ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 205 (2022). С. 10–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-205-10-15

УДК 532.5.01

К ВОПРОСУ О НЕСТАЦИОНАРНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ НАГРЕВЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2022 г. **С. О. ГЛАДКОВ**

Аннотация. Показано, что в условиях стационарного вращения шара с постоянной угловой скоростью в вязкой жидкости повышение температуры поверхности тела на границе контакта сопровождается нестационарным процессом теплопроводности, что приводит к спонтанному повышению температуры. Доказано, что этот процесс повышения температуры является нелинейным и имеет предельную точку роста по температурной шкале.

Ключевые слова: динамическая вязкость, температура, стационарное вращение, граница контакта.

ON NONSTATIONARY AND NONLINEAR HEATING OF A SPHERICAL BODY ROTATING IN A VISCOUS FLUID WITH A CONSTANT ANGULAR SPEED

© 2022 **S. O. GLADKOV**

Abstract. In this paper, we shown a stationary rotation of a ball in a viscous liquid with a constant angular speed, an increase in the temperature of the body surface at the boundary is accompanied by a nonstationary heat conduction process, which leads to a spontaneous increase in temperature. We prove that this process of temperature increase is nonlinear and has a limiting point of growth on the temperature scale.

Keywords and phrases: dynamic viscosity, temperature, stationary rotation, boundary of the contact.

AMS Subject Classification: 76U05

1. Введение. Задача, о которой сейчас пойдет речь, возникла несколько спонтанно в процессе внимательного анализа задачи, приведенной в замечательной монографии [7] после параграфа 55, и посвященной оценке температуры нагрева как результата поступательного движения шара в вязком континууме. Совершенно понятно, что благодаря движению шара в вязкой среде в результате трения температура его поверхности должна будет возрастать. Однако при этом возникает вполне закономерный и естественный вопрос, до какой конкретной величины она может дойти? Легко понять, что процесс нагрева носит нестационарный и существенно нелинейный характер. Действительно, если в процессе движения, которое может длиться довольно большой промежуток времени, температура поверхности тела постепенно повышается, то в результате контакта поверхности со средой температура среды в области контакта также должна будет повышаться. Последнее повлекло бы за собой автоматическое изменение вязкости континуума, непосредственно примыкающей к поверхности, а это как раз и означает, что процесс будет, вопервых, нестационарным, а во-вторых, существенно нелинейным, поскольку вязкость начинает зависеть от температуры. В настоящей статье речь пойдет о задаче вычисления нестационарного изменения температуры поверхности шара, вращающегося бесконечно долго с постоянной угловой скоростью ω в среде с динамической вязкостью η.

2. Основная часть.

2.1. Основные уравнения. Для решения поставленной задачи удобно воспользоваться системой уравнений Навье—Стокса (см. [7]), уравнением непрерывности и нестационарным уравнением теплопроводности (см. [6]), учитывающим диссипативное воздействие континуума. Имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}, \tag{1}$$

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T - \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right)^2, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость, P — давление, ρ — плотность континуума, ν его кинематическая вязкость, $\boldsymbol{g}$ — ускорение силы тяжести, c_p — изобарическая теплоемкость, отнесенная к единице объема тела, κ — коэффициент теплопроводности, T — температура. Постоянную Больцмана k_B мы положили равной единице. Вертикальную ось вращения шара выберем в качестве оси z, вдоль которой направим и угловую частоту ω. Сила тяжести при этом направлена вниз. Уравнение (2) получается благодаря простому правилу (см., к примеру, работы [4, 10])

$$T\dot{S} + \dot{Q}_T + \dot{Q}_\eta = 0, \tag{3}$$

где S — энтропия,

$$\dot{Q}_T = \int\limits_V \frac{\kappa}{T} (\nabla T)^2 dV$$

— диссипативная функция, обязанная теплопроводности,

$$\dot{Q}_\eta = \frac{\nu}{2} \int\limits_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right)^2 dV$$

— диссипативная функция вязкого континуума, в соответствии с которым в правую часть уравнения (2) плотность диссипативной функций должна входить со знаком минус.

2.2. Решение и анализ уравнений. В силу аксиальной симметрии решаемой задачи распределение скоростей вблизи поверхности шара можно искать в виде

$$\boldsymbol{v} = (v_r, v_\theta, v_\varphi) = (0, 0, v_\varphi(r, \theta)). \tag{4}$$

Рассматривая уравнение Навье—Стокса как стационарное, для z-проекции уравнения (1) находим $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \rho g$, так что давление равно

$$P = P_0 + \rho g z, \tag{5}$$

где P_0 — внешнее атмосферное давление. Поскольку помимо уравнений (1), (2) должно выполняться также и уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{6}$$

то скорость можно искать в виде

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\left(f(r)\omega \right), \tag{7}$$

где функцию $f(r)$ предстоит найти. Для проекции уравнения (1) на орт $\boldsymbol{e}_\varphi$ благодаря соотношению (4) получаем

$$(\Delta \boldsymbol{v})_\varphi = 0. \tag{8}$$

В силу (7) отсюда следует, что

$$(\Delta(\nabla f(r) \times \omega))_\varphi = 0 \iff (\nabla \Delta f)_\varphi = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta f = C_1, \tag{9}$$

где C_1 — константа интегрирования. В сферической системе координат радиальная часть оператора Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr},$$

и прямое интегрирование уравнения (9) дает

$$f(r) = ar^2 + \frac{b}{r}, \tag{10}$$

где a, b — константы, которые следует определить из граничных условий. Поскольку распределение скоростей в окрестности сферы определяется формулой (7), то из условия $\boldsymbol{v}|_{r\to\infty} = 0$ следует, что $a = 0$. Из условия сшивки на границе сферы $\boldsymbol{v}|_{r=R} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}]$ получаем, что

$$\boldsymbol{v}|_{r=R} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}] = (\nabla f(r) \times \boldsymbol{\omega})|_{r=R} = -\frac{f'}{r}\bigg|_{r=R}[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}].$$

Отсюда согласно (10) следует, что $b = -R^3$. Таким образом, решение вблизи поверхности сферы для $r \geqslant R$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{v} = \frac{R^3}{r^3}[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}]. \tag{11}$$

Решение (11) позволяет легко вычислить и плотность диссипативной функции. Действительно, учитывая переход в криволинейную систему координат, можно записать

$$\dot{Q}_\eta = \frac{\eta}{2}\int\limits_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - 2\Gamma^s_{ik}v_s\right)^2 dV,$$

где Γ^l_{ik} — символ Кристоффеля второго рода. Несложное вычисление с учетом (4) и алгоритма, приведенного, например, в [3], приводит нас к искомому выражению:

$$\frac{d\dot{Q}_\eta}{dV} = \frac{16\eta R^6\omega^2}{r^6}\sin^2\theta, \tag{12}$$

где θ — азимутальный угол сферической системы координат ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). Подставляя теперь (12) в уравнение (2), находим

$$c_P\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\Delta T - \frac{16\eta R^6\omega^2}{r^6}\sin^2\theta. \tag{13}$$

Поскольку мы интересуемся временной эволюцией температуры на поверхности сферы, то оператор Лапласа в уравнении (13) можно записать в приближенном конечно-разностном виде, учитывая лишь узкую область контакта ширины δ:

$$\Delta T \approx -\frac{T - T_0}{\delta^2}, \tag{14}$$

где T_0 — равновесная температура континуума при $r \to \infty$. Поэтому уравнение (13) в непосредственной близости к поверхности с учетом (14) можно записать следующим образом:

$$c_P\frac{dT}{dt} = -\kappa\frac{T - T_0}{\delta^2} - 16\eta(T)\omega^2\sin^2\theta. \tag{15}$$

Поскольку речь идет о временной эволюции $T(t)$, то уравнение (15) можно усреднить по угловым переменным по правилу

$$\overline{(\ldots)} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}(\ldots)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

В результате из (15) получаем

$$c_P\frac{dT}{dt} = -\kappa\frac{T - T_0}{\delta^2} - \frac{32}{3}\eta(T)\omega^2. \tag{16}$$

Таким образом, стационарная точка определяется из уравнения

$$T_0 - T^* = -\frac{32\delta^2}{3\kappa}\eta(T^8)\omega^2. \tag{17}$$

Из экспериментов известно, что с повышением температуры вязкость уменьшается. Это означает, что уравнение (17) будет иметь решение, только если выполняется условие

$$T_0 > \frac{32\rho\delta^2\omega^2}{3c_P k_B}\psi(\mathrm{Pr}), \tag{18}$$

где ρ — плотность континуума, $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, а ψ — некоторая функция, в первом приближении являющаяся линейной. Как видно, соотношение (18) хорошо выполняется, если угловая скорость вращения достаточно велика. Заметим также, что в оценку (18) мы ввели постоянную Больцмана для автоматического перехода к температурной шкале. При выполнении неравенства (18) температура T^* может быть найдена из решения уравнения (17). Действительно, если закон изменения вязкости известен (подробности см. в [10]), то эмпирически установленную зависимость можно выбрать, например, в виде степенной

$$\eta = \eta_0\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\mu}, \tag{19}$$

где μ — известный показатель степени. Уравнение (17) легко решить, подставив в него явную зависимость (19). В результате из (17) следует, что

$$x = 1 - \frac{a}{x^{\mu}}, \tag{20}$$

где введены безразмерный аргумент $x = T/T_0$ и параметр

$$a = \frac{21\omega^2\delta^2\eta_0}{3k_B T_0\kappa}. \tag{21}$$

Уравнение (20) будет иметь решение только в том случае, если обе функции в левой и правой частях имеют одно касание в некоторой точке, которая определяется из условия равенства производных от обеих частей уравнения (20), т.е. в точке

$$x_0 = (a\mu)^{\frac{1}{1+\mu}}. \tag{22}$$

Таким образом, решение уравнения существует только при выполнении условия

$$(a\mu)^{\frac{1}{1+\mu}} > 1. \tag{23}$$

Если условие (23) не выполняется, то нагревания нет. В соответствии с определением $x = T/T_0$ легко понять, что наиболее интересен случай, когда выполняются два условия: $\mu > 1$ и $a > 1$. В этом случае стационарная температура, до которой в реальности может нагреться вращающийся шар согласно (22), будет

$$T^* = (a\mu)^{\frac{1}{1+\mu}}T_0. \tag{24}$$

2.3. Численная оценка. К примеру, пусть частота вращения $\omega = 10^5\ \mathrm{с}^{-1}$, динамическая вязкость $\eta_0 = 10^{-2}$ г/(см·с), переходная область (или иначе, область взаимодействия объема шара с его поверхностным слоем, который считается термостатом) имеет характериный размер $\delta = 10^{-3}$ см, температура $T_0 = 300\,\mathrm{K}$, коэффициент теплопроводности $\kappa = 10^{20}$ (см·с)$^{-1}$, постоянная Больцмана $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ К/эрг. В результате приходим к оценке

$$a = \frac{32 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 300 \cdot 10^{20}} \approx 1.9 > 1. \tag{25}$$

Заметим, что если частота вращения шара невелика, то нагревания не будет. Конкретное значение температуры согласно (24) можно оценить, зная степенной закон убывания вязкости с ростом температуры, т.е. показатель степени μ. Эмпирически полученные зависимости коэффициента динамической вязкости от температуры чрезвычайно разнообразны и весьма часто (см. [1, 5, 9]) описываются экспоненциальными законами убывания типа

$$\eta(T) = \eta_0 \exp \frac{\Delta E}{T}, \tag{26}$$

где ΔE — энергия активации молекул жидкости, а ν_0 — практически не зависящая от температуры константа, имеющая размерность вязкости. Совершенно ясно, что зависимости и (19) и (26) в определенных диапазонах температур качественно весьма похожи, и поэтому мы остановились на выборе зависимости в виде степенной согласно (19), как было предложено, например, в [8]. Возвращаясь к уравнению (16), с учетом (19) имеем

$$\dot{x} = -x + 1 + \frac{a}{x^\mu}, \tag{27}$$

где точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ:

$$\tau = \frac{\kappa}{\delta^2 c_P} t. \tag{28}$$

Безразмерный параметр, введенный выше, удобно записать в более общей форме:

$$a = \frac{32\rho\delta^2\omega^2}{3T_0 c_P}\psi(\mathrm{Pr}), \tag{29}$$

где $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля.

2.4. Характерное время нагрева. Записывая уравнение (27) вблизи стационарной точки, имеем

$$\dot{x} \approx -\gamma(x - x^*) + \beta(x - x^*)^2 + \ldots, \tag{30}$$

где $\gamma = 1 + \mu$, $\beta = \mu(1+\mu)/a^{1/(1+\mu)}$. Поэтому характерное время, через которое температура достигнет максимума, можно оценить по формуле

$$\bar{t} \approx \frac{(1+\mu)\delta^2}{\chi} \tag{31}$$

с перенормированным решением (23):

$$T^* \approx T_0 a^{1/(1+\mu)} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Обратим внимание, что время разогрева в соответствии с (31) существенно зависит от температурного изменения вязкости.

3. Заключение. В заключение работы кратко сформулируем основные результаты.

1. Получено уравнение, описывающее нестационарное поведение температуры и учитывающее нелинейную температурную зависимость динамической вязкости.
2. Исследован процесс нестационарного повышения температуры вращающегося с постоянной угловой частотой шара и найдено предельное значение возможной температуры нагрева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гатчек Э.* Вязкость жидкостей. — Л.: ОНТИ, 1935.
2. *Гладков С. О.* К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра// Ж. техн. физ. — 2018. — *88*, № 3. — С. 337–341.
3. *Гладков С. О.* К вопросу приложения второй ковариантной производной от векторной функции к задачам гидродинамики и теории упругости// Вестн. МГОУ. Сер. Физ. — 2019. — *88*. — С. 42–67.
4. *Гладков С. О., Богданова С. Б.* К нелинейной теории теплопроводности// Ж. техн. физ. — 2016. — *86*, № 2. — С. 1–7.
5. *Глесстон С., Лейдлер К., Эйринг Г.* Теория абсолютных скоростей реакций. — М.: ИЛ, 1948.
6. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 2002.

8. *Севастьянов Р. М.* Зависимость вязкости от температуры// Уч. зап. ЦАГИ. — 1974. — *5*, № 3. — С. 111–114.
9. *Фогельсон Р. Л., Лихачев Е. Р.* Температурная зависимость вязкости// Ж. техн. физ. — 2001. — *71*, № 8. — С. 128–131.
10. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. — Л.: Наука, 1975.

Гладков Сергей Октябринович
Московский авиационный институт
E-mail: `sglad51@mail.ru`