ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 83–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-83-95

УДК 517.911

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ДРОБНЫМ ОПЕРАТОРОМ ХИЛЬФЕРА И НЕЛИНЕЙНЫМИ МАКСИМУМАМИ

© 2022 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Б. Ж. КАДИРКУЛОВ**

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы однозначной разрешимости начальной задачи для нелинейного дробного интегро-дифференциального уравнения типа Хильфера с вырожденным ядром и нелинейными максимумами. С помощью несложного интегрального преобразования, основанного на формуле Дирихле, начальная задача сводится к нелинейному дробному интегральному уравнению типа Вольтерра с нелинейными максимумами. Доказана теорема существования и единственности решения заданной начальной задачи на рассматриваемом интервале. Доказана также устойчивость решения по параметру и по начальным данным. Приведены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение, уравнение с нелинейными максимумами, оператор Хильфера, однозначная разрешимость, вырожденное ядро.

ON ONE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL HILFER OPERATOR AND NONLINEAR MAXIMUMS

© 2022 **T. K. YULDASHEV, B. Zh. KADIRKULOV**

Abstract. In this paper, we discuss the unique solvability of the initial-value problem for a nonlinear fractional integro-differential equation of the Hilfer type with a degenerate kernel and nonlinear maximums. USing a simple integral transformation based on the Dirichlet formula, we reduce the initial-value problem to a nonlinear, fractional integral equation of the Volterra type with nonlinear maximums. The theorem of existence and uniqueness of a solution of the initial-value problem considered is proved. The stability of solutions with respect to the parameter and the initial data is also proved. Illustrative examples are given.

Keywords and phrases: ordinary integro-differential equation, equation with nonlinear maximums, Hilfer operator, unique solvability, degenerate kernel.

AMS Subject Classification: 34K29, 45D05, 41A30

1. Постановка задачи. В начале вводной части приведем операторы, которые будут использованы в данной статье. Пусть $(t_0; b) \subset \mathbb{R}^+ \equiv [0;\infty)$ — конечный интервал на множестве положительных действительных чисел, $\alpha > 0$. Дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка α для функции $\eta(t)$ определяется следующим образом:

$$I^{\alpha}_{t_0+}\eta(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\eta(s)ds, \quad \alpha > 0, \quad t \in (t_0; b),$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n-1<\alpha \leqslant n$. Дробная производная Римана—Лиувилля порядка α для функции $\eta(t)$ задается с помощью формулы

$$D^{\alpha}_{t_0+}\eta(t)=\frac{d^n}{dt^n}I^{n-\alpha}_{t_0+}\eta(t), \quad t\in(t_0;b).$$

Дробная производная Герасимова—Капуто порядка α для функции $\eta(t)$ имеет следующий вид (см. [2,12,24,26]):

$${}_*D^{\alpha}_{t_0+}\eta(t)=I^{n-\alpha}_{t_0+}\eta^{(n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\eta^{(n)}(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}, \quad t\in(t_0;b).$$

Такие производные дробного порядка сводятся к следующим производным порядка $\alpha=n\in\mathbb{N}$:

$$D^{n}_{t_0+}\eta(t)={}_*D^{n}_{t_0+}\eta(t)=\frac{d^n}{dt^n}\eta(t), \quad t\in(t_0;b).$$

Дробная производная Хильфера порядка α ($n-1<\alpha\leqslant n$, $n\in\mathbb{N}$) и типа β ($0\leqslant\beta\leqslant 1$) определяется как композиция трех операторов:

$$D^{\alpha,\beta}_{t_0+}\eta(t)=I^{\beta(n-\alpha)}_{t_0+}\frac{d^n}{dt^n}I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{t_0+}\eta(t), \quad t\in(t_0;b).$$

При $\beta=0$ этот оператор сводится к дробной производной Римана—Лиувилля $D^{\alpha,0}_{t_0+}=D^{\alpha}_{t_0+}$. Случай $\beta=1$ соответствует дробной производной Герасимова—Капуто $D^{\alpha,1}_{t_0+}={}_*D^{\alpha}_{t_0+}$. Пусть $\gamma=\alpha+\beta n-\alpha\beta$. Тогда нетрудно убедиться, что $\alpha\leqslant\gamma\leqslant n$. Поэтому для оператора удобно использовать другое обозначение $D^{\alpha,\gamma}\eta(t)=D^{\alpha,\beta}_{t_0+}\eta(t)$. Обобщенный оператор Римана—Лиувилля был введен Р. Хильфером на основе эволюции дробного времени, возникающей при переходе от микроскопического масштаба времени к макроскопическому (см. [10,13]). Используя интегральные преобразования, он исследовал задачу Коши для обобщенного уравнения диффузии, решение которой представлено в виде функции Фокса H. Отметим работы [14,15], в которых обобщенный оператор Римана—Лиувилля использовался для исследования диэлектрической релаксации в стеклообразующих жидкостях различного химического состава. В [16] свойства обобщенного оператора Римана—Лиувилля были исследованы в специальном функциональном пространстве, и был разработан операционный метод решения дробных дифференциальных уравнений с таким оператором. Основываясь на результатах работы [16], авторы [20] разработали операционный метод решения дробно-дифференциальных уравнений, содержащий конечную линейную комбинацию обобщенных операторов Римана—Лиувилля с различными параметрами.

Дробное исчисление играет важную роль в математическом моделировании во многих научных и технических дисциплинах (см. [27]). Например, в [22] рассматриваются задачи сплошной среды и статистической механики. В [11] анализируются математические проблемы модели эпидемии лихорадки Эболы. В [17] и [31] изучаются фракционные модели динамики туберкулезной инфекции и нового коронавируса (nCoV-2019) соответственно. Построение различных моделей теоретической физики с помощью дробного исчисления описано в [13, тт. 4, 5] и [21,30]. Конкретная интерпретация дробной производной Хильфера, описывающей случайное движение частицы, движущейся по действительной прямой с временами шага Пуассона с конечной скоростью, дается в [29]. Подробный обзор применения дробного исчисления при решении задач прикладных наук приведен в [13, тт. 6-8] и [25]. Более подробную информацию, относящуюся к теории дробного интегро-дифференцирования, включая дробную производную Хильфера, можно найти в монографии [28]. В [32] аналитическим методом исследуется однозначная разрешимость краевой задачи для слабых нелинейных уравнений в частных производных смешанного типа с дробным оператором Хильфера. В [33] изучается разрешимость нелокальной задачи для дифференциального уравнения смешанного типа четвертого порядка с дробным оператором Хильфера. В [34] рассматривается обратная задача для интегро-дифференциального уравнения смешанного типа с операторами Герасимова—Капуто дробного порядка. Интересные результаты получены также в [3,8,9,18].

В настоящей статье рассматриваются вопросы однозначной разрешимости дробного интегро-дифференциального уравнения типа Хильфера с вырожденным ядром и нелинейными максимумами. Уравнение будем решать при заданных начальных условиях. Отметим, что дифференциальные уравнения с максимумами играют важную роль в решении задач управления продажей товаров и инвестициями производственных компаний в рыночной экономике (см. [7]). В [4] обоснована актуальность теоретического исследования дифференциальных уравнений с максимумами. Появление интегрального члена в дифференциальном уравнении имеет приложения в теории автоматического регулирования динамическими системами (см. [5, 6]).

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с дробным оператором типа Хильфера на интервале $(t_0; T)$:

$$D^{\alpha,\gamma}x(t) + \omega x(t) = \int\limits_{t_0}^{T} K(t,s)x(s)ds + f\Big(t, x(t), \max\big\{x(\theta)\,\big|\,\theta \in [q_1(t);\ q_2(t)]\big\}\Big) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to+t_0} J_{t_0+}^{2-\gamma}x(t) = \varphi_0, \quad \lim_{t\to+t_0} \frac{d}{dt}J_{t_0+}^{2-\gamma}x(t) = \varphi_1, \quad x(t) = \varphi_2(t), \quad t \notin (t_0, T), \tag{2}$$

где $f(t,u,\vartheta) \in C(\Omega)$, $\varphi_2(t) \in C([0;t_0] \cup [T;\infty))$, $0 < \omega$ — действительный параметр, $\varphi_0, \varphi_1 = \mathrm{const}$, $\Omega \equiv [t_0;T] \times \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, $0 \leqslant t_0$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{R} \equiv (-\infty;\infty)$, $q_i(t) = q_i(t,x(t)) \in C([t_0;T] \times \mathbb{X})$, $i = 1,2$, $\mathbb{X}$ — замкнутое множество. Здесь

$$D^{\alpha,\gamma} = J_{t_0+}^{\gamma-\alpha}\frac{d^2}{dt^2}J_{t_0+}^{2-\gamma}, \quad 1 < \alpha \leqslant 2, \quad \gamma = \alpha + 2\beta - \alpha\beta, \quad \alpha < \gamma \leqslant 2.$$

В данной работе рассмотрим простой случай вырожденного ядра: $K(t,s) = t \cdot s$. Положим $0 < q_1 < q_2 < \infty$. Здесь возможны следующие три случая:

(i) $0 < q_1 < q_2 < 1$;
(ii) $0 < q_1 < 1$, $1 < q_2 < \infty$;
(iii) $1 < q_1 < q_2 < \infty$.

2. Сведение задачи к интегральному уравнению.

Лемма. *Решение интегро-дифференциального уравнения* (1) *с начальными условиями* (2) *представляется следующим образом*:

$$x(t) = \varphi_0(t-t_0)^{\gamma-2}E_{\alpha,\gamma-1}(\omega(t-t_0)^\alpha) + \varphi_1(t-t_0)^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(\omega(t-t_0)^\alpha) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha)[\chi \cdot s + f(s,x(s),\max\{x(\theta) \mid \theta \in [q_1(s);q_2(s)]\})]ds, \tag{3}$$

где $E_{\alpha,\gamma}(z)$ — функция Миттаг-Леффлера, имеющая вид

$$E_{\alpha,\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\gamma)}, \quad z,\alpha,\gamma \in (0;\infty)$$

(см. [13, т. 1, с. 269—295]),

$$q_i(t) = q_i(t,x(t)), \quad i = 1,2, \qquad \chi = \int\limits_{t_0}^{T}\xi x(\xi)d\xi. \tag{4}$$

Доказательство. Перепишем интегро-дифференциальное уравнение (1) в виде

$$J_{t_0+}^{\gamma-\alpha}D_{t_0+}^{\gamma}x(t) = -\omega x(t) + f(t,\cdot),$$

где $f(t,\cdot)=f\big(t,x(t),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(t);\ q_2(t)]\}\big)$. Применяя оператор $J^{\alpha}_{t_0+}$ к обеим частям этого уравнения с учетом линейности данного оператора и формулы

$$J^{\delta}_{t_0+}D^{\delta}_{t_0+}u(t)=u(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^{\delta+k-n}}{\Gamma(\delta+k+1-n)}\lim_{t\to t_0+}\frac{d^k}{dt^k}J^{n-\delta}_{t\to t_0+}u(t),\quad \delta\in(n-1;n]$$

(см. [20]), получаем, что

$$x(t)=-\omega J^{\alpha}_{t_0+}x(t)\frac{\varphi_0}{\Gamma(\gamma-1)}(t-t_0)^{\gamma-2}+\frac{\varphi_1}{\Gamma(\gamma)}(t-t_0)^{\gamma-1}+J^{\alpha}_{t_0+}f(t,\cdot). \tag{5}$$

Используя лемму из [1], представим решение уравнения (5) в виде

$$u(t)=\frac{\varphi_0}{\Gamma(\gamma-1)}(t-t_0)^{\gamma-2}+\frac{\varphi_1}{\Gamma(\gamma)}(t-t_0)^{\gamma-1}+J^{\alpha}_{t_0+}f(t,\cdot)-$$
$$-\omega\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})\left[\frac{\varphi_0}{\Gamma(\gamma-1)}(s-t_0)^{\gamma-2}+\frac{\varphi_1}{\Gamma(\gamma)}(s-t_0)^{\gamma-1}+J^{\alpha}_{t_0+}f(s,\cdot)\right]ds. \tag{6}$$

Перепишем представление (6) как сумму двух выражений:

$$\begin{aligned}I_1(t)=\frac{\varphi_0}{\Gamma(\gamma-1)}&\left[(t-t_0)^{\gamma-2}-\omega\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})(s-t_0)^{\gamma-2}ds\right]+\\&+\frac{\varphi_1}{\Gamma(\gamma)}\left[(t-t_0)^{\gamma-1}-\omega\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})(s-t_0)^{\gamma-1}ds\right],\end{aligned} \tag{7}$$

$$I_2(t)=J^{\alpha}_{t_0+}f(t,\cdot)-\omega\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})J^{\alpha}_{t_0+}f(s,\cdot)ds. \tag{8}$$

Применим следующие представления (см. [13, т. 1, с. 269—295]):

$$E_{\alpha,\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}+z\cdot E_{\alpha,\mu+\alpha}(t),\quad \alpha>0,\quad \mu>0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_{0}^{z}(z-t)^{\nu-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})t^{\beta-1}dt=z^{\beta+\nu-1}\cdot E_{\alpha,\beta+\nu}(\lambda z^{\alpha}),\quad \nu>0,\quad \beta>0. \tag{10}$$

Тогда для интеграла (7) получаем представление

$$I_1(t)=\varphi_0\cdot(t-t_0)^{\gamma-2}E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})+\varphi_1\cdot(t-t_0)^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha}). \tag{11}$$

Интеграл в формуле (8) легко преобразуется к следующему виду:

$$\int\limits_{t_0}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^{\alpha})J^{\alpha}_{t_0+}f(\xi,\cdot)d\xi=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{t_0}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^{\alpha})d\xi\int\limits_{t_0}^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-1}f(s,\cdot)ds=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{t_0}^{t}f(s,\cdot)ds\int\limits_{s}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^{\alpha})d\xi. \tag{12}$$

С учетом представления (10) второй интеграл в последнем равенстве (12) можно записать так:

$$\int_s^t (t-\xi)^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^\alpha)d\xi = \Gamma(\alpha)(t-\xi)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^\alpha).$$

Тогда с учетом формулы (9) представим (8) в следующем виде:

$$I_2(t) = \int_{t_0}^t (t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^\alpha)f(\xi,\cdot)d\xi. \tag{13}$$

Подставляя представления (11) и (13) в сумму $x(t) = I_1(t) + I_2(t)$, получаем (3). □

Интегральное уравнение (3) подставим в (4):

$$\chi = \sigma_1 + \chi\cdot\sigma_2 + \\ + \int_{t_0}^T s\int_{t_0}^s (s-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(s-\xi)^\alpha)f(\xi,x(\xi),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(\xi);q_2(\xi)]\})d\xi ds, \tag{14}$$

где

$$\sigma_1 = \int_{t_0}^T s\cdot P_1(s)ds, \quad q_i(t) = q_i(t,x(t)), \quad i=1,2,$$

$$P_1(t) = \varphi_0\cdot(t-t_0)^{\gamma-2}E_{\alpha,\gamma-1}(\omega\cdot(t-t_0)^\alpha) + \varphi_1\cdot(t-t_0)^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(\omega\cdot(t-t_0)^\alpha), \tag{15}$$

$$\sigma_2 = \int_{t_0}^T s\int_{t_0}^s \xi\cdot(s-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(s-\xi)^\alpha)d\xi ds \neq 1. \tag{16}$$

Если выполняется условие (16), то из представления (14) получаем

$$\chi = \frac{\sigma_1}{1-\sigma_2} + \frac{1}{1-\sigma_2}\int_{t_0}^T s\int_{t_0}^s (s-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(s-\xi)^\alpha)\times \\ \times f(\xi,x(\xi),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(\xi);q_2(\xi)]\})d\xi ds, \tag{17}$$

где $q_i(t) = q_i(t,x(t))$, $i=1,2$. Подставляя представление (17) в интегральное уравнение (3), получаем

$$x(t) = G(t) + \frac{1}{1-\sigma_2}\int_{t_0}^t s(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^\alpha)\times \\ \times\int_{t_0}^T \zeta\int_{t_0}^\zeta (\zeta-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(\zeta-\xi)^\alpha)f(\xi,x(\xi),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(\xi);q_2(\xi)]\})d\xi d\zeta ds + \\ + \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha)f(s,x(s),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(s);q_2(s)]\})ds, \tag{18}$$

где

$$G(t) = P_1(t) + \frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\int_{t_0}^t s(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^\alpha)ds, \quad q_i(t) = q_i(t,x(t)), \quad i=1,2$$

и $P_1(t)$ определяется из формулы (15).

Вместо интегрального уравнения (18) исследуются вопросы однозначной разрешимости следующего интегрального уравнения на отрезке $[t_0; T]$:

$$\begin{gathered}x(t,\omega)(t-t_0)^{2-\gamma} = \Im(t;x,\omega) \equiv G(t,\omega)(t-t_0)^{2-\gamma}+\\ +\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t} s(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})\int\limits_{t_0}^{T}\zeta\int\limits_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})\times\\ \times f(\xi,x(\xi,\omega),\max\{x(\theta,\omega)\mid\theta\in[q_1(\xi,x(\xi,\omega));q_2(\xi,x(\xi,\omega))]\})d\xi d\zeta ds+\\ +\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})\times\\ \times f(s,x(s,\omega),\max\{x(\theta,\omega)\mid\theta\in[q_1(s,x(s,\omega));q_2(s,x(s,\omega))]\})ds, \qquad (19)\end{gathered}$$

который не имеет особенностей в точке $t=t_0$.

Для доказательства однозначной разрешимости нелинейного функционально-интегрального уравнения (19) воспользуемся пространством непрерывных функций $C[t_0;T]$ с нормой

$$\|x(t)\| = \max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|x(t)|.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

(i) $\max\left\{\max\limits_{t\notin(t_0;T)}|\varphi_2(t)|;\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}|f(t,x,y)|\right\}\leqslant M_0=\mathrm{const}<\infty;$

(ii) $\left|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\right|\leqslant L_0\big(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\big),\quad 0<L_0=\mathrm{const}<\infty;$

(iii) $\left|q_i(t,x_1)-q_i(t,x_2)\right|\leqslant L_{0i}|x_1-x_2|,\quad 0<L_{0i}=\mathrm{const}<\infty,\quad i=1,2;$

(iv) $\rho=L_0M_3(2+M_0(L_{01}+L_{02}))\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\dfrac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\dfrac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\dfrac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right]<1,$

где

$$k_0=\frac{(T-t_0)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)},\quad M_3\geqslant\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})|.$$

Тогда существует единственное решение начальной задачи (1), (2) *в пространстве непрерывных функций* $C(t_0;T)$. *Это решение может быть найдено методом последовательных приближений*:

$$\begin{cases}(t-t_0)^{2-\gamma}x_0(t,\omega)=(t-t_0)^{2-\gamma}G(t,\omega),\\ (t-t_0)^{2-\gamma}x_{k+1}(t,\omega)=\Im(t;x_k),\quad k=0,1,2,\ldots,\end{cases}\qquad (20)$$

где

$$\begin{gathered}G(t,\omega)=\varphi_0\cdot(t-t_0)^{\gamma-2}E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})+\varphi_1\cdot(t-t_0)^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})+\\ +\frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})ds.\end{gathered}$$

Доказательство. Функция Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\gamma}(z)$ обладает следующим свойством (см. [23]). Предположим, что $0<\alpha<2$, γ — действительная постоянная $\arg z=\pi$. Тогда имеет место оценка

$$|E_{\alpha,\gamma}(z)|\leqslant\frac{C_0}{1+|z|},$$

где $0 < C_0 = \text{const}$. Нетрудно видеть, что из приближений (20) для уравнения (19) получаем следующую оценку:

$$\left\|(t-t_0)^{2-\gamma}x_0(t,\omega)\right\| \leqslant \max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi_0 E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})\right|+$$

$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi_1\cdot(t-t_0)E_{\alpha,\gamma}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})\right|+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}s}{(t-s)^{1-\alpha}}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\varphi_0|M_1+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[|\varphi_1|(t-t_0)M_2+\sigma_0\cdot M_3\frac{(t-t_0)^{3+\alpha-\gamma}}{\alpha(\alpha+1)}\right], \quad (21)$$

где

$$0<\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})|\leqslant M_1, \quad 0<\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|E_{\alpha,\gamma}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})|\leqslant M_2,$$

$$\sigma_0=\left|\frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\right|, \quad 0<\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})|\leqslant M_3, \quad M_i=\text{const}, \quad i=1,2,3.$$

В силу первого условия теоремы и оценки (21) из приближений (20) получаем

$$\|x_1(t,\omega)-x_0(t,\omega)\|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{1}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{s}{(t-s)^{1-\alpha}}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})\int\limits_{t_0}^{T}\zeta\int\limits_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})f_0d\xi d\zeta ds\right|+$$

$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})f_0ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_0(M_3)^2}{|1-\sigma_2|}\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{s}{(t-s)^{1-\alpha}}\int\limits_{t_0}^{T}\zeta\int\limits_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}d\xi d\zeta ds\right|+M_0M_3\left|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_0M_3\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right], \quad (22)$$

где

$$k_0=\frac{(T-t_0)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}, \quad f_0=f\Big(s,x_0(s,\omega),\max\Big\{x_0(\theta,\omega)\ \Big|\ \theta\in\big[q_1(s,x_0(s,\omega));\ q_2(s,x_0(s,\omega))\big]\Big\}\Big).$$

Продолжим итерационный процесс Пикара для интегрального уравнения (19) в соответствии с приближениями (20). Тогда в силу условий теоремы и с учетом оценки (22) для произвольных натуральных чисел k получаем:

$$\Big\|x_{k+1}(t,\omega)-x_k(t,\omega)\Big\|\leqslant\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0(M_3)^2}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+M_3\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right]\times$$

$$\times\Big\|f\Big(t,x_k(t,\omega),\max\Big\{x_k(\theta,\omega)\ \Big|\ \theta\in\big[q_1(t,x_k(t,\omega));q_2(t,x_k(t,\omega))\big]\Big\}\Big)-$$

$$-f\Big(t,x_{k-1}(t,\omega),\max\Big\{x_{k-1}(\theta,\omega)\ \Big|\ \theta\in\big[q_1(t,x_{k-1}(t,\omega));q_2(t,x_{k-1}(t,\omega))\big]\Big\}\Big)\Big\|\leqslant$$

$$\leqslant L_0M_3\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right]\Big[\Big\|x_k(t,\omega)-x_{k-1}(t,\omega)\Big\|+$$

$$+\Big\|\max\{x_k(\theta,\omega)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(t,x_k(t,\omega));q_2(t,x_k(t,\omega))\big]\}-$$

$$-\max\big\{x_{k-1}(\theta,\omega)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(t,x_k(t,\omega));q_2(t,x_k(t,\omega))\big]\big\}\Big\|+$$

$$+\Big\|\max\big\{x_{k-1}(\theta,\omega)\mid\theta\in\big[q_1(t,x_k(s,\omega));q_2(t,x_k(s,\omega))\big]\big\}-$$
$$-\max\big\{x_{k-1}(\theta,\omega)\mid\theta\in\big[q_1(t,x_{k-1}(t,\omega));q_2(t,x_{k-1}(t,\omega))\big]\big\}\Big\|\Big]\leqslant$$
$$\leqslant L_0M_3\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right]\Big[2\big\|x_k(t,\omega)-x_{k-1}(t,\omega)\big\|+$$
$$+M_0\Big(\big|q_1(t,x_k(t,\omega))-q_1(t,x_{k-1}(t,\omega))\big|+\big|q_2(t,x_k(t,\omega))-q_2(t,x_{k-1}(t,\omega))\big|\Big)\Big]\leqslant$$
$$\leqslant\rho\cdot\big\|x_k(t,\omega)-x_{k-1}(t,\omega)\big\|,\quad(23)$$

где

$$\rho=L_0M_3\big(2+M_0(L_{01}+L_{02})\big)\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right].$$

Согласно последнему условию теоремы имеем $\rho<1$. Рассматриваем решение интегрального уравнения (19) в пространстве непрерывных функций $C[t_0;T]$. Из оценок (21)–(23) следует, что интегральное уравнение (19) имеет единственное решение на отрезке $[t_0;T]$. Отсюда вытекает существование и единственность решения задачи (1), (2) на интервале $(t_0;T)$. Теорема 1 доказана. □

3. Непрерывная зависимость решения от параметра ω и от начальных данных φ_0 и φ_1. Теперь покажем, что решение $x(t,\omega)$ начальной задачи для дробно-дифференциального уравнения (1) устойчиво относительно заданного параметра ω.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда решение задачи* (1), (2) *на интервале* $(t_0;T)$ *является непрерывным по заданному параметру* ω.

Доказательство. Пусть $x(t,\omega_1)$ и $x(t,\omega_2)$ — два разных решения интегрального уравнения (19), соответствующие двум различным значениям параметра ω_1 и ω_2. Предположим, что $|\omega_1-\omega_2|<\delta$, где $0<\delta$ — достаточно малое число.

В доказательстве этой теоремы воспользуемся следующими оценками:

$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\Big|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2(t-s)^{\alpha})\Big|\leqslant M_{41}|\omega_1-\omega_2|,\quad 0<M_{41}=\mathrm{const};\quad(24)$$
$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\Big|E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega_1(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega_2(t-s)^{\alpha})\Big|\leqslant M_{42}|\omega_1-\omega_2|,\quad 0<M_{42}=\mathrm{const};\quad(25)$$
$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\Big|E_{\alpha,\gamma}(-\omega_1(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\gamma}(-\omega_2(t-s)^{\alpha})\Big|\leqslant M_{43}|\omega_1-\omega_2|,\quad 0<M_{43}=\mathrm{const}.\quad(26)$$

Тогда из интегрального уравнения (19) получаем оценку

$$\Big\|(t-t_0)^{2-\gamma}(x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2))\Big\|\leqslant|\varphi_0|\Big\|E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega_1\cdot(t-t_0)^{\alpha})-E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega_2\cdot(t-t_0)^{\alpha})\Big\|+$$
$$+\big|\varphi_1\cdot(T-t_0)\big|\Big\|E_{\alpha,\gamma}(-\omega_1\cdot(t-t_0)^{\alpha})-E_{\alpha,\gamma}(-\omega_2\cdot(t-t_0)^{\alpha})\Big\|+$$
$$+\left|\frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\right|\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}s}{(t-s)^{1-\alpha}}\Big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\Big\|ds+$$
$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int\limits_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\Big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\Big\|\times$$
$$\times\int\limits_{t_0}^{T}\zeta\int\limits_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}\Big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})\Big\|\times$$
$$\times\Big\|f\Big(\xi,x(\xi,\omega_1),\max\big\{x(\theta,\omega_1)\mid\theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_1));q_2(\xi,x(\xi,\omega_1))\big]\big\}\Big)\Big\|d\xi d\zeta ds+$$

$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\big\|\times$$
$$\times\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})\big\|\times$$
$$\times\Big\|f\Big(\xi,x(\xi,\omega_2),\max\big\{x(\theta,\omega_2)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_2));q_2(\xi,x(\xi,\omega_2))\big]\big\}\Big)\Big\|d\xi d\zeta ds+$$
$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\big\|\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})\big\|\times$$
$$\times\Big\|f\Big(\xi,x(\xi,\omega_1),\max\big\{x(\theta,\omega_1)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_1));q_2(\xi,x(\xi,\omega_1))\big]\big\}\Big)-$$
$$-f\Big(\xi,x(\xi,\omega_2),\max\big\{x(\theta,\omega_2)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_2));q_2(\xi,x(\xi,\omega_2))\big]\big\}\Big)\Big\|d\xi d\zeta ds+$$
$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}\Big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\Big\|\times$$
$$\times\Big\|f\Big(\xi,x(\xi,\omega_2),\max\big\{x(\theta,\omega_2)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_2));q_2(\xi,x(\xi,\omega_2))\big]\big\}\Big)\Big\|ds+$$
$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\big\|\times$$
$$\times\Big\|f\Big(s,x(s,\omega_1),\max\big\{x(\theta,\omega_1)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(s,x(s,\omega_1));q_2(s,x(s,\omega_1))\big]\big\}\Big)-$$
$$-f\Big(s,x(s,\omega_2),\max\big\{x(\theta,\omega_2)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(s,x(s,\omega_2));q_2(s,x(s,\omega_2))\big]\big\}\Big)\Big\|ds.\quad(27)$$

В силу условий теоремы 1 и оценок (24)–(26) аналогично оценке (23) из (27) получаем

$$\big\|(t-t_0)^{2-\gamma}(x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2))\big\|\leqslant|\varphi_0|M_{42}\cdot|\omega_1-\omega_2|+\big|\varphi_1\cdot(T-t_0)\big|M_{43}\cdot|\omega_1-\omega_2|+$$
$$+\big(M_0+|\sigma_0|\big)M_{41}\cdot|\omega_1-\omega_2|\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}s}{(t-s)^{1-\alpha}}ds+$$
$$+M_0M_3M_{41}|\omega_1-\omega_2|\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}d\xi d\zeta ds+$$
$$+M_0M_3M_{41}\cdot|\omega_1-\omega_2|\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}d\xi d\zeta ds+$$
$$+(M_3)^2L_0\big(2+M_0(L_{01}+L_{02})\big)\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\big\|x(\xi,\omega_1)-x(\xi,\omega_2)\big\|d\xi d\zeta ds+$$
$$+M_3L_0\big(2+M_0(L_{01}+L_{02})\big)\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}\big\|x(s,\omega_1)-x(s,\omega_2)\big\|ds.\quad(28)$$

Из (28) получаем, что

$$\big\|(t-t_0)^{2-\gamma}(x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2))\big\| \leqslant A_1\cdot|\omega_1-\omega_2| + A_2\big\|x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2)\big\|, \tag{29}$$

где константы A_1 и A_2 определены формулами

$$A_1 = |\varphi_0|M_{42} + \big|\varphi_1\cdot(T-t_0)\big|M_{43} + \big(M_0+|\sigma_0|\big)M_{41}\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}s}{(t-s)^{1-\alpha}}ds+\right.$$

$$\left. +M_0M_3M_{41}\left(1+\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\right)\int\limits_{t_0}^{t}\frac{s}{(t-s)^{1-\alpha}}\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{t_0}^{\zeta}\frac{\zeta}{(\zeta-\xi)^{1-\alpha}}d\xi d\zeta ds\right],$$

$$A_2 = M_3L_0\big(2+M_0(L_{01}+L_{02})\big)\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{M_3}{|1-\sigma_2|}\int\limits_{t_0}^{t}s\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{t_0}^{\zeta}\frac{\zeta}{(\zeta-\xi)^{1-\alpha}}d\xi d\zeta ds+\right.$$

$$\left. +\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}ds\right].$$

Из последней оценки (29) имеем

$$\big\|x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2)\big\| < \frac{A_2\delta}{\left|\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}(t-t_0)^{2-\gamma}-A_1\right|}. \tag{30}$$

Если положить

$$\varepsilon = \frac{A_2\delta}{\left|\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}(t-t_0)^{2-\gamma}-A_1\right|},$$

то из (30) получим оценку

$$\|x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2)\| < \varepsilon, \tag{31}$$

из которой видно, что решение задачи (1), (2) непрерывно зависит от параметра ω на интервале $(t_0;T)$. Теорема 2 доказана. □

Аналогично теореме 2 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда решение задачи* (1), (2) *на интервале* $(t_0;T)$ *устойчиво по начальным данным* φ_0 *и* φ_1.

4. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим в классе непрерывных функций $C[0;a]$ $(a>0)$ задачу Коши

$$\begin{cases} {}_CD^{\alpha}_{0+}y(t) = \sqrt{\max\{y(\theta):\theta\in[\lambda t;t]\}} + \int\limits_0^t sy(s)ds - \dfrac{At^{3\alpha+1}}{3\alpha+1}, \\ y(0)=0, \quad A = \dfrac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(2\alpha+1)}, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $y=At^{2\alpha}$ в случае $0<\lambda<1$ и $0<\alpha<1/2$. Действительно,

$${}_CD^{\alpha}_{0+}y(t) = {}_CD^{\alpha}_{0+}(At^{2\alpha}) = \frac{A\cdot\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1-\alpha)}t^{2\alpha-\alpha} = \frac{A\cdot\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha} = \sqrt{A}t^{\alpha},$$

$$\sqrt{\max\{y(\theta):\theta\in[\lambda t;t]\}} = \sqrt{A}t^{\alpha}, \quad \int\limits_0^t sy(s)ds = \int\limits_0^t s\cdot A\cdot s^{2\alpha}ds = A\int\limits_0^t s^{3\alpha}ds = \frac{A\cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1}.$$

Подставляя всё это в данное уравнение, получим

$$\sqrt{A}t^{\alpha} = \sqrt{A}t^{\alpha} + \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} - \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} \iff 0 = 0.$$

Проверим начальное условие: $y(0) = A \cdot 0^{2\alpha} = 0$. Так как правая часть уравнения имеет вид

$$f(t, y(t)) = \sqrt{\max\{y(\theta) : \theta \in [\lambda t; t]\}} + \int\limits_0^t sy(s)ds - \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} =$$

$$= \sqrt{A}t^{\alpha} + \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} - \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} = \sqrt{A}t^{\alpha},$$

отсюда следует, что $f \in C[0; a]$. Следовательно, решение задачи единственно в классе $C^{\alpha}[0; a]$, $a = \mathrm{const}$. Отметим, что $C^{\alpha}[0; a] = \big\{y(t) \in C[0; a],\ {}_C D^{\alpha}_{0+} y(t) \in C[0; a]\big\}$.

Пример 2 (пример с оператором Хильфера $D^{\alpha,\gamma}$ для случая $\alpha \in (1; 2]$)**.** Известно, что

$$D^{\alpha,\gamma} = D^{\alpha,\beta}_{0+}, \quad \gamma = \alpha + 2\beta - \alpha\beta, \quad \alpha \leqslant \gamma \leqslant 2.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$D^{\alpha,\gamma} y(t) = \frac{4\Gamma(4\alpha/3)}{\Gamma(\alpha/3)} \sqrt[4]{\max\{y(\theta) \mid \theta \in [\lambda t; t]\}} + \int\limits_0^t tsy(s)ds - \frac{3t^{4\alpha/3+3}}{4\alpha+6}, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{32}$$

Нетрудно проверить, что функция $y = t^{4\alpha/3}$ является решением дифференциального уравнение (32) на положительной полуоси.

Как известно, в случае $\beta = 1 \Leftrightarrow \gamma = 2$ оператор Хилфера имеет вид $D^{\alpha,2} = D^{\alpha,1}_{0+} = {}_C D^{\alpha}_{0+}$, и дифференциальное уравнение (32) приобретает вид

$${}_C D^{\alpha}_{0+} = \frac{4\Gamma(4\alpha/3)}{\Gamma(\alpha/3)} \sqrt[4]{\max\{y(\theta) \mid \theta \in [\lambda t; t]\}} + \int\limits_0^t tsy(s)ds - \frac{3t^{4\alpha/3+3}}{4\alpha+6}, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{33}$$

где $\alpha \in (1; 2]$. Используя [19, теорема 3.25, с. 202], нетрудно показать, что функция $y = t^{4\alpha/3}$ является единственным решением дифференциального уравнения (33) из класса $C^{\alpha,1}[0; T]$, $T > 0$. Это решение удовлетворяет условиям

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{t \to 0} \frac{d}{dt} y(t) = 0. \tag{34}$$

Отметим, что

$$C^{\alpha,1}[a; b] = \big\{y(t) \in C^1[a; b] :\ {}_C D^{\alpha}_{a+} y(t) \in C[a; b]\big\}.$$

Пусть теперь $\alpha = 3/2$. Тогда дифференциальное уравнение (33) имеет вид

$${}_C D^{\frac{3}{2}}_{0+} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{\max\{y(\theta) \mid \theta \in [\lambda t; t]\}} + \int\limits_0^t tsy(s)ds - \frac{t^5}{4}, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{35}$$

а функция $y = t^2$ является единственным решением задачи (35), (34).

5. Заключение. В данной статье рассматриваются вопросы однозначной разрешимости начальной задачи для нелинейного дробного интегро-дифференциального уравнения (1) с вырожденным ядром и максимумами на заданном интервале $(t_0; T)$. Эта начальная задача сводится к нелинейному интегральному уравнению дробного порядка типа Вольтерра (3). Уравнение (3) имеет слабую особенность в точке $t = t_0$, которая может мыть нейтрализована умножением обеих частей интегрального уравнения (3) на величину, обратную сингулярности. Затем на основе метода последовательных приближений доказаны теоремы о существовании и единственности решения задачи (1), (2) и о непрерывной зависимости решения от параметра ω и от исходных данных φ_0 и φ_1 на интервале $(t_0; T)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердышев А. С., Кадиркулов Б. Ж.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения четвертого порядка с дробным оператором Джрбашяна—Нерсесяна// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 1. — С. 123–128.
2. *Герасимов А. Н.* Обобщение законов линейной деформации и их приложение к задачам внутреннего трения// Прикл. мат. мех. — 1948. — *12*, № 3. — С. 251–260.
3. *Кадиркулов Б. Ж., Жалилов М. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Хилфера// Бюлл. Ин-та мат. им. В. И. Романовского. — 2020. — № 1. — С. 59–67.
4. *Юлдашев Т. К.* Предельная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с двухточечными смешанными максимумами// Вестн. Самарск. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — *1*, № 16. — С. 15–22.
5. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1687–1694.
6. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 252–263.
7. *Юлдашев Т. К., Овсяников С. М.* Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений с запаздывающим аргументом и приближенное вычисление функционала качества// Ж. Средневолжск. мат. о-ва. — 2015. — *17*, № 2. — С. 85–95.
8. *Abdullaev O. Kh.* Solvability of a nonlocal problem with integral gluing condition for mixed type equation with Erdelyi–Kober operators// Fract. Differ. Calculus. — 2017. — *7*, № 2. — P. 371–383.
9. *Abdullaev O. Kh.* Analog of the Gellerstedt problem for the mixed type equation with integral-differential operators of fractional order// Uzbek Math. J. — 2019. — № 3. — P. 4–18.
10. *Hilfer R.* (ed.). Application of Fractional Calculus in Physics.. — Singapore: World Scientific, 2000.
11. *Area I., Batarfi H., Losada J., Nieto J. J., Shammakh W., Torres A.* On a fractional order Ebola epidemic model// Adv. Differ. Equations. — 2015. — *2015*. — 278.
12. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, II// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2008. — *11*, № 1. — P. 3–14.
13. *Tenreiro Machado J. A.* (ed.). Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vols. 1–8. — Berlin–Boston: Walter de Gruyter, 2019.
14. *Hilfer R.* Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials// Chem. Phys. — 2002. — *284*, № 1-2. — P. 399–408.
15. *Hilfer R.* On fractional relaxation// Fractals. — 2003. — *11*, № 1. — P. 251–257.
16. *Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z.* Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2009. — *12*, № 3. — P. 299–318.
17. *Hussain A., Baleanu D., Adeel M.* Existence of solution and stability for the fractional order novel coronavirus (nCoV-2019) model// Adv. Differ. Equations. — 2020. — *2020*. — 384.
18. *Karimov E. T.* Frankl-type problem for a mixed type equation with the Caputo fractional derivative// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 9. — P. 1829–1836.
19. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: North-Holland, 2006.
20. *Kim M.-Ha, Ri G., Chol O. H.* Operational method for solving multi-term fractional differential equations with the generalized fractional derivatives// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2014. — *17*, № 1. — P. 79–95.
21. *Kumar D., Baleanu D.* Editorial: fractional calculus and its applications in physics// Front. Phys. — 2019. — *7*, № 6.
22. *Mainardi F.* Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics// in: Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (*Carpinteri A., Mainardi F.*, eds.). — Wien: Springer, 1997.
23. *Malik S. A., Aziz S.* An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions// Comput. Math. Appl. — 2017. — *73*, № 12. — P. 2548–2560.
24. *Novozhenova O. G.* Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet union// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — *20*, № 3. — P. 790–809.

25. *Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: a review// Proc. Roy. Soc. A. — 2020. — *476.* — 20190498.
26. *Rossikhin Y. A.* Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids// Appl. Mech. Rev. — 2010. — *63*, № 1. — 010701.
27. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. — Yverdon: Gordon & Breach, 1993.
28. *Sandev T., Tomovski Z.* Fractional Equations and Models: Theory and Applications. — Cham, Switzerland: Springer Nature, 2019.
29. *Saxena R. K., Garra R., Orsingher E.* Analytical solution of space-time fractional telegraph-type equations involving Hilfer and Hadamard derivatives// Integral Transforms Spec. Funct. — 2015. — *27*, № 1. — P. 30–42.
30. *Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W.* A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2019. — *22*, № 1. — P. 27–59.
31. *Ullah S., Khan M. A., Farooq M., Hammouch Z., Baleanu D.* A fractional model for the dynamics of tuberculosis infection using Caputo–Fabrizio derivative// Discr. Cont. Dynam. Syst., Ser. S. — 2020. — *13*, № 3. — P. 975–993.
32. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed type with fractional Hilfer operator// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 68.
33. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Nonlocal problem for a mixed-type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator// Ural Math. J. — 2020. — *6*, № 1. — P. 153–167.
34. *Yuldashev T. K., Karimov E. T.* Inverse problem for a mixed type integro-differential equation with fractional order Caputo operators and spectral parameters// Axioms. — 2020. — *9*, № 4. — 121.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Кадиркулов Бахтиёр Жалилович
Ташкентский государственный университет востоковедения, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `kadirkulovbj@gmail.com`