2), 0, x(4), 0, \dots\}$.

Теорема 5.1 (см. [27, теорема 1]). *Операторы $I - CR$ и $I - RC$ эквивалентны, т.е.*

$$\text{St}_{\text{inv}}(I - CR) = \text{St}_{\text{inv}}(I - RC).$$

Отметим, что для оператора $I - CR$ легко строится проектор на образ оператора

$$(Px)(n) = \begin{cases} 0 & \text{для четных } n, \\ 1 & \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

Тогда с использованием леммы 3.4 можно получить проектор на образ ему эквивалентного оператора $I - RC$ (соответствующая формула приведена в [27, пример 2]).

Пример 5.2. Для любой функции $\alpha \in L_1(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор свертки A_α , определенный формулой

$$(A_\alpha x)(t) = (\alpha * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad \alpha \in L_1, \quad x \in L_p.$$

Рассмотрим оператор $A_{\alpha,\beta} = A_\alpha + A_\beta J$, действующий по формуле

$$(A_{\alpha,\beta} x)(t) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t - \tau) x(\tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} \beta(t + \tau) x(\tau) d\tau, \quad \alpha, \beta \in L_1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Такой оператор в [34] назывался интегральным оператором с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов. При $\alpha, \beta \in L_1 \cap L_2$ в [1] такой интегральный оператор называется интегральным оператором с полукарлемановским ядром. В [1, 34] операторы $A_{\alpha,\beta}$ исследовались сведением с помощью преобразования Фурье к операторам умножения вида

$$\hat{A}_{\alpha,\beta} y = \hat{\alpha} y + \hat{\beta} J y, \quad y \in L_2.$$

Далее (см. [13]), каждой функции $y \in L_2$ ставится в соответствие пара функций $\overline{y} = \{y_+, y_-\}$, где $y_\pm(t) = y(\pm t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда оператор $\hat{A}_{\alpha,\beta}$ спектрально эквивалентен оператору (см. [34]):

$$(B_{\alpha,\beta} \overline{y})(t) = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}(t) & \hat{\beta}(t) \\ \hat{\beta}(-t) & \hat{\alpha}(-t) \end{pmatrix} \overline{y}(t) = Q(t) y(t), \quad (2)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathbb{C}^2$. Таким образом, спектры операторов $A_{\alpha,\beta}$ и $B_{\alpha,\beta}$ совпадают, а спектр последнего легко вычисляется.

Теорема 5.2. *Пусть операторы $A_{\alpha,\beta}$ и $B_{\alpha,\beta}$ заданы формулами (1) и (2) соответственно. Тогда $\text{St}_{\text{inv}} A_{\alpha,\beta} = \text{St}_{\text{inv}} B_{\alpha,\beta}$.*

Отметим, что исследование свойств операторов $A_{\alpha,\beta}$ можно найти в [1, 14, 24, 34].

Пример 5.3. Сведение дифференциального оператора первого порядка с инволюцией к оператору Дирака (см. [22, 23]). В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Ax)(t) = x'(t) + q(t)x(1 - t), \quad t \in [0, 1], \quad D(A) = \{x \in W_2^1[0, 1] : x(0) = x(1)\}.$$

Переход от оператора A к соответствующему оператору Дирака осуществляется следующим образом. Пусть $y(t) = \{x(t), x(1 - t)\} = \{y_1(t), y_2(t)\}$.

Из [23, лемма 1] вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Оператор A спектрально эквивалентен оператору $B : D(B) \subset L_2([0, 1], \mathbb{C}^2) \rightarrow L_2([0, 1], \mathbb{C}^2)$ вида*

$$(By)(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y'(t) + \begin{pmatrix} 0 & q(t) \\ q(1-t) & 0 \end{pmatrix} y(t), \quad t \in [0, 1],$$

и $y_1(1/2) = y_2(1/2)$.

Пример 5.4 (см. также [4]). Обозначим через S оператор одностороннего сдвига последовательностей из $l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$: $S \in \text{End } l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $(Sx)(k) = x(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty)$. Рассмотрим разностный оператор $D \in \text{End } l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ вида

$$D = S^2 + B_1 S + B_2,$$

где $B_1, B_2 \in \text{End } l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ и $(B_k x)(n) = B_k(n)x(n)$, $k = 1, 2$, $x \in l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ — операторы умножения на операторные функции. Также введем оператор $\mathcal{D} \in \text{End } l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2)$, $\mathcal{D} = \mathcal{S} + \mathcal{B}$, где операторы $\mathcal{S}, \mathcal{B} \in \text{End } l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2)$ определяются равенствами

$$\mathcal{S}x = (Sx_1, Sx_2), \quad (\mathcal{B}x)(n) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(n) & B_1(n) \end{pmatrix} x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = (x_1, x_2) \in l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}^2).$$

Другими словами, оператор D определяется в $l_p \times l_p$ матрицей вида

$$\begin{pmatrix} S & -I \\ B_2 & S + B_1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.4 (см. [4, теорема 1]). $\text{St}_{\text{inv}}(D) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{D})$.

Отметим, что в [5] рассматривался более сложный случай разностного оператора высшего порядка, который также сводился к матричному разностному оператору. Мы его не приводим ввиду громоздкости.

Пример 5.5 (см. также [7]). Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — линейный замкнутый оператор. Рассмотрим операторный полином второй степени

$$\mathcal{A} = B_0 A^2 + B_1 A + B_2 : D(A^2) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

с областью определения $D(\mathcal{A}) = \{x \in D(A), Ax \in D(A)\}$, где $B_k \in \text{End } \mathcal{X}$. Также введем оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A)$, с помощью операторной матрицы

$$\mathbb{A} \sim \begin{pmatrix} A & -I \\ B_2 & B_0 A + B_1 \end{pmatrix},$$

т.е. $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, B_2 x_1 + B_0 A x_2 + B_1 x_2)$, $(x_1, x_2) \in D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A)$.

Теорема 5.5 (см. [7, теорема 1]). *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathbb{A}$ эквивалентны, т.е. $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{A}) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathbb{A})$.*

Отметим, что в [5] был рассмотрен операторный полином степени n при условии $A \in \text{End } \mathcal{X}$ и также осуществлено его сведение к матричному оператору. Наконец, самый общий случай сведения дифференциальных и разностных полиномов n -го порядка к эквивалентному матричному оператору приведен в [38] (его мы также не рассматриваем ввиду громоздкости).

Отметим работу [8], в которой произведено сведение линейных дифференциальных операторов к эквивалентным операторам, заданным операторными матрицами второго порядка.

Пример 5.6 (см. [9]). Рассмотрим семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(t, s), -\infty < s \leq t < +\infty\}$ из $\text{End } \mathcal{X}$, т.е. пусть выполнены следующие условия:

- (i) семейство $\mathcal{U}$ сильно непрерывно на $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \leq t\}$;
- (ii) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$, $-\infty < \tau \leq s \leq t < +\infty$;
- (iii) $\mathcal{U}(t, t) = I$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- (iv) $\sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| = K < \infty$.

Семейству ставится в соответствие оставляется линейный оператор

$$\mathcal{L}_u : D(\mathcal{L}_u) \subset L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X}),$$

с такой областью определения, что функция $x \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ включается в $D(\mathcal{L}_u)$, если существует функция $f \in L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, удовлетворяющая почти для всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$ равенству

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau;$$

при этом считается $\mathcal{L}_u x = f$. Таким образом, определен абстрактный параболический оператор $\mathcal{L}_u = -d/dt + A(t) : D(\mathcal{L}_u) \subset L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, где $\mathcal{U}$ — семейство эволюционных операторов для линейного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $A(t) : D(A(t)) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — семейство замкнутых линейных операторов, порождающих корректную задачу Коши.

Рассмотрим также полугруппу $\{T_u(t), t \geq 0\}$ операторов из банаховой алгебры $\text{End}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ вида

$$(T_u(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), \quad x \in (\mathbb{R}, \mathcal{X}), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Из [9, теорема 2] вытекает следующий результат.

Теорема 5.6. $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{L}_u) = \text{St}_{\text{inv}}(I - T_u(1))$.

Рассмотрим оператор $D : l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}) \rightarrow l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty)$, определяемый формулой

$$(Dx)(n) = x(n) - \mathcal{U}(n, n-1)x(n-1), \quad x \in l_2(\mathbb{Z}, \mathcal{X}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 5.7 (см. [9, теорема 3]). $\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{L}_u) = \text{St}_{\text{inv}}(D)$.

Пример 5.7 (см. [10–12]). Зададим пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ инволюцию по формуле $(Jx)(n) = x(-n)$, $x \in l_p$, $n \in \mathbb{Z}$, $p \in [1, \infty)$. Это простейший вид инволюции в l_p — отражение. Отметим, что существуют и другие виды инволюции. Для любой последовательности $\alpha \in l^\infty$ определим оператор

$$A_\alpha : D(A_\alpha) \subset l_p \rightarrow l_p, \quad A_\alpha = \alpha I, \quad D(A_\alpha) = \{x \in l_p, \alpha x \in l_p\}.$$

Рассмотрим оператор

$$A_{\alpha, \beta} = A_\alpha + A_\beta J, \quad \alpha, \beta \in l^\infty, \quad A_{\alpha, \beta} = \alpha I + \beta J, \quad D(A_{\alpha, \beta}) = D(A_\alpha) \cap D(A_\beta). \quad (3)$$

Каждой последовательности $x \in l_p$, $1 \leq p < \infty$, поставим в соответствие пару последовательностей $\bar{x} = (x_+, x_-)$, где $x_\pm(n) = x(\pm n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, $\bar{x} \in l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ или $\bar{x} : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{C}^2$; обозначим через $U : l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$, $Ux = \bar{x}$, оператор, осуществляющий это соответствие. Очевидно, что $\text{Ker } U = \{0\}$, $\text{Im } U = l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$. Таким образом, оператор U осуществляет взаимно однозначное соответствие между $l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C})$ и $l_p(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ и имеет обратный.

С помощью такой замены оператор $A_{\alpha, \beta}$, действующий в пространстве l_2 , сводится к спектрально эквивалентному оператору $B_{\alpha, \beta} : D(B_{\alpha, \beta}) \subset l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2) \rightarrow l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$, действующему по формуле

$$(B_{\alpha, \beta} \bar{x})(n) = \begin{pmatrix} \alpha(n) & \beta(n) \\ \beta(-n) & \alpha(-n) \end{pmatrix} \bar{x}(n) = Q(n) \bar{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4)$$

При этом спектр оператора $B_{\alpha, \beta}$ есть объединение спектров матриц второго порядка $Q(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и легко вычисляется.

Теорема 5.8. Пусть операторы $A_{\alpha, \beta}$ и $B_{\alpha, \beta}$ заданы формулами (3) и (4) соответственно. Тогда $\text{St}_{\text{inv}} A_{\alpha, \beta} = \text{St}_{\text{inv}} B_{\alpha, \beta}$.

6. Фредгольмовы операторы.

Определение 6.1 (см. [2]). Если оператор A находится в одном из состояний $\{1, 7\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 8\}$, причем $n, m < \infty$, то он называется фредгольмовым оператором (или $\Phi\mathfrak{D}$ -оператором). Если оператор A находится в одном из состояний $\{1, 7\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 8\}$, причем только одно из чисел n, m конечно, то он называется полуфредгольмовым: Φ_+ -оператором, если $n < \infty$, и Φ_- -оператором, если $m < \infty$. Число $\text{Ind } A = \dim \text{Ker } A - \text{codim Im } A$ называется индексом фредгольмова оператора.

Определение 6.1 полностью согласуется с определением фредгольмова оператора из [32]. В этой статье рассмотрены также различные определения фредгольмова оператора и связь между определениями.

Приведем примеры фредгольмовых операторов.

Пример 6.1. Оператор A из примера 3.3, имеющий нижнетреугольную матрицу, фредгольмов.

Пример 6.2. Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ — оператор с компактной резольвентой, т.е. его спектр состоит из собственных значений конечной кратности и не имеет предельных точек. Так как нас интересуют состояния обратимости, то возможны два случая: $0 \in \sigma(A)$ и $0 \notin \sigma(A)$. Во втором случае $\text{St}_{\text{inv}}(A) = \{9\}$. Пусть теперь $0 \in \sigma(A)$. Тогда $P_0 = P(\{0\}, A)$ — соответствующий спектральный проектор, $I = P_0 + P^0$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}^0$, $\mathcal{X}_0 = \text{Im } P_0$, сужение $A|_{\mathcal{X}_0}$ оператора A на подпространство $\mathcal{X}_0$ есть нильпотентный оператор, размерность ядра $\dim \text{Ker } A$ которого совпадает с алгебраической кратностью собственного значения нуль. Таким образом, $\mathcal{X}_0$ состоит из нильпотентных векторов и является замкнутым дополняемым подпространством в $\mathcal{X}$. Оператор $A|_{\mathcal{X}^0}$ обратим, и обратный к нему является ограниченным компактным оператором.

Теорема 6.1. Оператор $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ с компактной резольвентой является фредгольмовым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров Е. Л., Кириченко Б. И. О спектральных функциях интегральных операторов Карлемана с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов // Сиб. мат. ж. — 1978. — 19, № 6. — С. 1219–1231.
2. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — 73, № 2. — С. 3–68.
3. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной // Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 1 (409). — С. 77–128.
4. Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Изв. РАН. Сер. мат. — 2015. — 79, № 2. — С. 3–20.
5. Баскаков А. Г., Харитонов В. Д. Спектральный анализ операторных полиномов и разностных операторов высокого порядка // Мат. заметки. — 2017. — 101, № 3. — С. 330–345.
6. Баскаков А. Г., Диденко В. Б. О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — 82, № 1. — С. 3–16.
7. Баскаков А. Г., Диденко В. Б. Спектральный анализ операторных полиномов и дифференциальных операторов второго порядка // Мат. заметки. — 2020. — 108, № 4. — С. 490–506.
8. Баскаков А. Г., Кабанцова Л. Ю., Коструб И. Д., Смагина Т. И. Линейные дифференциальные операторы и операторные матрицы второго порядка // Диффер. уравн. — 2017. — 53, № 1. — С. 10–20.
9. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функц. анализ. прилож. — 1996. — 30, № 3. — С. 1–11.
10. Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральные свойства разностных операторов с инволюцией // Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 12–14 декабря 2022 г.). — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2023. — С. 7–11.

11. Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Об ограниченных разностных операторах с инволюцией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 229. — С. 12–21.
12. Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Некоторые свойства разностных операторов с инволюцией// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2023. — № 2. — С. 36–45.
13. Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные подгруппы операторов// Мат. сб. — 2002. — 193, № 11. — С. 3–42.
14. Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Об алгебре интегральных операторов с инволюцией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 230. — С. 41–49.
15. Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Костина Л. Н., Ускова Н. Б. О состояниях обратимости оператора с компактной резольвентой// Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 4–6 декабря 2023 г.). — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2024. — С. 36–40.
16. Бесаева С. В. О спектре разностных отношений и дифференциальных операторов в весовых пространствах последовательностей и функций// Алгебра анализ. — 2014. — 26, № 4. — С. 1–21.
17. Бичегкуев М. С. К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Мат. сб. — 2013. — 204, № 11. — С. 3–20.
18. Бичегкуев М. С. Об условиях обратимости разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — 75, № 4. — С. 3–20.
19. Бичегкуев М. С., Бесаева С. В. О спектральных свойствах разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 2. — С. 16–21.
20. Бичегкуев М. С. О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах// Функц. анализ. прилож. — 2010. — 44, № 1. — С. 80–83.
21. Бурбаки Н. Спектральная теория. — М.: Мир, 1972.
22. Бурлуцкая М. Ш. Вопросы спектральной теории для операторов с инволюцией и приложения. — Воронеж: Научная книга, 2020.
23. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — 14, № 1. — С. 10–20.
24. Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Об алгебрах операторов в функциональных пространствах с инволюцией// Мат. 22 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения», посв. 300-летию РАН (Саратов, 28–31 января 2024 г.), 2024. — С. 65–68.
25. Диденко В. Б. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением// Мат. заметки. — 2011. — 89, № 2. — С. 226–240.
26. Диденко В. Б. О состояниях обратимости линейных дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — 14, № 2. — С. 136–144.
27. Диденко В. Б. Спектральные свойства операторов AB и BA // Мат. заметки. — 2018. — 103, № 2. — С. 196–209.
28. Дуплищева А. Ю. О дифференциальных операторах и матрицах второго порядка// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2015. — 15, № 1. — С. 31–37.
29. Кабанцова Л. Ю. Линейные разностные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2017. — 17, № 3. — С. 285–293.
30. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
31. Кострикин А. И. Введение в линейную алгебру. Часть I. — М.: Физматлит, 2004.
32. Крачковский С. Н., Диканский А. С. Фредгольмовы операторы и их обобщения// в кн.: Итоги науки. Математика. Математический анализ. — М.: ВИНТИ РАН, 1968. — С. 39–71.
33. Курбатов В. Г. Алгебра. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2022.
34. Пальчиков А. Н. Спектральный анализ интегральных операторов с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов// Изв. вузов. Мат. — 1990. — № 3. — С. 80–83.
35. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
36. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦМНО, 2004.

37. *Barnes B. A.* Common operator properties of the linear operators RS and SR // Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — 126, № 4. — P. 1055–1061.
38. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Spectral properties of an operator polynomial with coefficients in a Banach algebra// в кн.: Frames and Harmonic Analysis. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2018. — С. 93–114.
39. *Kravchenko V. V., Sitnik S. M.* Transmutation Operators and Applications. — Cham: Birkhäuser, 2020.
40. *Litvinchuk G. S., Spitkovski I. M.* Factorization of Measurable Matrix Functions. — Basel: Birkhäuser, 1987.
41. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. — London: Academic Press, 2020.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич (Baskakov Anatolii Grigorievich)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валериевна (Garkavenko Galina Valerievna)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна (Uskova Natalia Borisovna)
Воронежский государственный технический университет
(Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia)
E-mail: nat-uskova@mail.ru

Костина Любовь Николаевна (Kostina Lyubov Nikolaevna)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: kostinalubov@bk.ru