ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 48–60
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-48-60

УДК 517.958

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

© 2022 г. **А. В. КАЛИНИН, А. А. ТЮХТИНА**

Аннотация. Обсуждаются различные постановки математических задач, возникающие при описании глобальной электрической цепи в атмосфере Земли. Рассматриваются начально-краевые задачи для нестационарной системы уравнений Максвелла, системы уравнений Максвелла в нерелятивистском электрическом приближении и для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении, обобщающем нерелятивистские электрическое и магнитное приближения.

Ключевые слова: атмосферное электричество, глобальная электрическая цепь, система уравнений Максвелла, квазистационарное приближение.

SOME MATHEMATICAL PROBLEMS OF ATMOSPHERIC ELECTRICITY

© 2022 **A. V. KALININ, A. A. TYUKHTINA**

Abstract. In this paper, we discuss various formulations of mathematical problems arising in the description of the global electric circuit in the Earth's atmosphere. We consider initial-boundary-value problems for the nonstationary system of Maxwell equations, the system of Maxwell equations in the nonrelativistic electric approximation, and for the system of Maxwell equations in the quasistationary approximation generalizing the nonrelativistic electric and magnetic approximations.

Keywords and phrases: atmospheric electricity, global electric circuit, system of Maxwell equations, quasi-stationary approximation.

AMS Subject Classification: 35Q61

1. Введение. Физические процессы в атмосфере Земли связаны с многочисленными электромагнитными явлениями, которые обусловлены источниками различной природы. Одним из таких явлений, активно обсуждаемым в последнее время, является наличие в атмосфере Земли глобальной электрической цепи, представляющей собой распределенный токовый контур, ограниченный с одной стороны поверхностью Земли, с другой — условной границей атмосферы и ионосферы. В [43, 44] было высказано предположение, что генератором глобальной электрической цепи являются грозовые облака, что впоследствии подтвердилось теоретическими и экспериментальными исследованиями.

Вопросам математического, физического и численного моделирования глобальной электрической цепи в последние несколько десятилетий уделялось большое внимание, что отражено в современной литературе (см. [3, 4, 11, 17–19, 21, 23, 25, 29–33, 37–39, 41, 45, 46]). Впервые адекватная

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

математическая постановка задачи для электрического потенциала, описывающего ГЭЦ, была приведена и исследована в работах [4, 25].

Одна из основных моделей, применяемых при исследовании квазистационарных переходных процессов, использует нерелятивистское электрическое приближение, в котором электрическое поле предполагается потенциальным. Однако это описание не даёт достаточно полной и точной картины изучаемых явлений, что связано с существенной неоднородностью атмосферы. В этом случае требуется уточнение модели, что может быть осуществлено путём учета вихревой составляющей электрического поля в поле проводимости [8]. В настоящей работе устанавливается связь между нерелятивистским электрическим приближением и квазистационарным приближением, предложенным в [8, 9].

Для описания нестационарных электромагнитных процессов используется система уравнений Максвелла [10]

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}(x,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(x,t)}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(x,t) = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}(x,t) = 4\pi\rho(x,t), \tag{4}$$

$(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $T > 0$. В линейных средах справедливы материальные соотношения

$$\boldsymbol{D}(x,t) = \varepsilon(x)\boldsymbol{E}(x,t), \quad \boldsymbol{B}(x,t) = \mu(x)\boldsymbol{H}(x,t), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{J}(x,t) = \sigma(x)\boldsymbol{E}(x,t) + \boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}(x,t), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}$ — объемная плотность сторонних токов, σ — удельная проводимость. При строгой постановке система уравнений (1)–(6) должна дополняться начальными и граничными условиями, например, задача будет корректна при условиях

$$\boldsymbol{E}(x,t) \times \boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),$$

где $\boldsymbol{\nu}(x)$ — единичный вектор внешней нормали в точке $x \in \partial\Omega$,

$$\boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{h}(x), \quad \boldsymbol{E}(x,0) = \boldsymbol{e}(x), \quad x \in \Omega.$$

Для описания глобальной электрической цепи принципиальное значение имеют квазистационарные приближения [10, 13, 14], в которых предполагается относительная медленность электромагнитных процессов ($\beta = \Delta x/(c\Delta t) \ll 1$, где Δx — характерный пространственный масштаб, Δt — характерный временной масштаб, c — скорость света).

Нерелятивистское магнитное приближение заключается в пренебрежении слагаемым $\partial \boldsymbol{D}/c\partial t$ в уравнении (1) и характерно для медленно протекающих процессов в средах с достаточно высокой проводимостью [10,13,14,24]. Это приближение может рассматриваться в достаточно высоких слоях атмосферы и использоваться для описания целого ряда квазистационарных процессов [38]. В этом случае вместо уравнения (1) рассматривается уравнение

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} - \frac{1}{c}\varepsilon(x)\frac{\partial \operatorname{grad}\varphi(x,t)}{\partial t}. \tag{7}$$

Система (7), (2)–(6) может изучаться при граничных и начальных условиях

$$\boldsymbol{E}(x,t) \times \boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \quad \boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{h}(x), \quad x \in \Omega.$$

Различные постановки задач для этого приближения достаточно хорошо исследованы теоретически, аналитически и численно [5–7, 15, 16, 26, 27].

Для описания достаточно медленных процессов в средах с малой проводимостью, в частности, при моделировании электромагнитных процессов в нижних слоях атмосферы [11], используется нерелятивистское электрическое приближение [13]. Формально это приближение заключается в пренебрежении слагаемым $\partial \boldsymbol{B}/c\partial t$ в уравнении (2), что приводит к потенциальности электрического поля в пространственно-односвязных областях:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0.$$

В рамках этого приближения были получены теоретические, аналитические, численные результаты [3, 4, 25].

Характерной особенностью задач атмосферного электричества является существенная неоднородность удельной проводимости σ [11] (удельная проводимость возрастает с высотой по экспоненциальному закону, при этом вблизи поверхности Земли проводимость можно считать изотропной, а на удалении выше 70 км σ становится тензорной величиной). Кроме этого, удельная проводимость существенно зависит от различных физических факторов, таких как температура, химический состав, и может иметь достаточно резкие локальные изменения в окрестности разрядных процессов (молнии, спрайты и др.). В этом случае удельная проводимость резко меняется в горизонтальной плоскости и зависит от времени [21, 33, 45]. Использование нерелятивистских магнитного или электрического приближений не даёт возможности описать атмосферу в целом. Сопоставление моделей, используемых для описания квазистационарных атмосферных явлений, с одной стороны, подчеркивает важность разделения электрического поля на вихревую составляющую (в рамках нерелятивистского магнитного приближения) и потенциальную составляющую (в рамках нерелятивистского электрического приближения). С другой стороны, это сопоставление выявляет необходимость создания обобщенной модели, которая включала бы в себя как частный случай и нерелятивистское магнитное, и нерелятивистское электрическое приближения.

В работах [8, 9] было предложено новое квазистационарное приближение, в котором выделяются потенциальная и вихревая компоненты электрического поля,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} - \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 0, \tag{8}$$

и слагаемое $\partial \boldsymbol{D}/c\partial t$ в (1) заменяется на $-\partial \varepsilon \operatorname{grad} \varphi / c\partial t$. Первое уравнение системы Максвелла в этом приближении принимает вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{J}(x,t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{grad} \varphi(x,t)}{\partial t}. \tag{9}$$

Система (9), (2)–(6) в этом случае может дополняться граничными и начальными условиями

$$\boldsymbol{E}(x,t) \times \boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \quad \boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{h}(x), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Работы [20,28,34,35] посвящены исследованию задач для данного приближения в предположении, что в системе (1)–(4) объемная плотность тока $\boldsymbol{J}$ и объемная плотность заряда ρ — заданные функции, что формально соответствует случаю непроводящей среды (в (6) $\sigma \equiv 0$). Задача определения электрического и магнитного полей разбивается на независимые друг от друга эллиптические задачи поиска потенциальной составляющей электрического поля $\boldsymbol{E}_L = -\operatorname{grad} \varphi$, магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ и вихревой составляющей электрического поля $\boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{E}$. При указанных предположениях получены строгие результаты о корректности задач для линейной системы уравнений Максвелла в рамках данного приближения, называемого приближением Дарвина, и установлена асимптотическая связь между решениями задач, полученных в рамках дарвиновского приближения, и решениями соответствующих задач для исходной нестационарной системы Максвелла при малом значении параметра β. Вопросы иерархии различных квазистационарных приближений обсуждаются в работах [13, 28, 35]. В частности, в [28] отмечается, что рассматриваемое квазистационарное приближение охватывает традиционные нерелятивистское магнитное приближение и нерелятивистское электрическое приближение.

В работе [8] исследовалась корректность начально-краевой задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении (9), (2)–(6) в однородных и неоднородных проводящих средах. Условие неоднородности сред приводит, в отличие от работ [20,28,34,35], к связанной системе дифференциальных уравнений для неизвестных функций $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\operatorname{grad} \varphi$, не сводящейся к классическим задачам математической физики.

Основным результатом настоящей работы являются оценки, характеризующие точность определения магнитных полей и потенциальных составляющих электрических полей в нерелятивистском электрическом приближении и в квазистационарном приближении (9), (2)–(6) в зависимости от двух безразмерных параметров — $\beta = \Delta x / c\Delta t$ и $\gamma = 4\pi\Delta t\sigma^*$, где σ^* — характерное значение удельной проводимости среды. В частности, установлена связь между решениями начально-краевых задач для нестационарной системы уравнений Максвелла, системы уравнений Максвелла в предложенном квазистационарном приближении и системы уравнений Максвелла в нерелятивистском электрическом приближении.

2. Краевые задачи для системы уравнений Максвелла. Пусть область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, занимаемая атмосферой, гомеоморфна шаровому слою с липшиц-непрерывной границей Γ, состоящей из двух компонент связности, гомеоморфных сфере в $\mathbb{R}^3$ — Γ_1, соответствующей земной поверхности, и Γ_2. В почти каждой точке $x \in \Gamma$ определен единичный вектор внешней нормали $\boldsymbol{\nu}(x)$.

При моделировании электромагнитных процессов в атмосфере Земли предполагается, что диэлектрическая проницаемость ε и магнитная проницаемость μ атмосферы постоянны и равны 1. С учетом материальных соотношений (5), (6), где $\mu = \varepsilon \equiv 1$ система уравнений Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\sigma(x)\boldsymbol{E}(x,t) + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(x,t), \tag{10}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(x,t), \tag{11}$$

$(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$.

Поскольку проводимость Земли значительно выше проводимости нижних слоев атмосферы и проводимость растет по экспоненциальному закону с ростом высоты, можно полагать, что границы области Ω являются идеальными проводниками. Это соответствует заданию однородных граничных условий

$$\boldsymbol{E}(x,t) \times \boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,T). \tag{12}$$

Система (10), (11) рассматривается при начальных условиях

$$\boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{h}(x), \quad \boldsymbol{E}(x,0) = \boldsymbol{e}(x). \tag{13}$$

В работе предполагается, что $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}\colon Q \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{h}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{e}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ — суммируемые с квадратом функции, σ — функция из $L_\infty(\Omega)$, удовлетворяющая условиям

$$\sigma_1 \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma_2, \quad x \in \Omega,$$

σ_1, σ_2 — заданные положительные числа.

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [12, 22]:

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div}\boldsymbol{u} \in L_2(\Omega)\}, \quad K(\mathrm{div};\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0\},$$

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathrm{div}} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{div}\boldsymbol{u},\operatorname{div}\boldsymbol{v})_{2,\Omega},$$

$$H(\mathrm{rot};\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot}\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\}, \quad K(\mathrm{rot};\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0\},$$

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathrm{rot}} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{2,\Omega} + (\operatorname{rot}\boldsymbol{u},\operatorname{rot}\boldsymbol{v})_{2,\Omega},$$

где через $(\cdot,\cdot)_{2,\Omega}$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ и в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Через $H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $H_0(\mathrm{div};\Omega)$ обозначается замыкание множества пробных вектор-функций соответственно в $H(\mathrm{rot};\Omega)$ и $H(\mathrm{div};\Omega)$, $K_0(\mathrm{rot};\Omega) = K(\mathrm{rot};\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot};\Omega)$.

Определены операторы следов $\gamma_\nu\colon H(\mathrm{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_\tau\colon H(\mathrm{rot};\Omega) \to \{H^{-1/2}(\Gamma)\}^3$, для функций $\boldsymbol{u} \in \{C^1(\bar{\Omega})\}^3$ $\gamma_\nu\boldsymbol{u}(x) = u_\nu(x) = \boldsymbol{u}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}(x)$ и $\gamma_\tau\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u} - u_\nu\boldsymbol{u}(x)$, $x \in \Gamma$ (см. [12, 22]). Обозначим

$$K(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in K(\mathrm{div};\Omega) : \langle\gamma_\nu\boldsymbol{u}, 1\rangle_{\Gamma_i} = 0,\ i = 1,2\},$$

$$H(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi(x) = \mathrm{const},\ x \in \Gamma_1,\ \psi(x) = 0,\ x \in \Gamma_2\}.$$

$$U_1(\Omega) = H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap K(\Omega), U_2(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{rot};\Omega) : \mu\boldsymbol{u} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)\}.$$

Справедливы следующие утверждения (см. [12, 22]).

Лемма 1. *Найдётся такая постоянная $A(\Omega) > 0$, зависящая только от области Ω, что для всех $\psi \in H(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|\psi\|_{2,\Omega} \leqslant A(\Omega)\|\operatorname{grad}\psi\|_{2,\Omega}. \tag{14}$$

Из неравенства следует, что $H(\Omega)$ — пространство Гильберта относительно скалярного произведения $(\psi, \varphi)_H = (\operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}$.

Лемма 2. *Пространство $K(\Omega)$ совпадает с пространством*

$$\operatorname{rot} H(\operatorname{rot};\Omega) = \{\boldsymbol{u} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v} \in H(\operatorname{rot};\Omega)\}.$$

Лемма 3. *Для любой функции $\boldsymbol{u} \in K(\operatorname{rot};\Omega)$ найдется такая функция $p \in H^1(\Omega)$, что $\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} p$. Если $\boldsymbol{u} \in K_0(\operatorname{rot};\Omega)$, можно выбрать $p \in H(\Omega)$.*

Лемма 4. *Ортогональное дополнение к $K(\Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$ совпадает с подпространством $K_0(\operatorname{rot};\Omega)$.*

Лемма 5. *Найдётся такая постоянная $C(\Omega) > 0$, что для всех $\boldsymbol{u} \in U_i(\Omega)$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 dx \leqslant C(\Omega) \int\limits_\Omega (\operatorname{rot}\boldsymbol{u})^2 dx. \tag{15}$$

Пусть $V(\Omega) = H(\operatorname{rot};\Omega) \times H_0(\operatorname{rot};\Omega)$, $L(\Omega) = \{L_2(\Omega)\}^3 \times \{L_2(\Omega)\}^3$, $A\colon V(\Omega) \to L(\Omega)$ — линейный оператор, определенный соотношением

$$A\Phi = \{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}, -\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\}, \quad \Phi = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \in V(\Omega).$$

Тогда задача (10)–(13) допускает следующую обобщенную постановку: найти такую функцию $\Psi = \{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}\} \in L_2(0, T, L(\Omega))$, что для всех $\Phi = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \in V(\Omega)$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\Psi, \Phi)_L - (\Psi, A\Phi)_L + \frac{4\pi}{c}(\sigma\boldsymbol{E}, \boldsymbol{v})_{2,\Omega} = -\frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{J}^{\text{ext}}, \boldsymbol{v})_{2,\Omega}, \tag{16}$$

$$\Psi(0) = \Psi_0 = \{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{e}\}. \tag{17}$$

Теорема 1. *Для любых $\Psi_0 \in L(\Omega)$, $\boldsymbol{J}^{\text{ext}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$ существует единственное решение $\Psi \in L_2(0, T, L(\Omega))$ задачи* (16), (17). *Если $\Psi_0 \in V(\Omega)$, $\boldsymbol{J}^{\text{ext}} \in H^1(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, то $\Psi \in L_2(0, T, V(\Omega))$, $\partial/\partial t\Psi \in L_\infty(0, T, L(\Omega))$ и справедливы соотношения* (10), (11).

Теорема доказывается так же, как [2, гл. VII, теоремы 4.1, 5.1].

Система уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении с учётом материальных соотношений имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{\text{ext}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}, \tag{18}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \tag{19}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0. \tag{20}$$

Система (18)–(20) рассматривается при граничных условиях

$$\boldsymbol{E}(x, t) \times \boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \tag{21}$$

и начальных условиях

$$\boldsymbol{E}(x, 0) = \boldsymbol{e}(x), \quad x \in \Omega. \tag{22}$$

Задача (18)–(22) допускает следующую обобщенную постановку: найти такую функцию $\boldsymbol{E} \in L_2(0, T, K_0(\operatorname{rot};\Omega))$, удовлетворяющую условию (22), что для всех $\boldsymbol{v} \in K_0(\operatorname{rot};\Omega)$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})dx + 4\pi\int\limits_\Omega (\sigma\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})dx = -4\pi\int\limits_\Omega (\boldsymbol{J}^{\text{ext}}\cdot\boldsymbol{v})dx. \tag{23}$$

Теорема 2. *При любых* $\boldsymbol{e} \in K_0(\mathrm{rot}; \Omega)$, $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$ *существует единственное решение задачи* (23), (22). *Существует единственная функция* $\boldsymbol{F} \equiv \mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} \in L_2(0, T, K(\Omega))$, *для которой справедливо равенство* (18). *Если* $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} \in H^1(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, *то* $\boldsymbol{E} \in C^1(0, T, K_0(\mathrm{rot}; \Omega))$, $\boldsymbol{F} \in C(0, T, K(\Omega))$.

Согласно лемме 3 можно определить скалярный электрический потенциал φ соотношением

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\, \varphi.$$

Задача (18)–(22) сводится к задаче определения функции φ, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + 4\pi\, \mathrm{div}(\sigma\, \mathrm{grad}\, \varphi) = 4\pi\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}, \tag{24}$$

граничным условиям

$$\int\limits_{\Gamma_1} \left(\left(\mathrm{grad}\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4\pi\sigma\, \mathrm{grad}\, \varphi \right) \cdot \boldsymbol{\nu} \right) d\gamma = 4\pi \int\limits_{\Gamma_1} (\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{\nu}) d\gamma, \tag{25}$$

$$\varphi(x,t) = -U(t), \quad (x,t) \in \Gamma_1 \times (0,T), \quad \varphi(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times (0,T) \tag{26}$$

и начальному условию

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{27}$$

Уравнение (24) называется уравнением глобальной электрической цепи. В исследованиях глобальной электрической цепи разность потенциалов $U(t)$ между поверхностью Земли и нижней ионосферой называется ионосферным потенциалом.

Задача (24)–(27) допускает следующую обобщенную постановку: найти функцию $\varphi \in H^1(0, T, H(\Omega))$, удовлетворяющую равенству

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad}\, \varphi \cdot \mathrm{grad}\, \psi) dx + 4\pi \int\limits_{\Omega} \sigma (\mathrm{grad}\, \varphi \cdot \mathrm{grad}\, \psi) dx = 4\pi \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{grad}\, \psi) dx \tag{28}$$

для всех $\psi \in H(\Omega)$ и начальному условию (27).

Теорема 3. *Существует единственное решение задачи* (28), (27). *Если*

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} \in H^1(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3),$$

то $\varphi \in C^1(0, T, H(\Omega))$.

Уравнение (24) не разрешено относительно производной по времени и не относится к классическим задачам математической физики. Уравнения такого вида называются уравнениями Соболева (уравнениями соболевского типа) или псевдопараболическими уравнениями. В работе [25] рассмотрены различные задачи для уравнения (29) с различными типами граничных условий, естественно возникающих при моделировании взаимодействия атмосферы и ионосферы.

В работах [8, 9] было предложено новое квазистационарное приближение для системы уравнений Максвелла, обобщающее классические нерелятивистские магнитное и электрическое приближения.

Согласно леммам 4, 3 можно положить

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}(t) - \mathrm{grad}\, \varphi(t), \quad \boldsymbol{E}(t) \in K(\Omega), \quad \mathrm{grad}\, \varphi(t) \in K_0(\mathrm{rot}; \Omega), \quad t \in 0, T.$$

Система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении принимает с учетом материальных соотношений вид

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{grad}\, \varphi, \tag{29}$$

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{H}. \tag{30}$$

Система (29), (30) рассматривается при граничных условиях

$$\boldsymbol{E}(x,t) \times \boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,T) \tag{31}$$

и начальных условиях

$$\boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{h}(x), \quad \operatorname{grad}\varphi(x,0) = \operatorname{grad}\varphi_0(x). \tag{32}$$

Обозначим $V_0(\Omega) = H(\mathrm{rot};\Omega)\times K_0(\mathrm{rot};\Omega)$. Задача (29)–(32) допускает следующую обобщенную постановку: найти такие $\Psi = \{\boldsymbol{H}, \operatorname{grad}\varphi\} \in L_2(0,T,V_0(\Omega))$ и $\boldsymbol{E} \in L_2(0,T,U_1(\Omega))$, что для всех $\Phi = \{\boldsymbol{u}, \operatorname{grad}\psi\} \in V_0(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \in U_1(\Omega)$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\Psi,\Phi)_L + (\boldsymbol{\mathcal{E}}, \operatorname{rot}\boldsymbol{u})_{2,\Omega} - \frac{4\pi}{c}(\sigma\boldsymbol{\mathcal{E}}, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} + \frac{4\pi}{c}(\sigma\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} = \\ = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}, \tag{33}$$

$$(\sigma\boldsymbol{E}, \boldsymbol{v})_{2,\Omega} - (\sigma\operatorname{grad}\varphi, \boldsymbol{v})_{2,\Omega} - \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H}, \operatorname{rot}\boldsymbol{v})_{2,\Omega} = -(\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}, \boldsymbol{v})_{2,\Omega}, \tag{34}$$

$$\Psi(0) = \Psi_0 = \{\boldsymbol{h}, \operatorname{grad}\varphi_0\}. \tag{35}$$

Справедлива следующая теорема, доказанная в [8].

Теорема 4. *Для любых $\Psi_0 \in V_0(\Omega)$, $\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} \in H^1(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$ существует единственное решение задачи* (33), (34), (35). *При этом $\Psi \in L_\infty(0,T,L(\Omega))$, $\partial/\partial t\Psi \in L_2(0,T,L(\Omega))$ и справедливы соотношения* (29), (30). *Если*

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h} = -\frac{4\pi}{c}\sigma\operatorname{grad}\varphi_0 + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}(0), \tag{36}$$

то $\partial/\partial t\Psi \in L_\infty(0,T,L(\Omega))$, $\boldsymbol{E} \in C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$.

3. Сравнение решений начально-краевых задач. Пусть выполняются условия $\boldsymbol{h} \in U_2(\Omega)$, $\boldsymbol{e} \in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} \in H^1(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$, а также условие согласования начальных данных

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h} = \frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{e} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}}(0), \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{e} = 0. \tag{37}$$

Для сравнения близости решения задачи для квазистационарного приближения к решениям соответствующих задач для нестационарной системы уравнений Максвелла и системы уравнений Максвелла в нерелятивистском электрическом приближении осуществим переход к безразмерным величинам. Пусть Δx — характерный пространственный масштаб, Δt — характерный временной масштаб, σ^* — характерное значение удельной проводимости, ρ^* — характерное значение объёмной плотности зарядов. Заменим переменную x на $\Delta x\cdot x'$, t на $\Delta t\cdot t'$. Положим $\sigma = \sigma^*\sigma_0$, $\sigma_{01} \leqslant \sigma_0(x') \leqslant \sigma_{02}$, и обозначим

$$\gamma = 4\pi\Delta t\sigma^*, \quad \beta = \frac{\Delta x}{c\Delta t}, \quad \kappa = 4\pi\Delta x\rho^*, \quad \boldsymbol{J}^{\mathrm{ext}} = \sigma^*\sigma_0\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}.$$

Система уравнений Максвелла (10), (11) принимает вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \gamma\beta\sigma_0\boldsymbol{E} + \gamma\beta\sigma_0\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} + \beta\frac{\partial}{\partial t'}\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{38}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t'}\boldsymbol{H}, \tag{39}$$

где $(x',t') \in Q' = \Omega'\times(0,T')$. Далее будем опускать штрихи при безразмерных переменных и областях их определения.

Система (38), (39) рассматривается при граничных условиях

$$\boldsymbol{E}(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x) = 0, \quad (x,t)\in\Gamma\times(0,T), \tag{40}$$

соответствующих (12), и начальных условиях

$$\boldsymbol{H}(x,0) = \boldsymbol{h}(x), \quad \boldsymbol{E}(x,0) = \boldsymbol{e}(x). \tag{41}$$

Задача (18)–(20) в безразмерных единицах может быть записана с использованием электрического потенциала в виде

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -\beta\gamma\sigma_0\operatorname{grad}\varphi + \beta\gamma\sigma_0\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} - \beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi, \tag{42}$$

$$\operatorname{grad}\varphi(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x)=0,\quad (x,t)\in\Gamma\times(0,T), \tag{43}$$
$$\operatorname{grad}\varphi(x,0)=\operatorname{grad}\varphi_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{44}$$

Задача (29)–(32) для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\beta\gamma\sigma_0\boldsymbol{E}+\beta\gamma\sigma_0\boldsymbol{E}^{\text{ext}}-\beta\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\operatorname{grad}\varphi, \tag{45}$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\beta\frac{\partial}{\partial t}\mu\boldsymbol{H}. \tag{46}$$
$$\boldsymbol{E}(x,t)\times\boldsymbol{\nu}(x)=0,\quad (x,t)\in\Gamma\times(0,T), \tag{47}$$
$$\boldsymbol{H}(x,0)=\boldsymbol{h}(x),\quad \operatorname{grad}\varphi(x,0)=\operatorname{grad}\varphi_0(x). \tag{48}$$

Условие (37) в безразмерных величинах — это условие

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\beta\gamma\sigma_0(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{E}^{\text{ext}}(0)),\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{e}=0. \tag{49}$$

Пусть $\{\boldsymbol{H}^n,\boldsymbol{E}^n\}\in L_2(0,T,V(\Omega))$ — решение задачи (38)–(41),

$$\boldsymbol{E}^n=\boldsymbol{E}^n-\operatorname{grad}\varphi^n,$$

где $\boldsymbol{E}^n\in L_2(0,T,U_1(\Omega))$, $\operatorname{grad}\varphi^n\in L_2(0,T,H_0(\mathrm{rot};\Omega))$. Обозначим через $\{\boldsymbol{H}^q,\operatorname{grad}\varphi^q\}\in L_2(0,T,V_0(\Omega))$, $\boldsymbol{E}^q\in L_2(0,T,U_1(\Omega))$ решение задачи (45)–(48), где $-\operatorname{grad}\varphi_0=\boldsymbol{e}$, через $\operatorname{grad}\varphi^e$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^e$ — решение задачи (42)–(22). Пусть

$$\kappa\rho^n=-\Delta\varphi^n\in L_2(0,T,H^{-1}(\Omega)),$$
$$\kappa\rho^q=-\Delta\varphi^q\in L_2(0,T,H^{-1}(\Omega)),$$
$$\kappa\rho^e=-\Delta\varphi^e\in L_2(0,T,H^{-1}(\Omega)).$$

Лемма 6. *Имеют место оценки*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^n\right\|_{2,Q}\leqslant\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{50}$$
$$\|\boldsymbol{E}^n\|_{2,Q}\leqslant T\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{51}$$
$$\|\boldsymbol{E}^q\|_{2,Q}\leqslant\sqrt{2}\gamma\beta^2\sigma_{02}C(\Omega)\left(\frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}+1\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{52}$$

где $C(\Omega)$ — постоянная из неравенства (15).

Неравенства (50), (52) получены в [8], оценка (51) следует из (50), поскольку $\boldsymbol{E}^n(0)=0$ при выполнении (49).

Теорема 5. *Справедливы неравенства*

$$\|\operatorname{grad}\varphi^n-\operatorname{grad}\varphi^q\|_{2,Q}\leqslant C_1\frac{(1-\exp(-a\gamma))^2}{\gamma}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{53}$$
$$\kappa\|\rho^n-\rho^q\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_1\frac{(1-\exp(-a\gamma))^2}{\gamma}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{54}$$
$$\|\boldsymbol{E}^n-\boldsymbol{E}^q\|_{2,Q}\leqslant C_2\frac{1}{\gamma}(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{55}$$
$$\|\boldsymbol{H}^n-\boldsymbol{H}^q\|_{L_\infty(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)}\leqslant C_3\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{56}$$
$$\|\operatorname{grad}\varphi^q-\operatorname{grad}\varphi^e\|_{2,Q}\leqslant C_4\gamma\beta^2(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{57}$$

$$\kappa\|\rho^q-\rho^e\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_4\gamma\beta^2(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{58}$$

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^q-\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^e\|_{2,Q}\leqslant C_5\beta^3\gamma^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{59}$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi^n-\operatorname{grad}\varphi^e\|_{2,Q}\leqslant C_6(1-\exp(-a\gamma))^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{60}$$

$$\kappa\|\rho^q-\rho^e\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_6(1-\exp(-a\gamma))^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{61}$$

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^n-\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^e\|_{2,Q}\leqslant C_7\beta(1+C_8\gamma^2)^{1/2}(1-\exp(-a\gamma))\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q},\tag{62}$$

где $a=T\sigma_{01}$, постоянные C_1–C_8 не зависят от β, γ.

Доказательство. Неравенства (53)–(56) установлены в [8]. Докажем (57). Положим

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^q-\boldsymbol{H}^e,\quad \operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\varphi^q-\operatorname{grad}\varphi^e.$$

Тогда $\operatorname{grad}\varphi(0)=0$,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\beta\gamma\sigma_0(\boldsymbol{E}^q-\operatorname{grad}\varphi)-\beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi.\tag{63}$$

Умножая (63) скалярно на $\operatorname{grad}\varphi$, получаем

$$0=2\gamma(\sigma_0\boldsymbol{E}^q,\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}-2\gamma(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}-\frac{d}{dt}\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega},$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}+2\gamma\sigma_{01}\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}dt\leqslant 2\gamma\sigma_{02}\|\boldsymbol{E}^q\|_{2,Q}\left\{\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}dt\right\}^{1/2},$$

$$\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega}dt\leqslant\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}t))^2\|\boldsymbol{E}^q\|^2_{2,Q},$$

откуда с учетом (52) следует (57). Пусть $\rho=\rho^q-\rho^e$. Для всех $\psi\in H_0^1(\Omega)$ и почти всех $t\in(0,T)$

$$\kappa\langle\rho,\psi\rangle=\int\limits_\Omega(\operatorname{grad}\varphi(t)\cdot\operatorname{grad}\psi)dx.$$

Таким образом,

$$\kappa\|\rho\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,Q}.$$

Из (63) далее получаем

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\|^2_{2,\Omega}=\beta\gamma(\sigma_0(\boldsymbol{E}^q-\operatorname{grad}\varphi),\operatorname{rot}\boldsymbol{H})_{2,\Omega},$$

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\|^2_{2,Q}\leqslant\beta^2\gamma^2\sigma_{02}^2\|\boldsymbol{E}^q-\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,Q}\leqslant\beta^2\gamma^2\sigma_{02}^2\left(\|\boldsymbol{E}^q\|^2_{2,Q}+\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,Q}\right),$$

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\|^2_{2,Q}\leqslant\beta^2\gamma^2\sigma_{02}^2\left(1+\min\{1,\gamma^2\sigma_{01}^2T^2\}\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}\right)\|\boldsymbol{E}^q\|^2_{2,Q}.$$

Следовательно, справедлива оценка (59).

Теперь положим

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^n-\boldsymbol{H}^e,\quad \operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\varphi^n-\operatorname{grad}\varphi^e.$$

Тогда $\operatorname{grad}\varphi(0)=0$,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\beta\gamma\sigma_0(\boldsymbol{E}^n-\operatorname{grad}\varphi)-\beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi+\beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^n.\tag{64}$$

Умножим (64) скалярно на $\operatorname{grad}\varphi$, получим

$$0 = \gamma(\sigma_0 \boldsymbol{E}^n, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} - \gamma(\sigma_0 \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,\Omega},$$

откуда вытекает неравенство

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,Q} \leqslant \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\|\boldsymbol{E}^n\|_{2,Q}$$

и, следовательно, справедливы оценки (60), (61).

Умножая скалярно (64) на $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$, получаем

$$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\|^2_{2,Q} \leqslant 2\beta^2\gamma^2\sigma_{02}^2\|\boldsymbol{E}^q - \operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,Q} + 2\beta^2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^n\right\|^2_{2,Q} \leqslant$$
$$\leqslant \beta^2\left(\gamma^2\sigma_{02}^2\left(1+\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2}\right)T^2+1\right)\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^n\right\|^2_{2,Q},$$

т.е. справедливо неравенство (62). □

В случае однородной среды, т.е. если $\sigma = \mathrm{const}$ и, соответственно, $\sigma_0 \equiv 1$, из уравнения (42) методом ортогонального проектирования получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi + \gamma\operatorname{grad}\varphi = \gamma\operatorname{grad}\psi^{\mathrm{ext}}, \tag{65}$$

где $\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} + \operatorname{grad}\psi^{\mathrm{ext}}$, $\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} \in L_2(0,T,K(\Omega))$, $\operatorname{grad}\psi^{\mathrm{ext}} \in L_2(0,T,K_0(\mathrm{rot};\Omega))$.

Начально-краевая задача (38)–(41) для нестационарной системы уравнений Максвелла разбивается на задачу (65), (43), (22) определения функции $\operatorname{grad}\varphi$ и задачу определения таких функций $\boldsymbol{H} \in L_2(0,T,H(\mathrm{rot};\Omega))$, $\boldsymbol{E} \in L_2(0,T,H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\Omega))$, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \beta\gamma\boldsymbol{E} + \beta\gamma\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}} + \beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E},$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H},$$
$$\boldsymbol{H}(0) = \boldsymbol{h}, \boldsymbol{E}(0) = 0.$$

Начально-краевая задача (45)–(48) для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении разбивается на задачу (65), (22) определения функции $\operatorname{grad}\varphi \in L_2(0,T,K_0(\mathrm{rot};\Omega))$ и задачу определения таких функций $\boldsymbol{H} \in L_2(0,T,H(\mathrm{rot};\Omega))$, $\boldsymbol{E} \in L_2(0,T,H_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap K(\Omega))$, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \beta\gamma\boldsymbol{E} + \beta\gamma\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}},$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H},$$
$$\boldsymbol{H}(0) = \boldsymbol{h}.$$

Таким образом, если среда однородная,

$$\operatorname{grad}\varphi^n = \operatorname{grad}\varphi^q = \operatorname{grad}\varphi^e, \quad \rho^n = \rho^q = \rho^e.$$

Предположим, что в случае неоднородной среды $\operatorname{grad}\sigma_0 \in \{L_\infty(\Omega)\}^3$. Получим оценки близости потенциальных компонент электрического поля в различных приближениях в зависимости от степени неоднородности среды, характеризуемой величиной $\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}$.

Теорема 6. *Справедливы неравенства*

$$\|\operatorname{grad}\varphi^n - \operatorname{grad}\varphi^q\|_{2,Q} \leqslant C_9\frac{(1-\exp(-a\gamma))^2}{\gamma}\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{66}$$

$$\kappa\|\rho^n - \rho^q\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))} \leqslant C_9\frac{(1-\exp(-a\gamma))^2}{\gamma}\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{67}$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi^n - \operatorname{grad}\varphi^e\|_{2,Q} \leqslant C_{10}(1-\exp(-a\gamma)^2\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{68}$$

$$\kappa\|\rho^n-\rho^e\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_{10}(1-\exp(-a\gamma))^2\|\operatorname{grad}(\sigma_0)\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{69}$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi^q-\operatorname{grad}\varphi^e\|_{2,Q}\leqslant C_{11}\beta^2\gamma(1-\exp(-a\gamma))\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{70}$$

$$\kappa\|\rho^q-\rho^e\|_{L_2(0,T,H^{-1}(\Omega))}\leqslant C_{11}\beta^2\gamma(1-\exp(-a\gamma))^2\|\operatorname{grad}(\sigma_0)\|_{\infty,\Omega}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\text{ext}}\right\|_{2,Q}, \tag{71}$$

где $a=T\sigma_{01}$, положительные постоянные C_6–C_{11} не зависят от β, γ.

Доказательство. Обозначим $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^n-\boldsymbol{H}^q$, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^n-\boldsymbol{E}^q=\boldsymbol{E}-\operatorname{grad}\varphi$, $\rho=\rho^n-\rho^q$. Тогда $\operatorname{grad}\varphi(0)=0$,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\beta\gamma\sigma_0\boldsymbol{E}+\beta\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}^n-\operatorname{grad}\varphi). \tag{72}$$

Умножая (72) скалярно на $\operatorname{grad}\varphi$, получаем

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2+2\gamma\int\limits_0^t(\sigma_0\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}dt=2\gamma\int\limits_0^t(\sigma_0\boldsymbol{E},\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}dt.$$

Так как

$$(\sigma_0\boldsymbol{E},\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}=-(\varphi\operatorname{grad}\sigma_0,\boldsymbol{E})_{2,\Omega},$$

применяя неравенство (14), имеем

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2+2\gamma\sigma_{01}\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant 2\gamma A(\Omega)\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}\int\limits_0^t\|\boldsymbol{E}\|_{2,\Omega}\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}dt,$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,Q}\leqslant\frac{A(\Omega)}{\sigma_{01}}\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\|\boldsymbol{E}\|_{2,Q}.$$

Из (55) получаем (66). Так как $\kappa\langle\rho,\psi\rangle=(\operatorname{grad}\varphi,\operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}$ для всех $\psi\in H_0^1(\Omega)$, (67) следует из (66).

Положим $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^n-\boldsymbol{H}^e$, $\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\varphi^n-\operatorname{grad}\varphi^e$. Действуя, как при доказательстве теоремы 5, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2+\gamma\sigma_{01}\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2\leqslant\gamma|(\sigma_0\boldsymbol{E}^n,\operatorname{grad}\varphi)_{2,\Omega}|,$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2+2\gamma\sigma_{01}\int\limits_0^t\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}^2dt\leqslant 2\gamma A(\Omega)\|\operatorname{grad}(\sigma_0)\|_{\infty,\Omega}\int\limits_0^t\|\boldsymbol{E}^n\|_{2,\Omega}\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,\Omega}dt,$$

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,Q}\leqslant\frac{A(\Omega)}{\sigma_{01}}\|\operatorname{grad}\sigma_0\|_{\infty,\Omega}(1-\exp(-\gamma\sigma_{01}T))\|\boldsymbol{E}^n\|_{2,Q}.$$

Применяя (51), получаем оценки (68), (67).

Неравенства (70), (71) устанавливаются аналогично. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галанин М. П., Попов Ю. П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. — М.: Физматлит, 1995.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
3. *Жидков А. А., Калинин А. В. Корректность одной математической задачи атмосферного электричества* Вестн. ННГУ им. Н. И. Лобачевского. — 2009. — № 4. — С. 123–129.

4. *Калинин А. В., Слюняев Н. Н., Мареев Е. А., Жидков А. А.* Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация// Изв. РАН. Физ. атмосф. океана. — 2014. — *50*, № 3. — С. 355–364.
5. *Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А.* Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 5. — С. 608–624.
6. *Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А.* Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 2. — С. 18–40.
7. *Калинин А. В., Тюхтина А. А.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2016. — *18*, № 4. — С. 119–133.
8. *Калинин А. В., Тюхтина А. А.* Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *60*, № 8. — С. 1408–1421.
9. *Калинин А. В., Тюхтина А. А., Лаврова С. Р.* Неклассические задачи в моделях глобальной электрической цепи// Тр. Междунар. конф. «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики». Марчуковские научные чтения–2019 (Новосибирск, 1-5 июля 2019 г.). — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2019. — С. 203–209.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
11. *Мареев Е. А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи// Усп. физ. наук. — 2010. — *180*, № 5. — С. 527–534.
12. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
13. *Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1988.
14. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989.
15. *Alonso Rodriguez A., Valli A.* Eddy Current Approximation of Maxwell Equations. Theory, Algorithms, and Applications. — Milan: Spriner-Verlag, 2010.
16. *Ammari H., Buffa A., Nedelec J.-C.* A justification of eddy currents model for the Maxwell equations// SIAM J. Appl. Math. — 2000. — *60*, № 5. — P. 1805–1823.
17. *Анисимов С. В., Мареев Е. А.* Геофизические исследования глобальной электрической цепи// Физика Земли. — 2008. — № 10. — С. 8–18.
18. *Bayona V., Flyer N., Lucas G. M., Baumgaertner A. J. G.* A 3-D RBF-FD solver for modeling the atmospheric global electric circuit with topography (GEC-RBFFD v1.0)// Geosci. Model Dev. — 2015. — *8*, № 10. — P. 3007–3020.
19. *Boström R., Fahleson U.* Vertical propagation of time-dependent electric fields in the atmosphere and ionosphere// in: Electrical Processes in Atmospheres (*Dolezalek H., Reiter R.*, eds.). — Steinkopff, 1977. — P. 529-535..
20. *Degond P., Raviart P.-A.* An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations// Forum Math. — 1992. — *4*. — P. 13–44.
21. *Evtushenko A., Kuterin F., Svechnikova E.* A plasmachemical axially symmetric self-consistent model of daytime sprite// Atmos. Chem. Phys. — 2020..
22. *Girault V., Raviart P.* Finite element methods for Navier–Stokes equations. — N.Y.: Springler-Verlag, 1986.
23. *Jansky J., Pasko V. P.* Charge balance and ionospheric potential dynamics in timedependent global electric circuit model// J. Geophys. Res. Space Phys. — 2014. — *229*, № 12. — P. 10184–10203.
24. *Kawashima S., Shizuta Y.* Magnetohydrodynamic approximation of the complete equations for an electromagnetic fluid, II// Proc. Jpn. Acad. Ser. A. — 1986. — *62*, № 5. — P. 181–184.
25. *Kalinin A. V., Slyunyaev N. N.* Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit// J. Math. Anal. Appl. — 2017. — *450*, № 1. — P. 112–136.
26. *Kalinin A. V., Tyukhtina A. A.* L_p-estimates for scalar products of vector fields and their application to electromagnetic theory problems// Math. Meth. Appl. Sci. — 2018. — *41*, № 18. — P. 9283–9292.
27. *Kolmbauer M.* Existence and Uniqueness of Eddy Current Problems in Bounded and Unbounded Domains. — Linz, Austria: Inst. Comput. Math. J. Kepler Univ., 2011.

28. *Larsson J.* Electromagnetics from a quasistatic perspective// Am. J. Phys. — 2007. — *75*, № 3. — P. 230–239.
29. *Liu C., Williams E. R., Zipser E. J., Burns G. Diurnal variation of global thunderstorms and electrified shower clouds and their contribution to the global electrical circuit* J. Atmos. Sci. — 2010. — *67*, № 2. — P. 309–323.
30. *Mach D. M., Blakeslee R. J., Bateman M. G.* Global electric circuit implications of combined aircraft storm electric current measurements and satellite-based diurnal lightning statistics// J. Geophys. Res. — 2011. — *116*, № D5. — D05201.
31. *Mareev E. A., Yashunin S. A., Davydenko S. S., et al.* On the role of transient currents in the global electric circuit// Geophys. Res. Lett. — 2008. — *35*, № 15. — L15810.
32. *Markson R. The global circuit intensity: its measurement and variation over the last 50 years* Bull. Am. Meteor. Soc. — 2007. — *88*, № 2. — P. 223–241.
33. *Pasko V. P., Inan U. S., Bell T. F., Taranenko Y. N.* Sprites produced by quasi-electrostatic heating and ionization in the lower ionosphere// J. Geophys. Res. — 1997. — *102*, № A3. — P. 4529–4561.
34. *Raviart P.-A., Sonnendrücker E.* Approximate models for the Maxwell equations// J. Comput. Appl. Math. — 1994. — *63.* — P. 69–81.
35. *Raviart P.-A., Sonnendrücker E.* A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations// Numer. Math. — 1996. — *73.* — P. 329–372.
36. *Rycroft M. J., Harrison R. G., Nicoll K. A., Mareev E. A.* An overview of Earth's global electric circuit and atmospheric conductivity// Space Sci. Rev. — 2008. — *137*, № 1-4. — P. 83–105.
37. *Rycroft M. J., Harrison R. G.* Electromagnetic atmosphere plasma coupling: the global atmospheric electric circuit// Space Sci. Rev. — 2011. — *168*, № 1-4. — P. 363–384.
38. *Shalimov S. L., Bösinger T.* An alternative explanation for the ultra-slow tail of sprite-associated lightning discharges// J. Atm. Solar-Terrestr. Phys. — 2006. — *68.* — P. 814–820.
39. *Tinsley B. A.* The global atmospheric electric circuit and its effects on cloud microphysics// Rep. Progr. Phys. — 2008. — *71*, № 6. — 066801.
40. *Weitzner H., Lawson W. S.* Boundary conditions for the Darwin model// Phys. Fluids B. — 1989. — *l.* — P. 1953–1957.
41. *Williams E. R.* The global electrical circuit: a review// Atmos. Res. — 2009. — *91*, № 2-4. — P. 140–152.
42. *Williams E., Mareev E.* Recent progress on the global electrical circuit// Atmos. Res. — 2014. — *135–136.* — P. 208–227.
43. *Wilson T. R.* Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms// Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1921. — *221.* — P. 73–115.
44. *Wilson T. R.* The electric field of a thundercloud and some of its effects// Proc. Phys. Soc. London. — 1924. — *37.* — P. 32D–37D.
45. *Yashunin S. A., Mareev E. A., Rakov V. A.* Are lightning M components capable of initiating sprites and sprite halos?// J. Geophys. Res. — 2007. — *112.* — D10109.
46. *Zhou L., Tinsley B. A.* Global circuit model with clouds// J. Atmos. Sci. — 2010. — *67*, № 4. — P. 1143–1156.

Калинин Алексей Вячеславович
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского;
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород
E-mail: avk@mm.unn.ru

Тюхтина Алла Александровна
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
E-mail: kalinmm@yandex.ru