ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 50–56
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-50-56

УДК 517.929

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© 2022 г. **В. Б ВАСИЛЬЕВ, Ш. Х. КУТАИБА**

Аннотация. Рассматривается модельное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в пространствах Соболева—Слободецкого во внешней области угла на плоскости. С помощью волновой факторизации в случае единственного решения исследуется ситуация, когда раствор угла стремится к нулю. Показано, что этот предел существует, только если правая часть удовлетворяет некоторому дополнительному условию. Это условие получено с использованием свойств сингулярных интегральных операторов.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, символ, волновая факторизация, плоский угол, сингулярный интеграл, предельное решение, граничное условие.

ELLIPTIC PROBLEMS IN DOMAINS WITH DEGENERATE SINGULARITIES

© 2022 **V. B. VASILYEV, Sh. Kh. KUTAIBA**

Abstract. We consider a model elliptic pseudodifferential equation in Sobolev– Slobodetsky spaces in a reflex angle on the plane. Using the wave factorization, in the case of a unique solution, we study the situation where the aperture of the explementary angle tends to zero. We prove that this limit exists only if the right-hand side satisfies a certain additional condition and obtain this condition using the properties of singular integral operators.

Keywords and phrases: pseudodifferential equation, symbol, wave factorization, planar angle, singular integral, limit solution, boundary condition.

AMS Subject Classification: 35S15, 42B37, 45E05

1. Введение. В теории эллиптических псевдодифференциальных операторов и уравнений на многообразиях с особенностями, начиная с последней четверти прошлого столетия, появилось много различных подходов и интересных результатов [1, 4–6, 9, 10]. Обычно под теорией подразумевается описание условий фредгольмовости псевдодифференциального оператора и предъявление формулы для его индекса. Любой вариант теории опирается на локальный принцип, согласно которому для поучения условий фредгольмовости нужно иметь условия обратимости модельных операторов в специальных канонических областях евклидова пространства. Универсальной канонической областью евклидова пространства является конус, который годится как для гладких многообразий без края (здесь в качестве канонической области выступает все пространство $\mathbb{R}^m$; см. [8]), так и для многообразий с гладким краем (здесь участвуют два канонических конуса: $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : \ x = (x', x_m), \ x_m > 0\}$; см. [6]). Самый неприятный случай конуса — это выпуклый конус, не содержащий целой прямой. С этой отправной точки были проведены первые

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект № FZWG-2020-0029.

исследования автора. Однако здесь мы рассмотрим ситуацию, когда исходный конус превращается в конус меньшей размерности, когда некоторые его параметры стремятся к предельным значениям. Некоторые предварительные рассмотрения были сделаны автором в [11], и некоторые конкретные результаты получены в [7, 12].

Здесь будет рассмотрен еще один случай вырождения конуса, отличный от описанных ранее. Используемые свойства одномерных сингулярных интегральных операторов можно найти в классических монографиях [2, 3].

2. Эллиптические операторы. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — область, $A(x,\xi)$ — измеримая функция, определенная на $D \times \mathbb{R}^m$.

Определение 1. Псевдодифференциальным оператором A в области D называется оператор вида
$$u(x) \longmapsto \int\limits_D \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(x,\xi) e^{i(x-y)\cdot\xi} u(y) dy d\xi, \quad x \in D; \tag{1}$$
функция $A(x,\xi)$ называется символом этого оператора.

Оператор называют эллиптическим, если его символ нигде не обращается в нуль. Мы будем рассматривать эллиптические операторы, символы которых удовлетворяют условию
$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(x,\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^\alpha,$$
с универсальными положительными постоянными c_1, x_2; при этом $\alpha \in \mathbb{R}$ называют порядком псевдодифференциального оператора A. (Если вспомнить про сегодняшнее модное направление, связанное с дробными производными, то стоит подчеркнуть, что это оператор дробного порядка).

Удобными функциональными пространствами для исследования таких операторов являются пространства Соболева—Слободецкого $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$, носитель которых содержится $\overline{D}$ и конечна норма
$$\|u\|_s = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s} d\xi \right)^{1/2},$$
где $\tilde{u}$ обозначает преобразование Фурье
$$\tilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{ix\cdot\xi} u(x) dx.$$

Псевдодифференциальное уравнение
$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in D, \tag{2}$$
с оператором A было предметом исследования многих работ, в которых основной акцент был сделан на построение регуляризатора для оператора, наличие которого позволяло свести исходное уравнение к интегральному уравнению Фредгольма. Это гарантировало конечность индекса оператора и в дальнейшем приводило к его вычислению. Упомянутый метод основывался на локальном принципе (или принципе замораживания коэффициентов, известном в теории уравнений с частными производными), и, в силу локального принципа, следовало описать условия обратимости некоторого модельного псевдодифференциального уравнения в специальной канонической области евклидова пространства. Это модельное уравнение должно быть «локальной копией» уравнения (2) с несущественными изменениями (которые не оказывают влияния на регуляризатор и индекс). В случае гладких символов эта локальная копия выглядит следующим образом:
$$(A_{x_0} f)(x) = g(x), \quad x \in D_{x_0},$$
где A_{x_0} — оператор с символом $A(x_0,\xi)$ (x_0 фиксировано), а D_{x_0} — специальная каноническая область (конус), который выглядит по-разному в зависимости от расположения точки x_0 в исходной области D.

2.1. Типы канонических областей. Первый рассмотренный тип — это евклидово пространство $\mathbb{R}^m$; он возникает, когда точка x_0 — внутренняя точка области (многообразия) D. Поскольку малая окрестность такой точки диффеоморфна $\mathbb{R}^m$, евклидово пространство подходит в качестве канонической области D_{x_0}.

Второй тип — это полупространство

$$\mathbb{R}^m_+ = \Big\{x \in \mathbb{R}^m,\ x = (x', x_m),\ x_m > 0\Big\};$$

он появляется, когда точка находится на гладкой части границы, и малая окрестность такой точки ему диффеоморфна.

Наконец, третий и наиболее неприятный канонический тип — это выпуклый конус C^k в k-мерном пространстве $\mathbb{R}^k$ и его разновидности $\mathbb{R}^{m-k} \times C^k$. Полагаем по определению $\mathbb{R}^0 \times C^m \equiv C^m$, $\mathbb{R}^m \times C^0 \equiv \mathbb{R}^m$.

Теория разрешимости модельных уравнений в каждом типе канонический областей выглядит по-разному, и в следующем пункте мы кратко опишем их отличия.

2.2. Эллиптические операторы в канонических областях. Модельный оператор в канонической области имеет символ $A(\xi)$, не зависящий от пространственной переменной x. Модельное уравнение

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{ess}\inf_{\xi \in \mathbb{R}^m} |A(\xi)| > 0. \tag{3}$$

Условие (3) обычно называют условием эллиптичности уравнения (2) (или оператора A, или символа $A(\xi)$). Это условие является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости уравнения (2) при любой правой части $g \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$, или, другими словами, для обратимости модельного оператора $A\colon H^s(\mathbb{R}^m) \to H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$.

Нетрудно сообразить, что при сделанных предположениях модельный оператор также будет линейным ограниченным оператором $A\colon H^s(\mathbb{R}^m_+) \to H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m_+)$, однако картина разрешимости модельного уравнения

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^m_+,$$

существенно иная. Для однозначной разрешимости уравнения условия (3) уже недостаточно, ключевую роль играет специальная метрическая (порядок роста на бесконечности) и топологическая (степень отображения)) характеристика символа $A(\xi)$ — число $\varkappa$, названная индексом факторизации [6]. Оказалось, что разность $\varkappa - s$ полностью определяет структуру решения модельного уравнения в пространстве $H^s(\mathbb{R}^m_+)$.

Последняя тип модельного уравнения — уравнение в конусе

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^{m-k} \times C^k,$$

с линейным ограниченным оператором

$$A\colon H^s(\mathbb{R}^{m-k} \times C^k) \to H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^{m-k} \times C^k);$$

здесь выяснилось, что может оказаться полезной другая числовая характеристика, называемая индексом волновой факторизации эллиптического символа (см. [1]). Как и в предыдущем случае, разность между этим индексом и показателем s полностью определяет структуру решения, правда, конструкции оказываются несколько более громоздкими. Самое неприятное, это отсутствие алгоритма построения волновой факторизации в отличие от случая полупространства, где этот алгоритм гарантировала классическая теория краевой задачи Римана [2,3]. С учетом этого обстоятельства, наличие волновой факторизации можно считать дополнительным постулатом теории эллиптических псевдодифференциальных уравнений в конусах. Несмотря на это обстоятельство, удается рассматривать и более замысловатые конусы, которые получаются из вышеприведенных с помощью предельного перехода. Ниже мы рассмотрим простейший конус на плоскости.

3. Вырожденная особенность: двумерный случай. Пусть C_+^a — угол на плоскости

$$C_+^a = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x = (x_1, x_2), \ x_2 > a|x_1|, \ a > 0\Big\}.$$

Мы рассматриваем модельное уравнение вида

$$(Af)(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus C_+^a, \tag{4}$$

в предположении, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно $-C_+^a$ (знак «$-$» нужен, в отличие от определения в [1], поскольку мы рассматриваем дополнение к выпуклому конусу). Напомним, что это специальное представление символа

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

множителями, обладающими специальными свойствами, связанными с аналитическим продолжением в радиальные трубчатые области комплексного пространства $\mathbb{C}^2$. Кратко поясним сказанное.

Конусом, сопряженным к C_+^a называется конус

$$\overset{*}{C}{}_+^a = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x = (x_1, x_2), \ ax_2 > |x_1|\Big\};$$

радиальная трубчатая область $T(\overset{*}{C}{}_+^a)$ над конусом $\overset{*}{C}{}_+^a$ — это множество вида $\mathbb{R}^2 + i\,\overset{*}{C}{}_+^a$.

Волновая факторизация требует аналитической продолжимости операторов $A_{\neq}(\xi)$ и $A_{=}(\xi)$ в $T(-\overset{*}{C}{}_+^a)$ и $T(\overset{*}{C}{}_+^a)$ соответственно с оценками

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \leqslant c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm \varkappa}, \quad |A_{=}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \leqslant c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - \varkappa)}$$

для всех $\tau \in \overset{*}{C}{}_+^a$; и число $\varkappa$ называется индексом волновой факторизации.

Введем интегральный оператор (см. [1])

$$(G_a\tilde{u})(\xi) = \frac{a}{2\pi^2} \lim_{\tau \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{u}(\eta)d\eta}{(\xi_1 - \eta_1)^2 - a^2(\xi_2 - \eta_2 + i\tau)^2}. \tag{5}$$

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно C_+^a с таким индексом $\varkappa$, что $|\varkappa - s| < 1/2$. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение в пространстве $H^s(\mathbb{R}^2 \setminus C_+^a)$, которое в образах Фурье дается формулой*

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)(I - G_a)(A_{=}^{-1}(\xi)\widetilde{\ell g}(\xi)), \tag{6}$$

где ℓg — произвольное продолжение g на все $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$.

Замечание 1. В отличие от [1], в теореме 1 записан оператор $I - G_a$, поскольку оператор G_a «обслуживает» угол C_+^a, а мы рассматриваем уравнение во внешней области угла.

Ниже мы попытаемся выяснить, что произойдет с решением, когда $a \to \infty$. Основной момент в этом разделе — поведение оператора G_a при $a \to \infty$.

Лемма 1. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{a \to \infty} (G_2\tilde{u})(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}\tilde{u}(\xi_1, 0).$$

для функций из класса Шварца $S(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Сделаем в (5) замену переменных

$$\begin{cases} \eta_1 - a\eta_2 = y_1, \\ \eta_1 + a\eta_2 = y_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_1 - a\xi_2 = t_1, \\ \xi_1 + a\xi_2 = t_2. \end{cases}$$

Перепишем оператор G_a в новых переменных

$$(G_a\tilde{u})\left(\frac{t_2+t_1}{2},\frac{t_2-t_1}{2a}\right)=\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\tau\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+y_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2a}\right)dy}{(t_1-ia\tau-y_1)(t_2+ia\tau-y_2)} \tag{7}$$

с учетом вычисления якобиана

$$\frac{D(\eta_1,\eta_2)}{D(y_1,y_2)}=\frac{1}{2a}.$$

Обозначим

$$\tilde{u}\left(\frac{y_2+y_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2a}\right)\equiv\tilde{U}(y_1,y_2).$$

Если ввести двумерный интеграл типа Коши (см. [2])

$$\Phi(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\tilde{U}(y_1,y_2)dy_1dy_2}{(y_1-z_1)(y_2-z_2)},$$

то предел в формуле (7) соответствует граничному значению $\Phi^{-+}(t_1,t_2)$. Все четыре граничных значения функции $\Phi^{\pm\pm}(t_1,t_2)$ были вычислены В. А. Какичевым и включены в последнее издание книги [2]. Эти формулы играют важную роль при изучении двумерного аналога краевой задачи Римана в бицилиндрических областях.

Введем два одномерных сингулярных интегральных оператора по переменным y_1,y_2:

$$(S_1\tilde{U})(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{U}(\eta_1,\xi_2)d\eta_1}{\eta_1-\xi_1},\quad (S_2\tilde{U})(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{U}(\xi_1,\eta_2)d\eta_2}{\eta_2-\xi_2}.$$

С учетом упомянутых граничных значений формула (7) примет вид

$$\begin{aligned}(G_a\tilde{u})\left(\frac{t_2+t_1}{2},\frac{t_2-t_1}{2a}\right)&=\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\tau\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\tilde{U}(y_1,y_2)dy}{(t_1-ia\tau-y_1)(t_2+ia\tau-y_2)}=\\&=\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\tau\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\tilde{U}(y_1,y_2)dy}{(t_1-ia\tau-y_1)(t_2+ia\tau-y_2)}=\\&=\frac{1}{4}(\tilde{U}(t_1,t_2)-(S_1\tilde{U})(t_1,t_2)+(S_2\tilde{U})(t_1,t_2)+(S_1S_2\tilde{U})(t_1,t_2))\end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим интегральные слагаемые

$$(S_1\tilde{U})(t_1,t_2)=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{U}(y_1,t_2)dy_1}{y_1-t_1}=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}\left(\frac{t_2+y_1}{2},\frac{t_2-y_1}{2a}\right)dy_1}{y_1-t_1}.$$

Если $\tilde{u}$ — функция, например, из класса Шварца $S(\mathbb{R}^2)$, то при $a\to\infty$ последний интеграл примет вид

$$\lim_{a\to\infty}(S_1\tilde{U})(t_1,t_2)=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}\left(\frac{t_2+y_1}{2},0\right)dy_1}{y_1-t_1}$$

Делая замену $(t_2+y_1)/2=x_1$, после простых преобразований получим

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}(S_1\tilde{U})(t_1,t_2)&=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\tilde{u}(x_1,0)dx_1}{2x_1-t_2-t_1}=\\&=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}(x_1,0)dx_1}{x_1-\frac{t_2+t_1}{2}}=(S_1\tilde{u})\left(\frac{t_2+t_1}{2},0\right).\end{aligned}$$

Третье слагаемое из формулы (8) имеет вид

$$(S_2\tilde{U})(t_1,t_2)=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{U}(t_1,y_2)dy_2}{y_2-t_2}=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+t_1}{2},\frac{y_2-t_1}{2a}\right)dy_2}{y_2-t_2}.$$

Как и в предыдущем интеграле, в пределе получим

$$\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+t_1}{2},0\right)dy_2}{y_2-t_2},$$

и с помощью аналогичной замены переменных получим такой же результат:

$$\lim_{a\to 0}(S_2\tilde{U})(t_1,t_2)=(S_1\tilde{u})\left(\frac{t_2+t_1}{2},0\right).$$

Последнее слагаемое — это бисингулярный интеграл

$$\begin{aligned}(S_1S_2\tilde{U})(t_1,t_2)&=\\ =\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(S_2\tilde{U})(y_1,t_2)dy_1}{y_1-t_1}&=-\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy_1}{y_1-t_1}\left(\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{U}(y_1,y_2)dy_2}{y_2-t_2}\right)=\\ &=-\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy_1}{y_1-t_1}\left(\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+y_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2a}\right)dy_2}{y_2-t_2}\right).\end{aligned}$$

Далее, при $a\to\infty$ находим

$$\lim_{a\to\infty}(S_1S_2\tilde{U})(t_1,t_2)=-\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy_1}{y_1-t_1}\left(\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+y_1}{2},0\right)dy_2}{y_2-t_2}\right).$$

Вновь делая замену переменной $(y_2+y_1)/2=x_2$, получаем

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy_1}{y_1-t_1}\left(\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}\left(\frac{y_2+y_1}{2},0\right)dy_2}{y_2-t_2}\right)&=\\ =-\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy_1}{y_1-t_1}\left(\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\tilde{u}(x_2,0)dx_2}{2x_2-y_1-t_2}\right)&=\\ =-\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy_1}{y_1-t_1}\left(\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{u}(x_2,0)dx_2}{x_2-\frac{y_1+t_2}{2}}\right)&=\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(S_1\tilde{u}\left(\frac{y_1+t_2}{2},0\right)dy_1}{y_1-t_1}\end{aligned}$$

Еще раз делая замену $(y_1+t_2)/2=x_1$, приходим к соотношению

$$\lim_{a\to\infty}(S_1S_2\tilde{U}(t_1,t_2)=(S_1^2\tilde{u})\left(\frac{t_2+t_1}{2},0\right)=\tilde{u}\left(\frac{t_2+t_1}{2},0\right).$$

Собирая все слагаемые формулы (8) и учитывая формулу (7), заключаем, что искомый предел в переменных t_1, t_2 имеет вид

$$\frac{1}{2}\tilde{u}\left(\frac{t_2+t_1}{2},0\right). \tag{9}$$

Возвращаясь в (9) к переменной ξ, получаем утверждение леммы 1. □

4. Предельное решение.

Теорема 2. *В дополнение к условиям теоремы* 1 *предположим, что волновая факторизация с индексом* $\varkappa$ *существует для всех достаточно больших* a *и* $g \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда предел*

$$\lim_{a\to\infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2)$$

существует и принимает следующий вид:

$$\lim_{a\to\infty} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = A^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi) - \frac{1}{2}A^{-1}(\xi_1, 0)\tilde{g}(\xi_1, 0). \tag{10}$$

Доказательство. Если раскрыть скобки в формуле (6), получим

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)(I - G_a)(A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi)) = A_{\neq}^{-1}(\xi)A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi) - A_{\neq}^{-1}(\xi)G_a(A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi)) =$$
$$= A^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi) - A_{\neq}^{-1}(\xi)G_a(A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi)).$$

Первое слагаемое от a не зависит, а со вторым работаем с учетом леммы 1 и вышеупомянутой заменой переменных, после чего легко приходим к формуле (10). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: УРСС, 2010.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
4. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
5. *Пламеневский Б. А.* Псевдодифференциальные операторы на кусочно гладких многообразиях. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2010.
6. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
7. *Kutaiba Sh., Vasilyev V.* On solutions of certain limit boundary-value problems// AIP Conf. Proc. — 2020. — *2293*. — 110006.
8. *Mikhlin S. G., Prößdorf S.* Singular Integral Operators. — Berlin: Akademie-Verlag, 1986.
9. *Nazaikinskii V., Schulze B.-W., Sternin B.* The Localization Problem in Index Theory of Elliptic Operators. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2014.
10. *Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V.* Differential Equations on Singular Manifolds: Semiclassical Theory and Operator Algebras. — Berlin: Wiley-VCH, 1998.
11. *Vasilyev V. B.* Asymptotical analysis of singularities for pseudodifferential equations in canonical non-smooth domains// in: Integral Methods in Science and Engineering. Computational and Analytic Aspects (*Constanda C., Harris P. J.*, eds.). — Boston: Birkhäuser, 2011. — P. 379–390.
12. *Vasilyev V. B.* On certain 3D limit boundary-value problem// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — P. 913–921.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `vbv57@inbox.ru`

Кутаиба Шабан Хасан
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `1167542@bsu.edu.ru`