ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 114–130
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-114-130

УДК 517.968.74

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БУССИНЕСКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2022 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Ф. Д. РАХМОНОВ, А. С. ИСМОИЛОВ**

Аннотация. В работе доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для трехмерного линейного интегро-дифференциального уравнения Буссинеска высокого порядка с вырожденным ядром и общими интегральными условиями и построено решение в виде ряда Фурье. Обоснованы абсолютная и равномерная сходимость полученного ряда и возможность почленного дифференцирования решения по всем переменным. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной краевой задачи в случае регулярных значений параметра. Для иррегулярных значений параметра построено бесконечное множество решений в виде ряда Фурье.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, уравнение Буссинеска, смешанная производная, однозначная разрешимость, интегральное условие, вырожденное ядро.

BOUSSINESQ INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH INTEGRAL CONDITIONS AND A SMALL COEFFICIENT OF MIXED DERIVATIVES

© 2022 **T. K. YULDASHEV, F. D. RAKHMONOV, A. S. ISMOILOV**

Abstract. In this paper, we prove the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for a high-order, three-dimensional, linear Boussinesq integro-differential equation with a degenerate kernel and general integral conditions and construct a solution in the form of a Fourier series. The absolute and uniform convergence of the resulting series and the possibility of term-by-term differentiation of the solution with respect to all variables are established. A criterion for the unique solvability of the boundary-value problem in the case of regular values of the parameter is obtained. For irregular values of the parameter, an infinite set of solutions is constructed in the form of a Fourier series.

Keywords and phrases: integro-differential equation, Boussinesq equation, mixed derivative, unique solvability, integral condition, degenerate kernel.

AMS Subject Classification: 35A02, 35M10, 35S05

1. Постановка задачи. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных. Поэтому теория смешанных задач в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. Исследованию краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество публикаций (см. [1–4,8,15,17]). В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Такие нелокальные задачи рассматривались в работах многих авторов (см. [6, 9, 18, 19]). При исследовании дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных часто применяется метод разделения переменных (см. [10–14, 16, 20, 22, 23]). Отметим, что интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с вырожденным ядром рассматривались в работах многих авторов (см. [5, 7, 24, 25, 27–30]).

В данной работе при помощи метода вырожденного ядра доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для трехмерного линейного интегро-дифференциального уравнения Буссинеска высокого порядка с вырожденным ядром и общими интегральными условиями в трехмерной области $\Omega = \{(t,x,y) : 0 < t < \beta,\ 0 < x,y < l\}$. С помощью метода рядов Фурье, основанного на разделении переменных, получена счетная система линейных интегральных уравнений Фредгольма.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\varepsilon\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial x^{2k}} + \varepsilon\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial y^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right)\right] U(t,x,y) = \\ = \nu\int_0^\beta K(t,s)U(s,x,y)ds + f(t)\int_0^\beta U(\theta,x,y)d\theta, \quad (1)$$

где $k \in \mathbb{N}$, β и l — заданные положительные действительные числа, ν — действительный параметр, отличный от нуля, ε — малый положительный параметр, $f(t) \in C[0;\beta]$,

$$0 \neq K(t,s) = \sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s),$$

$a_i(t), b_i(s) \in C[0;\beta]$. Здесь предполагается, что система функций $\{a_i(t)\}_{i=1}^k$ и система функций $\{b_i(s)\}_{i=1}^k$ являются линейно независимыми в совокупности.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) будем рассматривать при нелокальных интегральных условиях

$$U(0,x,y) + \int_0^\beta U(t,x,y)dt = \varphi(x,y), \quad 0 \leqslant x,y \leqslant l, \quad (2)$$

$$U_t(0,x,y) + \int_0^\beta U_t(t,x,y)dt = \psi(x,y), \quad 0 \leqslant x,y \leqslant l \quad (3)$$

и граничных условиях типа Бенара

$$U(t,x,y)\big|_{x=0} = U(t,x,y)\big|_{x=l} = U(t,x,y)\big|_{y=0} = U(t,x,y)\big|_{y=l} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,x,y)\big|_{x=0} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,x,y)\big|_{x=l} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(t,x,y)\big|_{y=0} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(t,x,y)\big|_{y=l} = \ldots = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}U(t,x,y)\big|_{x=0} = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}U(t,x,y)\big|_{x=l} = \\ = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}U(t,x,y)\big|_{y=0} = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}U(t,x,y)\big|_{y=l} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta, \quad (4)$$

где $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(x,y)\big|_{x=0}=\varphi(x,y)\big|_{x=l}=\varphi(x,y)\big|_{y=0}=\varphi(x,y)\big|_{y=l}=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,y)\Big|_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,y)\Big|_{x=l}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(x,y)\Big|_{y=l}=\ldots=$$
$$=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}\varphi(x,y)\Big|_{x=0}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}\varphi(x,y)\Big|_{x=l}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}\varphi(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}\varphi(x,y)\Big|_{y=l}=$$
$$=\psi(x,y)\big|_{x=0}=\psi(x,y)\big|_{x=l}=\psi(x,y)\big|_{y=0}=\psi(x,y)\big|_{y=l}=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y)\Big|_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y)\Big|_{x=l}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y)\Big|_{y=l}=\ldots=$$
$$=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}\psi(x,y)\Big|_{x=0}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}\psi(x,y)\Big|_{x=l}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}\psi(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}\psi(x,y)\Big|_{y=l}=0. \quad (5)$$

Задача. Найти в области Ω неизвестную функцию $U(t,x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) и заданным условиям (2)–(4), а также следующим условиям:

$$U(t,x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,2k,2k}(\Omega)\cap C^{2+2k+0}_{t,x,y}\cap C^{2+0+2k}_{t,x,y}, \quad (6)$$

где $\overline{\Omega}=\{(t,x,y): 0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x,y\leqslant l\}$.

2. Разложение формального решения задачи в ряд Фурье. Будем искать нетривиальные решения задачи в виде ряда Фурье

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (7)$$

где

$$u_{n,m}(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^l U(t,x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy, \quad n,m=1,2,3,\ldots,$$
$$\vartheta_{n,m}(x,y)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right).$$

Подставляя ряд (7) в интегро-дифференциальное уравнение (1), получаем следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$u''_{n,m}(t)+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)u_{n,m}(t)=\frac{\nu}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}\int\limits_0^{\beta}\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)u_{n,m}(s)ds+\frac{\nu}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}f(t)\int\limits_0^{\beta}u_{n,m}(\theta)d\theta, \quad (8)$$

где

$$\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)=\frac{\mu^{2k}_{n,m}}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}, \quad \mu^{2k}_{n,m}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k}(n^{2k}+m^{2k}).$$

Вводя обозначения

$$\tau_{i,n,m}=\int\limits_0^{\beta}b_i(s)u_{n,m}(s)ds, \quad (9)$$

перепишем систему (8) в виде

$$u''_{n,m}(t)+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)u_{n,m}(t)=\frac{\nu}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}\sum_{i=1}^{k}a_i(t)\tau_{i,n,m}+\frac{\nu}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}f(t)\int\limits_0^{\beta}u_{n,m}(\theta)d\theta. \quad (10)$$

Систему дифференциальных уравнений (10) будем решать методом вариации произвольных постоянных:

$$u_{n,m}(t)=c_{n,m}\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon))+d_{n,m}\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon))+$$
$$+\frac{\nu}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\sum_{i=1}^{k}\tau_{i,n,m}\int_0^t\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))a_i(s)ds+$$
$$+\frac{\nu}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\int_0^\beta u_{n,m}(\theta)d\theta\int_0^t\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))f(s)ds. \quad (11)$$

Интегральные условия (2) и (3) запишем в виде

$$u_{n,m}(0)+\int_0^\beta u_{n,m}(t)dt=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l\left[U(0,x,y)+\int_0^\beta U(t,x,y)dt\right]\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy=$$
$$=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l\varphi(x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy=\varphi_{n,m}, \quad (12)$$

$$u'_{n,m}(0)+\int_0^\beta u'_{n,m}(t)dt=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l\left[U_t(0,x,y)+\int_0^\beta U_t(t,x,y)dt\right]\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy=$$
$$=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l\psi(x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy=\psi_{n,m}. \quad (13)$$

Для нахождения коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$ в (11) воспользуемся условиями (12) и (13):

$$\varphi_{n,m}=u_{n,m}(0)+\int_0^\beta u_{n,m}(t)dt=c_{n,m}\left(1+\frac{1}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\right)+$$
$$+\frac{d_{n,m}}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))+\gamma_{1n,m}+\gamma_{2n,m},$$

$$\psi_{n,m}=u'_{n,m}(0)+\int_0^\beta u'_{n,m}(t)dt=\frac{c_{n,m}}{\lambda_{n,m}^2(\varepsilon)}(\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)-1)+$$
$$+\frac{d_{n,m}}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}\left(1+\frac{1}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\right)+\eta_{1n,m}(\beta)+\eta_{2n,m}(\beta),$$

где

$$\gamma_{in,m}=\int_0^\beta\eta_{in,m}(t)dt, \quad \eta_{1n,m}(t)=\nu\sum_{i=1}^{k}\tau_{i,n,m}\xi_{i,n,m}(t), \quad \eta_{2n,m}(t)=\chi_{n,m}(t)\int_0^\beta u_{n,m}(\theta)d\theta,$$

$$\xi_{i,n,m}(t)=\frac{1}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\int_0^t\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))a_i(s)ds,$$

$$\chi_{n,m}(t)=\frac{\nu}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\int_0^t\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))f(s)ds.$$

Отсюда получаем следующую систему, состоящую из счетных систем алгебраических уравнений для определения коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$:

$$\begin{cases} c_{n,m}(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))+d_{n,m}(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =\lambda_{n,m}(\varepsilon)(\varphi_{1n,m}-\gamma_{1n,m}-\gamma_{2n,m}), \\ c_{n,m}(\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)-1)+d_{n,m}(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)(\varphi_{2n,m}-\eta_{1n,m}(\beta)-\eta_{2n,m}(\beta)). \end{cases} \tag{14}$$

Для однозначной разрешимости системы (14) требуется выполнение следующего условия:

$$A_{n,m}=(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))^2+(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))^2=$$
$$=\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)+2(1+\lambda_{n,m}(\varepsilon)\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))\neq 0. \tag{15}$$

Рассуждая от противного, покажем, что условие (15) выполняется при любых натуральных n, m. Предположим, что условие (15) нарушего. Тогда справедливо равенство

$$A_{n,m}=\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)+2(1+\lambda_{n,m}(\varepsilon)\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))=0.$$

Это условие эквивалентно тригонометрическому уравнению

$$\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta+\theta_{n,m})=\frac{2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}{2\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}},$$

где

$$\theta_{n,m}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}}.$$

Учтем, что $0<\lambda_{n,m}(\varepsilon)<1$. Покажем, что правая часть тригонометрического уравнения больше единицы:

$$\frac{2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}{2\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}}>1.$$

Действительно,

$$2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)>2\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}.$$

Каждое из этих выражений в неравенстве больше единицы. Поэтому их можно возвести в квадрат:

$$(2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon))^2>4(1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)) \quad\Longleftrightarrow\quad 4+4\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)+(\lambda^2_{n,m}(\varepsilon))^2>4+4\lambda^2_{n,m}(\varepsilon).$$

Отсюда $(\lambda^2_{n,m}(\varepsilon))^2>0$. Следовательно,

$$\frac{2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}{2\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}}>1.$$

Поэтому данное тригонометрическое уравнение не имеет решений; противоречие. Следовательно, при любых натуральных n, m условие (15) выполняется. Поэтому система (14) имеет единственное решение

$$c_{n,m}=\frac{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}{A_{n,m}}\Big[\big(\varphi_{n,m}-\gamma_{n,m}\big)\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\big)-$$
$$-\lambda_{n,m}(\varepsilon)\big(\psi_{n,m}-\eta_{n,m}(\beta)\big)\big(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\big)\Big],$$

$$d_{n,m}=\frac{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}{A_{n,m}}\Big[\big(\varphi_{n,m}-\gamma_{n,m}\big)\big(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\big)+$$
$$+\lambda_{n,m}(\varepsilon)\big(\psi_{n,m}-\eta_{n,m}(\beta)\big)\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\big)\Big].$$

Подставляя эти найденные коэффициенты в представление (11), получаем представление

$$u_{n,m}(t,\nu) = D_{n,m}(t) - \nu \sum_{i=1}^{k} \tau_{i,n,m} E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \int_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta, \tag{16}$$

где

$$D_{n,m}(t) = \varphi_{n,m} B_{1n,m}(t) + \psi_{n,m} B_{2n,m}(t),$$

$$E_{in,m}(t) = B_{1n,m}(t) \int_0^\beta \xi_{in,m}(t) dt + B_{2n,m}(t) \xi_{in,m}(\beta) - \xi_{in,m}(t),$$

$$F_{n,m}(t) = B_{1n,m}(t) \int_0^\beta \chi_{n,m}(t) dt + B_{2n,m}(t) \chi_{n,m}(\beta) - \chi_{n,m}(t),$$

$$B_{1n,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}{A_{n,m}} \times$$
$$\times \Big[\cos\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)t\big)\Big(\lambda_{n,m}(\varepsilon) + \sin\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta\big)\Big) + \sin\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)t\big)\Big(1 - \cos\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta\big)\Big)\Big],$$

$$B_{2n,m}(t) = \frac{\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}{A_{n,m}} \times$$
$$\times \Big[\cos\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)t\big)\big(\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta) - 1\big) + \sin\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)t\big)\Big(\lambda_{n,m} + \sin\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta\big)\Big)\Big].$$

Подставляя (16) в (9), получаем следующую систему, состоящую из счетных систем алгебраических уравнений:

$$\tau_{in,m} + \nu \sum_{j=1}^{k} \tau_{jn,m} H_{ijn,m} = \Psi_{in,m}, \tag{17}$$

где

$$H_{ijn,m} = \int_0^\beta b_i(s) E_{jn,m}(s) ds, \quad \Psi_{in,m} = \int_0^\beta b_i(s) \left[D_{n,m}(s) - F_{n,m}(s) \int_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta \right] ds.$$

Отметим, что из линейной независимости систем функций $a_i(t)$ и $b_i(s)$ следует, что $H_{ijn,m} \neq 0$. Система (17) однозначно разрешима при любых конечных $\Psi_{in,m}$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta_{n,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \nu H_{12n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & 1+\nu H_{22n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu H_{k1n,m} & \nu H_{k2n,m} & \dots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

Решения системы (17) записываются в виде

$$\tau_{in,m} = \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} - \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \int_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta, \quad i = \overline{1,k}, \tag{19}$$

где

$$\Delta_{jn,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \dots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{j1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & \dots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{j2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu H_{k1n,m} & \dots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{jkn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

$$\Psi_{1in,m} = \int\limits_0^\beta b_i(s) D_{n,m}(s) ds, \quad \Psi_{2in,m} = \int\limits_0^\beta b_i(s) F_{n,m}(s) ds.$$

Подставляя решения (19) системы (17) в представление (16), получаем

$$u_{n,m}(t,\nu) = D_{n,m}(t) -$$
$$- \nu \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} - \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta \right] E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta. \quad (20)$$

Теперь представление (20) подставим в ряд Фурье (7):

$$U(t,x,y,\nu) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \vartheta_{n,m}(x,y) \Bigg\{ D_{n,m}(t) -$$
$$- \nu \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} - \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta \right] E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta \Bigg\}, \quad (21)$$

где

$$\vartheta_{n,m}(x,y) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l} y\right).$$

3. Исследование однородной задачи. Исследуем случай, когда $f(t) = 0$ для всех $t \in [0;\beta]$. Тогда вместо ряда (21) получим следующий упрощенный ряд Фурье:

$$U(t,x,y,\nu) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[D_{n,m}(t) - \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} E_{in,m}(t) \right] \vartheta_{n,m}(x,y). \quad (22)$$

3.1. Регулярный случай параметра ν. Определитель $\Delta_{n,m}(\nu)$ в (18) является многочленом относительно ν степени не выше k. Уравнение $\Delta_{n,m}(\nu)$ имеет не более k различных корней. Эти корни являются собственными числами (иррегулярными значениями параметра ν) ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Множество иррегулярных значений параметра ν обозначим через $\Im$, а множество значений параметра $\nu \in \Lambda = ((-\infty;0) \cup (0;\infty)) \setminus \Im$ назовём регулярным. Для регулярных значений параметра $\nu \in \Lambda$ условие (18) выполняется. Поэтому для таких значений $\nu \in \Lambda$ имеет место разложение (22) и устанавливается однозначная разрешимость поставленной нелокальной задачи.

Покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (22) для всех регулярных значений параметра $\nu \in \Lambda$. С этой целью сначала рассмотрим сходимость следующего ряда:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} D_{n,m}(t) \vartheta_{n,m}(x,y). \quad (23)$$

Учтем, что $D_{n,m}(t) = \varphi_{n,m} B_{1n,m}(t) + \psi_{n,m} B_{2n,m}(t)$. Так как справедливы неравенства $0 < \lambda_{n,m}(\varepsilon) < 1$, гладкие функции $B_{1n,m}(t)$ и $B_{2n,m}(t)$ ограничены вместе со своими производными второго порядка. Поэтому справедливы оценки

$$|D_{n,m}(t)| \leqslant C_1 \cdot [|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|], \quad (24)$$
$$|D''_{n,m}(t)| \leqslant C_1 \cdot [|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|], \quad (25)$$

где $0 < C_1 = \mathrm{const}$.

Условия *A.* Пусть $\varphi(x,y) \in C^{2k}([0;l] \times [0;l])$, $\psi(x,y) \in C^{2k}([0;l] \times [0;l])$ и в области $[0;l] \times [0;l]$ имеют также кусочно непрерывные производные порядка $2k+1$.

При выполнении условий A справедливы следующие формулы:

$$|\varphi_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{2k+1} \frac{\left|\varphi_{n,m}^{(2k+1)}\right|}{n^{2k+1}}, \quad \left|\varphi_{n,m}^{(2k+1)}\right| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{2k+1} \frac{\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|}{m^{2k+1}}, \tag{26}$$

$$|\psi_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{2k+1} \frac{\left|\psi_{n,m}^{(2k+1)}\right|}{n^{2k+1}}, \quad \left|\psi_{n,m}^{(2k+1)}\right| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{2k+1} \frac{\left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|}{m^{2k+1}}, \tag{27}$$

где

$$\varphi_{n,m}^{(2k+1)} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \varphi(x,y) \vartheta_{n,m}(x,y) dxdy, \tag{28}$$

$$\varphi_{n,m}^{(4k+2)} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \vartheta_{n,m}(x,y) dxdy, \tag{29}$$

$$\psi_{n,m}^{(2k+1)} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \psi(x,y) \vartheta_{n,m}(x,y) dxdy, \tag{30}$$

$$\psi_{n,m}^{(4k+2)} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \vartheta_{n,m}(x,y) dxdy. \tag{31}$$

Из соотношения (26) и (27) получаем, что справедливы формулы

$$|\varphi_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+2} \frac{\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|}{n^{2k+1} m^{2k+1}}, \quad |\psi_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+2} \frac{\left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|}{n^{2k+1} m^{2k+1}}. \tag{32}$$

Для коэффициентов Фурье (28)–(31) справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right]^2 \leqslant \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y)\right]^2 dxdy, \tag{33}$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right]^2 \leqslant \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y)\right]^2 dxdy. \tag{34}$$

С учетом оценки (24), формулы (32) и неравенства Бесселя (33), (34) и применением неравенство Коши—Буняковского получаем оценку

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} D_{n,m}(t) \vartheta_{n,m}(x,y) \leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} |D_{n,m}(t)| \cdot |\vartheta_{n,m}(x,y)| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \Big[|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|\Big] \leqslant \gamma_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1} m^{2k+1}} \Big[\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right| + \left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_1 \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(nm)^{4k+2}}} \left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\gamma_1}{l}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{4k+2}}}\left[\sqrt{\int\limits_0^l\int\limits_0^l\left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}}\varphi(x,y)\right]^2dxdy}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\int\limits_0^l\int\limits_0^l\left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}}\psi(x,y)\right]^2dxdy}\right]<\infty, \quad (35)$$

где

$$\gamma_1 = C_1\cdot\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+2}.$$

Отсюда заключаем, что ряд (23) сходится абсолютно и равномерно в области Ω. Теперь рассмотрим сходимость ряда

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)\vartheta_{n,m}(x,y). \quad (36)$$

Учтем, что

$$E_{in,m}(t)=B_{1n,m}(t)\int\limits_0^{\beta}\xi_{in,m}(t)dt+B_{2n,m}(t)\xi_{in,m}(\beta)-\xi_{in,m}(t),$$

$$\xi_{i,n,m}(t)=\frac{1}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\int\limits_0^t\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))a_i(s)ds, \quad i=\overline{1,k}.$$

Тогда из гладкости этих функций получаем, что

$$|E_{in,m}(t)|\leqslant C_{i2}, \quad |E''_{in,m}(t)|\leqslant C_{i2}, \quad (37)$$

где $0<C_{i2}=\text{const}$, $i=\overline{1,k}$. Из выполнения условия (18) следует, что $|\Delta_{n,m}(\nu)|>0$. В состав определителей $\Delta_{in,m}(\nu)$ входят столбцы

$$\Psi_{in,m}=\int\limits_0^{\beta}b_i(s)D_{n,m}(s)ds, \quad \text{где} \quad D_{n,m}(t)=\varphi_{n,m}B_{1n,m}(t)+\psi_{n,m}B_{2n,m}(t).$$

С учетом соотношений (32)–(34) и (37) аналогично оценке (35) покажем, что ряд (36) сходится абсолютно и равномерно в области Ω. Действительно, применяя неравенство Коши—Буняковского к (36), получаем оценку

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)\vartheta_{n,m}(x,y)\leqslant\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{|\Delta_{n,m}(\nu)|}\sum_{i=1}^{k}|\Delta_{1in,m}(\nu)|\cdot|E_{in,m}(t)|\leqslant$$

$$\leqslant C_3\sum_{n,m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}C_{i2}|\Delta_{in,m}(\nu)|\leqslant C_1C_3\sum_{n,m=1}^{\infty}[|\varphi_{1n,m}|+|\varphi_{2n,m}|]\sum_{i=1}^{k}C_{i2}|\overline{\Delta}_{1in,m}(\nu)|\leqslant$$

$$\leqslant\gamma_2\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{4k+2}}}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2}+\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2}\right]\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\gamma_2}{l}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{4k+2}}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}}\varphi(x,y)\right]^2dxdy}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}}\psi(x,y)\right]^2dxdy}\right]<\infty, \quad (38)$$

где

$$\gamma_2 = C_1\cdot C_3\cdot C_4\cdot\left(\frac{l}{\pi}\right)^6, \quad C_3\geqslant\min_{n,m}\frac{1}{|\Delta_{n,m}(\nu)|}, \quad C_4\geqslant\sum_{i=1}^{k}C_{i2}|\overline{\Delta}_{1in,m}(\nu)|,$$

$$\overline{\Delta}_{1in,m}(\nu)=\begin{vmatrix}1+\nu H_{11n,m} & \ldots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \overline{\psi}_{1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \ldots & \nu H_{1kn,m}\\ \nu H_{21n,m} & \ldots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \overline{\psi}_{2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \ldots & \nu H_{2kn,m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \nu H_{k1n,m} & \ldots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \overline{\psi}_{kn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \ldots & 1+\nu H_{kkn,m}\end{vmatrix},$$

$$\overline{\psi}_{in,m}=\int_0^{\beta}b_i(s)ds, \quad i=\overline{1,k}.$$

Из оценки (38) заключаем, что ряд (36) сходится абсолютно и равномерно в области Ω. Из сходимости рядов (35) и (38) следует сходимость ряда (22). Для ряда (22) при всех регулярных значениях параметра $\nu\in\Lambda$ покажем непрерывность всех производных, входящих в уравнение (1). Формально дифференцируем ряд (22) нужное число раз:

$$U_{tt}(t,x,y,\nu)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[D''_{n,m}(t)-\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E''_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (39)$$

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}U(t,x,y,\nu)=(-1)^k\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^{2k}\left[D_{n,m}(t)-\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (40)$$

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}U(t,x,y,\nu)=(-1)^k\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^{2k}\left[D_{n,m}(t)-\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (41)$$

$$\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial x^{2k}}U(t,x,y,\nu)=(-1)^k\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^{2k}\left[D''_{n,m}(t)-\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E''_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (42)$$

$$\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial y^{2k}}U(t,x,y,\nu)=(-1)^k\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^{2k}\left[D''_{n,m}(t)-\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E''_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y). \quad (43)$$

Применим к ряду (39) сначала формулу (32) и оценки (25), (35), а затем неравенство Коши—Буняковского и оценки (33)–(35), (37), (38). Тогда получим

$$|U_{tt}(t,x,y,\nu)|\leqslant\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[|D''_{n,m}(t)|+|\nu|\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\right|\cdot|E''_{in,m}(t)|\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{l}\gamma_1\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{2k+1}}\left[\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|+\left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|\right]+\frac{2}{l}\gamma_2|\nu|\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{2k+1}}\left[\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|+\left|\psi_{n,m}^{4k+2}\right|\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{l}\bigl(\gamma_1+\gamma_2|\nu|\bigr)\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{4k+2}}}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2}+\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2}\right]\leqslant$$

$$\leqslant \gamma_3 \left[\sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \right]^2 dxdy} + \sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \right]^2 dxdy} \right] < \infty, \quad (44)$$

где

$$\gamma_3 = \frac{2}{l}(\gamma_1 + \gamma_2 |\nu|) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k+2} m^{4k+2}}}.$$

Применим к ряду (40) сначала формулу (32) и оценки (24), (35), а затем неравенство Коши—Буняковского и оценки (33)–(35), (37), (38). Тогда аналогично (44) получим

$$\left| \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} U_{xx}(t,x,y,\nu) \right| \leqslant \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left[|D_{n,m}(t)| + |\nu| \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \right| \cdot |E_{in,m}(t)| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k} \left\{ \gamma_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^1 m^{2k+1}} \left[\left| \varphi_{n,m}^{(4k+2)} \right| + \left| \psi_{n,m}^{(4k+2)} \right| \right] + \right.$$

$$\left. + \gamma_2 |\nu| \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^1 m^{2k+1}} \left[\left| \varphi_{n,m}^{(4k+2)} \right| + \left| \psi_{n,m}^{(4k+2)} \right| \right] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (\gamma_1 + \gamma_2 |\nu|) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^{4k+2}}} \left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left| \varphi_{n,m}^{(4k+2)} \right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left| \psi_{n,m}^{(4k+2)} \right|^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_4 \left[\sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \right]^2 dxdy} + \sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \right]^2 dxdy} \right] < \infty, \quad (45)$$

где

$$\gamma_4 = \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k} (\gamma_1 + \gamma_2 |\nu|) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^{4k+2}}}.$$

Применим к ряду (41) сначала формулу (32) и оценки (24), (35), а затем неравенство Коши—Буняковского и оценки (33)–(35), (37), (38). Тогда аналогично (45) получим

$$\left| \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} U(t,x,y,\nu) \right| \leqslant \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^{2k} \left[|D_{n,m}(t)| + |\nu| \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \right| \cdot |E_{in,m}(t)| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k} \left\{ \gamma_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1} m^1} \left[\left| \varphi_{n,m}^{(4k+2)} \right| + \left| \psi_{n,m}^{(4k+2)} \right| \right] + \right.$$

$$\left. + \gamma_2 |\nu| \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1} m^1} \left[\left| \varphi_{n,m}^{(4k+1)} \right| + \left| \psi_{n,m}^{(2k+1)} \right| \right] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k} (\gamma_1 + \gamma_2 |\nu|) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k+2} m^2}} \left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left| \varphi_{n,m}^{(4k+2)} \right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left| \psi_{n,m}^{(4k+2)} \right|^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_5 \left[\sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \right]^2 dxdy} + \sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \right]^2 dxdy} \right] < \infty, \quad (46)$$

где

$$\gamma_5 = \frac{2}{l}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k}(\gamma_1+\gamma_2|\nu|)\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k+2}m^2}}.$$

Аналогично оценкам (44)–(46) для рядов (42) и (43) легко показать, что

$$\left|\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial x^{2k}}U(t,x,y,\nu)\right|<\infty, \quad \left|\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial y^{2k}}U(t,x,y,\nu)\right|<\infty.$$

Следовательно, решение $U(t,x,y,\nu)$ задачи существует в области Ω, определено рядом (22) и удовлетворяет условию (6).

Теперь покажем при всех регулярных значениях $\nu\in\Lambda$ единственность решения задачи. Предположим, что $\varphi(x,y)\equiv 0$, $\psi(x,y)\equiv 0$. Тогда $\varphi_{n,m}\equiv 0$, $\psi_{n,m}\equiv 0$. Поэтому

$$D_{n,m}(t)=\varphi_{n,m}B_{1n,m}(t)+\psi_{n,m}B_{2n,m}(t)\equiv 0,$$

$$\Psi_{in,m}=\int\limits_0^{\beta} b_i(s)D_{n,m}(s)ds\equiv 0, \quad \Delta_{in,m}(\nu)\equiv 0, \quad i=\overline{1,k}.$$

Следовательно, из формулы (22) вытекают равенства

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^l U(t,x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy=0, \quad n,m=1,2,3,\ldots$$

Отсюда в силу полноты систем собственных функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right\}, \quad \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right)\right\}$$

в пространстве $L_2[0;l]$ заключаем, что $U(t,x,y)\equiv 0$ для всех $x,y\in[0;l]\times[0;l]$ и $t\in[0;\beta]$.

3.2. Иррегулярный случай. Теперь переходим к иррегулярному случаю параметра $\nu\in\Im$. Для этих значений получаем следующую однородную систему, состоящую из счетных систем алгебраических уравнений:

$$\tau_{in,m}+\nu\sum_{j=1}^{k}\tau_{jn,m}H_{ijn,m}=\Psi_{in,m}, \tag{47}$$

где

$$H_{ijn,m}=\int\limits_0^{\beta} b_i(s)E_{jn,m}(s)ds.$$

В качестве необходимого условия существования решения системы (47) выступает условие ортогональности

$$\Psi_{in,m}=\int\limits_0^{\beta} b_i(s)D_{n,m}(s)ds=0.$$

Так как по условию постановки задач $b_i(t)\neq 0$, то согласно теореме о среднем должно быть выполнено условие

$$D_{n,m}(t)=\varphi_{n,m}B_{1n,m}(t)+\psi_{n,m}B_{2n,m}(t)\equiv 0.$$

Поскольку $D_{n,m}(t)\neq 0$, необходимым условием существования решения системы (47) является $\varphi_{n,m}\equiv 0$, $\psi_{n,m}\equiv 0$. При этом система (47) имеет некоторое число p $(1\leqslant p\leqslant k)$ линейно независимых ненулевых вектор-решений $\left\{\tau_{1n,m}^{(\ell)},\tau_{2n,m}^{(\ell)},\ldots,\tau_{kn,m}^{(\ell)}\right\}$, $\ell=\overline{1,p}$. Функции

$$u_{\ell n,m}(t,\nu)=\nu\sum_{i=1}^{k}\tau_{1n,m}^{(\ell)}E_{in,m}(t), \quad \ell=\overline{1,p},$$

будут нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения

$$u_{n,m}(t,\nu) = \nu \sum_{i=1}^{k} \int_0^\beta W_{in,m}(t,s) E_{in,m}(t) u_{n,m}(s,\nu) ds, \tag{48}$$

где $W_{in,m}(t,s) = E_{in,m}(t) b_i(s)$.

Общее решение однородного интегрального уравнения (48) можно записать в виде

$$u_{n,m}(t,\nu) = \sum_{\ell=1}^{p} \sigma_\ell u_{\ell n,m}(t,\nu), \tag{49}$$

где σ_ℓ — произвольные постоянные. Подставляя функцию (49) в ряд Фурье (7), получаем

$$\begin{gathered} U(t,x,y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{p} \sigma_\ell u_{\ell n,m}(t,\nu) \vartheta_{n,m}(x,y), \\ \vartheta_{n,m}(x,y) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l} y\right). \end{gathered} \tag{50}$$

Следовательно, для иррегулярных значений параметра $\nu \in \Im$ справедливо разложение (50). При этом необходимым условием существования решения задачи является однородность краевых условий $\varphi(x,y) \equiv 0$, $\psi(x,y) \equiv 0$.

4. Исследование неоднородной задачи.

4.1. Разрешимость задачи. Рассмотрим регулярные значения параметра $\nu \in \Lambda$. Методом сжимающих отображений докажем существование и единственность счетной системы линейных интегральных уравнений (20). Счетную систему уравнений (20) перепишем в следующем виде:

$$u_{n,m}(t,\nu) = W_{n,m}(t) + V_{n,m}(t) \int_0^\beta u_{n,m}(\theta,\nu) d\theta, \tag{51}$$

$$W_{n,m}(t) = D_{n,m}(t) - \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} E_{in,m}(t), \tag{52}$$

$$V_{n,m}(t) = \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t). \tag{53}$$

Теперь в соответствии с представлением (51) перепишем ряд Фурье (21) в виде

$$U(t,x,y,\nu) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \vartheta_{n,m}(x,y) \left[W_{n,m}(t) + V_{n,m}(t) \int_0^\beta u_{n,m}(\theta,\nu) d\theta \right]. \tag{54}$$

Рассмотрим банахово пространство $B_2(\beta)$ последовательности непрерывных функций

$$\{u_{n,m}(t)\}_{n,m=1}^{\infty}$$

на отрезке $[0;\beta]$ с нормой

$$\|u(t)\|_{B_2(\beta)} = \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\max_{t\in[0;\beta]} |u_{n,m}(t)| \right)^2} < \infty.$$

Итерационный процесс Пикара для счетной системы (51) определим следующим образом:

$$u^0_{n,m}(t,\nu) = W_{n,m}(t), \quad u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) = W_{n,m}(t) + V_{n,m}(t) \int_0^\beta u^q_{n,m}(\theta,\nu) d\theta, \quad q = 0,1,2,\ldots \tag{55}$$

Для первого приближения итерационного процесса (55) справедлива оценка, аналогичная (44):

$$\|u^0_{n,m}(t,\nu)\|_{B_2(\beta)} \leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t\in[0;\beta]} \left[|D_{n,m}(t)| + |\nu| \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \right| \cdot |E_{in,m}(t)| \right] \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_0 \left[\sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \right]^2 dxdy} + \sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \right]^2 dxdy} \right] < \infty, \quad (56)$$

где

$$\gamma_0 = C_1 \cdot \left(\frac{l}{\pi} \right)^{4k+2} \left(1 + C_3 \cdot C_4 \cdot |\nu| \right) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k+2} m^{4k+2}}}.$$

Для произвольной разности приближения (55) получаем оценку

$$\left| u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^q_{n,m}(t,\nu) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0;\beta]} \left| \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \right| \int_0^\beta \left| u^q_{n,m}(\theta,\nu) - u^{q-1}_{n,m}(\theta,\nu) \right| d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \beta C_5 \max_{t\in[0;\beta]} \left| u^q_{n,m}(t,\nu) - u^{q-1}_{n,m}(t,\nu) \right|,$$

где

$$C_5 \geqslant \max_{t\in[0;\beta]} \left| \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \right|.$$

Отсюда имеем оценку

$$\left\| u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^q_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant \beta C_5 \left\| u^q_{n,m}(t,\nu) - u^{q-1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)}. \quad (57)$$

Из оценок (56) и (57) при $\beta C_5 < 1$ следует, что счетная система линейных интегральных уравнений (51) имеет единственное решение на отрезке $[0;\beta]$.

Аналогично оценке (57) получаем оценку

$$\left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant \beta C_5 \left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^q_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant$$
$$\leqslant \beta C_5 \left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) + u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^q_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant$$
$$\leqslant \beta C_5 \left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} + \beta C_5 \left\| u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^q_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)}$$

и далее оценку

$$\left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant \frac{\beta C_5}{1-\beta C_5} \left\| u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^q_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(\beta C_5)^2}{1-\beta C_5} \left\| u^q_{n,m}(t,\nu) - u^{q-1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant \ldots \leqslant \frac{(\beta C_5)^{q+2}}{1-\beta C_5} \left\| u^0_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} < \infty.$$

В силу последней оценки аналогично случаю ряда Фурье (22) доказывается сходимость ряда (54).

4.2. Устойчивость решения от интегральных данных. С учетом представления (52), (53) и равенства

$$D_{n,m}(t) = \varphi_{n,m} B_{1n,m}(t) + \psi_{n,m} B_{2n,m}(t),$$

используя свойства определителя, запишем счетную систему (51) в виде

$$u_{n,m}(t,\nu)=\varphi_{n,m}B_{1n,m}(t)+\psi_{n,m}B_{2n,m}(t)-$$
$$-\nu\sum_{i=1}^{k}\left(\varphi_{n,m}\frac{\Delta_{11in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}+\psi_{n,m}\frac{\Delta_{12in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\right)E_{in,m}(t)+$$
$$+\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)-F_{n,m}(t)\int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta,\nu)d\theta, \quad (58)$$

где

$$\Delta_{1jin,m}(\nu)=\begin{vmatrix}1+\nu H_{11n,m} & \dots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{1j1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m}\\ \nu H_{21n,m} & \dots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{1j2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \nu H_{k1n,m} & \dots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{1jkn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1+\nu H_{kkn,m}\end{vmatrix},$$

$$\Psi_{1jin,m}=\int\limits_0^\beta b_i(s)B_{jn,m}(s)ds, \quad j=1,2.$$

Пусть $U_1(t,x,y,\nu)$ и $U_2(t,x,y,\nu)$ — два разных решения задачи (1)–(6), соответствующие двум различным значениям функций $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ и $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$, соответственно. Положим

$$\max\left\{\left|\varphi_{1n,m}-\varphi_{2n,m}\right|,\ \left|\psi_{1n,m}-\psi_{2n,m}\right|\right\}<\delta_{n,m},$$

где $0<\delta_{n,m}$ — достаточно малое число, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}<\infty.$$

Тогда из счетной системы (58) получим

$$\left|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\varphi_{1n,m}-\varphi_{2n,m}\right|\cdot|B_{1n,m}(t)|+\left|\psi_{1n,m}-\psi_{2n,m}\right|\cdot|B_{2n,m}(t)|+$$
$$+|\nu|\sum_{i=1}^{k}\left(|\varphi_{1n,m}-\varphi_{2n,m}|\cdot\left|\frac{\Delta_{11in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\right|+|\psi_{1n,m}-\psi_{2n,m}|\left|\frac{\Delta_{12in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\right|\right)|E_{in,m}(t)|+$$
$$+|F_{n,m}(t)|\int\limits_0^\beta\left|u_{1n,m}(\theta,\nu)-u_{2n,m}(\theta,\nu)\right|d\theta\leqslant$$
$$\leqslant C_6|\varphi_{1n,m}-\varphi_{2n,m}|+C_7|\psi_{1n,m}-\psi_{2n,m}|+C_5\beta|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)|<$$
$$<(C_6+C_7)\delta_{n,m}+C_5\beta|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)|. \quad (59)$$

Тогда из ряда (54) получим

$$\left|U_1(t,x,y,\nu)-U_2(t,x,y,\nu)\right|<\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}|\vartheta_{n,m}(x,y)|\times$$
$$\times\Big[(C_6+C_7)\delta_{n,m}+C_5\beta|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)|\Big]=$$
$$=\frac{2}{l}(C_6+C_7)\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}|\vartheta_{n,m}(x,y)|+\frac{2}{l}C_5\beta\sum_{n,m=1}^{\infty}|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)|\cdot|\vartheta_{n,m}(x,y)|=$$
$$=\frac{2}{l}(C_6+C_7)\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}+C_5\beta|U_1(t,x,y,\nu)-U_2(t,x,y,\nu)|.$$

Отсюда следует оценка

$$\left|U_1(t,x,y,\nu) - U_2(t,x,y,\nu)\right| < \frac{2}{l} \cdot \frac{C_6 + C_7}{1 - C_5\beta} \sum_{n,m=1}^{\infty} \delta_{n,m}.$$

Если положить

$$\varepsilon = \frac{2}{l} \cdot \frac{C_6 + C_7}{1 - C_5\beta} \sum_{n,m=1}^{\infty} \delta_{n,m},$$

то получим доказательство устойчивости решения задачи (1)–(6) от интегральных данных.

Аналогично доказывается, что решение поставленной нелокальной задачи (1)–(6) непрерывно зависит от малого параметра ε.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия А. Для регулярных значений параметра $\nu \in \Lambda$ при $C_5\beta < 1$, $C_5 = \mathrm{const}$ задача однозначно разрешима в трехмерной области Ω, а решение определяется рядом* (21). *Для иррегулярных значений параметра $\nu \in \Im$ задача имеет бесконечное множество решений в области Ω, которые определяются рядом* (50). *Кроме того, решения нелокальной задачи* (1)–(6) *устойчивы по интегральным данным $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ и по малому параметру ε.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Апаков Ю. П.* О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками// Укр. мат. ж. — 2012. — *64*, № 1. — С. 1–11.
3. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями// Укр. мат. ж. — 2013. — *65*, № 3. — С. 315–328.
4. *Бештоков М. Х.* Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — *54*, № 9. — С. 1497–1514.
5. *Бойчук А. А., Страх А. П.* Нетеровы краевые задачи для систем линейных интегро-динамических уравнений с вырожденным ядром на временной шкале// Нелин. колебания. — 2014. — *17*, № 1. — С. 32–38.
6. *Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды// Мат. модел. — 2000. — *12*, № 1. — С. 94–103.
7. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.* Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегродифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром// Нелин. колебания. — 2015. — *18*, № 4. — С. 489–506.
8. *Джураев Т. Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. — Ташкент: ФАН, 2000.
9. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 4. — С. 547–564.
10. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений// Усп. мат. наук. — 1960. — *15*, № 2 (92). — С. 97–154.
11. *Лажетич Н.* О существовании классического решения смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка// Диффер. уравн. — 1998. — *34*, № 5. — С. 682–694.
12. *Мартемьянова Н. В.* Задача Дирихле для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с переменным потенциалом// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 11. — С. 44–53.
13. *Моисеев Е. И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи// Диффер. уравн. — 1999. — *35*, № 8. — С. 1094–1100.
14. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени// Изв. вузов. Мат. — 2012. — № 10. — С. 32–44.
15. *Репин О. А.* Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа// Докл. РАН. — 1999. — *365*, № 5. — С. 593–595.

16. *Сабитов К. Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 4. — С. 596–602.
17. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990.
18. *Тагиев Р. К., Габибов В. М.* Об одной задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием// Вестн. Самар. техн. ун-та. — 2016. — *20*, № 1. — С. 54–64.
19. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений// Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — *67*, № 2. — С. 133–166.
20. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. — М.: Изд-во МГУ, 1991.
21. *Эгамбердиев У., Апаков Ю. П.* О задаче Дирихле для смешанного эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерной области// Изв. АН УзССР. — 1989. — № 3. — С. 51–56.
22. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 9. — С. 1703–1711.
23. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.
24. *Юлдашев Т. К.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 9. — С. 74–79.
25. *Юлдашев Т. К.* Нелокальная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Укр. мат. ж. — 2016. — *68*, № 8. — С. 1115–1131.
26. *Юлдашев Т. К.* Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка// Изв. ин-та мат. мех. Удмурт. гос. ун-та. — 2016. — *47*, № 1. — С. 119–128.
27. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 101–110.
28. *Юлдашев Т. К.* Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *145*. — С. 95–109.
29. *Юлдашев Т. К.* Обратная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *149*. — С. 129–140.
30. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Boundary-value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel// Ukr. Math. J. — 1996. — *48*, № 11. — P. 1785–1789.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Рахмонов Фарход Дустмуродович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `mr.haker-frd@bk.ru`

Исмоилов Алишер Сидикович
Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
E-mail: `alisher_8778@mail.ru`