ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 77–90
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-77-90

УДК 517.929

МОДЕЛЬ КЕЙНСА ДЕЛОВОГО ЦИКЛА И ЗАДАЧА О ДИФФУЗИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

© 2022 г. **А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ, Д. Г. ФРОЛОВ**

Аннотация. Рассматривается вариант системы типа «реакция-диффузия», который допускает интерпретацию в качестве математической модели бизнес-цикла Кейнса с учетом пространственных факторов. Система рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана. Для такой нелинейной краевой задачи изучены бифуркации в окрестности пространственно однородного состояния равновесия в случае, близком к критическому, нулевого и пары чисто мнимых собственных значений спектра устойчивости. Анализ бифуркаций позволил получить достаточные условия существования и устойчивости пространственно однородного и пространственно неоднородного циклов, а также пространственно неоднородного состояния равновесия. Анализ поставленной задачи опирался на использовании и развитие таких методов теории бесконечномерных динамических систем как метод интегральных (инвариантных) многообразий и нормальных форм. Их использование в сочетании с асимптотическими методами анализа позволило получить асимптотические формулы для периодических решений и неоднородных состояний равновесия. Для таких решений дан ответ об их устойчивости.

Ключевые слова: обобщенная модель Кейнса, пространственный фактор, краевая задача, устойчивость, бифуркация, асимптотика.

THE KEYNES MODEL OF THE BUSINESS CYCLE AND THE PROBLEM OF DIFFUSION INSTABILITY

© 2022 **A. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV, D. G. FROLOV**

Abstract. In this paper, we consider a version of the “reaction-diffusion” system, which can be interpreted as a mathematical model of the Keynes business cycle, taking into account spatial factors. The system is considered together with homogeneous Neumann boundary conditions. For such a nonlinear boundary-value problem, bifurcations in a neighborhood of a spatially homogeneous equilibrium state are studied in the near-critical case of zero and a pair of purely imaginary eigenvalues of the stability spectrum. An analysis of bifurcations allows one to obtain sufficient conditions for the existence and stability of spatially homogeneous and spatially inhomogeneous cycles and a spatially inhomogeneous equilibrium state. The analysis of the problem stated is based on the methods of the theory of infinite-dimensional dynamical systems, namely, the method of integral (invariant) manifolds and the method of normal forms. These methods and asymptotic methods of analysis lead to asymptotic formulas for periodic solutions and inhomogeneous equilibria. For such solutions, we also examine their stability.

Keywords and phrases: generalized Keynes model, spatial factor, boundary-value problem, stability, bifurcation, asymptotics.

AMS Subject Classification: 35L10, 35L30, 37N40

1. Введение. Идеи монографии [14] привели к созданию одной из самых известных математических моделей макроэкономики. Эта модель делового цикла, которая известна под названием «модель Кейнса». В монографии [23] она приведена в достаточно общей форме

$$Y' = I(Y,R) - S(Y,R), \quad R' = L(Y,R) - L_s, \tag{1}$$

где через $Y(\tau)$ обозначен доход. Например, национальный доход, доход региона. Через $R(\tau)$ обозначена процентная ставка. Например, центрального банка, Федеральной резервной системы, если речь идет о США. Возможна интерпретация $R(\tau)$ как средней ставки кредитов коммерческих банков. Через τ обозначено время, $I(Y,R)$ — функция спроса на инвестиции, $S(Y,R)$ — функция сбережений, $L(Y,R)$ — суммарный спрос на деньги. Наконец, L_s — положительная постоянная, которую называют «предложением денег» [23].

Такой вариант модели Кейнса, а также естественные конкретизации выбора правых частей системы дифференциальных уравнений (1), конечно, не учитывают многие факторы динамики рынка, но отражают принципиальные стороны экономических процессов. Для систем дифференциальных уравнений вида (1) используют обычно название упрощенная модель экономических циклов Кейнса. При этом считают, что функции $I(Y,R)$, $S(Y,R)$, $L(Y,R)$ обладают следующими свойствами [23]:

(i) они достаточно гладко зависят от своих аргументов, если эти аргументы положительны;
(ii) при всех таких Y, R справедливы неравенства

$$\frac{\partial I}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial I}{\partial R} < 0, \quad \frac{\partial S}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial L}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial L}{\partial R} < 0.$$

Эти свойства отражают ряд экономических закономерностей функционирования экономики. Более подробное обсуждение системы дифференциальных уравнений (1) в связи с экономическими интерпретациями можно найти, например, в монографии [23, раздел 5.3]. Вместе с тем, как отмечается в этой монографии, следует добавить еще некоторые свойства для функций из правых частей системы (1). Например, следует добавить условие о существовании у системы (1) состояния равновесия с положительными координатами. Такое состояние равновесия обычно называют «состоянием экономического равновесия». Его наличие характерно для математических моделей макроэкономики [23].

При выполнении всех трех условий можно ожидать появления устойчивых решений, описывающих экономические циклы (см., например, [21, 23]). Согласно сценарию работы [21] они могут появиться в результате бифуркации Андронова—Хопфа. Вместе с тем реализация этого сценария требует либо дополнительных условий, либо конкретизацию выбора функций $I(Y,R)$, $S(Y,R)$, $L(Y,R)$ при сохранении, разумеется, общих свойств, анонсированных ранее.

В данной работе анализу подлежит более конкретный вариант системы дифференциальных уравнений (1) (см., например, [20]), в котором

$$I(Y,R) = a_1\frac{Y^2}{R}, \quad S(Y,R) = a_2YR, \quad L(Y,R) = a_3\frac{Y}{R},$$

где a_1, a_2, a_3 — некоторые положительные постоянные, характеризующие скорости экономических процессов. При предложенном выборе функций реализуются все их свойства, описанные выше.

Наконец, замены

$$\tau = \gamma_0 t, \quad R = \gamma_1 u, \quad Y = \gamma_2 y,$$

где положительные постоянные выбраны следующим образом:

$$\gamma_0 = \frac{a_1}{a_2a_3}, \quad \gamma_1 = \frac{a_3}{a_1}, \quad \gamma_2 = \frac{a_2a_3^2}{a_1^3}, \quad \gamma = \frac{L_sa_1^2}{a_2a_3^2}.$$

(величина γ будет играть роль основного параметра, влияющего на характер динамики решений) приводят систему (1) к следующему виду

$$\dot{u} = F_1(u,y,\gamma), \quad \dot{y} = F_2(u,y,\gamma), \tag{2}$$

где
$$F_1 = \frac{y}{u} - \gamma, \quad F_2 = \frac{y^2}{u} - uy.$$
Система дифференциальных уравнений (2) имеет состояние равновесия $S_0 : u = \gamma, y = \gamma^2$ с положительными координатами. Вопрос об его устойчивости определяется в первом (линейном) приближении после анализа аналогичного вопроса для линеаризованной в S_0 системы (2), т.е. в нашем случае системы дифференциальных уравнений
$$\dot{h} = Ah, \quad h = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$
где
$$A = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{S_0} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{\gamma} \\ -2\gamma^2 & \gamma \end{pmatrix}.$$
В свою очередь, анализ устойчивости решений системы (3) сводится к определению расположения собственных чисел матрицы A. Они в нашем случае находятся как корни характеристического уравнения
$$\lambda^2 + (1-\gamma)\lambda + \gamma = 0.$$

Следовательно, состояние равновесия S_0 системы (2) асимптотически устойчиво, если $\gamma \in (0,1)$ и неустойчиво при $\gamma \in (1,\infty)$.

При $\gamma = 1$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости S_0, когда спектр устойчивости S_0 содержит пару чисто мнимых собственных значений $\pm i$. При отклонении γ от 1 реализуются все условия бифуркационной теоремы Андронова—Хопфа. Более детально это будет обсуждено в основном тексте работы. Но тем не менее, подчеркнем, что при $\gamma = 1+\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ у системы дифференциальных уравнений (2) в окрестности состояния равновесия S_0 существует орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл.

Система (2) не учитывает такой фактор экономики как пространственные эффекты. Экономические процессы происходят в регионах (областях) и переменные u, y должны зависеть не только от t, но и пространственных координат. Следуя идеям, изложенным в монографии [19], рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных
$$u_t = F_1(u,y,\gamma) + d_1 u_{xx}, \quad y_t = F_2(u,y,\gamma) + d_2 y_{xx}, \tag{4}$$
где теперь $u = u(t,x)$, $y = y(t,x)$, $F_1(u,y,\gamma)$, $F_2(u,y,\gamma)$ были определены ранее, а d_1, d_2 — положительные постоянные. Будем считать, что $x \in [0,\pi]$ (этого можно добиться перенормировкой переменной) и дополним систему уравнений с частными производными (4) краевыми условиями непроницаемости (однородными краевыми условиями Неймана)
$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \quad y_x(t,0) = y_x(t,\pi) = 0. \tag{5}$$
Такой вариант учета пространственных эффектов носит феноменологический характер и в реальной ситуации экономический регион двумерен, т.е. функции должны зависеть от t и x_1, x_2 — двух пространственных переменных, но подход, связанный с введением только $x = x_1$ позволяет понять возникающие проблемы и ответить на некоторые принципиальные вопросы. Отметим, что такой вариант учета пространственных эффектов используют при моделировании в химической кинетике, математической биологии [1,10,18,22]. Сразу отметим, что учет «диффузии», как известно, меняет иногда динамику решений достаточно радикально.

Отметим, что любое решение системы (2) удовлетворяет краевой задаче (4), (5), которая также имеет решения, существенным образом, зависящие от x. Обратимся теперь к вопросу об устойчивости однородного состояния равновесия $S_0(u(t,x) = \gamma, y(t,x) = \gamma^2)$ и пусть оно асимптотически устойчиво в рамках системы (2), т.е. $\gamma \in (0,1)$. Тем не менее, можно указать такие d_1, d_2, что это состояние равновесия уже будет неустойчивым в рамках краевой задачи (4), (5). Такое явление было открыто А. Тьюрингом [22] (см. также [1,10,18]) и было названо диффузионной неустойчивостью. Более детально для краевой задачи (4), (5) это будет обсуждено далее. В приложении к экономике это означает, что пространственные факторы могут привести к дестабилизации экономики или, по-крайней мере, усложнению ее динамики.

В данной работе будут изучены вопросы о поведении решений краевой задачи (4), (5) из достаточно малой окрестности однородного состояния равновесия $S_0 : u = \gamma, y = \gamma^2$. При этом речь идет об окрестности в смысле нормы фазового пространства (пространства начальных условий).

2. Предварительные построения. Постановка задачи. Сведем систему дифференциальных уравнений (4) к скалярному дифференциальному уравнению. Для этого выразим из первого уравнения системы дифференциальных уравнений (4) функцию $y(t,x)$:

$$y = u(u_t + \gamma - d_1 u_{xx}) \tag{6}$$

и подставим во второе уравнение этой системы. В результате получим уравнение

$$[u(u_t + \gamma - d_1 u_{xx})]_t = u(u_t + \gamma - d_1 u_{xx})^2 - u^2(u_t + \gamma - d_1 u_{xx}) + d_2[u(u_t + \gamma - d_1 u_{xx})]_{xx}. \tag{7}$$

Прежде чем преобразовать последнее уравнение отметим, что оно имеет положительное однородное (не зависящее от x) состояние равновесия $u = \gamma$. Поэтому удобно и целесообразно для изучения его окрестности положить

$$u(t,x) = \gamma(1 + w(t,x)). \tag{8}$$

Подстановка замены (8) в уравнение (7) с последующими преобразованиями, включающими в себя деление на $1 + w$, приводит к следующему дифференциальному уравнению с частными производными

$$\begin{aligned} w_{tt} + d_1 d_2 w_{xxxx} + \frac{1}{1+w}[w_t^2 + w_t - d_1 w_t w_{xx}] - d_1 w_{txx} = \\ = \gamma(w_t - d_1 w_{xx} - w)(w_t + 1 - d_1 w_{xx}) + d_2 w_{txx} + \\ + \frac{d_2}{1+w}[2w_x w_{xt} + w_{xx} w_t - w_{xx} - d_1 w_{xx}^2 - 2d_1 w_x w_{xxx}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (9) следует дополнить краевыми условиями

$$w_x(t,0) = w_x(t,\pi) = w_{xxx}(t,0) = w_{xxx}(t,\pi) = 0, \tag{10}$$

что вытекает из первоначального варианта краевых условий (5) и замены (6). Для дальнейших построений удобно и полезно еще раз переписать дифференциальное уравнение (9), выделив при этом линейные, квадратичные и кубические слагаемые. При этих преобразованиях используется разложение

$$\frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - w^3 + \ldots,$$

которое корректно, если $|w| < 1$. Последнее предположение вполне естественно в нашем случае, так как далее будут рассматриваться лишь малые отклонения от состояния равновесия.

Итак, далее вместо краевой задачи (9), (10) будем изучать краевую задачу

$$w_{tt} + Bw_t + Aw = F_2(w) + F_3(w) + F_0(w), \tag{11}$$

$$w_x(t,0) = w_x(t,\pi) = w_{xxx}(t,0) = w_{xxx}(t,\pi) = 0. \tag{12}$$

Здесь B, A — линейные дифференциальные операторы следующего вида:

$$Bw_t = (1-\gamma)w_t - (d_1 + d_2)w_{txx}, \quad Aw = d_1 d_2 w_{xxxx} + (d_1\gamma - d_2)w_{xx} + \gamma w.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} F_2(w) = (1-\gamma)[ww_t - w_t^2] + (\gamma d_1 - d_2)ww_{xx} + d_1(\gamma d_1 - d_2)w_{xx}^2 - \\ - 2d_1 d_2 w_x w_{xxx} + 2d_2 w_x w_{xt} + (d_1 + d_2 - 2\gamma d_1)w_t w_{xx}, \end{aligned}$$

$$F_3(w) = d_2 w_{xx} w^2 + d_1 d_2 w_{xx}^2 w + 2d_1 d_2 w_x w_{xxx} w - (d_1 + d_2)w_t w_{xx} w - 2d_2 w_x w_{xt} w + (w_t^2 - w_t w)w,$$

т.е. $F_2(w)$, $F_3(w)$ однородные квадратичные и кубические формы относительно w и соответствующих производных w. Подчеркнем, что через $F_0(w)$ обозначены слагаемые, имеющие в нуле более высокий порядок малости по сравнению с выписанными в явном виде и обозначенными $F_2(w)$, $F_3(w)$, Aw, Bw_t.

В данной работе далее будут рассмотрены некоторые локальные бифуркации, которые могут возникнуть при смене устойчивости нулевым состоянием равновесия краевой задачи (11), (12). Подчеркнем, что устойчивость будем понимать в смысле определения А. М. Ляпунова и нормы пространства начальных условий. Если краевую задачу (11), (12) дополнить начальными условиями

$$u(0,x)=f(x), \quad u_t(0,x)=g(x), \tag{13}$$

то для локальной разрешимости смешанной задачи (11), (12), (13) достаточно предположить наличие включения (см., например, [3, 12])

$$f(x)\in W^4_{2,0}[0,\pi], \quad g(x)\in W^2_{2,0}[0,\pi].$$

Здесь через $W^4_{2,0}[0,\pi]$, $W^2_{2,0}[0,\pi]$ обозначены подпространства пространств $W^4_2[0,\pi]$, $W^2_2[0,\pi]$, т.е. функциональных пространств Соболева [11, 16]. Подпространство $W^2_{2,0}[0,\pi]$ содержит те функции $g(x)\in W^2_2[0,\pi]$, для которых дополнительно выполнены условия $g'(0)=g'(\pi)=0$. Наконец, $f(x)\in W^4_{2,0}[0,\pi]$, если $f(x)\in W^4_2[0,\pi]$, а также

$$f'(0)=f'(\pi)=f'''(0)=f'''(\pi)=0.$$

Корректность такого определения подпространств $W^2_2[0,\pi]$, $W^4_2[0,\pi]$ вытекает из теорем вложения Соболева (см. [11, 16]): если $f(x)\in W^4_2[0,\pi]$, то $f(x)\in C^3[0,\pi]$, если $g(x)\in W^2_2[0,\pi]$, то $g(x)\in C^1[0,\pi]$.

3. Об устойчивости однородного состояния равновесия вспомогательной краевой задачи. Краевая задача (11), (12) имеет нулевое состояние равновесия. Для изучения вопроса о достаточных условиях его устойчивости следует, как известно, рассмотреть линейную краевую задачу

$$w_{tt}+Bw_t+Aw=0, \tag{14}$$

$$w_x(t,0)=w_x(t,\pi)=w_{xxx}(t,0)=w_{xxx}(t,\pi)=0. \tag{15}$$

Анализ устойчивости, как обычно, может быть сведен к анализу спектра операторного пучка, если положить $w(t,x)=\exp(\lambda t)v(x)$. В нашем случае получаем

$$\lambda^2 v+\lambda Bv+Av=0, \tag{16}$$

где достаточно гладкая функция $v(x)$ удовлетворяет краевым условиям (15):

$$v'(0)=v'(\pi)=v'''(0)=v'''(\pi)=0.$$

С другой стороны, можно изучить вопрос о спектре линейных дифференциальных операторов

$$Av=d_1d_2v^{(IV)}+(d_1\gamma-d_2)v''+\gamma v, \quad Bv=(1-\gamma)v-(d_1+d_2)v''.$$

Стандартным образом проверяется, что они имеют собственные значения g_n, p_n $(n=0,1,2,\ldots)$, соответственно, и в обоих случаях собственные значения g_n и p_n соответствуют собственным функциям 1, $\cos nx$ $(n=1,2,\ldots)$. Подчеркнем, что в силу полноты семейства функций $\{1,\cos nx\}$ линейные дифференциальные операторы A, B не могут иметь иных собственных значений. Итак, точки спектра операторного пучка (16) определяются как корни квадратного уравнения

$$\lambda^2+p_n\lambda+g_n=0, \tag{17}$$

где $n=0,1,2,\ldots$, а $p_n=1-\gamma+(d_1+d_2)n^2$, $g_n=d_1d_2n^4+(d_2-\gamma d_1)n^2+\gamma$.

Для более детального анализа расположения корней характеристического уравнения (17) используем иной вариант записи коэффициентов. Положим

$$d_1=d, \quad d_2=dq\gamma, \quad q=d_2/(d\gamma)$$

и, следовательно,

$$Av=\gamma[qd^2v^{(IV)}+d(1-q)v''+v], \quad Bv=(1-\gamma)v-d(1+q\gamma)v'',$$

$$g_n = \gamma[q(dn^2)^2 + (q-1)dn^2 + 1], \quad p_n = (1-\gamma) + (1+q\gamma)dn^2.$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной краевой задачи (11), (12) состоят из условий $p_n > 0$, $g_n > 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ В частности, неравенство $p_n > 0$ выполнено при всех n, если $1-\gamma > 0$ ($\gamma \in (0,1)$). Если оказалось, что при некоторых k, m выполнено хотя бы одно из неравенств $p_k < 0$, $q_m < 0$, то нулевое решение краевой задачи (11), (12) будет неустойчивым. Наконец, пусть выполнены неравенства $p_n, q_n \geqslant 0$ при всех $n \geqslant 0$, а при некоторых k, m реализуются равенства $p_k = 0$ или $g_m = 0$, то эти условия выделяют один из критических случаев в задаче об устойчивости нулевого решения краевой задачи (11), (12). Отметим, что справедливость неравенств $p_n > 0$, $g_n > 0$ приводит к выполнению неравенства $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\delta_0 < 0$, где δ_0 — некоторое положительное число. Последнее замечание, в частности, вытекает из справедливости утверждения:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\lambda_n = -\infty.$$

Временно обозначим $dn^2 = \beta$ ($\beta \geqslant 0$) и рассмотрим вспомогательные функции

$$p(\beta) = 1 - \gamma + (1+q\gamma)\beta, \quad g(\beta) = \gamma(q\beta^2 + (q-1)\beta + 1),$$

т.е. $p_n = p(dn^2)$, $g_n = g(dn^2)$. Достаточно стандартный анализ этих функций, а также учет того обстоятельства, что интерес представляют их значения при $\beta = dn^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) приводят к выводу о реализации следующих критических случаев.

3.1. Первый критический случай. Пусть $\gamma = 1$. Тогда при $n = 0$ получаем $\lambda_{1,2} = \pm i$. Если же при этом $g_n > 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то реализуется критический случай пары простых чисто мнимых собственных значений. Подчеркнем, что $p_n = (1+q\gamma)dn^2 > 0$ при всех натуральных n, если $\gamma = 1$.

3.2. Второй критический случай. Пусть $\gamma \in (0,1)$. Тогда, конечно, $p_n > 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ Выберем k, q, d таким образом, чтобы $q_k = 0$, а $q_n > 0$, если $n \neq k$. Тогда $\lambda_{k,1} = 0$. Остальные λ_n, включая $\lambda_{k,2}$, лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda_n \leqslant -\delta_0 < 0$. В свою очередь, выбор параметров k, q, d может быть осуществлен следующим образом.

Отметим, что квадратный трехчлен $g(\beta)$ при $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$ имеет два положительных корня $\beta_1 < \beta_2$. При $q = 3-2\sqrt{2}$ многочлен $g(\beta)$ имеет двукратный корень $\beta_1 = \sqrt{2}+1$($\beta_1 \approx 2.$,414).

Можно указать три варианта выбора параметров, при которых второй критический случай будет реализован.

(i) Пусть $q = 3-2\sqrt{2}$. Тогда $dk^2 = \beta_1$, т.е. критическое значение $a = d_*(k) = \beta_1/k^2$. Здесь $k = 1, 2, \dots$ и может быть любым. Тогда при $\beta = \beta_n = dn^2$ справедливо неравенство $g_n > 0$ при всех $n \neq k$, а при $n = k$ имеем $g_k = 0$, но нет таких m, что $g_m < 0$.

(ii) Пусть $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$. Тогда положим $a = d_* = \beta_2$.

(iii) Пусть $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$ и, кроме того, параметр q выбран таким образом, что справедливы неравенства $\beta_2/\beta_1 < (k+1)^2/k^2$, $k = 1, 2, \dots$. В таком случае в качестве критического значения $a = d_*$ можно выбрать либо $a = \beta_1/k^2$, либо $a = \beta_2/(k+1)^2$, $k = 1, 2, \dots$ В первом случае соответствующей собственной функцией можно выбрать $\cos kx$, а во втором — $\cos(k+1)x$.

Такой выбор возможен, если

$$k^2(1 - q + \sqrt{q^2 - 6q + 1}) < (k+1)^2(1 - q - \sqrt{q^2 - 6q + 1}).$$

Соответствующие $q \in (q_{k,1}, 3-2\sqrt{2})$, где $q_{k,1}$ — меньший корень квадратного уравнения

$$q^2 - \left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 + \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 + 4\right)q + 1 = 0.$$

Например, $q_{1,1} \approx 0{,}12305$. Нетрудно проверить, что последовательность $\{q_{k,1}\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) возрастает и $\lim\limits_{k\to\infty} q_{k,1} = 3 - 2\sqrt{2}$.

3.3. Третий критический случай. Он возникает при $\gamma = 1$ и реализации выбора $a = d_*$ — критического значения для d, при котором линейный оператор A имеет простое нулевое собственное значение. В свою очередь, здесь возможны варианты (i), (ii), (iii), выделяющих второй критический случай. В результате спектр устойчивости (т.е. спектр операторного пучка (16)) содержит пару чисто мнимых простых собственных значений и простое нулевое собственное число.

3.4. Четвертый критический случай. Он возникает, если линейный оператор A имеет двукратное нулевое собственное число, а остальные собственные числа операторного пучка (16) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости и многочлен $g(\beta)$ имеет два положительных корня $\beta_1 < \beta_2$, для которых $\beta_2/\beta_1 = (k+1)^2/k^2$ при некотором натуральном k.

3.5. Пятый критический случай. Этот случай реализуется, если оператор A имеет двукратное нулевое собственное число и при этом $\gamma = 1$. Тогда спектр устойчивости однородного состояния равновесия содержит собственные значения $\pm i$ и двукратное нулевое собственное значение.

Далее в данной работе будет изучен случай, близкий к третьему критическому случаю, когда спектр устойчивости содержит собственные значения, близкие к нулевому и паре чисто мнимых собственных значений. Нелинейную краевую задачу (11), (12) будем изучать, если

$$\gamma = 1 + \alpha_1\varepsilon, \quad d = a(1 - \alpha_0\varepsilon),$$

где малый неотрицательный параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Постоянные α_0, α_1 будут выбраны далее, но заранее будем считать, что $\alpha_1^2 + \alpha_0^2 < R^2$, где R — некоторая положительная постоянная.

В следующих разделах работы будут получены достаточные условия, при реализации которых система Кейнса с учетом пространственных эффектов может иметь циклы и в том числе устойчивые. Эти циклы могут быть пространственно однородными, когда соответствующие решения не зависят от пространственной переменной x. При другом выборе параметров возможна ситуация, когда изучаемая краевая задача (11), (12) имеет пространственно неоднородный цикл (t периодическое решение зависит и от x).

Отметим, что при $\alpha_1 < 0$ ($\gamma < 1$) и $\alpha_0 > 0$ нулевое решение краевой задачи (11), (12) в линейном приближении неустойчиво. В тоже время состояние равновесия $u = \gamma$, $y = \gamma^2$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) асимптотически устойчиво. Такое явление в настоящее время принято называть диффузионной неустойчивостью или «волновой неустойчивостью» (второй вариант употребляется реже). Этот феномен был открыт, как уже отмечалось, А. Тьюрингом [22] (см., также [1, 10, 18]) и изучался, как правило, в связи с задачами химической кинетики и математической биологии (экологии). В монографии [19] было предложено рассмотреть аналогичные вопросы в связи с задачами макроэкономики. В следующем разделе будет рассмотрена соответствующая бифуркационная задача. При этом ограничимся вариантом, когда третий критический случай реализуется на первой моде (при $k = 1$).

4. Локальные бифуркации. Итак, в этом разделе рассмотрим краевую задачу (11), (12) при $d = a(1-\alpha_0\varepsilon)$, $\gamma = 1+\alpha_1\varepsilon$, где $a = d_*$ — критическое значение параметра d, при котором реализуется третий критический случай. В результате краевая задача (11), (12) запишется в следующем виде, который учитывает введение малого параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$w_{tt} + B(\varepsilon)w_t + A(\varepsilon)w = F_2(w) + F_3(w) + F_0(w, \varepsilon), \tag{18}$$

$$w_x|_{x=0,x=\pi} = w_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0, \tag{19}$$

где теперь

$$B(\varepsilon)w_t = -\alpha_1\varepsilon w_t - [1 + q(1+\alpha_1\varepsilon)]a(1-\alpha_0\varepsilon)w_{txx},$$

$$A(\varepsilon)w = (1+\alpha_1\varepsilon)[a(1-\alpha_0\varepsilon)]^2 q w_{xxxx} + (1-q)a(1-\alpha_0\varepsilon)w_{xx} + w],$$

$$F_2(w) = a(1-q)ww_{xx} + a^2(1-q)w_{xx}^2 - 2a^2 q w_x w_{xxx} + 2aq w_x w_{xt} + (q-1)a w_t w_{xx},$$

$$F_3(w) = aq w_{xx} w^2 + a^2 q w_{xx}^2 w + 2a^2 q w_x w_{xxx} w - (1+q)a w_t w_{xx} w - 2a w_x w_{xt} w + (w_t^2 - w_t w)w.$$

В явном виде не выписана нелинейная достаточно гладкая по совокупности переменных функция $F_0 = F_0(w, w_t, w_{tx}, w_{txx}, w_{xxx}, \varepsilon)$. Она при $\varepsilon = 0$ имеет в нуле порядок малости выше третьего и, кроме того, $F_0(0, \varepsilon) = 0$ при всех рассматриваемых ε.

Подчеркнем, что

$$A(\varepsilon)w = A_0 w + \varepsilon A_1 w + \varepsilon^2 A_2 w + \varepsilon^3 A_3 w, \quad B(\varepsilon)w_t = B_0 w_t + \varepsilon B_1 w_t + \varepsilon^2 B_2 w_t,$$

где линейные дифференциальные операторы A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2 определены равенством

$$A_0 w = a^2 q w_{xxxx} + (1-q) a w_{xx} + w, \quad A_1 w = \alpha_1 A_0 w - \alpha_0 \big[2a^2 q w_{xxxx} + (1-q) a w_{xx}\big],$$
$$A_2 w = \alpha_1 \big[-2a^2 q w_{xxxx} + (1-q) a w_{xx}\big], \quad A_3 w = \alpha_1 \alpha_0^2 a^2 q w_{xxxx},$$
$$B_0 w_t = -(1+q) a w_{txx}, \quad B_1 w_t = -\alpha_1 w_t + a\big[\alpha_1 q - (1+q)\alpha_0\big] w_{txx}, \quad B_2 w_t = -\alpha_0 \alpha_1 a q w_{txx}.$$

Нелинейная краевая задача (18), (19) порождает гладкий локальный полупоток, по крайней мере, в окрестности нулевого состояния равновесия. При $\varepsilon = 0$ ее спектр устойчивости содержит собственные значения $\pm i$ и 0, а остальные лежат, как уже отмечалось, в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\delta_0 < 0$. Положительная постоянная δ_0 не зависит от ε.

Из результатов работ [5,6,17] вытекает, что в окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (18), (19) существует гладкое трёхмерное локальное инвариантное многообразие $V_3(\varepsilon)$ (центральное многообразие [17]). Все решения краевой задачи (18), (19) с начальными условиями из достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия с течением времени приближаются к $V_3(\varepsilon)$ со скоростью экспоненты, показатель которой не зависит от ε.

В изучаемом случае, как в настоящее время хорошо известно, анализ поведения решений краевой задачи (18), (19), т.е. динамической системы с бесконечномерным фазовым пространством, можно свести к анализу конечномерной динамической системы (см., например, [17]). Следуя методике работ [7, 8, 15], это сведение можно произвести следующим образом.

Будем искать решения краевой задачи (18), (19), принадлежащие инвариантному многообразию $V_3(\varepsilon)$, в следующем виде:

$$w(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(t, x, y, z, \overline{z}) + \varepsilon w_2(t, x, y, z, \overline{z}) + \varepsilon^{3/2} w_3(t, x, y, z, \overline{z}). \tag{20}$$

Здесь

$$w_1(t, x, y, z, \overline{z}) = y \cos x + (zQ + \overline{z}\overline{Q}), \quad Q = \exp(it),$$

а $w_2(t, x, y, z, \overline{z})$, $w_3(t, x, y, z, \overline{z})$ достаточно гладкие по совокупности переменных функции, для которых выполнены следующие свойства:

(a) они удовлетворяют краевым условиям (19);
(b) по переменной t имеют период, равный 2π;
(c) для функций w_2, w_3 справедливы тождества

$$w_j(t, x, y, z, \overline{z})|_{y=z=0} \equiv 0;$$

(d) для функций w_j $(j = 2, 3)$ справедливы равенства

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} w_j \exp(\pm it)\, dy dx = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} w_j \cos x\, dx dy = 0.$$

Класс таких функций обозначим W_0. Наконец, $y = y(s)$, $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ — «медленное» время. Эти функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'_s = \varphi_0(y, z, \overline{z}, \varepsilon), \quad z'_s = \varphi_1(y, z, \overline{z}, \varepsilon), \tag{21}$$

которую в большинстве аналогичных ситуациях принято называть нормальной формой или нормальной формой Пуанкаре. Подчеркнём, что $y(s)$ — действительная функция, а $z(s)$ — комплекснозначная. В дальнейшем основную роль будет играть система

$$y'_s = \psi_0(y, z, \overline{z}), \quad z'_s = \psi_1(y, z, \overline{z}), \tag{22}$$

где $\psi_0(y,z,\overline{z}) = \varphi_0(y,z,\overline{z},0)$, $\psi_1(y,z,\overline{z}) = \varphi_1(y,z,\overline{z},0)$. Эту систему часто называют укороченной нормальной формой [13]. Она является «главной» частью системы (21).

Определим вид правых частей системы дифференциальных уравнений (22). Для этого сумму (20) подставим в краевую задачу (18), (19) и соберем слагаемые при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. При этом подчеркнём, что справедливы равенства

$$y'_t = \varepsilon y'_s, \quad y''_{tt} = \varepsilon^2 y''_{ss}, \quad z'_t = \varepsilon z'_s, \quad z''_{tt} = \varepsilon^2 z''_{ss}.$$

Далее в полученных равенствах используем сокращенные обозначения $y'_s = y'$, $z'_s = z'$.

Итак, в результате для w_2, w_3 получили две линейные неоднородные краевые задачи

$$w_{2tt} + B_0 w_{2t} + A_0 w_2 = \Phi_2(w_1), \tag{23}$$

$$w_{2x}|_{x=0,x=\pi} = w_{2xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0, \tag{24}$$

$$w_{3tt} + B_0 w_{3t} + A_0 w_3 = \Phi_3(w_1, w_2), \tag{25}$$

$$w_{3x}|_{x=0,x=\pi} = w_{3xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0. \tag{26}$$

Правые части неоднородных дифференциальных уравнений (23), (25) это известные функции переменных t, x, y, z, $\overline{z}$ и зависят от w_1, w_2. В данном случае $\Phi_2(w_1) = F(w_1)$, а

$$\Phi_3 = \Phi_3(w_1, w_2) = F_3(w_1) + \Phi_4(w_1, w_2) - A_1 w_1 - B_1 w_{1t} - 2w_{1ts} - B_0 w_{1s},$$
$$w_{1s} = y' \cos x + z' Q(t) + \overline{z' Q}(t),$$

а слагаемое $\Phi_4(w_1, w_2)$ определяется равенством

$$\Phi_4(w_1, w_2) = a(1-q)\{w_1 w_{2xx} + w_2 w_{1xx}\} + 2a^2(1-q) w_{1x} w_{2xx} - 2a^2 q\{w_{1x} w_{2xxx} + w_{1xxx} w_{2x}\} + \\ + 2aq\{w_{1x} w_{2xt} + w_{2x} w_{1xt}\} + a(q-1)\{w_{1t} w_{2xx} + w_{1xx} w_{2t}\}.$$

Отметим, что функция $w_2 = w_2(t,x,y,z,\overline{z})$ однозначно определяется как решение краевой задачи (23), (24), принадлежащее классу функции W_0. При этом y, z, $\overline{z}$ временно интерпретируются как параметры

$$w_2(t,x,y,z,\overline{z}) = (\eta_0 + \eta_2 \cos 2x) y^2 + (\eta_3 z Q(t) + \overline{\eta_3 z} \overline{Q}(t)) y \cos x,$$

где

$$\eta_0 = \frac{a}{2}\{q - 1 + a(q+1)\}, \quad \eta_2 = \frac{a}{2\eta_1}(q - 1 + a(1-3q)),$$
$$\eta_1 = 16a^2 q + 4(q-1)a + 1 = 3a(5aq + q - 1), \quad \eta_3 = \eta_{31} + i\eta_{32},$$
$$\eta_{31} = \frac{1}{\eta_4}(1-q)(2+q)a, \quad \eta_{32} = \frac{1}{\eta_4}(1-q)qa, \quad \eta_4 = 1 + (1+q)^2.$$

Подчеркнем, что $\eta_1 \neq 0$, так как по условию $g(4a) \neq 0$ (см. пп. 3.2 и 3.3 описания критических случаев).

Краевая задача (25), (26) также предполагает определение w_3 из класса функций W_0, но, в отличие от краевой задачи (23), (24), для нее условия разрешимости в этом классе функций не выполнены автоматически. Краевая задача (25), (26) имеет подходящее решение, если выполнены равенства (см., например, [4, 9])

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_3 \cos x dt dx = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_3 \exp(\pm it) dt dx = 0,$$

т.е. Φ_3 ортогональна в смысле скалярного произведения в $L_2(D)$ ($D \in \mathbb{R}^2$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) решениям $\cos x$, $\exp(\pm it)$ порождающей линейной краевой задачи

$$w_{tt} + B_0 w_t + A_0 w = 0, \quad w_x|_{x=0,x=\pi} = w_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0.$$

При этом уместно подчеркнуть, что B_0, A_0 в нашем случае симметричные линейные дифференциальные операторы [9]. Проверка последнего факта достаточно стандартна (см., например, [9, глава 5]).

В данном случае условия разрешимости приводят к выводу о необходимости выполнения следующих равенств

$$y'(1+q)a - \alpha_0 a\sqrt{D}y = l_{11}y^3 + l_{12}y|z|^2, \quad 2_i z' - \alpha_1 iz + \alpha_1 z = l_{21}zy^2 + l_{22}z|z|^2.$$

Третье равенство не выписано, так как является комплексно сопряженным ко второму. После преобразований последних двух равенств получим условия разрешимости в более привычной записи — нормальную форму (22), где уже вид функций ψ_0, ψ_1 выявлен в явном виде. Укороченная нормальная форма (22) в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y' &= \nu_0 y + b_{11}y^3 + b_{12}y|z|^2, \\ z' &= (\nu_1+\nu_2)z + (b_{21}+ic_{21})y^2 z + (b_{22}+ic_{22})z|z|^2, \end{aligned} \tag{27}$$

При этом оказалось, что

$$\nu_0 = \alpha_0\frac{\sqrt{D}}{1+q}, \quad \nu_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \quad \nu_2 = \frac{\alpha_1}{2}, \quad D = q^2 - 6q + 1,$$

$$b_{11} = \frac{1}{1+q}\left[\frac{a-3}{4}q - (1-q)\left(\eta_0 + \frac{5}{2}\eta_2\right) + 2a(2+3q)\eta_2\right],$$

$$b_{12} = \frac{2}{1+q}\left[\frac{1-qa}{a} - 2\frac{a(1-q)^2}{1+(1+q)^2}\right],$$

$$b_{21} = \frac{1}{4}[(1+q)a-1] + a(1-q)(a-1)\frac{1}{2}\eta_{32} + a^2 q\eta_{32} + \frac{a}{4}(1+q)\eta_{31},$$

$$c_{21} = \frac{1}{4}a^2 q + \frac{1}{2}aq - \frac{a}{2}(1-q)(a-1)\eta_{31} - a^2 q\eta_{31} + \frac{a}{4}\eta_{32}(1+q), \quad b_{22} = c_{22} = -\frac{1}{2}.$$

Напомним, что $a = d_*$, где d_* — критическое значение параметра d. Возможные варианты выбора a изложены в предыдущем разделе. Например,

$$a = \frac{1-q+\sqrt{D}}{2q},$$

если $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$. Критический случай реализуется на первой моде. Нулевому собственному значению операторного пучка (16) соответствует собственная функция $\cos x$.

Комплексная форма записи нормальной формы (27) может быть заменена на действительную, если перейти к тригонометрической форме комплексных чисел. Положим

$$z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s)).$$

Вместо системы дифференциальных уравнений (27) получим уже следующую:

$$\begin{aligned} y' &= \nu_0 y + b_{11}y^3 + b_{12}y\rho^2, \\ \rho' &= \nu_1\rho + b_{21}\rho y^2 + b_{22}\rho^3, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\varphi' = \nu_2 + c_{21}y^2 + c_{22}\rho^2. \tag{29}$$

Основную роль для анализа нормальной формы (28), (29) играют первые два уравнения для «амплитудных» переменных, формирующие замкнутую подсистему.

Прежде чем перейти к анализу нормальной формы (28), следует подчеркнуть, что коэффициенты $b_{jk} = b_{jk}(q)$ $c_{jk} = c_{jk}(q)$ функции параметра q (величина a также в конечном счете зависит от q). Соответствующие формулы для коэффициентов приведены ранее и достаточно громоздки для их аналитического анализа. Сочетание аналитических вычислений с компьютерным анализом показало, что в случае варианта (ii) при реализации третьего критического случая оказалось, что при всех $q \in (0, 3-2\sqrt{2})$ справедливы неравенства

$$b_{11} < 0, \quad b_{12} < 0, \quad b_{21} > 0, \quad b_{22} < 0. \tag{30}$$

Если избрать вариант (iii) при реализации третьего критического случая и ограничиться только первой модой, то численные эксперименты показали следующее: начиная с $q = 0{,}126$ знаки для b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} остаются прежними, как и в случае варианта (ii) в третьем критическом случае (см. неравенства (30)).

5. Основной результат. Рассмотрим сначала вопрос о существовании и устойчивости нетривиальных состояний равновесия у системы дифференциальных уравнений (28) в том случае, когда выбран вариант (ii) при реализации изучаемого критического случая.

Лемма 1. *Система дифференциальных уравнений* (28) *может иметь нетривиальные состояния равновесия трех типов.*

$S_{1\pm}$: $y = \pm y_1, \rho = 0$, *где*

$$y_1 = \sqrt{-\frac{\nu_0}{b_{11}}}.$$

Эти два состояния равновесия существуют, если $\nu_0 > 0$ (*напомним, что* $b_{11} < 0$).

S_2: $y = 0$, $\rho = \rho_0$, *где* $\rho_0 = \sqrt{2\nu_1}$. *Это состояние равновесия существует, если* $\nu_1 > 0$.

$S_{3\pm}$: $y = \pm\sqrt{\Delta_1/\Delta}, \rho = \sqrt{\Delta_2/\Delta}$, *где*

$$\Delta = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} > 0, \quad \Delta_1 = \nu_1 b_{12} - \nu_0 b_{22}, \quad \Delta_2 = \nu_0 b_{21} - \nu_1 b_{11}.$$

Эти два состояния равновесия существуют, если $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$.

Подчеркнем, что $\rho = \rho(t) \geqslant 0$.

Лемма 2. *Состояния равновесия* $S_{3\pm}$ *системы дифференциальных уравнений* (28) *асимптотически устойчивы при всех значениях параметров, когда существуют.* $S_{1\pm}$ — *асимптотически устойчивы, если* $\Delta_2 < 0$ *и неустойчивы, если* $\Delta_2 > 0$. S_2 — *асимптотически устойчиво, если* $\Delta_1 < 0$ *и неустойчиво, если* $\Delta_1 > 0$.

Доказательства лемм 1, 2 достаточно стандартны. Вопрос о существовании сводится к нахождению решений системы алгебраических уравнений

$$y(\nu_0 + b_{11}y^2 + b_{12}\rho^2) = 0, \quad \rho(\nu_1 + b_{21}y^2 + b_{22}\rho^2) = 0.$$

Выводы об устойчивости были получены на основе применения теоремы об устойчивости по первому (линейному) приближению.

Если теперь возвратиться к нормальной форме (27) — системе дифференциальных уравнений в комплексной форме записи, то решениям $S_{1\pm}$ соответствуют ее состояния равновесия, а S_2, $S_{3\pm}$ — уже циклы, так как $z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s))$ и, если $\rho(s) = \text{const}$, то $\varphi(s) = \chi_1 s + \chi_0$, где χ_0 — произвольная действительная постоянная, и, главное, χ_1 в ситуации общего положения является отличной от нуля постоянной. Так, например, при выборе решения S_2, у системы (28) постоянная $\chi_1 = \nu_2 + 2\nu_1 c_{22}$, а при выборе $S_{3\pm}$ эта постоянная $\chi_1 = \nu_2 + (c_{21}\Delta_1 + c_{22}\Delta_2)/\Delta$. Отметим, что $\varphi(s)$ определяется интегрированием дифференциального уравнения (29).

Уместно дополнительно отметить, что нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (28) асимптотически устойчиво, если $\nu_0, \nu_1 < 0$ и заведомо неустойчиво, если хотя бы одна из этих величин положительна. При $\nu_0 = \nu_1 = 0$ реализуется уже критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (28), который рассматривать в рамках этой работы не будем.

Лемма 3. *Состояниям равновесия системы дифференциальных уравнений* (28) $S_{1\pm}$ *соответствуют два состояния равновесия нормальной формы* (27) $E_{1\pm}$. *В тоже время состоянию равновесия* S_2 *соответствует цикл* C_2, *а* $S_{3\pm}$ — *циклы* $C_{3\pm}$. *Локальные аттракторы нормальной формы* (27) *наследуют устойчивость порождающих их состояний равновесия системы* (28).

Подчеркнем, что асимптотически устойчивым состояниям равновесия S_2, $S_{3\pm}$ соответствуют орбитально асимптотически устойчивые циклы.

Из уже полученных результатов в предыдущем и этом разделах вытекает (см., например, [2, теорема 3]) справедливость трех утверждений.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ асимптотически устойчивым (неустойчивым) состояниям равновесия $S_{1\pm}$ системы* (28) *соответствуют асимптотически устойчивые (неустойчивые) состояния равновесия $E_{1\pm}(\varepsilon)$ краевой задачи* (18), (19)

$$w_{1\pm}(x, \varepsilon) = \pm\varepsilon^{1/2} y_1 \cos x + \varepsilon y_1^2(\eta_0 + \eta_2 \cos 2x) + o(\varepsilon),$$

где постоянные y_1, η_0, η_2 были определены ранее.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ асимптотически устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия S_2 соответствует пространственно однородный орбитально асимптотически устойчивый (неустойчивый) цикл $C_2(\varepsilon)$ краевой задачи* (18), (19)

$$w_2(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \rho_0 \cos(\sigma_2(\varepsilon)t + h_2) + o(\varepsilon),$$

где $\rho_0 = \sqrt{2\nu_1}$, $\sigma_2(\varepsilon) = 1 + \varepsilon(\nu_2 + 2\nu_1 c_{22}) + o(\varepsilon)$, $h_2 \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Существует такое $\varepsilon_3 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ асимптотически устойчивым (неустойчивым) состояниям равновесия $S_{3\pm}$ соответствуют пространственно неоднородные орбитально асимптотически устойчивые (неустойчивые) циклы $C_{3\pm}(\varepsilon)$ краевой задачи* (18), (19). *Для решений, формирующих эти два цикла, справедливы асимптотические формулы*:

$$w_{3\pm}(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\Big[\pm y_3 \cos x + 2\rho_3 \cos(\sigma_3(\varepsilon)t + h_3)\Big] + \\ + \varepsilon\Big[y_3^2(\eta_0 + \eta_2 \cos 2x) \pm 2y_3\rho_3\big[\eta_{31}\cos(\sigma_3(\varepsilon)t + h_3) - \eta_{32}\sin(\sigma_3(\varepsilon)t + h_3)\big]\Big]\cos x + o(\varepsilon).$$

Здесь

$$\sigma_3(\varepsilon) = 1 + \varepsilon(\nu_2 + c_{21}y_3^2 + c_{22}\rho_3^2), \quad y_3 = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \quad \rho_3 = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}$$

(*см. леммы* 1, 2). *Наконец, h_3 — произвольная действительная постоянная.*

На систему Кейнса (4), (5) с учетом диффузии результаты переносятся автоматически, если отметить, что в данном случае

$$u(t, x, \varepsilon) = (1 + \alpha_1\varepsilon)(1 + w_*(t, x, \varepsilon)),$$

где $w_*(t, x, \varepsilon)$ одно из решений, существованию и устойчивости которых посвящены теоремы 1–3. Первая компонента $y = y(t, x, \varepsilon)$ восстанавливается по формуле (6).

Замечание. Если ограничиться анализом задачи, когда диффузионная устойчивость реализуется на первой моде и дополнительно $q \in (q_1, q_*)$, где $q_* = 3 - 2\sqrt{2}$, а q_1 меньший корень уравнения $4q^2 - 33q + 4 = 0$ ($q_1 \approx 0{,}123$), то в качестве $a(d_*)$ можно выбрать не β_2, а β_1 — меньший корень многочлена $g(\beta)$. При этом, естественно, меняют свое значение коэффициенты нормальной формы. Тем не менее, b_{12}, b_{21}, b_{22} сохраняют прежние знаки при всех рассматриваемых q и $b_{11} < 0$, если $q > q_0$ ($q_0 \approx 0{,}126$). В этом случае основные качественные результаты сохраняются. При $q \in (q_1, q_0)$ оказалось, что $b_{11} > 0$. В таком случае состояния равновесия $S_{1\pm}$ существуют при $\nu_0 < 0$ и неустойчивы. Выводы относительно иных аттракторов аналогичны тем, что были сделаны ранее.

Это замечание основано на том факте, что $|b_{11}| \ll \min\{|b_{12}|, |b_{21}|, |b_{22}|\}$.

Ситуация, когда диффузионная неустойчивость может быть реализована на модах, отличных от первой, предполагает дополнительный анализ.

6. Заключение. В работе был рассмотрен наиболее типичный с точки зрения реализуемости вариант задачи о диффузионной неустойчивости пространственно однородного состояния равновесия в случае, когда возможно появление пространственно неоднородного цикла. Подчеркнем, что такой цикл устойчив всегда, когда существует, и, следовательно, в достаточной мере реализуем с «экономической» точки зрения. Еще одной особенностью полученных результатов является то, что иные локальные аттракторы не могут существовать одновременно с таким циклом. Если при выбранных значениях однородный цикл и существует, то он тогда неустойчив. Аналогичное замечание справедливо по отношению к пространственно неоднородным состояниям равновесия. Впрочем, такие стационарные решения как $E_{1\pm}(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ в случае их неустойчивости не представляют интереса с прикладной точки зрения, так как они не могут быть реализованы на практике.

Отметим, что безусловно, есть диапазон параметров задачи, когда $E_{1\pm}(\varepsilon)$ существуют и устойчивы. Наличие пространственно неоднородного состояния равновесия означает, что в данном экономическом регионе отдельные его части развиты неравномерно, хотя состояние экономического равновесия существует и асимптотически устойчиво (реализуемо).

Возвратимся к двум циклам $C_{3\pm}(\varepsilon)$. Пусть они существуют и устойчивы, т.е. выполнены условия теоремы 3. Наличие таких циклов означает, что цикличность реализуема, но в своеобразной форме. Параметры таких циклов существенно зависят от местоположения в регионе изучаемого экономического субъекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ванаг В. К.* Диссипативные структуры в реакционно-диффузионных системах. — М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008.
2. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 6. — С. 738–753.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
4. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972.
5. *Куликов А. Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — М., 1976. — С. 114–129.
6. *Куликов А. Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *185*. — С. 122–131.
7. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 5. — С. 930–945.
8. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Локальные бифуркации в уравнениях Кана—Хилларда, Курамото—Сивашинского и их обобщениях// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 4. — С. 670–683.
9. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. — М.: Наука, 1968.
10. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. — Л., 1950.
12. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — *10*. — С. 297–370.
13. *Guckenheimer J., Holmes P. J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of Vector Fields. — New York: Springer-Verlag, 1983.
14. *Keynes J. M.* The General Theory of Employment, Interest and Money. — New York: Harcourt, 1936.
15. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Local bifurcations in the periodic boundary-value problem for the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation// Automat. Remote Control. — 2017. — *78*, № 11. — P. 1955–1966.
16. *Lions J. L.* Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. — Dunod, 1969.
17. *Marsden J. E., McCraken M.* The Hopf Bifurcation and Its applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.
18. *Murray J. D.* Mathematical Biology. II. Spatial Models and Biomedical Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 2003.
19. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
20. *Radin M. A., Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes business cycle model// Nonlin. Dynam. Psychol. Life Sci. — 2021. — *5*, № 1. — P. 93–111.
21. *Torre V. Existence of limit cycles and control in complete Keynesian systems by theory of bifurcations* Econometrica. — 1977. — *45*, № 6. — P. 1457–1466.

22. *Turing A. M.* The chemical basis of morphogensis// Phil. Trans. Roy. Soc. B. — 1952. — *237*. — P. 37–72.
23. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Куликов Анатолий Николаевич
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Фролов Дмитрий Геннадьевич
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова