ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 44–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-44-49

УДК 512.6

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

© 2022 г. **И. М. БУРЛАКОВ, М. П. БУРЛАКОВ**

Аннотация. Рассмотрены групповые алгебры, базовыми группами которых являются циклические группы. Доказана теорема о мультипликативности циркулянтов для циклических и антициклических чисел. Описаны геометрические структуры на линейных пространствах циклических и антициклических алгебр.

Ключевые слова: групповые алгебры, алгебры циклических чисел, алгебры антициклических чисел, пространства с фундаментальной формой, циклические вращения.

CYCLIC SPACES

© 2022 **I. M. BURLAKOV, M. P. BURLAKOV**

Abstract. We consider group algebras whose base groups are cyclic groups, prove a theorem on the multiplicativity of circulants for cyclic and anticyclic numbers, and describe geometric structures on linear spaces of cyclic and anticyclic algebras.

Keywords and phrases: group algebras, algebras of cyclic numbers, algebras of anticyclic numbers, spaces with fundamental form, cyclic rotations.

AMS Subject Classification: 15A66, 15A69, 16S38

Хорошо известно, что евклидову планиметрию можно построить как геометрическую интерпретацию алгебры (поля) комплексных чисел, отождествляя точки с комплексными числами (см. [1, 7]). Такое алгебраическое определение евклидовой геометрии плоскости ничем не лучше и не хуже тех, которые получаются из аксиом Евклида или Вейля, но у него есть одно преимущество: если алгебру комплексных чисел заменить какой-либо другой алгеброй, получим новую геометрическую структуру, «сконструированную» по образцу евклидовой планиметрии.

Например, если алгебру комплексных чисел $\mathbb{C}$ заменить алгеброй двойных вещественных чисел $\mathbb{C}^+$, то получим числовую модель псевдоевклидовой плоскости (см. [8]). Обобщением алгебры двойных вещественных чисел будут алгебры $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ циклических чисел m-го порядка, а обобщением поля комплексных чисел — алгебры $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ антициклических чисел m-го порядка (см. [5]). Аналогично, с каждой подобной алгеброй связана некоторая геометрическая структура (см. [2,3]).

Для простоты изложения будем отождествлять элементы

$$\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\boldsymbol{e} + \ldots + x_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1} \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}_m), \quad \boldsymbol{x} = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + \ldots + x_{m-1}\boldsymbol{i}^{m-1} \in \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m),$$

где $\boldsymbol{e}^m = 1$ и $\boldsymbol{i}^m = -1$, с радиус-векторами центроаффинного пространства. Заметим, что $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ и $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ являются подалгебрами алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ *комплексных циклических чисел* m-го порядка, так что алгебраические свойства у них схожи.

Покажем, что в алгебрах $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ и $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ можно определить величины, которые совпадают с длинами векторов и углами между ними в евклидовой и псевдоевклидовой планиметрии, если взять $m = 2$, и эти величины инвариантны относительно преобразований некоторой линейной группы.

Линейное алгебраическое уравнение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, эквивалентно системе линейных комплексных уравнений

$$\begin{cases} a_0x_0 + a_{m-1}x_1 + \ldots + a_1x_{m-1} = b_0, \\ a_1x_0 + a_0x_1 + \ldots + a_2x_{m-1} = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m-1}x_0 + a_{m-2}x_1 + \ldots + a_0x_{m-1} = b_{m-1}. \end{cases}$$

Определитель этой системы будем называть *детерминантом циклического числа* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ и обозначать $\Delta(\boldsymbol{a})$, т.е.

$$\Delta(\boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_{m-1} & \ldots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ldots & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Можно показать, что детерминант вычисляется по формуле

$$\Delta(\boldsymbol{a}) = \prod_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{h=0}^{m-1} \alpha_m^{kh} x_h \right),$$

где

$$\alpha_m = \cos\frac{2\pi}{m} + i \sin\frac{2\pi}{m}$$

(см. [6]). Используя эту формулу, докажем два утверждения о детерминантах циклических чисел (см. [2, 3]).

Теорема 1.

1. *Для любых элементов* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$

$$\Delta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \Delta(\boldsymbol{a})\Delta(\boldsymbol{b}),$$

т.е. детерминант является мультипликативной функцией.

2. *Для любого векторного элемента* $\Phi = \phi_1\boldsymbol{e} + \phi_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + \phi_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1}$

$$\Delta(\exp\Phi) = 1,$$

где

$$\Delta(\exp\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^n}{n!} = \sum_{k=0}^{m-1} \boldsymbol{e}^k E_k^m(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{m-1}).$$

Доказательство. 1. Введём в рассмотрение *резольвентный оператор* $\widehat{\alpha}_m\colon \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m) \to \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, действующий по правилу

$$\widehat{\alpha}_m(\boldsymbol{x}) = \widehat{\alpha}_m(x_0 + x_1\boldsymbol{e} + \ldots + x_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1}) = x_0 + \alpha_m x_1\boldsymbol{e} + \alpha_m^2 x_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + \alpha_m^{m-1}x_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1},$$

где $\boldsymbol{x}(\alpha_m)$ называется *резольвентой элемента* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$. Нетрудно видеть, что оператор $\widehat{\alpha}_m$ является автоморфизмом алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, т.е.

$$\widehat{\alpha}_m(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}(\alpha_m) + \boldsymbol{y}(\alpha_m), \quad \widehat{\alpha}_m(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}(\alpha_m)\cdot\boldsymbol{y}(\alpha_m).$$

Введём еще *оператор следа* $\mathrm{sp}\colon \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m) \to \mathbb{C}$, где

$$\mathrm{sp}(x_0 + x_1\boldsymbol{e} + \ldots + x_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1}) = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1},$$

который также является гомоморфизмом, т.е.

$$\mathrm{sp}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \mathrm{sp}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{sp}(\boldsymbol{y}), \quad \mathrm{sp}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathrm{sp}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{sp}(\boldsymbol{y}).$$

Поэтому

$$\Delta(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \prod_{k=0}^{m-1} \mathrm{sp}(\widehat{\alpha}_m^k(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})) = \prod_{k=0}^{m-1} \mathrm{sp}(\widehat{\alpha}_m^k(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{sp}(\widehat{\alpha}_m^k(\boldsymbol{y})) = \Delta(\boldsymbol{x})\Delta(\boldsymbol{y}).$$

2. Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\mathrm{sp}(\widehat{\alpha}_m^k(\exp\phi\boldsymbol{e}^r)) = \exp\alpha_m^k\phi,$$

где $r = 1, 2, \ldots, m-1$, поэтому

$$\Delta(\exp\phi\boldsymbol{e}^r) = \prod_{k=0}^{m-1}\mathrm{sp}(\widehat{\alpha}_m^k(\exp\phi\boldsymbol{e}^r) = \exp(1+\alpha_m+\alpha_m^2+\ldots+\alpha_m^{m-1})\phi = 1,$$

так как $1+\alpha_m+\alpha_m^2+\ldots+\alpha_m^{m-1} = 0$. Остаётся лишь заметить, что

$$\Delta(\exp\Phi) = \Delta\left(\prod_{k=1}^{m-1}\exp\phi_k\boldsymbol{e}^k\right) = \prod_{k=1}^{m-1}\Delta(\exp\phi_k\boldsymbol{e}^k) = 1. \qquad \square$$

Учитывая теорему 1, в качестве *фундаментальной формы* геометрии циклической алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ возьмём детерминант $\Delta(\boldsymbol{x})$ текущего элемента $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, так что *циклической длиной* вектора $\boldsymbol{x}$ будет корень m-й степени из детерминанта:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt[m]{\Delta(\boldsymbol{x})}.$$

При этом линейные преобразования, которые сохраняют фундаментальную форму, т.е. *циклические вращения*, задаются линейными алгебраическими функциями вида $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}\cdot\exp\Phi$, так как

$$\Delta(\boldsymbol{x}') = \Delta(\boldsymbol{x}\cdot\exp\Phi) = \Delta(\boldsymbol{x})\Delta(\exp\Phi) = \Delta(\boldsymbol{x}).$$

В случае $\mathbb{C}^+ \equiv \mathbb{R}(\mathbb{Z}_2)$ для циклической длины вектора $\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\boldsymbol{e}$ имеем выражение

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \Delta(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2,$$

а движениями в $\mathbb{C}^+ \equiv \mathbb{R}(\mathbb{Z}_2)$ являются преобразования вида

$$\boldsymbol{x}' = x_0' + x_1'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}\cdot\exp(\phi\boldsymbol{e}) = (x_0 + x_1\boldsymbol{e})(\operatorname{ch}\phi + \boldsymbol{e}\operatorname{sh}\phi) = (x_0\operatorname{ch}\phi + x_1\operatorname{sh}\phi) + (x_0\operatorname{sh}\phi + x_1\operatorname{ch}\phi)\boldsymbol{e},$$

т.е. псевдоевклидовы повороты на псевдоевклидов угол ϕ. Таким образом, циклические геометрии представляют собой обобщение псевдоевклидовой планиметрии.

Циклическая длина вектора, как видно из её определения, может быть любым вещественным числом или некоторым комплексным числом. Чтобы найти те области, в которых циклическая длина векторов принимает различные значения, введём в рассмотрение *циклический сфероид*, т.е. поверхность, все точки, которой удалены от начала координат на одинаковое циклическое расстояние. Уравнение циклического сфероида имеет вид

$$\Delta(\boldsymbol{x}) \equiv \prod_{k=0}^{m-1}\mathrm{sp}(\boldsymbol{x}(\alpha_m^k)) = \rho^m.$$

Области, в которых $\Delta(\boldsymbol{x}) > 0$ и $\Delta(\boldsymbol{x}) < 0$, разделяются *изотропным сфероидом*, т.е. сфероидом нулевого радиуса, и их взаимное расположение зависит от размерности линейного пространства циклической алгебры. Как видно из структуры детерминанта при $m = 2n+1$, изотропный сфероид представляет собой объединение гиперплоскости, заданной уравнением

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = 0,$$

и n плоскостей размерности $(m-2)$, заданных уравнениями

$$x_0 + \alpha_m^k x_1 + \alpha_m^{2k}x_2 + \ldots + \alpha_m^{(m-1)k}x_{m-1} = 0,$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$. Если же $m = 2n$, то изотропный сфероид представляет собой объединение двух гиперплоскостей с уравнениями

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = 0, \quad x_0 - x_1 + x_2 - \ldots + x_{m-2} - x_{m-1} = 0$$

и $n-1$ плоскостей размерности $(m-2)$ с уравнениями

$$x_0 + \alpha_m^k x_1 + \alpha_m^{2k}x_2 + \ldots + \alpha_m^{(m-1)k}x_{m-1} = 0,$$

где $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Например, если $m = 3$, то

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3x_0x_1x_2 = (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + \alpha_3 x_1 + \alpha_3^2 x_2)(x_0 + \alpha_3^2 x_1 + \alpha_3 x_2),$$

поэтому изотропный сфероид состоит из гиперплоскости с уравнением $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ и прямой $x_0 + \alpha_3 x_1 + \alpha_3^2 x_2 = 0$ или $x_0 = x_1 = x_2$.

Возьмём теперь $m = 2$; тогда

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1),$$

поэтому изотропный сфероид состоит из объединения двух прямых с уравнениями $x_0 + x_1 = 0$ и $x_0 - x_1 = 0$.

Если же $m = 4$, то

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = ((x_0 + x_2)^2 - (x_0 + x_2)^2)((x_0 - x_2)^2 + (x_0 - x_2)^2) =$$
$$= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)(x_0 + x_1 i - x_2 - x_3 i)(x_0 - x_1 i - x_2 + x_3 i),$$

поэтому изотропный сфероид состоит из объединения двух трёхмерных плоскостей $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0$ одной двумерной плоскости с уравнением $(x_0 - x_2) + (x_1 - x_3)i = 0$.

Гиперплоскости, входящие в изотропный сфероид, будем называть *перегородками*, а плоскости размерности $m - 2$ — *туннелями* (см. [4]). Перегородки делят пространство на части, в которых фундаментальная форма имеет одинаковый знак. Таким образом, в пространствах циклических алгебр размерности $m = 2k + 1$ имеются две области разделённые перегородкой, в одной из которых $\Delta(\boldsymbol{x}) > 0$, а в другой $\Delta(\boldsymbol{x}) < 0$. В то же время в пространствах циклических алгебр размерности $m = 2k$ имеются четыре области, разделённые двумя перегородками, причем в двух из этих областей $\Delta(\boldsymbol{x}) > 0$, а в двух других $\Delta(\boldsymbol{x}) < 0$.

Серия антициклических алгебр также порождает ряд геометрических структур, в которых фундаментальной формой будет детерминант элемента $\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + \ldots + x_{m-1}\boldsymbol{i}^{m-1} \in \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$:

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_{m-1} & \ldots & -x_1 \\ x_1 & x_0 & \ldots & -x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \ldots & x_0 \end{vmatrix}.$$

Заметим теперь, что поскольку $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m) \subset \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, то можно считать, что $\boldsymbol{i} = \alpha_{2m}\boldsymbol{e}$, а потому

$$\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{i}^2 + \ldots + x_{m-1}\boldsymbol{i}^{m-1} = x_0 + \tilde{x}_1\boldsymbol{i} + \tilde{x}_2\boldsymbol{i}^2 + \ldots + \tilde{x}_{m-1}\boldsymbol{i}^{m-1} =$$
$$= x_0 + \alpha_{2m}x_1\boldsymbol{e} + \alpha_{2m}^2 x_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + \alpha_{2m}^{m-1}x_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1} \in \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m).$$

Тогда для вычисления детерминанта получим следующую формулу:

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \prod_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{h=0}^{m-1}\alpha_m^{kh}\tilde{x}_h\right).$$

Отсюда видно, что детерминант в антициклических алгебрах будет мультипликативной функцией, причём

$$\Delta(\exp(\Psi)) \equiv \Delta(\exp(\psi_1\boldsymbol{i} + \psi_2\boldsymbol{i}^2 + \ldots + \psi_{m-1}\boldsymbol{i}^{m-1})) = 1$$

и, следовательно, антициклические вращения или движения в $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ задаются линейными алгебраическими функциями:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \cdot (\exp(\Psi)) \equiv \boldsymbol{x} \cdot (\exp(\psi_1\boldsymbol{i} + \psi_2\boldsymbol{i}^2 + \ldots + \psi_{m-1}\boldsymbol{i}^{m-1})).$$

Заметим ещё, что имеют место следующие изоморфизмы (см. [5]):

$$\mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2k+1}) \cong \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2k+1}) \cong \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}}_{k},$$

$$\mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2k}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \underbrace{\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}}_{k-1},$$

$$\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2k}) \cong \underbrace{\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}}_{k};$$

поэтому имеет смысл отдельно рассматривать только алгебры $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2k})$.

При $m = 2$ для антициклической длины вектора $\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\boldsymbol{i}$ будем иметь выражение

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \Delta(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 + x_1^2,$$

а движениями в $\mathbb{C} \equiv \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2)$ являются преобразования, задаваемые линейными алгебраическими функциями

$$\boldsymbol{x}' \equiv x_0' + x_1'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} \cdot \exp(\psi \boldsymbol{i}) = (x_0 + x_1\boldsymbol{i})(\cos\psi + \boldsymbol{i}\sin\psi) = (x_0\cos\psi - x_1\sin\psi) + (x_0\sin\psi + x_1\cos\psi)\boldsymbol{i},$$

т.е. евклидовы повороты на угол ψ. Таким образом, геометрии алгебр $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2k})$ представляют собой обобщение евклидовой планиметрии.

На евклидовой плоскости изотропный сфероид — это просто нулевой вектор или точка (начало координат). Рассмотрим структуру изотропных сфероидов в алгебрах $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2k})$ при $k > 1$. Из формул для вычисления детерминантов в этих алгебрах видно, что изотропные сфероиды в них представляют собой объединение $k - 1$ плоскостей размерности $2k - 2$.

Например, для $m = 4$ имеем

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_3 & -x_2 & -x_1 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & -x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{x}_0 & \tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_0 & \tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_0 & \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_3 & \tilde{x}_2 & \tilde{x}_1 & \tilde{x}_0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_0 + \alpha_8^2 x_2 + \alpha_8 x_1 + \alpha_8^3 x_3)(x_0 + \alpha_8^2 x_2 - \alpha_8 x_1 - \alpha_8^3 x_3) +$$

$$+ (x_0 - \alpha_8^2 x_2 + i\alpha_8 x_1 - i\alpha_8^3 x_3)(x_0 - \alpha_8^2 x_2 - i\alpha_8 x_1 + i\alpha_8^3 x_3) =$$

$$= ((x_0 + ix_1)^2 - i(x_1 + ix_3)^2)((x_0 - ix_2)^2 + i(x_1 - ix_3)^2) =$$

$$= (x_0^2 - x_2^2 + 2x_1x_3)^2 + (x_3^2 - x_1^2 + 2x_0x_2)^2,$$

так как

$$\alpha_8 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_8^2 = i, \quad \alpha_8^3 = \frac{(1+i)i}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда видно, что в пространстве $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_4)$ при отсутствии перегородок имеются два туннеля:

$$\left(x_0 + \frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) + i\left(x_2 + \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad \left(x_0 - \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) - i\left(x_2 - \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Располагая информацией о строении изотропных сфероидов, мы можем определить инвариантные относительно движений величины, которые в циклических и антициклических пространствах будут играть роль углов между векторами.

Рассмотрим отдельно алгебры $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2k+1})$, $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2k})$ и $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2k})$.

В алгебрах $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2k+1})$ имеется одна перегородка, которая делит циклическое пространство на полупространства $\mathbf{I}_0$ и $\mathbf{I}_1$, где вектор с единичной координатой лежит в $\mathbf{I}_0$. Тогда любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}_0 \subset \mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2k+1})$ можно однозначно записать в *экспоненциальной* форме

$$\boldsymbol{x} = \sqrt[2k+1]{\Delta(\boldsymbol{x})}\exp(\xi_1\boldsymbol{e} + \xi_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + \xi_{2k}\boldsymbol{e}^{2k}) \equiv \|\boldsymbol{x}\|\exp\Xi.$$

В качестве циклического угла Θ между векторами $\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|\exp\Xi \in \mathbf{I}_0$ и $\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{y}\|\exp\Gamma \in \mathbf{I}_0$ возьмём векторный элемент $\Theta = \Gamma - \Xi$, инвариантный относительно циклических вращений. При этом циклический угол для векторов из $\mathbf{I}_1$ определяется с помощью автоморфизма, переводящего полупространство $\mathbf{I}_1$ в $\mathbf{I}_0$.

В алгебрах $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2k})$ имеется две перегородки, которые делят циклическое пространство на квадранты $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, где вектор с единичной координатой лежит в $\mathbf{I}_0$. Тогда любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}_0 \subset \mathbb{R}(\mathbb{Z}_{2k})$ можно однозначно записать в *экспоненциальной* форме

$$\boldsymbol{x} = \sqrt[2k]{\Delta(\boldsymbol{x})}\exp(\xi_1\boldsymbol{e} + \xi_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + \xi_{2k-1}\boldsymbol{e}^{2k-1}) \equiv \|\boldsymbol{x}\|\exp\Xi.$$

В качестве циклического угла Θ между векторами $\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|\exp\Xi \in \mathbf{I}_0$ и $\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{y}\|\exp\Gamma \in \mathbf{I}_0$ возьмём векторный элемент $\Theta = \Gamma - \Xi$, инвариантный относительно циклических вращений. При этом циклический угол для векторов из $\mathbf{I}_1$ определяется с помощью автоморфизма, переводящего полупространство $\mathbf{I}_1$ в $\mathbf{I}_0$.

Наконец, в алгебрах $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2k})$ вовсе нет перегородок, и любой вектор $\boldsymbol{x} \in \overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_{2k})$ можно однозначно записать в *экспоненциальной* форме

$$\boldsymbol{x} = \sqrt[2k]{\Delta(\boldsymbol{x})}\exp(\xi_1\boldsymbol{e} + \xi_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + \xi_{2k-1}\boldsymbol{e}^{2k-1}) \equiv \|\boldsymbol{x}\|\exp\Xi;$$

в качестве циклического угла Θ между векторами $\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|\exp\Xi$ и $\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{y}\|\exp\Gamma$ снова возьмём векторный элемент $\Theta = \Gamma - \Xi$, инвариантный относительно циклических вращений.

В заключение заметим, что туннели представляют собой асимптоты для уходящих в бесконечность отростков циклических и антициклических сфероидов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: МЦНМО, 2014.
2. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Геометрические структуры линейных алгебр. — LAMBERT, 2017.
3. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. — М.: Граф Пресс, 2006.
4. *Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И.* Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Ким, 2020.
5. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во КГУ, 1985.
6. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1967.
7. *Скопец З. А.* Геометрические миниатюры. — М.: Просвещение, 1990.
8. *Яглом И. М.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. — М.: Наука, 1969.

Бурлаков Игорь Михайлович
Тверской государственный университет
E-mail: `don.burlakoff@mail.ru`

Бурлаков Михаил Петрович
Московский педагогический государственный университет
E-mail: `burlakovmihail@mail.ru`