ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 27–36
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-27-36

УДК 517.984.3

О НАПОЛНЕННОСТИ ПОДАЛГЕБРЫ ЛОКАЛЬНЫХ АБСОЛЮТНО СУММИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

© 2022 г. **Е. Ю. ГУСЕВА**

Аннотация. Под локальным абсолютно суммирующим оператором понимается оператор T, действующий в $l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, вида

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где X — банахово пространство, $b_{km} \colon X \to X$ — абсолютно суммирующие операторы и

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$, $\|\cdot\|_{\mathbf{AS}(X)}$ — норма идеала абсолютно суммирующих операторов. Установлено, что если оператор $\mathbf{1}+T$ обратим, то обратный оператор имеет вид $\mathbf{1}+T_1$, где T_1 — также локальный абсолютно суммирующий оператор. Аналогичное утверждение также доказано для случая, когда оператор T действует в $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Ключевые слова: абсолютно суммирующий оператор, наполненная подалгебра, разностный оператор, сверточный оператор.

ON THE INVERSE CLOSEDNESS OF THE SUBALGEBRA OF LOCAL ABSOLUTELY SUMMING OPERATORS

© 2022 **E. Yu. GUSEVA**

Abstract. A local absolutely summing operator is an operator T acting in $l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, of the form

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

where X is a Banach space, $b_{km} \colon X \to X$ is an absolutely summation operator, and

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \beta_m$$

for some $\beta \in l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$, $\|\cdot\|_{\mathbf{AS}(X)}$ is the the norm of the ideal of absolutely summing operators. We prove that if the operator $\mathbf{1}+T$ is invertible, then the inverse operator has the form $\mathbf{1}+T_1$, where T_1 is also a local absolutely summing operator. A similar assertion is proved for the case where the operator T acts in $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Keywords and phrases: absolutely summing operator, inversely closed subalgebra, difference operator, convolution operator.

AMS Subject Classification: 47L80, 47B10, 35P05

1. Введение. Оператор $A \in \mathbf{B}(X)$ называют абсолютно суммирующим, если существует такое $\sigma \geqslant 0$, что

$$\sum_{i=1}^{m} \|Ax_i\| \leqslant \sigma \sup\biggl\{\sum_{i=1}^{m} |\langle x_i, a\rangle| : \|a\| \leqslant 1,\ a \in X^*\biggr\} \tag{1}$$

для любого конечного семейства элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$. Здесь X — банахово пространство, а X^* — пространство, сопряженное к X. Множество всех абсолютно суммирующих операторов $A \in \mathbf{B}(X)$ обозначим символом $\mathbf{AS}(X)$. Множество $\mathbf{AS}(X)$ образует (теорема 6) идеал в алгебре $\mathbf{B}(X)$. Положим

$$\|A\|_{\mathbf{AS}(X)} = \inf \sigma,$$

где инфимум берется по всем σ, удовлетворяющим (1). Класс абсолютно суммирующих операторов был впервые рассмотрен Гротендиком [32]. Он играет важную роль в теории операторов, изучении геометрии банаховых пространств, теории функциональных рядов и других приложениях, см. например, [10, 13–15, 38]. В настоящей работе описывается одно обобщение класса абсолютно суммирующих операторов — операторы, обладающие свойством абсолютной суммируемости лишь локально. Основным результатом является доказательство наполненности этого класса (замкнутости относительно операции обращения).

Пусть оператор T действует в $l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Будем говорить, что оператор T принадлежит классу $\mathbf{s}_{1,g}$, если он может быть представлен в виде

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где $b_{km} \colon X \to X$ — абсолютно суммирующие операторы и

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$ или, более общим образом, $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$, где g — вес на группе $\mathbb{Z}^c$.

Далее, пусть линейный оператор A действует в пространстве $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Представим множество $\mathbb{R}^c$ как объединение попарно непересекающихся полуинтервалов:

$$\mathbb{R}^c = \bigcup_{m=(m_1,m_2,\ldots,m_c) \in \mathbb{Z}^c} [m_1, m_1+1) \times [m_2, m_2+1) \times \ldots \times [m_c, m_c+1)$$

и отождествим пространство $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$ с $l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1)^c, \mathbb{C}))$. Пусть оператор T, действующий в $l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1)^c, \mathbb{C}))$, соответствует оператору A в силу принятого отождествления. Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathbf{S}_{1,g}$, если оператор T принадлежит классу $\mathbf{s}_{1,g}$. Операторы, принадлежащие классам $\mathbf{s}_{1,g}$, $\mathbf{S}_{1,g}$, называем локально абсолютно суммирующими.

Установлено (теоремы 9 и 12), что оператор T_1 из представления $(\mathbf{1} + T)^{-1} = \mathbf{1} + T_1$ наследует свойство быть локальным абсолютно суммирующим оператором, и его матричные элементы убывают на бесконечности с той же скоростью, что и матричные элементы исходного оператора T. Сохранение скорости убывания матричных элементов при переходе к обратному оператору (для других классов операторов) изучалось многими авторами, см., например, [1–6, 11, 12, 22–24, 26, 28–31, 34, 35, 39].

Отметим также работы [20,21,25,33,35–37], в которых изучалась наполненность других классов некомпактных интегральных операторов.

Разделы 2–4 посвящены изложению вспомогательных определений, конструкций и фактов. В разделах 5 и 6 излагаются основные результаты: в теореме 9 рассматривается случай, когда оператор T действует в пространстве l_p, а в теореме 12 — в пространстве L_p.

2. Банаховы алгебры.

Линейной алгеброй или просто *алгеброй* называют линейное пространство $\mathbf{B}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, в котором дополнительно задана операция умножения, обладающая свойствами

$$A(BC) = (AB)C,$$
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$
$$(A+B)C = AC + BC, A(B+C) = AB + AC$$

(см. [7, гл. 1, § 1], [16, гл. 10, § 10.1], [19, гл. 4, § 1.13]). Если алгебра $\mathbf{B}$ является нормированным пространством и при этом выполнена аксиома

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|,$$

то говорят, что $\mathbf{B}$ — *нормированная алгебра.* Если нормированная алгебра является полным, т.е. банаховым пространством, то ее называют *банаховой алгеброй.*

Если в $\mathbf{B}$ выделен элемент $\mathbf{1} = \mathbf{1_B}$, обладающий свойством

$$A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A,$$

то говорят, что алгебра $\mathbf{B}$ *имеет единицу*, при этом элемент $\mathbf{1}$ называют *единицей* алгебры, а саму алгебру называют *унитальной.* Если алгебра нормирована и при этом выполнена аксиома

$$\|\mathbf{1}\| = 1,$$

то говорят, что $\mathbf{B}$ — *нормированная унитальная алгебра.* Наиболее важный пример унитальной банаховой алгебры — алгебра $\mathbf{B}(X)$, состоящая из всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X.

Пусть $\mathbf{B}$ — унитальная алгебра и $A \in \mathbf{B}$. Элемент $B \in \mathbf{B}$ называют *обратным* к A, если

$$AB = BA = \mathbf{1}.$$

Обратный к A обозначают символом A^{-1}. Если элемент A имеет обратный, его называют *обратимым* (в алгебре $\mathbf{B}$).

Подмножество $\mathbf{R}$ алгебры $\mathbf{A}$ называют *подалгеброй*, если все три алгебраические операции (сложение, умножение на скаляры и умножение элементов) из $\mathbf{R}$ не выводят. Если $\mathbf{A}$ содержит единицу и $\mathbf{1_A} \in \mathbf{R}$, то говорят, что $\mathbf{R}$ — *унитальная подалгебра.* Очевидно, подалгебра сама является алгеброй. Очевидно также, что замыкание подалгебры (нормированной алгебры) является подалгеброй.

Унитальную подалгебру $\mathbf{B}$ унитальной алгебры $\mathbf{A}$ называют [7, гл. 1, § 4] *наполненной*, если всякий $A \in \mathbf{B}$, обратимый в $\mathbf{A}$, также обратим и в $\mathbf{B}$. В силу единственности обратного это определение эквивалентно следующему: если существует такой $A^{-1} \in \mathbf{A}$, что $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$, то $A^{-1} \in \mathbf{B}$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — алгебры. Говорят, что отображение $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ является *морфизмом алгебр* (см. [7, гл. 1, § 1], если

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B), \quad \varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A), \quad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$

для всех $A, B \in \mathbf{A}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ унитальные и дополнительно

$$\varphi(\mathbf{1_A}) = \mathbf{1_B},$$

то говорят, что φ — *морфизм унитальных алгебр.* Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — банаховы (нормированные) алгебры и морфизм φ непрерывен, то говорят, что φ — *морфизм банаховых (нормированных) алгебр.*

Предложение 1 (см. [18, гл. 5, § 2, предложение 3])**.** *Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — унитальные алгебры и $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — морфизм унитальных алгебр. Если $A \in \mathbf{A}$ обратим, то $\varphi(A)$ также обратим.*

(*Двусторонним*) *идеалом* в алгебре $\mathbf{B}$ называют [17, гл. 1, § 3] подпространство $\mathbf{J}$, обладающее свойством: $AJ, JA \in \mathbf{J}$ для всех $A \in \mathbf{B}$ и $J \in \mathbf{J}$. Если $\mathbf{J}$ — идеал, то факторпространство $\mathbf{B}/\mathbf{J}$ является алгеброй.

Предложение 2 (см. [35, 1.2.7])**.** *Пусть $\mathbf{B}$ — алгебра, а $\mathbf{J}$ — идеал в ней. Тогда правило*

$$(x + \mathbf{J})(y + \mathbf{J}) = xy + \mathbf{J}$$

корректно определяет умножение в факторпространстве $\mathbf{B}/\mathbf{J}$, превращающее $\mathbf{B}/\mathbf{J}$ в алгебру, называемую факторалгеброй. При этом, если $\mathbf{B}$ нормирована (банахова), а $\mathbf{J}$ замкнут, то алгебра $\mathbf{B}/\mathbf{J}$ также нормирована (банахова).

3. Алгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}^c)$. Пусть $c \in \mathbb{N}$. *Весом* на группе $\mathbb{Z}^c$ называют функцию $g\colon \mathbb{Z}^c \to (0, +\infty)$. Всегда будем предполагать, что вес на $\mathbb{Z}^c$ обладает следующими свойствами:

(a) $g(0) = 1$,
(b) $g(m + n) \leqslant g(m)g(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}^c$,
(c) $g(-n) = g(n)$,
(d) $g(n) \geqslant 1$,

(e) для всех $t \in \mathbb{Z}^c$ имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\to\infty}} \frac{\ln g(nt)}{n} = 0;$$

(f) для всех $t \in \mathbb{Z}^c$ имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\to\infty}} \sqrt[n]{g(nt)} = 1.$$

Очевидно, что условие (d) вытекает из условий (a), (b) и (c). Также нетрудно показать, что условия (e) и (f) эквивалентны.

Пример 1. Приведем примеры весов на группе $\mathbb{Z}^c$ (см. [29, пример 5.21], [31]. Пусть $0 \leqslant b < 1$, $a \geqslant 0$ и $s, t \geqslant 0$; тогда функции

$$\begin{aligned} &g(n) = 1, && g(n) = e^{a|n|^b}(1+|n|)^s,\\ &g(n) = (1+|n|)^s, && g(n) = e^{a|n|^b}(1+|n|)^s \ln^t(e+|n|) \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям (a)–(f) из определения веса. Понятно, что в этом списке каждый предыдущий пример является частным случаем следующего.

Пусть g — вес на $\mathbb{Z}^c$, а $\mathbf{B}$ — банахова алгебра. *Пространством $l_{1,g}$ на $\mathbb{Z}^c$ со значениями в $\mathbf{B}$ с весом g* называют множество $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$, состоящее из всевозможных семейств $a = \{a_m \in \mathbf{B} : m \in \mathbb{Z}^c\}$, для которых

$$\|a\| = \|a\|_{l_{1,g}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} g(m)\|a_m\| < \infty.$$

Теорема 3 (см. [29, с. 196, лемма 5.22]). *Пусть выполняются условия* (a), (b) *из определения веса. Тогда пространство $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$ является банаховой алгеброй относительно операции свертки*

$$(a * b)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_m b_{k-m},$$

взятой в качестве умножения. Если $\mathbf{B}$ унитальна, то $l_{1,g}$ также унитальна; при этом единицей алгебры $l_{1,g}$ является семейство $\delta = \{\delta_k\}$, определяемое по формуле

$$\delta_k = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{при } k = 0,\\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Если $\mathbf{B} = \mathbb{C}$, то алгебра $l_{1,g}$ коммутативна.

Теорема 4 (ср. [29, следствие 5.27]). *Подалгебра $l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$ наполнена в алгебре $l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$.*

4. Абсолютно суммирующие операторы. Оператор $A \in \mathbf{B}(X)$ называют *абсолютно суммирующим* (см. [32], [15, 6.5.1], [10, 13], если существует такая константа $\sigma \geqslant 0$, что

$$\sum_{i=1}^m \|Ax_i\| \leqslant \sigma \sup\left\{\sum_{i=1}^m |\langle x_i, a\rangle| : \|a\| \leqslant 1,\ a \in X^*\right\} \tag{2}$$

для любого конечного семейства элементов $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$. Здесь X^* — сопряженное к X пространство. Множество всех абсолютно суммирующих операторов $A \in \mathbf{B}(X)$ обозначим символом $\mathbf{AS}(X)$. Положим

$$\|A\|_{\mathbf{AS}(X)} = \inf \sigma, \tag{3}$$

где инфимум берется по всем σ, удовлетворяющим (2).

Пусть $X = L_p(E, \mathbb{C})$, где $E \subseteq \mathbb{R}^c$ — измеримое подмножество, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Оператор $A \in \mathbf{B}(L_p(E, \mathbb{C}))$ называют *мажорируемым* (см. [13, с. 10]), если существует такая функция $\varphi \in L_p(E, \mathbb{C})$, что для всех $x \in L_p(E, \mathbb{C})$

$$|(Ax)(t)| \leqslant \varphi(t)\|x\|.$$

Предложение 5 (см. [13, с. 10]). *Всякий мажорируемый оператор $A \in \mathbf{B}(L_p(E,\mathbb{C}))$ является абсолютно суммирующим.*

Пример 2. Приведем пример абсолютно суммирующего оператороа. Пусть $X = L_1[0,1]$. Пусть $k\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ — ограниченная измеримая функция, а именно, для некоторого M выполняется оценка

$$|k(t,s)| \leqslant M \quad \text{при всех} \quad t,s \in [0,1].$$

Покажем, что интегральный оператор Фредгольма

$$(Kx)(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)ds$$

является абсолютно суммирующим (то, что K непрерывно действует в $X = L_1[0,1]$, известно: см. [9, гл. XI, § 3, теорема 1]). Пусть $x \in L_1[0,1]$ — произвольная функция. Имеем

$$|Kx(t)| = \left|\int\limits_0^1 k(t,s)x(s)ds\right| \leqslant \int\limits_0^1 |k(t,s)||x(s)|ds \leqslant \int\limits_0^1 M|x(s)|ds = M\|x\|_{L_1}.$$

Таким образом, оператор K мажорируется функцией $\varphi(t) = M$. По предложению 5 он является абсолютно суммирующим.

Необходимое и достаточное условие принадлежности оператора классу $\mathbf{AS}(X)$ можно найти в [10, с. 8].

Теорема 6 (см. [15, 6.5.2]). *Множество $\mathbf{AS}(X)$ является идеалом в $\mathbf{B}(X)$. При этом*

$$\|JA\|_{\mathbf{AS}(X)}, \|AJ\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \|J\|_{\mathbf{AS}(X)}\|A\|_{\mathbf{B}(X)}, \quad J \in \mathbf{AS}(X), \quad A \in \mathbf{B}(X).$$

Пространство $\mathbf{AS}(X)$ является полным относительно нормы (3).

5. Локально абсолютно суммирующие операторы. Обозначим через $l_p = l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространства последовательностей $x_n \in X$, $n \in \mathbb{Z}^c$, ограниченных по обычным нормам.

Пусть X — банахово пространство и g — вес на группе $\mathbb{Z}^c$. Обозначим через $\mathbf{s}_{1,g} = \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$ множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, вида

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} b_{km}x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где $b_{km} \in \mathbf{B}(X)$ удовлетворяют оценке

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{B}(X)} \leqslant \beta_m \tag{4}$$

для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$.

Теорема 7 (см. [1–3], [33, теорема 29]). *Подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$ является наполненной в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$ для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Обозначим через $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$ вида

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} b_{km}x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где $b_{km} \in \mathbf{AS}(X)$, причем

$$\|b_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$. Операторы класса $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ будем называть *локально абсолютно суммирующими.*

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ подалгебру $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$, к которой присоединена единица алгебры $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$.

Предложение 8. *Подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X))$ является идеалом в алгебре $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B}(X))$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$ — подпространство алгебры $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))$. Покажем, что $KT, TK \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$ для всех $K \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$, $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))$.

Пусть $K \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$ и $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))$. По определению множества $\mathbf{s}_{1,g}$ операторы K и T допускают представления

$$(Kx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}x_{k-m}, \quad (Tx)_k = \sum_{l\in\mathbb{Z}^c} b_{kl}x_{k-l}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где коэффициенты a_{km}, b_{kl} удовлетворяют оценкам

$$\|a_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \alpha_m, \quad \|b_{kl}\|_{\mathbf{B}(X)} \leqslant \beta_l,$$

для некоторых $\alpha,\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbb{C})$. В силу определения произведения операторов для любого $x \in l_p(\mathbb{Z}^c,X)$ имеем

$$(KTx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}(Tx)_{k-m} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}\sum_{l\in\mathbb{Z}^c} b_{k-m,l}x_{k-m-l}, \quad k \in \mathbb{Z}^c.$$

Поскольку $l_p(\mathbb{Z}^c,X) \subseteq l_\infty(\mathbb{Z}^c,X)$, семейство $\{x_i : i \in \mathbb{Z}^c\}$ ограничено. Поэтому последний двойной ряд при фиксированном k абсолютно сходится. Следовательно, его можно суммировать в любом порядке.

Сделаем замену $l = r - m$:

$$(KTx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}\sum_{r\in\mathbb{Z}^c} b_{k-m,r-m}x_{k-r}, \quad k \in \mathbb{Z}^c.$$

Поменяем порядок суммирования:

$$(KTx)_k = \sum_{r\in\mathbb{Z}^c}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}b_{k-m,r-m}\right)x_{k-r}, \quad k \in \mathbb{Z}^c. \tag{5}$$

В силу оценки (см. предложение 6) имеем

$$\|a_{km}b_{k-m,r-m}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \|a_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \cdot \|b_{k-m,r-m}\|_{\mathbf{B}(X)} \leqslant \alpha_m\beta_{r-m}.$$

Отсюда

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} \|a_{km}b_{k-m,r-m}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} \alpha_m\beta_{r-m} = (\alpha * \beta)_r.$$

Последняя оценка показывает, что ряд $\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}b_{k-m,r-m}$ абсолютно сходится по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{AS}(X)}$. В силу полноты идеала $\mathbf{AS}(X)$ (предложение 6) отсюда следует, что сумма $\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}b_{k-m,r-m}$ принадлежит $\mathbf{AS}(X)$ и

$$\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}^c} a_{km}b_{k-m,r-m}\right\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant (\alpha * \beta)_r.$$

В силу предложения 3 имеем $\alpha*\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbb{C})$. Вз формулы (5) следует, что $KT \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$. Аналогично проверяется, что $TK \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$. ☐

Теорема 9. *Подалгебра* $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$ *является наполненной в алгебре* $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c,X))$ *для всех* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Доказательство. Покажем вначале, что подалгебра $\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$ является наполненной в алгебре $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))$. Пусть оператор $\lambda\mathbf{1} + T$, где $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$, обратим в $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))$. В силу предложений 8 и 2 существует фактор-морфизм алгебр

$$\varphi : \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X)) \to \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))/\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X)).$$

По определению морфизма φ имеем

$$\varphi(\lambda\mathbf{1}_{\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))} + T) = \lambda\mathbf{1}_{\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))/\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))}.$$

Поскольку элемент $\lambda\mathbf{1}+T$ обратим, в силу предложения 1 элемент $\lambda\mathbf{1}$ также обратим. Поэтому $\lambda\neq 0$. При этом

$$\varphi((\lambda\mathbf{1}+T)^{-1})=(\varphi(\lambda\mathbf{1}+T))^{-1}=(\lambda\mathbf{1})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{1}.$$

Отсюда $(\lambda\mathbf{1}+T)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{1}+T_1$, где $T_1\in\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$. Это означает, что $(\lambda\mathbf{1}+T)^{-1}\in\widetilde{\mathbf{s}_{1,g}}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(X))$.

Для завершения доказательства остается напомнить, что подалгебра $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{B}(X))$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c,X))$ в силу теоремы 7. □

6. Локально абсолютно суммирующие операторы в L_p. Обозначим через λ меру Лебега на $\mathbb{R}^c$. Пусть $E\subseteq\mathbb{R}^c$ — измеримое подмножество. Будем обозначать интеграл от суммируемой функции $x\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$ относительно меры Лебега λ через

$$\int\limits_{\mathbb{R}^c} x(t)d\lambda(t)\quad\text{или}\quad\int\limits_{\mathbb{R}^c} x(t)dt.$$

Обозначим через $\mathbf{L}_p=\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$, $1\leqslant p<\infty$, пространство всех измеримых функций $u\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$, ограниченных по полунорме

$$\|u\|=\|u\|_{L_p}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^c}|u(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

а через $\mathbf{L}_\infty=\mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$ — пространство всех измеримых существенно ограниченных функций $u\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$ с полунормой

$$\|u\|=\|u\|_{L_\infty}=\operatorname{ess\,sup}|u(t)|.$$

Иногда удобно допускать, что функции $u\in\mathbf{L}_p$ могут быть не определены на пренебрежимом (т.е. имеющем меру нуль) множестве. Наконец, обозначим через $L_p=L_p(\mathbb{R}^c)=L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, банахово пространство всех классов функций $u\in\mathbf{L}_p$, с отождествлением почти всюду. Подробнее см., например, [8]. Обычно пространства $\mathbf{L}_p$ и L_p не различают.

Представим множество $\mathbb{R}^c$ как объединение попарно непересекающихся полуинтервалов

$$\mathbb{R}^c=\bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}^c}[0,1)^c+m,$$

где

$$[0,1)^c+m=\bigsqcup_{m=(m_1,m_2,\dots,m_c)\in\mathbb{Z}^c}[m_1,m_1+1)\times[m_2,m_2+1)\times\ldots\times[m_c,m_c+1)$$

и $m=(m_1,m_2,\dots,m_c)$.

Предложение 10. *Имеют место следующие утверждения.*

(a) *Множество $E\subseteq\mathbb{R}^c$ измеримо тогда и только тогда, когда его пересечение с любым множеством $[0,1)^c+m$, $m\in\mathbb{Z}^c$, суммируемо.*
(b) *Множество $N\subseteq\mathbb{R}^c$ пренебрежимо тогда и только тогда, когда его пересечение с любым множеством $[0,1)^c+m$, $m\in\mathbb{Z}^c$, пренебрежимо.*
(c) *Функция $x\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$ измерима тогда и только тогда, когда ее сужение на каждое из множеств $[0,1)^c+m$, $m\in\mathbb{Z}^c$, измеримо.*
(d) *Функция $x\colon\mathbb{R}^c\to\mathbb{C}$ пренебрежима тогда и только тогда, когда ее сужение на каждое из множеств $[0,1)^c+m$, $m\in\mathbb{Z}^c$, пренебрежимо.*

Предложение 11 (см. [27], [35, 1.6.3])**.** *Пусть $1\leqslant p\leqslant\infty$. Тогда отображение*

$$\varphi\colon\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})\to l_p(\mathbb{Z}^c,\mathbf{L}_p([0,1)^c,\mathbb{C})),\quad\varphi(x)=\{x_m\},$$

где

$$x_m(t)=x(t+m),\quad t\in[0,1)^c,$$

порождает (после отождествления эквивалентных функций) изометрический изоморфизм $\varphi\colon L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})\to l_p(\mathbb{Z}^c,L_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$ (который обозначен тем же символом φ).

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C}) \to l_p(\mathbb{Z}^c,\mathbf{L}_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$, определенное правилом $\varphi(x)=\{x_m\}$, где
$$x_m(t)=x(t+m),\quad t\in[0,1)^c.$$
Очевидно, что для любой функции $x\in\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$ последовательность $\{x_m\}$ состоит из измеримых функций и
$$\|x\|_{L_p}=\|\{\|x_m\|_{L_p}\}\|_{l_p}$$
или, более подробно,
$$\|x\|_{L_p}=\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^c}|x(t)|^p dt}=\sqrt[p]{\sum_{m\in\mathbb{Z}^c}\int\limits_{[0,1)^c}|x_m(t)|^p dt},\quad p<\infty,$$
$$\|x\|_{L_\infty}=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}^c}|x(t)|=\sup_{m\in\mathbb{Z}^c}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1)^c}|x_m(t)|,\qquad p=\infty.$$
Таким образом, φ действует из $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$ в $l_p(\mathbb{Z}^c,\mathbf{L}_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$ и сохраняет норму.

Линейность φ очевидна. Из сохранения нормы следует, что φ инъективно.

Пусть $\{x_m\}\in l_p(\mathbb{Z}^c,\mathbf{L}_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$. Очевидно, что последовательность $\{x_m\}$ является прообразом функции
$$x(t)=x_m(t-m),\quad \text{когда}\quad t\in[0,1)^c+m.$$
Таким образом, φ сюръективно.

По предложению 10(d), измеримая функция x пренебрежима тогда и только тогда, когда все члены последовательности $\varphi(x)=\{x_m\}$ являются пренебрежимыми функциями. Поэтому φ порождает изометрический изоморфизм $\varphi\colon L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})\to l_p(\mathbb{Z}^c,L_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$. □

Так как пространства $L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C})$ и $l_p(\mathbb{Z}^c,L_p([0,1)^c,\mathbb{C}))$ изометрически изоморфны, алгебры операторов $\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C}))$ и $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c,L_p([0,1)^c,\mathbb{C})))$ также изоморфны.

Обозначим через $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})=\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS}(L_p([0,1)^c,\mathbb{C})))$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, пространство всех операторов $A\in\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c,\mathbb{C}))$, отвечающих операторам класса $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(L_p([0,1)^c,\mathbb{C})))$ в соответствии с изоморфизмом φ, определенном в предложении 11. Другими словами, оператор A принадлежит классу $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ тогда и только тогда, когда оператор $T=\varphi A\varphi^{-1}$ принадлежит классу $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c,\mathbf{AS}(L_p([0,1)^c,\mathbb{C})))$. Операторы класса $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ будем также называть *локально абсолютно суммирующими.*

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{S}_{1,g}}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ подалгебру алгебры $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ с присоединенной единицей алгебры $\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c,X))$. Следующая теорема является частным случаем теоремы 9.

Теорема 12. *Подалгебра $\widetilde{\mathbf{S}_{1,g}}(\mathbb{R}^c,\mathbf{AS})$ наполнена в алгебре $\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c,X))$ для всех $1\leqslant p\leqslant\infty$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц// Функц. анал. прилож. — 1990. — *24*, № 3. — С. 64–65.
2. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ// Сиб. мат. ж. — 1997. — *38*, № 1. — С. 14–28.
3. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов// Совр. мат. Фундам. направл. — 2004. — *9*. — С. 3–151.
4. *Блатов И. А.* Алгебра обобщенной дискретной свертки операторов с осциллирующими коэффициентами// Деп. в ВИНИТИ РАН. — 1990. — 5852-В90.
5. *Блатов И. А.* О методах неполной факторизации для систем с разреженными матрицами// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1993. — *33*, № 6. — С. 819–836.
6. *Блатов И. А., Тертерян А. А.* Об оценках элементов обратных матриц и модернизации метода матричной прогонки// Сиб. мат. ж. — 1992. — *32*, № 11. — С. 1683–1696.
7. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. — М.: Мир, 1972.
8. *Бурбаки Н.* Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.

9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
10. *Кисляков С. В.* Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре// Алгебра и анализ. — 1991. — *3*, № 4. — С. 1–77.
11. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990.
12. *Курбатов В. Г.* Об алгебрах разностных и интегральных операторов// Функц. анал. прилож. — 1990. — *24*, № 2. — С. 87–88.
13. *Макаров Б. М.* p-абсолютно суммирующие операторы и некоторые их приложения// Алгебра и анализ. — 1991. — *3*, № 2. — С. 1–76.
14. *Митягин Б. С.* Об абсолютной сходимости ряда коэффициентов Фурье// Докл. АН СССР. — 1964. — *157*, № 5. — С. 1047–1050.
15. *Пич А.* Операторные идеалы. — М.: Мир, 1982.
16. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
17. *Хелемский А. Я.* Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. — М.: Наука, 1989.
18. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2004.
19. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
20. *Beltiţă I., Beltiţă D.* Erratum to: Inverse-closed algebras of integral operators on locally compact groups// Ann. H. Poincaré. — 2015. — *16*, № 5. — P. 1307–1309.
21. *Beltiţă I., Beltiţă D.* Inverse-closed algebras of integral operators on locally compact groups// Ann. H. Poincaré. — 2015. — *16*, № 5. — P. 1283–1306.
22. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections// SIAM J. Numer. Anal. — 1977. — *14*, № 4. — P. 616–619.
23. *Demko S.* Spectral bounds for $\|A^{-1}\|_\infty$// J. Approx. Theory. — 1986. — *48*, № 2. — P. 207–212.
24. *Demko S., Moss W. F., Smith P. W.* Decay rates for inverses of band matrices// Math. Comp. — 1984. — *43*, № 168. — P. 491–499.
25. *Farrell B., Strohmer T.* Inverse-closedness of a Banach algebra of integral operators on the Heisenberg group// J. Operator Theory. — 2010. — *64*, № 1. — P. 189–205.
26. *Fendler G., Gröchenig K., Leinert M.* Convolution-dominated operators on discrete groups// Integral Equations Oper. Theory. — 2008. — *61*, № 4. — P. 493–509.
27. *Fournier J. J. F., Stewart J.* Amalgams of L^p and l^q// Bull. Am. Math. Soc. — 1985. — *13*, № 1. — P. 1–21.
28. *Gohberg I., Kaashoek M. A., Woerdeman H. J.* The band method for positive and strictly contractive extension problems: an alternative version and new applications// Integral Equations Oper. Theory. — 1989. — *12*, № 3. — P. 343–382.
29. *Gröchenig K.* Wiener's lemma: theme and variations. An introduction to spectral invariance// in: Four Short Courses on Harmonic Analysis: Wavelets, Frames, Time-Frequency Methods, and Applications to Signal and Image Analysis. — Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2010. — P. 175–244.
30. *Gröchenig K., Klotz A.* Noncommutative approximation: inverse-closed subalgebras and off-diagonal decay of matrices// Constr. Approx. — 2010. — *32*, № 3. — P. 429–466.
31. *Gröchenig K., Leinert M.* Symmetry and inverse-closedness of matrix algebras and functional calculus for infinite matrices// Trans. Am. Math. Soc. — 2006. — *358*, № 6. — P. 2695–2711.
32. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1966.
33. *Guseva E. Yu., Kurbatov V. G.* Inverse-closedness of the subalgebra of locally nuclear operators/ `arXiv: 2010.02883 [math.FA]`.
34. *Jaffard S.* Propriétés des matrices “bien localisées” près de leur diagonale et quelques applications// Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. — 1990. — *7*, № 5. — P. 461–476.
35. *Kurbatov V. G.* Functional Differential Operators and Equations. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
36. *Kurbatov V. G.* Some algebras of operators majorized by a convolution// Funct. Differ. Equations. — 2001. — *8*, № 1. — P. 323–333.
37. *Kurbatov V. G., Kuznetsova V. I.* Inverse-closedness of the set of integral operators with L_1-continuously varying kernels// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *436*, № 1. — P. 322–338.
38. *Schwartz L.* Ordre et type; problèmes d'approximation; applications radonifiantes// in: Sémin. L. Schwartz. 1969–1970. — Exp. No. 5..

39. *Sjöstrand J.* Wiener type algebras of pseudodifferential operators// в кн.: Sémin. Équations aux Dérivées Partielles. 1994–1995. — Exp. No. IV, 21.. — Palaiseau: École Polytech., 1995.

Гусева Елена Юрьевна
Воронежский государственный университет
E-mail: elena.guseva.01.06@gmail.com