



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 29–43
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-29-43

УДК 517.925.41

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА СТУДЕНЧЕСКУЮ ГРУППУ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ НЕФОРМАЛЬНЫМ ЛИДЕРОМ

© 2022 г. С. А. БЕЛЬМАН, Е. Ю. ЛИСКИНА

Аннотация. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующая педагогическое воздействие на группу студентов. Воздействие выражено суммой некоторой константы и управляющего параметра. Найдены состояния равновесия системы, определены типы их бифуркаций, возникающие при изменении управляющего параметра. Получены коэффициентные условия возникновения устойчивых состояний равновесия и соответствующие бифуркационные значения параметра.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, состояние равновесия, управляющий параметр, бифуркация, периодическое решение.

BIFURCATIONS IN A DYNAMIC SYSTEM MODELING PEDAGOGICAL IMPACTS ON A GROUP OF STUDENTS WITH A NEGATIVE INFORMAL LEADER

© 2022 S. A. BELMAN, E. Yu. LISKINA

ABSTRACT. We consider a system of ordinary differential equations, which describes a model of the pedagogical impact on a group of students. The impact is expressed as the sum of a constant and a control parameter. We find equilibrium states of the system and determine the types of their bifurcations that arise when the control parameter changes. Also, we obtain coefficient conditions for the emergence of stable equilibrium states and the corresponding bifurcation values of the parameter.

Keywords and phrases: differential equation, equilibrium state, control parameter, bifurcation, periodic solution.

AMS Subject Classification: 34C23, 37G10, 91F99

1. Введение. Динамические системы применяются для моделирования различных социальных взаимодействий уже свыше двадцати лет (см., например [6–9]). Однако описание взаимодействий в образовательной среде в большинстве случаев остаётся на уровне описательных или статистических моделей (см. [11, 12], большое количество статей в [8]).

В числе работ, посвященных моделированию взаимодействий в социальных системах с использованием дифференциальных уравнений [1, 2, 9, 10], мы выделили работы [1, 2], в которых рассматривается процесс возобновления научных кадров. Продолжая эту идею, мы предлагаем построение и исследование динамической модели педагогических ресурсов, начатое в работах [4, 5].

2. Построение динамической модели педагогических ресурсов. Под педагогическими ресурсами мы понимаем численность студентов педагогического направления подготовки. Поток студентов этого направления не является однородным по убеждениям: первая часть студентов целенаправленно поступает на данное направление; вторая часть студентов поступает потому, что хватило баллов на бюджетное место; третья часть — по иным причинам. Студентов, целенаправленно поступивших на педагогическое направление, будем называть вовлеченными в будущую педагогическую деятельность, всех остальных — не вовлеченными. В процессе обучения убеждения студентов и их вовлеченность в будущую педагогическую деятельность могут изменяться. В данной работе будем полагать, что основными факторами влияния являются педагогическое воздействие с стороны преподавателей и воздействие со стороны неформального лидера потока. Моделирование динамики педагогических ресурсов является актуальной задачей в связи с тем, что в процессе обучения необходимо не только сохранить и укрепить убеждения вовлеченных студентов, но и изменить убеждения не вовлеченных с целью обеспечения школ региона педагогическими кадрами.

Рассмотрим поток студентов педагогического направления подготовки общей численностью w . Обозначим соответственно через x и y количество студентов, вовлеченных и не вовлеченных в будущую профессиональную педагогическую деятельность. Сформулируем следующие предположения модели.

1. Скорость изменения количества вовлеченных студентов пропорциональна численности этих студентов, ограниченной максимальной численностью w_1 суммы количества вовлеченных студентов и количества тех не вовлеченных студентов потока, которые могут рассматривать профессию учителя среди своих возможных профессий ($w_1 \leq w$), и убывает при наличии отрицательного воздействия на вовлеченных студентов:

$$\dot{x} = a_1 x \left(1 - \frac{x}{w_1} \right) - d_1 xy;$$

в отличие от данной работы, в [5] предполагалось, что $w_1 = w$.

2. Аналогично, скорость изменения количества не вовлеченных студентов зависит от их численности, ограниченной максимальной численностью w_2 суммы количества не вовлеченных студентов и тех вовлеченных студентов потока, которые в процессе обучения могут перестать рассматривать профессию учителя своей возможной профессией ($w_2 \leq w$), и увеличивается за счет влияния не вовлеченных студентов на вовлеченных (т.е. студент из группы вовлеченных студентов может перейти в группу не вовлеченных студентов):

$$\dot{y} = -a_2 y \left(1 - \frac{y}{w_2} \right) - d_2 xy;$$

в отличие от данной работы, в [5] предполагалось, что $w_2 = w$.

3. численность потока w является постоянной; $w_1 + w_2 \leq 2w$.

Тогда система дифференциальных уравнений, моделирующая взаимную динамику вовлеченных и не вовлеченных студентов, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x \left(1 - \frac{x}{w_1} \right) - d_1 xy, \\ \dot{y} = -a_2 y \left(1 - \frac{y}{w_2} \right) + d_2 xy. \end{cases} \quad (1)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 положительны и характеризуют влияние педагогического воздействия на студентов; коэффициенты d_1 и d_2 также положительны и характеризуют соотношение между стабильностью личных убеждений вовлеченных студентов и интенсивностью убеждения неформальным лидером потока из числа не вовлеченных студентов. Если неформальный лидер находится в группе не вовлеченных студентов, то знаки при слагаемых $d_1 xy$ и $d_2 xy$ такие, как в системе (1), причем чем меньше d_1 , тем устойчивей убеждения вовлеченных студентов. Возможна симметричная ситуация, при которой неформальный лидер находится в группе вовлеченных студентов.

Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x \left(1 - \frac{x}{w_1}\right) + d_1xy, \\ \dot{y} = -a_2y \left(1 - \frac{y}{w_2}\right) + d_2xy. \end{cases} \quad (2)$$

Формально системы (1) и (2) являются системами типа «хищник — жертва» с внутривидовой конкуренцией за ресурс, которым является общая численность потока. В системе (1) «хищниками» являются не вовлеченные студенты, а в системе (2) — вовлеченные. Группу «хищников» можно интерпретировать как наличие сильного неформального лидера в этой группе. Далее будем рассматривать систему (1). Далее предположим следующее.

4. Так как система (1) описывает динамику одного потока студентов, то, в отличие от [4], $a_1 = a_2 = a$ (педагогическое воздействие на всех студентов потока одинаковое).
5. Для повышения числа вовлеченных студентов следует проводить дополнительную работу среди не вовлеченных, т.е. $a_1 = a$, а $a_2 = a + \alpha$, где $\alpha > 0$ — показатель дополнительного педагогического воздействия на не вовлеченных студентов.

Таким образом, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{w_1}\right) - d_1xy, \\ \dot{y} = -(a + \alpha)y \left(1 - \frac{y}{w_2}\right) + d_2xy. \end{cases} \quad (3)$$

Ставится задача: изучить поведение динамической системы (3) в зависимости от величины управляющего параметра $\alpha \geq 0$; найти такие его значения, при которых в системе (3) возникают устойчивые структуры (устойчивые продуктивные состояния равновесия и периодические решения).

3. Состояния равновесия динамической модели и их бифуркации. Состояния равновесия системы (3) определяются решениями алгебраической системы

$$\begin{cases} ax \left(1 - \frac{x}{w_1}\right) - d_1xy = 0, \\ -(a + \alpha)y \left(1 - \frac{y}{w_2}\right) + d_2xy = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что система (3) имеет 4 состояния равновесия: $O(0, 0)$, $K(0, w_2)$, $L(w_1, 0)$, $M(x_0(\alpha); y_0(\alpha))$, где

$$x_0(\alpha) = \frac{(a + \alpha)w_1(w_2d_1 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}, \quad y_0(\alpha) = \frac{aw_2(w_1d_2 - (a + \alpha))}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}. \quad (4)$$

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что матрица системы линейного приближения, соответствующей системе (3) в точке $O(0, 0)$, имеет вид

$$A_O(\alpha) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -(a + \alpha) \end{pmatrix},$$

состояние равновесия $O(0, 0)$ является седлом при всех $\alpha \geq 0$.

Аналогично матрица системы линейного приближения, соответствующей системе (3) в точке $K(0, w_2)$, имеет вид

$$A_K(\alpha) = \begin{pmatrix} -(d_1w_2 - a) & 0 \\ d_2w_2 & a + \alpha \end{pmatrix},$$

состояние равновесия $K(0, w_2)$ может являться седлом или неустойчивым узлом в зависимости от знака выражения $d_1w_2 - a$ при всех $\alpha \geq 0$.

Для исследования состояния равновесия $L(w_1, 0)$ выполним параллельный перенос системы координат с помощью замены переменных $u = x - w_1$, $v = y$, получим

$$\begin{cases} \dot{u} = -au - d_1 w_1 v - \frac{a}{w_1} u^2 - d_1 uv, \\ \dot{v} = (d_2 w_1 - (a + \alpha))v + \frac{a + \alpha}{w_2} v^2 + d_2 uv. \end{cases} \quad (5)$$

Матрица системы линейного приближения, соответствующей системе (3) в точке $L(w_1, 0)$, имеет вид

$$A_L(\alpha) = \begin{pmatrix} -a & -d_1 w_1 \\ 0 & d_2 w_1 - (a + \alpha) \end{pmatrix}.$$

Так как ее собственные значения равны $\lambda_1 = -a < 0$ и $\lambda_2(\alpha) = d_2 w_1 - (a + \alpha)$, то состояние равновесия $L(w_1, 0)$ может являться седлом или устойчивым узлом в зависимости от знака $\lambda_2(\alpha) = d_2 w_1 - (a + \alpha)$. Для того чтобы точка $L(w_1, 0)$ являлась устойчивым узлом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\lambda_2(\alpha) < 0$ или $\alpha > d_2 w_1 - a$. Тогда при $\alpha = \alpha_0 \equiv d_2 w_1 - a$ (бифуркационное значение параметра) точка $L(w_1, 0)$ меняет характер с седла на узел (транскритическая бифуркация).

При $\alpha_0 = d_2 w_1 - a$ состояние равновесия $L(w_1, 0)$ является сложным с простым нулевым собственным значением. Выясним его тип.

С учетом $\alpha = \alpha_0$ из системы (5) получим

$$\begin{cases} \dot{u} = -au + d_1 w_1 v - \frac{a}{w_1} u^2 - d_1 uv, \\ \dot{v} = d_2 v \left(u + \frac{w_1}{w_2} v \right). \end{cases} \quad (6)$$

Лемма 1. При $\alpha_0 = d_2 w_1 - a$ и $a - d_1 w_2 \neq 0$ состояние равновесия $L(w_1, 0)$ является простейшим двукратным устойчивым седло-узлом.

Доказательство. Приведем систему (6) к каноническому виду (см. [3, с. 66]) с помощью линейной замены

$$u = \xi - \frac{d_1 w_1}{a} \eta, \quad v = \eta,$$

тогда система (6) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -a\xi - \frac{a}{w_1} \xi^2 + \frac{d_1}{a} (d_2 w_1 + a) \xi \eta + \frac{d_1 d_2 w_1^2}{a^2 w_2} (a - d_1 w_2) \eta^2, \\ \dot{\eta} = d_2 \xi \eta + \frac{d_2 w_1}{a w_2} (a - d_1 w_2) \eta^2. \end{cases} \quad (7)$$

В соответствии с алгоритмом (см. [3, с. 67]) введем в рассмотрение функцию $\xi = \varphi(\eta)$, являющуюся решением уравнения

$$-a\xi - \frac{a}{w_1} \xi^2 + \frac{d_1}{a} (d_2 w_1 + a) \xi \eta + \frac{d_1 d_2 w_1^2}{a^2 w_2} (a - d_1 w_2) \eta^2 = 0.$$

или

$$\xi^2 + w_1 \left(1 - \frac{d_1}{a^2} (d_2 w_1 + a) \eta \right) \xi - \frac{d_1 d_2 w_1^3}{a^3 w_2} (a - d_1 w_2) \eta^2 = 0. \quad (8)$$

Так как левая часть уравнения (8) определена, непрерывна и дифференцируема по переменным ξ , η в окрестности точки $(\xi; \eta) = (0; 0)$, то функция $\xi = \varphi(\eta)$ определена и непрерывна в окрестности точки $(\xi; \eta) = (0; 0)$. Запишем решение уравнения (8) в виде

$$\xi_{1,2} = \frac{w_1}{2} \left((\bar{a}\eta - 1) \pm \sqrt{1 - 2\bar{a}\eta + \bar{a}\eta^2} \right),$$

где

$$\bar{a} = \frac{d_1}{a^2} (d_2 w_1 + a), \quad \bar{\bar{a}} = \bar{a}^2 + 4 \frac{d_2 w_1}{w_2} (a - d_1 w_2).$$

Непосредственными вычислениями получим, что область определения выражения $\varphi(\eta)$ определяется дискриминантом

$$D_\eta = 4\bar{a}^2 - 4\bar{a} = \frac{16d_1d_2w_1^3}{a^3w_2}(d_1w_2 - a).$$

Заметим, что $D_\eta < 0$ тогда и только тогда, когда $d_1w_2 - a < 0$. Следовательно, при $d_1w_2 - a < 0$ справедливо неравенство $1 - 2\bar{a}\eta + \bar{a}\eta^2 > 0$, и функция $\varphi(\eta)$ определена при всех $\eta \in \mathbb{R}$. Если $D_\eta > 0$ (т.е. $d_1w_2 - a > 0$), то область определения функции $\varphi(\eta)$ является решением неравенства $1 - 2\bar{a}\eta + \bar{a}\eta^2 \geq 0$, причем решение этого неравенства содержит значение $\xi = 0$.

Подставим функцию

$$\varphi_+(\eta) = \frac{w_1}{2} \left((\bar{a}\eta - 1) + \sqrt{1 - 2\bar{a}\eta + \bar{a}\eta^2} \right)$$

в правую часть второго уравнения системы (7), получим

$$\psi(\eta) = d_2\eta\varphi(\eta) + \frac{d_2w_1}{aw_1}(a - d_1w_2)\eta^2. \quad (9)$$

Пусть $a - d_1w_2 \neq 0$. Разложим функцию (9) в ряд Тейлора в окрестности точки $\eta = 0$. Для коэффициентов разложения получим $\psi(0) = 0$,

$$\psi(0)' = 0, \quad \psi''(0) \equiv \Delta_2 = 2\frac{d_2w_1}{aw_2}(a - d_1w_2) \neq 0,$$

следовательно, разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\psi(\eta) = \Delta_2\eta^2 + o(\eta^2).$$

В силу теоремы 2 (см. [3, С. 87–88]), при $\alpha_0 = d_2w_1 - a$ и $a - d_1w_2 \neq 0$ состояние равновесия $L(w_1, 0)$ является простейшим двукратным седло-узлом при любом знаке коэффициента Δ_2 . Так как $\lambda_1 = -a < 0$, то узловой сектор данного состояния равновесия является устойчивым. Лемма 1 доказана. $\square$

Замечание 1. При $\alpha_0 = d_2w_1 - a$ и $d_1w_2 - a = 0$ система (7) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -a\xi - \frac{a}{w_1}\xi^2 + \frac{d_1}{a}(d_2w_1 + a)\xi\eta, \\ \dot{\eta} = d_2\xi\eta. \end{cases}$$

Выполняя алгоритм, запишем уравнение (8)

$$\xi \left(-a - \frac{a}{w_1}\xi + \frac{d_1}{a}(d_2w_1 + a)\eta \right) = 0,$$

тогда решение уравнения (8) определено при всех $\eta \in \mathbb{R}$ и имеет вид

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} 0, \\ -w_1 + \frac{d_1w_1}{a^2}(d_2w_1 + a)\eta. \end{cases}$$

Следовательно, случай $d_1w_2 - a = 0$ требует отдельного исследования.

Рассмотрим состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$, где $x_0(\alpha)$ и $y_0(\alpha)$ определяются формулами (4). Исследуем тип и положение этого состояния равновесия в системе координат в зависимости от параметра α .

Область допустимых значений параметра α в (4) определяется неравенством

$$w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha) \neq 0.$$

Непосредственными вычислениями получим, что предельные положения точки $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при $\alpha \rightarrow 0 + 0$ определяются следующими значениями пределов:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} x_0(\alpha) = \frac{aw_1(d_1w_2 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a^2}; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} y_0(\alpha) = \frac{aw_2(d_2w_1 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a^2}. \quad (10)$$

Исходя из содержательной интерпретации системы дифференциальных уравнений (3), состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ необходимо рассматривать в первой координатной четверти (численности вовлеченных и не вовлеченных студентов неотрицательны). При этом из (10) с учетом замечания 1 следует, что предельное положение точки $M(x_0(0), y_0(0))$ в первой координатной четверти существует при выполнении следующей совокупности коэффициентных условий:

$$\left[\begin{cases} d_1 w_2 - a > 0, \\ w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2 > 0, \\ d_2 w_1 - a \geq 0; \\ d_1 w_2 - a < 0, \\ w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2 < 0, \\ d_2 w_1 - a \leq 0. \end{cases} \right. \quad (11)$$

Всюду далее полагаем, что одна из систем совокупности (11) имеет место.

Лемма 2. Пусть справедлива одна из систем совокупности (11). Состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ расположено в первой четверти тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из неравенств:

$$\begin{cases} d_1 w_2 - a > 0, \\ \alpha \in [0; d_2 w_1 - a]. \end{cases} \quad (12a)$$

$$\begin{cases} d_1 w_2 - a < 0, \\ \alpha \geq 0. \end{cases} \quad (12b)$$

Доказательство. Состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ расположено в первой координатной четверти тогда и только тогда, когда одновременно $x_0(\alpha) > 0$, $y_0(\alpha) > 0$, что равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{(a + \alpha)w_1(d_1 w_2 - a)}{w_1 w_2 d_1 d_2 - a(a + \alpha)} > 0, \\ \frac{a w_2 (w_1 d_2 - (a + \alpha))}{w_1 w_2 d_1 d_2 - a(a + \alpha)} \geq 0. \end{cases}$$

Решая последнюю систему неравенств, получим следующую совокупность условий:

$$\left[\begin{cases} d_1 w_2 - a > 0, \\ \alpha \in \left[0; \min \left\{ d_2 w_1 - a; \frac{w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2}{a} \right\} \right); \\ d_1 w_2 - a < 0, \\ \alpha \geq \max \left\{ 0; d_2 w_1 - a; \frac{w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2}{a} \right\}. \end{cases} \right. \quad (13)$$

(угловая скобка обозначает неопределенный тип конца промежутка).

Рассмотрим первую систему совокупности (13). Допустим, что одновременно выполняются неравенства $d_1 w_2 - a > 0$ и

$$d_2 w_1 - a > \frac{w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2}{a}.$$

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что последнее неравенство может быть справедливо тогда и только тогда, когда $d_1 w_2 - a < 0$, что противоречит первому неравенству этой системы. Следовательно,

$$\min \left\{ d_2 w_1 - a; \frac{w_1 w_2 d_1 d_2 - a^2}{a} \right\} = d_2 w_1 - a$$

при $d_1 w_2 - a \geq 0$, то есть $\alpha \in [0; d_2 w_1 - a]$ при $d_1 w_2 - a > 0$.

Рассмотрим вторую систему совокупности (13). Так как $d_1w_2 - a < 0$, то в силу условий (11)

$$\max \left\{ 0; d_2w_1 - a; \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a} \right\} = 0.$$

Следовательно, $\alpha \geq 0$ при $d_1w_2 - a < 0$. Лемма 2 доказана. $\square$

Исследуем поведение траекторий системы (3) в окрестности точки $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$. Для этого выполним параллельный перенос начала координат в эту точку с помощью замены переменных $x = u + x_0$, $y = v + y_0$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{11}(\alpha)u + a_{12}(\alpha)v - \frac{a}{w_1}u^2 - d_1uv, \\ \dot{v} = a_{21}(\alpha)u + a_{22}(\alpha)v + \frac{a + \alpha}{w_2}v^2 + d_2uv. \end{cases}$$

Матрица соответствующей системы линейного приближения имеет вид

$$A_M(\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) \\ a_{21}(\alpha) & a_{22}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(\alpha) &= \left(a - \frac{2ax_0}{w_1} - d_1y_0 \right) = -\frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}, \\ a_{12}(\alpha) &= -d_1x_0 = \frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}, \\ a_{21}(\alpha) &= d_2y_0 = \frac{ad_2w_2(d_2w_1 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}, \\ a_{22}(\alpha) &= -\left((a + \alpha) - \frac{2(a + \alpha)y_0}{w_2} - d_2x_0 \right) = \frac{a(a + \alpha)(d_2w_1 - (a + \alpha))}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}. \end{aligned}$$

Собственные значения матрицы $A_M(\alpha)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(\alpha) &= -\frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)}{2(w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha))} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2(a + \alpha)^2(d_1w_2 - d_2w_2 + \alpha)^2}{((w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha))^2)} - 4\frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - a)(d_2w_2 - a - \alpha)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим знаки собственных значений λ_1 и λ_2 (14) при реализации случаев (12а) и (12b) леммы 2.

3.1. Случай (12а). Пусть $d_1w_2 - a > 0$ и $\alpha \in [0; d_2w_1 - a]$. Заметим, что в этом случае при всех $\alpha \in [0; d_2w_1 - a]$ точка $L(w_1, 0)$ является седлом.

Подкоренное выражение в (14) приведем к общему знаменателю, тогда числитель имеет вид

$$a(a + \alpha)(a(a + \alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)^2 - 4(d_1w_2 - a)(d_2w_1 - a - \alpha)(w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha))).$$

В этом случае тип собственных значений определяется знаком и значением выражения

$$D(\alpha) = a(a + \alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)^2 - 4(d_1w_2 - a)(d_2w_1 - a - \alpha)(w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)). \quad (15)$$

Заметим, что при $\alpha < d_2w_1 - a$ выполняется неравенство $d_2w_1 - a - \alpha > 0$, а в силу $d_1w_2 - a > 0$ справедлива оценка

$$w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha) > w_1w_2d_1d_2 - a(a + d_2w_1 - a) = w_1w_2d_1d_2 - ad_2w_1 = d_2w_1(d_1w_2 - a) > 0,$$

то есть

$$4\frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - a)(d_2w_2 - a - \alpha)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)} > 0,$$

причём и числитель и знаменатель этой дроби положительны. Отсюда следует, что $D(\alpha) > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)^2 > 4(d_1w_2 - a)(d_2w_1 - a - \alpha)(w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)).$$

Лемма 3. Пусть справедливы неравенства первой системы из совокупности (11).

1. Если при $\alpha = 0$ выполняется неравенство $D(0) > 0$, то при $d_1w_2 < d_2w_1$ состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым узлом, а при $d_1w_2 > d_2w_1$ — устойчивым узлом.
2. Если при $\alpha = 0$ выполняется неравенство $D(0) < 0$, то при $d_1w_2 < d_2w_1$ состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым фокусом, а при $d_1w_2 > d_2w_1$ — устойчивым фокусом.

Доказательство. При $\alpha = 0$ собственные значения матрицы $A_M(0)$, определенные равенствами (14), примут вид

$$\lambda_{1,2}(0) = -\frac{a^2(d_1w_2 - d_2w_1)}{2(w_1w_2d_1d_2) - a^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4(d_1w_2 - d_2w_2)^2}{(w_1w_2d_1d_2 - a^2)^2} - 4\frac{a^2(d_1w_2 - a)(d_2w_2 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a^2}}.$$

Очевидно, что тип собственных значений $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ зависит от значения и знака выражения (15) при $\alpha = 0$

$$D(0) = a^2(d_1w_2 - d_2w_2)^2 - 4a^2(a - d_1w_2)(a - d_2w_2)(a^2 - w_1w_2d_1d_2)$$

В силу первой системы совокупности (11) при $d_1w_2 - a > 0$ должны выполняться условия

$$d_2w_1 - a \geq 0, \quad w_1w_2d_1d_2 - a^2 > 0.$$

Тогда при выполнении условий $D(0) > 0$ и $d_1w_2 < d_2w_1$ собственные значения $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ вещественны, положительны и

$$\left| \frac{a^2(d_1w_2 - d_2w_1)}{2(a^2 - w_1w_2d_1d_2)} \right| > \frac{1}{2}\sqrt{D_0},$$

а точка $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым узлом. При $d_1w_2 > d_2w_1$ собственные значения $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ вещественны и отрицательны, а точка $M(x_0(0), y_0(0))$ является устойчивым узлом.

Аналогично рассуждая, получим, что при выполнении неравенств $D(0) < 0$ и $d_1w_2 < d_2w_1$ собственные значения $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ являются комплексно-сопряженными с положительными действительными частями. Следовательно, точка $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым фокусом. При $d_1w_2 > d_2w_1$ собственные значения $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ являются комплексно-сопряженными с отрицательными действительными частями, следовательно, точка $M(x_0(0), y_0(0))$ является устойчивым фокусом. Лемма 3 доказана. $\square$

Лемма 4. Пусть выполняются неравенства первой системы из совокупности (11), при $\alpha = 0$ в (15) $D(0) > 0$ и $d_1w_2 - d_2w_1 > 0$. Тогда при всех $\alpha \in (0; d_2w_1 - a)$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ является устойчивым узлом.

Доказательство. При выполнении условий леммы и в силу утверждения 1 леммы 3 состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является устойчивым узлом. В силу леммы 2 при всех $\alpha \in [0; d_2w_1 - a]$ выражение $D(\alpha)$ (15) является непрерывной функцией параметра. При этом при возрастании $\alpha \in (0; d_2w_1 - a)$ в формуле (14) положительная дробно-рациональная функция

$$\frac{a^2(a + \alpha)^2(d_1w_2 - d_2w_2 + \alpha)^2}{(w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha))^2}$$

возрастает, а положительная дробно-рациональная функция

$$4\frac{a(a + \alpha)(d_1w_2 - a)(d_2w_2 - a - \alpha)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}$$

убывает. Следовательно, при всех $\alpha \in (0; d_2w_1 - a)$ выполняется неравенство $D(\alpha) > 0$. Так как $d_1w_2 - d_2w_1 > 0$, то и $\alpha + d_1w_2 - d_2w_1 > 0$, тогда из него и неравенства $D(\alpha) > 0$ следует, что

$$\sqrt{a(a + \alpha)D(\alpha)} < |a(a + \alpha)(\alpha + d_1w_2 - d_2w_1)|.$$

Следовательно, собственные значения $\lambda_1(\alpha)$ и $\lambda_2(\alpha)$ в формуле (14) будут вещественными одного знака, определяемого знаком выражения

$$\left(-\frac{a(a+\alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)}{2(w_1w_2d_1d_2 - a(a+\alpha))} \right).$$

Так как $\alpha + d_1w_2 - d_2w_1 > 0$, то

$$\left(-\frac{a(a+\alpha)(d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha)}{2(w_1w_2d_1d_2 - a(a+\alpha))} \right) < 0,$$

откуда следует, что при всех $\alpha \in [0; d_2w_1 - a)$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ является устойчивым узлом. Лемма 4 доказана. $\square$

Лемма 5. Если выполняются неравенства первой системы из совокупности (11), при $\alpha = 0$ в (15) $D(0) < 0$ и $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$, то при переходе через значение $\alpha_1 \equiv d_2w_1 - d_1w_2$ фокус $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ меняет характер с неустойчивого на устойчивый, а при $\alpha = \alpha_1$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha_1), y_0(\alpha_1))$ является сложным с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения; и существует значение параметра $\alpha = \alpha_2 \in (d_2w_1 - d_1w_2; d_2w_1 - a)$, при котором происходит бифуркация типа особой точки (устойчивый фокус становится устойчивым узлом).

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы. Тогда в силу утверждения 2 леммы 3 состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является неустойчивым фокусом. В лемме 2 установлено, что

$$\min \left\{ d_2w_1 - a; \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a} \right\} = d_2w_1 - a,$$

следовательно,

$$\alpha < \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a},$$

тогда функции $D(\alpha)$ и $\lambda_{1,2}(\alpha)$ (14) непрерывны на отрезке $[0; d_2w_1 - a]$. При этом, если

$$d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha < 0,$$

то $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(\alpha)) > 0$, и состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ остается неустойчивым фокусом. Если же $d_1w_2 - d_2w_1 + \alpha > 0$, то $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(\alpha)) < 0$, и точка $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ становится устойчивым фокусом. Рассмотрим значение параметра $\alpha = \alpha_1 \equiv d_2w_1 - d_1w_2$, при котором $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(\alpha_1)) = 0$. Заметим, что из условия $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$ следует оценка

$$0 < d_2w_1 - d_1w_2 = (d_2w_1 - a) - (d_1w_2 - a) < d_2w_2 - a,$$

из которой следует включение $\alpha_1 \in (0; d_2w_1 - a)$, и точка $M(x_0(\alpha_1), y_0(\alpha_1))$ является сложным состоянием равновесия с чисто мнимыми собственными значениями.

Так как функция $D(\alpha)$ (15) непрерывна на отрезке $[0; d_2w_1 - a]$; из неравенства

$$\alpha_1 < \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a}$$

следует неравенство

$$D(\alpha_1) = -4(d_1w_2 - a)^2(w_1w_2d_1d_2 - a(a + d_2w_1 - d_1w_2)) < 0;$$

поскольку $D(\alpha_0) = ad_2w_2(d_1w_2 - a)^2 > 0$, то по теореме Больцано—Коши на интервале (α_1, α_0) существует такое значение параметра $\alpha = \alpha_2 \in (\alpha_1, \alpha_0)$, что $D(\alpha_2) = 0$, а состояние равновесия $M(x_0(\alpha_2), y_0(\alpha_2))$ из устойчивого фокуса становится устойчивым узлом (вырожденным или критическим). При $\alpha \in (\alpha_2; d_2w_1 - a)$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ становится грубым устойчивым узлом. Лемма 5 доказана. $\square$

Замечание 2. Так как при прохождении значения $\alpha = \alpha_1$ фокус $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ меняет характер устойчивости, то в его окрестности возможно возникновение периодических решений [3], в частности, бифуркация Андронова—Хопфа. Для обнаружения этой бифуркации (или иных) впоследствии предполагается исследовать тип сложного состояния равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$ и $\alpha = \alpha_1$.

Замечание 3. Так как $D(\alpha)$ (15) представляет собой кубический многочлен относительно параметра α , который может иметь либо один, либо три действительных корня (возможен подслучай двух совпадающих корней из трех). Следовательно, при изменении α возможно существование нескольких (но не более трёх) бифуркаций состояния равновесия типа фокус-узел.

Замечание 4. Случаи $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$ и $D(\alpha) > 0$ и $d_1w_2 - d_2w_1 > 0$ и $D(\alpha) < 0$ не могут быть реализованы при $\alpha > 0$ в первой координатной четверти, так как при этом нарушается одно из неравенств первой системы совокупности (11).

Замечание 5. Пусть $d_1w_2 - d_2w_1 = 0$. При $\alpha = 0$ непосредственными вычислениями получаем, что $D(0) < 0$, а при $\alpha = \alpha_0$ $D(\alpha_0) > 0$. Следовательно, в силу замечания 3 при изменении α возможно существование нескольких (не более трех) бифуркаций состояния равновесия типа фокус-узел. Так как при $d_1w_2 - d_2w_1 = 0$ состояние равновесия $M(x_0(0), y_0(0))$ является сложным состоянием равновесия с чисто мнимыми собственными значениями, то впоследствии предполагается исследовать структуру траекторий в его окрестности.

Лемма 6. Пусть справедливы неравенства первой системы из совокупности (11) и $\alpha = \alpha_0 \equiv d_2w_1 - a$. Тогда точка $M(x_0(\alpha_0), y_0(\alpha_0))$ совпадает с точкой $L(w_1, 0)$ (происходит седло-узловая бифуркация слияния двух состояний равновесия).

Доказательство. При выполнении условий леммы выражения (4) примут вид $x_0(\alpha_0) = w_1$, $M(x_0(\alpha_0), y_0(\alpha_0))$ совпадает с точкой $L(w_1; 0)$. Подставив значение $\alpha = \alpha_0$ в формулы (14), получим $\lambda_1 = a < 0$, $\lambda_2 = 0$. Так как в силу леммы 1 точка $L(w_1; 0)$ при $d_1w_2 - a \neq 0$ и $\alpha < \alpha_0$ является седлом, а при $\alpha = \alpha_0$ является простейшим двукратным устойчивым седло-узлом, то при $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация слияния двух особых точек в одну. Лемма 6 доказана. $\square$

3.2. Случай (12b). Пусть $d_1w_2 - a < 0$, $\alpha \geq 0$. В этом случае при всех $\alpha \geq 0$ точка $L(w_1; 0)$ является устойчивым узлом.

Лемма 7. Если выполняются условия второй системы неравенств из совокупности (11), тогда состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ существует при всех $\alpha \in [0; +\infty)$ в первой координатной четверти и является седлом.

Доказательство. Пусть выполняются условия второй системы неравенств из совокупности (11). Тогда функции (4) не определены при

$$\alpha = \alpha_3 \equiv \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a} < 0,$$

следовательно, при всех $\alpha \in [0; +\infty)$ состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ существует в первой четверти. Тип собственных значений $\lambda_{1,2}$ в (15) определяется значением и знаком выражения $D(\alpha)$ (15). Заметим, что в силу второй системы неравенств из совокупности (11) вместе с неравенством $d_1w_2 - a < 0$ должны выполняться неравенства $d_2w_1 - a \leq 0$ и $w_1w_2d_1d_2 - a^2 < 0$. Следовательно, при всех $\alpha \in [0; +\infty)$ справедливы неравенства $D(\alpha) > 0$ и

$$\sqrt{a(a + \alpha)D(\alpha)} > \frac{a(a + \alpha)(\alpha + d_1w_2 - d_2w_1)}{2(a(a + \alpha) - w_1w_2d_1d_2)}.$$

Тогда при всех $\alpha \in [0; +\infty)$ собственные значения $\lambda_{1,2}$ в (15) вещественны, различны и имеют разные знаки, а состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ является седлом. Лемма 7 доказана. $\square$

Замечание 6. Так как в данном случае $\alpha_0 \equiv d_2w_1 - a < 0$, то бифуркация слияния точек M и L происходит не в первой координатной четверти.

Непосредственными вычислениями получим предельные положения состояния равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при $\alpha \rightarrow +\infty$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} x_0(\alpha) = -\frac{w_1(d_1w_2 - a)}{a}(+0); \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} y_0(\alpha) = -w_2(-0).$$

Очевидно, что предельное положение точки $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при $\alpha \rightarrow +\infty$ находится в третьей координатной четверти при $w_2d_1 - a > 0$ и во второй координатной четверти при $w_2d_1 - a < 0$.

Замечание 7. Теоретически если не ограничивать значение параметра промежутком $\alpha \in [0; +\infty)$, то в этом случае состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ при

$$\alpha \rightarrow \alpha_3 \equiv \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a}$$

испытывает бифуркацию исчезновения и появления седла на бесконечности. Действительно, функции (4) не определены при

$$\alpha = \alpha_3 \equiv \frac{w_1w_2d_1d_2 - a^2}{a},$$

следовательно, состояние равновесия $M(x_0(\alpha_3), y_0(\alpha_3))$ не существует. Так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_3 \pm 0} x_0(\alpha) = +\infty; \quad \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_3 \pm 0} y_0(\alpha) = +\infty,$$

то особая точка $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ исчезает и появляется на бесконечности при $\alpha \rightarrow \alpha_3 \pm 0$. Следовательно, значение $\alpha = \alpha_3$ является бифуркационным, при котором происходит бифуркация особой точки от бесконечности.

3.3. Выводы. Таким образом, в системе (3) при изменении параметра $\alpha \geq 0$ возможны следующие последовательности бифуркаций.

Если справедливы первая система неравенств совокупности (11) и $d_1w_2 - d_2w_1 > 0$, то при $\alpha = 0$ в системе (3) в первой четверти расположены четыре состояния равновесия: седла O , K , L и устойчивый узел M (лемма 3). При возрастании $\alpha \geq 0$ точка M приближается к точке L , оставаясь устойчивым узлом (лемма 4). При $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация точек L и M (лемма 2), состояние равновесия M исчезает в первой четверти. При дальнейшем возрастании параметра α точка L остается устойчивым узлом.

Если справедливы первая система неравенств совокупности (11) и $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$, то при $\alpha = 0$ в системе (3) в первой четверти также расположены четыре состояния равновесия: седла O , K , L и неустойчивый фокус M (лемма 3). При возрастании $\alpha \geq 0$ точка M при $\alpha = \alpha_1$ становится сложным состоянием равновесия с чисто мнимыми собственными значениями соответствующей линейной системы. При переходе через $\alpha = \alpha_1$ фокус меняет характер устойчивости, в системе возможно возникновение периодических решений (лемма 5). При $\alpha_2 \in (\alpha_1, \alpha_0)$ точка M меняет характер с фокуса на узел (лемма 5), и при $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация точек L и M (леммы 2, 6), состояние равновесия M исчезает в первой четверти. При дальнейшем возрастании параметра α точка L остается устойчивым узлом.

Если справедливы первая система неравенств совокупности (11) и $d_1w_2 - d_2w_1 = 0$, то при $\alpha = 0$ в системе (3) в первой четверти также расположены четыре состояния равновесия: седла O , K , L и сложное состояние равновесия M (замечание 5). При возрастании $\alpha \geq 0$ в силу замечания 3 точка M может до трех раз менять характер с фокуса на узел (устойчивый), и при $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация точек L и M (леммы 2, 6), состояние равновесия M исчезает в первой четверти. При дальнейшем возрастании параметра α точка L остается устойчивым узлом.

Если справедлива вторая система неравенств совокупности (11), то при любом соотношении d_1w_2 и d_2w_1 и при $\alpha = 0$ в системе (3) в первой четверти также расположены четыре состояния равновесия: седла O , M , устойчивый узел L и неустойчивый узел K . При возрастании $\alpha \geq 0$ топологическая структура фазового портрета в первой координатной четверти не меняется (лемма 7).

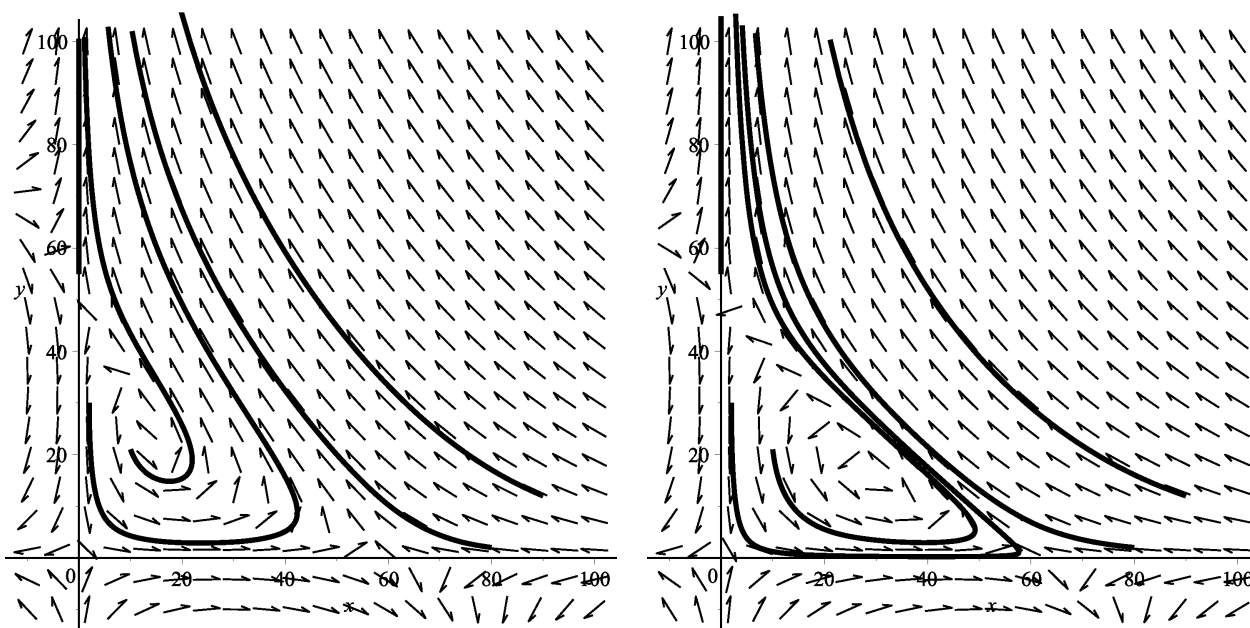


Рис. 1. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha = 0$ (слева) и при $\alpha = 2$ (справа). Точка M — неустойчивый фокус.

Заметим, что седло-узловая бифуркация точек L и M означает возможность перехода всех не вовлеченных студентов в группу вовлеченных.

4. Примеры.

Пример 1. Пусть в системе (3) $a = 3$; $d_1 = 0,1$; $d_2 = 0,12$; $w = 160$, $w_1 = 60$, $w_2 = 50$. Тогда $d_1 w_2 - a = 2$; $d_2 w_1 - a = 4,2$; $d_1 d_2 w_1 w_2 - a^2 = 27$, то есть имеет место первый случай. Бифуркационные значения параметра: $\alpha_0 = 4,20$; $\alpha_1 = 2,20$; $\alpha_2 \approx 3,79$. На рисунках 1–4 представлены фазовые портреты системы (3) при изменении параметра α .

Пример 2. Пусть в системе (3) $a = 3$; $d_1 = 0,1$; $d_2 = 0,12$; $w = 160$, $w_1 = 60$, $w_2 = 50$. Тогда $d_1 w_2 - a = -1,6$; $d_2 w_1 - a = 0,6$; $d_1 d_2 w_1 w_2 - a^2 = -5,64$, то есть имеет место второй случай. На рисунках 5–6 представлены фазовые портреты системы (3) при изменении параметра α .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атряхин В. А., Шаманаев П. А. Построение математической модели динамики потока претендентов на поступление в аспирантуру с использованием системы дифференциальных уравнений с запаздыванием// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2011. — 13, № 4. — С. 35–39.
2. Атряхин В. А., Шаманаев П. А. Моделирование динамики кадров с использованием дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2012. — 14, № 1. — С. 35–39.
3. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1991.
4. Бельман С. А., Быкова А. А. Исследование динамической модели педагогических ресурсов// Вестн. РАЕН. — 2019. — 19, № 2. — С. 36–38.
5. Бельман С. А., Лискина Е. Ю. О регулировании педагогического воздействия в динамической модели студенческой группы, имеющей отрицательного неформального лидера// Диффер. уравн. мат. модел. — 2021. — № 2. — С. 10–19.
6. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
7. Математические модели социальных систем. — Омск: Омск. гос. ун-т, 2000.

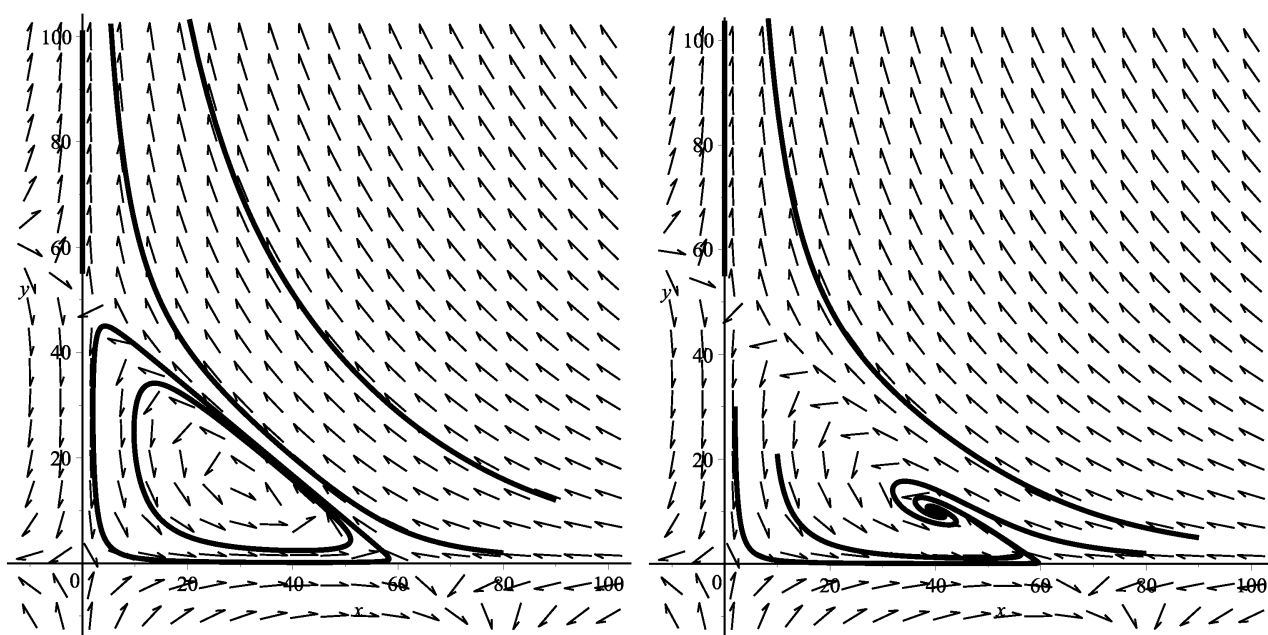


Рис. 2. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha_1 = 2,20$ (слева, точка M — сложное состояние равновесие с мнимыми собственными значениями матрицы системы линейного приближения) и при $\alpha = 3$ (справа, точка M — устойчивый фокус).

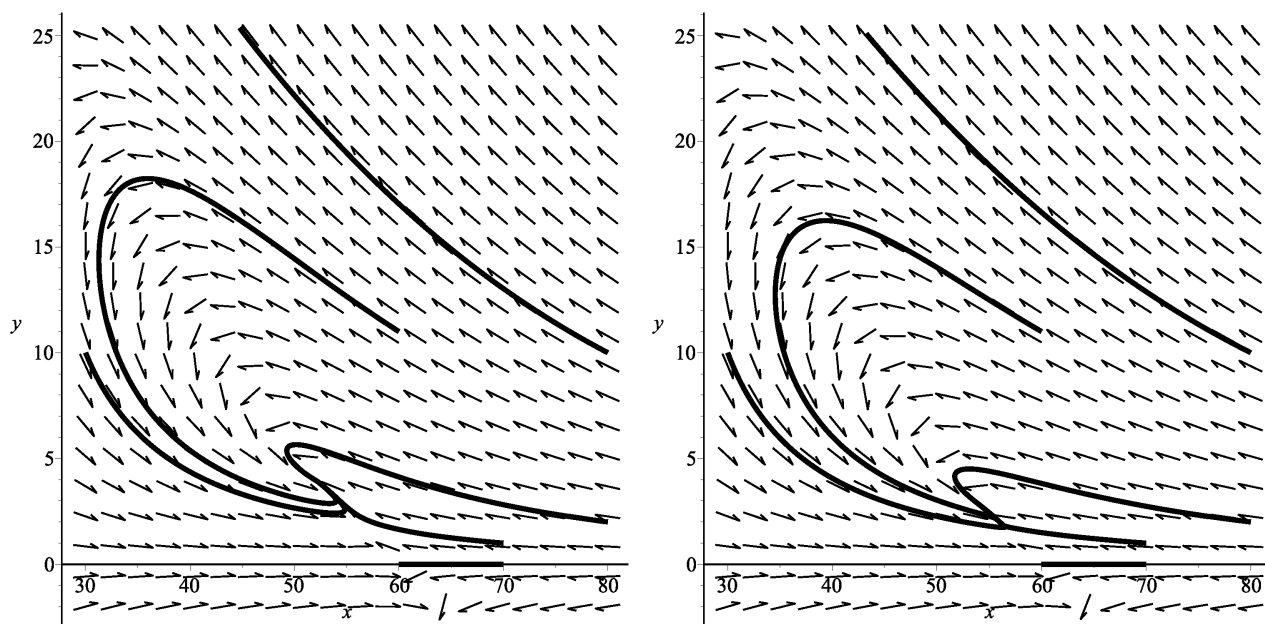


Рис. 3. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha_2 \approx 3,79$ (слева, изменение фокус-узел) и при $\alpha = 4$ (справа, точка M — устойчивый узел).

8. Математическое моделирование социальных процессов / Сб. науч. трудов. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017. — № 19.
9. Михайлов А. П., Петров А. П. Поведенческие гипотезы и математическое моделирование в гуманитарных науках // Мат. модел. — 2011. — 23, № 6. — С. 18–32.

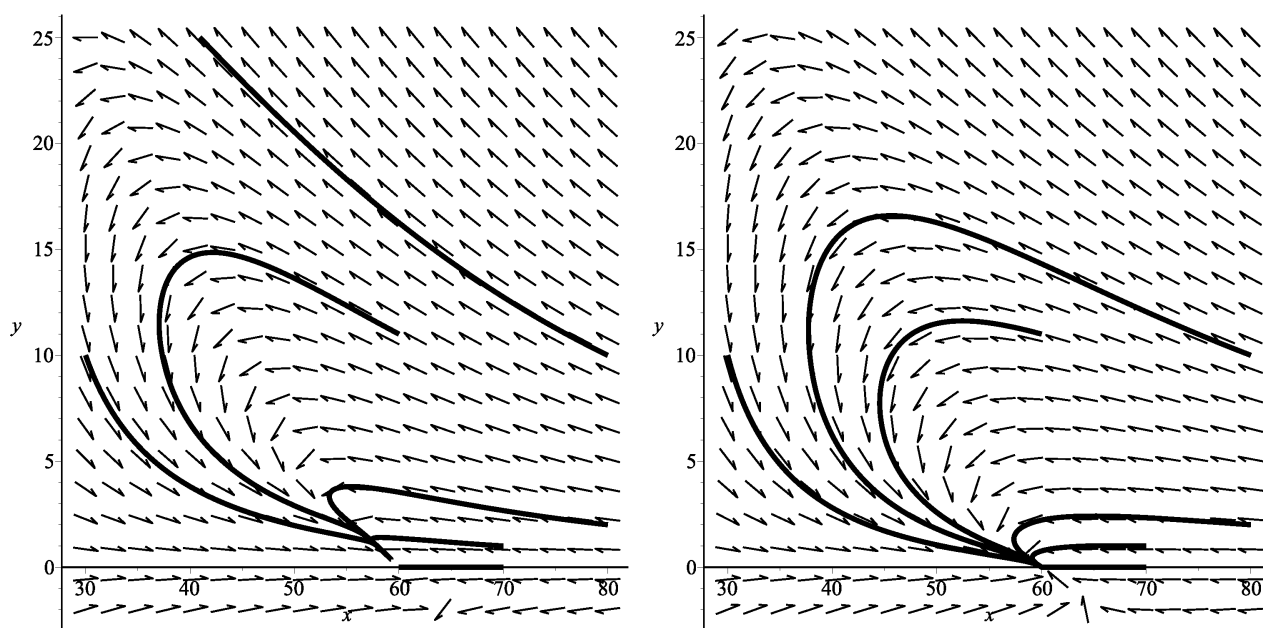


Рис. 4. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha_0 = 4,20$ (слева, точка $M = L$ — двукратное седло-узел) и при $\alpha = 5,2$ (справа, точка M исчезла, точка L — устойчивый узел).

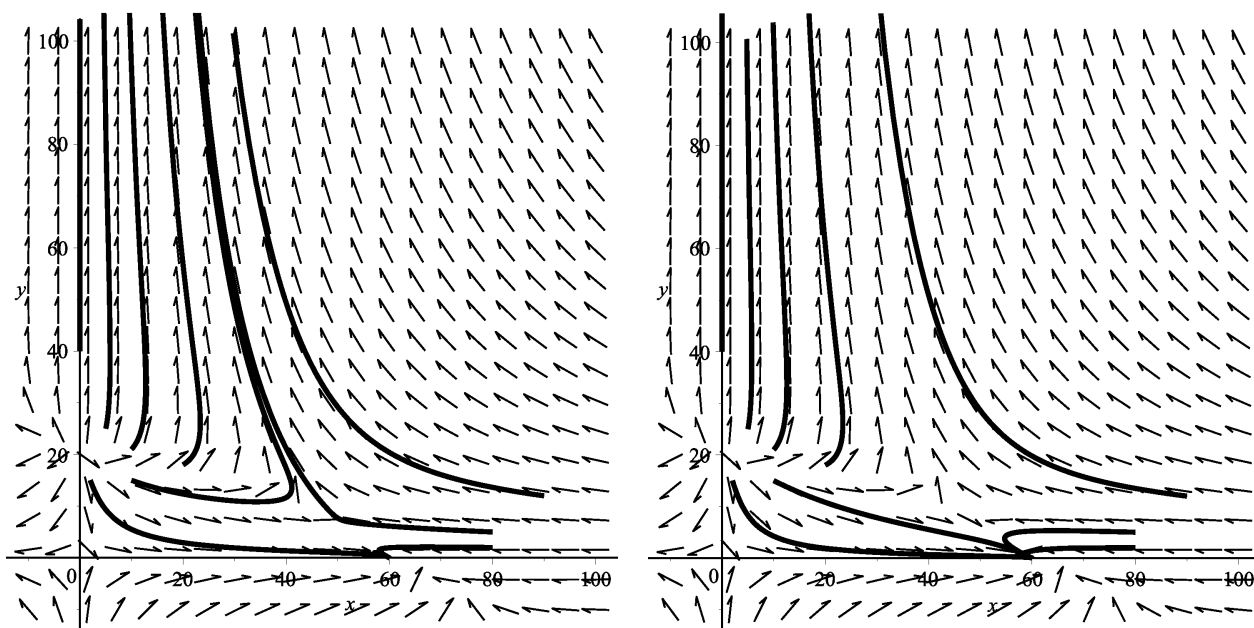


Рис. 5. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha = 0$ (слева) и при $\alpha = 0,5$ (справа). Точка M — седло, точка L — устойчивый узел.

10. Михайлов А. П., Прончева О. Г. Дестабилизирующее воздействие на социум в моделях информационного противоборства// в кн.: Математическое моделирование социальных процессов. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2017. — 19. — С. 51–57.
11. Моделирование социально-педагогических систем / Мат. регион. науч.-практ. конф. — Пермь: Перм. гос. пед. ун-т, 2004.

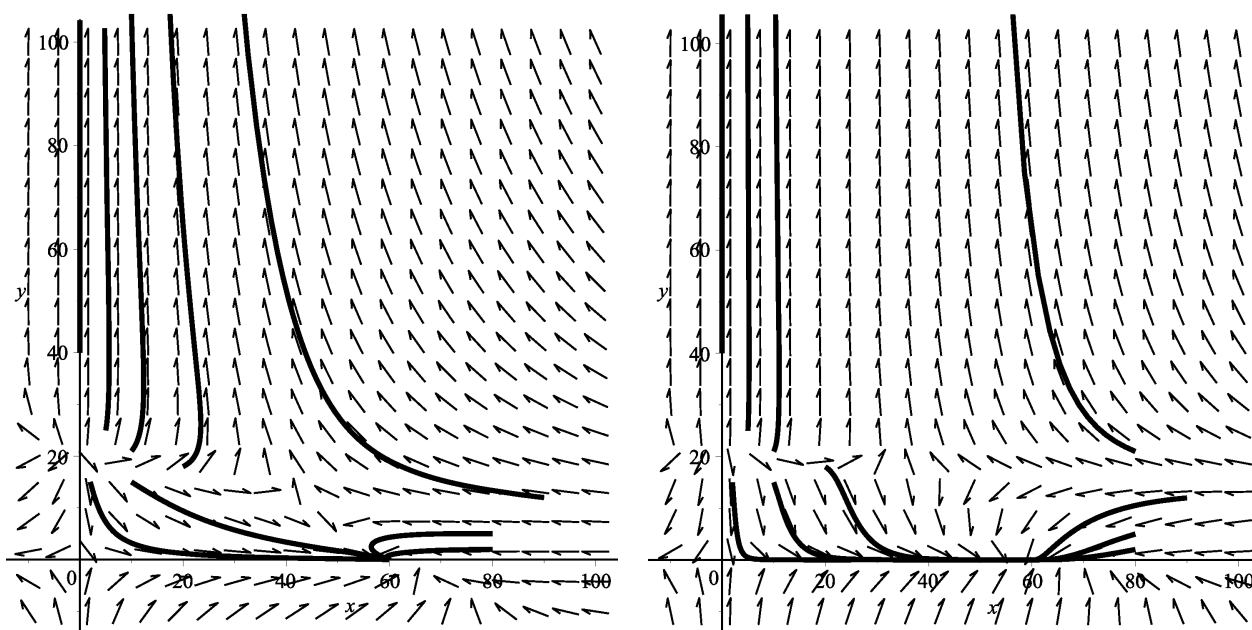


Рис. 6. Фазовые траектории системы (3) при $\alpha_1 = 1$ (слева) и при $\alpha = 10$ (справа). Точка M — седло, точка L — устойчивый узел.

12. Ядровская М. В. Моделирование педагогического взаимодействия // Образовательные технологии и общество. — 2009. — № 3. — С. 354–362.

Бельман Светлана Александровна
 Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
 E-mail: s.Belman@365.rsu.edu.ru

Лискина Екатерина Юрьевна
 Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
 E-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru