ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 115–123
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-115-123

УДК 517.544

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ—РИМАНА С СИЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ В ОБЛАСТИ С КУСОЧНО ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2024 г. **А. Б. РАСУЛОВ, Н. В. ЯКИВЧИК**

Аннотация. В работе построено общее решение уравнения Коши—Римана с сильными особенностями в младшем коэффициенте и исследована краевая задача линейного сопряжения в области с кусочно гладкой границей.

Ключевые слова: уравнения Коши–Римана, сильная особенность, оператор Помпейю—Векуа, кусочно гладкая граница, задача линейного сопряжения.

LINEAR CONJUGATION PROBLEM FOR THE CAUCHY–RIEMANN EQUATION WITH A STRONG SINGULARITY IN THE LOWEST COEFFICIENT IN A DOMAIN WITH PIECEWISE SMOOTH BOUNDARY

© 2024 **A. B. RASULOV, N. V. YAKIVCHIK**

Abstract. In this work, a general solution of the Cauchy–Riemann equation with strong singularities in the lowest coefficient is constructed and the boundary-value problem of linear conjugation in a domain with a piecewise smooth boundary is examined.

Keywords and phrases: Cauchy–Riemann equations, strong singularity, Pompeiu–Vekua operator, piecewise smooth boundary, linear conjugation problem.

AMS Subject Classification: 30E20

1. Интегральные представления решений в конечной области. Пусть односвязная область D^+ ограничена простым кусочно гладким ляпуновским контуром Γ, составленным из гладких дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ и ориентированным против часовой стрелки. Множество $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ концов этих дуг обозначим F. Для определенности пусть $0 \in D^+$ и $D_0^+ = D^+ \setminus \{0\}$, $D_\varepsilon^+ = D^+ \cap \{|z| > \varepsilon\}$ при $\varepsilon > 0$, а область $D^- = \mathbb{C} \setminus (D^+ \cup \Gamma)$ содержит бесконечно удаленную точку $z = \infty$.

Рассмотрим в области D_0^+ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} - \frac{a(z)}{|z|^\alpha}\, u(z) = f(z) \tag{1}$$

с коэффициентом $a(z) \in C^n(D \setminus D_\varepsilon^+) \cap C\big(\overline{D^+}\big)$, где $\alpha > 1$, $n = [\alpha]$ — целая часть α, причем $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$, и функция f принадлежит $L^p_{\rm loc}(D_0^+)$, $p > 2$, т.е. $L^p_{\rm loc}(D_0^+) = \big\{f : f \in L^p_{\rm loc}(D_\varepsilon^+)$ для любого $\varepsilon > 0\big\}$. В дальнейшем также воспользуемся классом $W^{1,p}_{\rm loc}(D_0^+) = \big\{f : f \in W^{1,p}_{\rm loc}(D_\varepsilon^+)$ для любого $\varepsilon > 0\big\}$.

Следуя [9], обозначим $C_\lambda\big(\overline{D^+},0\big)$, где $\lambda<0$, пространство всех непрерывных в $\overline{D^+}\setminus\{0\}$ функций $\varphi(z)$ с точечной особенностью $z=0$ и с поведением $O\big(|z|^\lambda\big)$ при $z\to 0$. Это пространство снабжается нормой $\|\varphi\|=\sup\limits_{z\in D}|z|^{-\lambda}\,|\varphi(z)|$, относительно которой оно является банаховым.

Классическая теория И. Н. Векуа (см. [2]) обобщенных аналитических функций охватывает случай, когда коэффициенты уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial\bar z}+au+b\bar u=f$$

принадлежат пространству $L^p(D)$ с показателем $p>2$. Коэффициенты таких систем могут допускать слабые особенности с требованием их p-интегрируемости в области D. Уравнения с коэффициентами $a\in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha\geqslant 0$, и $b\in C_{-1}$ не удовлетворяют этому условию. На необходимость изучения более общих уравнений (обобщенных систем Коши—Римана с коэффициентами, допускающими особенности не ниже первого порядка) впервые было указано И. Н. Векуа и А. В. Бицадзе (см. [1]). Вопросам построения общего решения уравнения (1), обобщенного уравнения Коши—Римана с сингулярными коэффициентами $a\in C_{-1}$ и $b\in C_{-1}$ были посвящены многочисленные исследования (см., например, [5, 11]). Понятие сверхсингулярных особенностей введено в монографии Н. Р. Раджабова [7]. В последнее десятилетие к исследованию обобщенного уравнения Коши—Римана с коэффициентами $a\in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha\geqslant 0$, и $b\in C_{-1}$ со специальными видами посвящено достаточно много работ (см., например, [8]). Краевые задачи в областях с кусочно гладкими границами для уравнений с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

В настоящей работе найдено интегральное представление решения уравнения (1) с более общим коэффициентом в областях D_0^+ и D_0^- и исследована задача линейного сопряжения в классе функций, ограниченных на бесконечности и допускающих особенность порядка меньше единицы при $z\to\tau$ в точках $\tau\in F$.

Функция $u(z)\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}\big(D_0^+\big)$, где $p>2$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду, называется его *регулярным* решением.

В получении представления регулярного решения данного уравнения существенную роль играет интегральный оператор Помпейю—Векуа (см. монографию И. Н. Векуа [2, с. 29])

$$(Tf)(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_D\frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta-z},\quad z\neq 0,\tag{2}$$

с плотностью $f\in L^p(D^+)$, где $p>2$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. В частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D^+)$ и $C\big(\overline{D^+}\big)$.

Если в уравнении (1) функции $A(z)=|z|^{-\alpha}\,a(z)\in L^p(D)$ и $f\in L^p(D)$, то $\Omega=TA\in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ является решением уравнения $\Omega_{\bar z}-A=0$. Следовательно, для функции $V=e^{-\Omega}u$ имеем соотношение

$$V_{\bar z}=e^{-\Omega}u_{\bar z}-Ae^{-\Omega}u=e^{-\Omega}f.$$

В результате приходим к представлению

$$u=e^{\Omega}[\phi+T(e^{-\Omega}f)]$$

с произвольной аналитической в D функцией $\phi\in C\big(\overline{D}\big)$. Эта процедура получения общего решения хорошо известна (см. [2]).

Лемма 1. *Если α не является четным целым числом, то существует регулярное решение уравнения*

$$\Omega_{1\bar z}=|z|^{-\alpha}a(z),$$

представимое в виде

$$\Omega_1(z)=\frac{2\,a(0)\,\bar z}{(2-\alpha)\,|z|^\alpha}+\frac{2}{|z|^\alpha}\sum_{k_1+k_2=1}^{n}\frac{1}{k_1!\,k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}a}{\partial^{k_1}z\,\partial^{k_2}\bar z}(0)\cdot\frac{z^{k_1}\,\bar z^{k_2+1}}{2(k_2+1)-\alpha}.\tag{3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция $|z|^{-\alpha}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ вдоль линии, соединяющей точки 0 и ∞ (например, луча $\arg z = \beta$), мы выбираем фиксированную ветвь данной функции, и этот выбор нужно учитывать при дифференцировании. В самом деле,

$$|z|^{-\alpha} = z^{-\alpha/2}\bar{z}^{-\alpha/2} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\ln z\right)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\ln \bar{z}\right);$$

при этом значения логарифма $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ и $\ln\bar{z} = \ln|z| - i\arg z$ комплексно сопряжены, так что значение функции остается положительным вещественным числом.

Запишем коэффициент $a(z)$ в виде

$$a(z) = a(0) + p(z), \quad p(z) = \sum_{k_1+k_2=1}^{n} \frac{2}{k_1!\,k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}a}{\partial^{k_1}z\,\partial^{k_2}\bar{z}}(0)\cdot z^{k_1}\,\bar{z}^{k_2}.$$

Тогда

$$\Omega_0(z) = a(0)\,T|z|^{-\alpha} = \frac{2a(0)\,\bar{z}}{(2-\alpha)\,|z|^{\alpha}}$$

является решением уравнения $(\Omega_0)_{\bar{z}} = a(0)\,|z|^{-\alpha}$, а второе слагаемое $\Omega_1(z)$ является решением уравнения $(\Omega_1)_{\bar{z}}(z) = |z|^{-\alpha}\,p(z)$. □

Теорема 1. *Пусть нечетное число $\alpha > 1$ и функция $f_0 = e^{-\Omega_1}f \in L^p(D)$, где $p > 2$. Тогда любое регулярное решение уравнения* (1) *с правой частью f представимо в виде*

$$u = e^{\Omega_1}[\phi + Tf_0], \tag{4}$$

где $\phi(z)$ — произвольная аналитическая в области D_0^+ функция.

Замечание 1. Если при $z \to 0$ функция $u(z)$ имеет поведение

$$u(z) = O\big(e^{-\operatorname{Re}\Omega_1(z)}\big), \tag{5}$$

то функция $\phi(z)$ имеет слабую особенность в точке $z = 0$ и аналитична в области D^+.

Замечание 2. В случае, если α является четным целым числом, вид решения существенно меняется: в его представлении возникают слагаемые, содержащие логарифмы. Этот случай исследуется нами отдельно.

2. О поведении решений в окрестности изолированной особой точки коэффициента уравнения. Как видно из (5), при $z \to 0$ функция $u(z)$ может вести себя весьма разнообразно в зависимости от значений $\operatorname{Re}\Omega_1$. Теперь рассмотрим в качестве примера уравнение, решение которого $u(z)$ при $z \to 0$ по всем направлениям ведет себя одинаково. Как видно из следующего примера, для этого достаточно, чтобы функция $a(z)$ была однородной по переменной z. Рассмотрим в области D_0^+ частный случай уравнения (1) с коэффициентом

$$A_0(z) = a(z) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{a_k\,z}{|z|^{\alpha-k+1}} \in L^p(D^+), \quad p > 2, \tag{6}$$

где $\alpha > 1$, с коэффициентами $a_k \in \mathbb{C}$, а функция f принадлежит классу $L^p_{\mathrm{loc}}(D_0^+)$, $p > 2$.

Введем следующее обозначение:

$$\omega_k^0(z) = \frac{2}{(\alpha-k+1)\,|z|^{\alpha-k+1}},$$

где $\alpha > 1$ — нецелое число.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$ — нецелое число. Тогда функция*

$$\Omega_1^0(z) = -\sum_{k=0}^{[\alpha]} a_k\,\omega_k^0(z) + (TA_0)(z), \quad z \neq 0,$$

представляет собой решение уравнения

$$(\Omega_1^0)_{\bar z} = |z|^{-\alpha}\, z\, a(z).$$

В предположении $f^0 = e^{-\Omega_1^0} f \in L^p(D)$ *любое регулярное решение уравнения* (1) *с коэффициентом* (6) *дается формулой*

$$u = e^{\Omega_1}\,[\phi + Tf^0], \tag{7}$$

где $\phi(z)$ — *произвольная аналитическая в области* D_0^+ *функция, причем она аналитична в* D^+*, если*

$$u(z) = O\left(\exp\left\{\frac{-2\operatorname{Re} a_0}{(n-1)\,|z|^{n-1}}\right\}\right) \quad \textit{при } z \to 0. \tag{8}$$

Доказательство. Из равенства $\Omega_1^0(z) = \Omega^0(z) + (TA_0)(z)$ следует, что функция

$$\Omega^0(z) = -\sum_{k=0}^{[\alpha]} a_k\, \omega_k^0(z)$$

удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar z}\Omega^0(z) = \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{a_k\, z}{|z|^{\alpha-k+1}}.$$

С другой стороны, как было отмечено выше, для $A_0 \in L^p$, $p > 2$, функция TA_0 является решением уравнения $(TA_0)_{\bar z} = A_0$. □

Замечание 3. В этом случае, как следует из (8), в зависимости от $\operatorname{Re} a_0$ функция $u(z)$ имеет единственное предельное значение при $z \to 0$ по любым направлениям:

$$u(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \to 0, \text{ когда } \operatorname{Re} a_0 > 0,\\ \infty & \text{при } z \to 0, \text{ когда } \operatorname{Re} a_0 < 0,\\ O(1) & \text{при } z \to 0, \text{ когда } \operatorname{Re} a_0 = 0. \end{cases}$$

3. Интегральные представления решений в бесконечной области. В этом случае интегральный оператор Помпейю—Векуа T понимается по отношению к неограниченной области $D^- = \mathbb{C} \setminus (D \cup \Gamma)$. Хорошо известно (см. [2]), что если функция f непрерывно дифференцируема и $f(z) = O\big(|z|^{\delta}\big)$ при $z \to \infty$ с некоторым $\delta < -1$, то функция

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)\, d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad \zeta, z \in \mathbb{C}, \tag{9}$$

непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (1) при $a = 0$. В монографии [2] И. Н. Векуа описал условие на функцию f, обеспечивающее принадлежность Tf классу $C^{\mu}(\mathbb{C})$ в терминах введенного им пространства $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$, где $p > 2$. Под $C^{\mu}(\mathbb{C})$ здесь понимается класс непрерывных функций $f(z)$, которые вместе с $f(1/z)$ принадлежат $C^{\mu}(\mathbb{T})$ в единичном круге $\mathbb{T} = \{z : |z| \leqslant 1\}$. По определению пространство $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$ состоит из всех функций f, для которых $f(z)$ и $f_\nu(z) = |z|^{-\nu} f(1/z)$ принадлежат $L^p(\mathbb{T})$. В этих обозначениях, если $f \in L^{p,2}(\mathbb{C})$, $p > 2$, то функция $Tf \in C^{\mu}(\mathbb{C})$, где $\mu = 1 - 2/p$, и обращается в нуль на бесконечности (см. [2, теоремы 1.24, 1.25]). В частности, $(Tf)(z) = o\big(|z|^{\mu-1}\big)$ при $z \to \infty$.

В работах А. П. Солдатова [9, 10] даны оценки классического интеграла Помпейю (2), рассматриваемого на всей комплексной плоскости с особыми точками $z = 0$ и $z = \infty$ в семействах различных весовых пространств, некоторые из которых мы используем в данной работе.

Далее, под *регулярным* решением уравнения (1) в области D^- понимается функция u, которая допускает обобщенную производную по $\bar z$, принадлежит классу $L^{p,2}(D^-)$, ограничена на бесконечности и удовлетворяет уравнению (1) почти всюду.

Теорема 3. *Пусть нечетное число $\alpha > 1$ и функция $f_0 = e^{-\Omega_1} f \in L^{p,2}(D^-)$, где $p > 2$. Тогда любое регулярное решение уравнения (1) с правой частью f представимо в виде (4), где $\phi \in C^{\mu}\big(\overline{D^-} \setminus F\big)$ — произвольная аналитическая в области D^- функция и $\phi(z) = o\big(|z|^{-2/p}\big)$ при $|z| \to \infty$.*

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 4. При $0 < \delta < 1$ и $a(0) \neq 0$, как следует из поведения $e^{-\operatorname{Re}\Omega_1(z)} = O\big(|z|^{1-\alpha}\big)$ и $(Tf)(z) = o\big(|z|^{\mu-1}\big)$ при $z \to \infty$, условие

$$u(z) = O\big(|z|^{-\delta}\, e^{-\operatorname{Re}\Omega_1(z)}\big)$$

при $z \to \infty$ равносильно тому, что в этом представлении функция ϕ имеет в $z = \infty$ устранимую особую точку и, следовательно, аналитична во всей области D^-.

Поэтому фактически функция u относится к классу функций, для которых $e^{-\Omega} u \in H(D^- \setminus F)$. Функция ϕ в окрестности точки $z = \infty$ также удовлетворяет условию $|\phi(z) - \phi(\infty)| < |z|^{-\delta}$, где $\delta > 0$. Класс таких функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с некоторым показателем, удобно обозначить $H\big(\overline{D^-} \setminus F, e^{\Omega}\big)$. Аналогично, через $H\big(\overline{D^+} \setminus F, e^{\Omega}\big)$ обозначим класс функций, удовлетворяющих условию $e^{-\Omega} u \in H\big(\overline{D^+} \setminus F\big)$.

Обозначим через $H(\Gamma, F)$ класс кусочно непрерывных функций на Γ, которые принадлежат $H(\Gamma_j)$ на каждой закрытой дуге Γ_j, $j = \overline{1, m}$.

4. Задача типа линейного сопряжения. Рассмотрим функцию $G \in H(\Gamma, F)$, которая всюду отлична от нуля, включая $G(\tau \pm 0)$.

Требуется найти регулярное решение уравнения (1) в областях D^+, D^-, соответственно принадлежащее классам $H\big(\overline{D^+} \setminus F, e^{\Omega}\big)$ и $H\big(\overline{D^-} \setminus F, e^{\Omega}\big)$ и такое, что для функций $(e^{-\Omega} u)^{\pm}$, ограниченных в D^+ и D^-, предельные значения на контуре Γ удовлетворяют следующему граничному условию:

$$\big(e^{-\Omega} u\big)^{+}(t) = G(t)\,\big(e^{-\Omega} u\big)^{-}(t) + g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{10}$$

где $G(t), g(t) \in H(\Gamma, F)$, причем $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ и $g(t) = o\big(|t|^{-\delta}\big)$ при $t \to \infty$, где $\delta > 0$. Функция $u(z)$ вблизи особых точек $z = 0$, $z = \infty$ и в узлах $\tau = \tau_j \in F$ контура Γ имеет поведение

$$u(z) = \begin{cases} O\big(e^{-\operatorname{Re}\Omega_1(z)}\big) & \text{при } z \to 0, \\ O\big((z - \tau_j)^{\varepsilon_j}\big) & \text{при } z \to \tau_j,\ j = \overline{1, m}, \text{ где } -1 < \varepsilon_j, \\ O(1) & \text{при } z \to \infty. \end{cases} \tag{11}$$

Используя интегральное представление (4) и условие задачи (10), мы приходим к следующей задаче линейного сопряжения теории аналитических функций:

$$\phi^{+}(t) = G(t)\,\phi^{-}(t) + \widetilde{g}(t), \quad t \in \Gamma, \tag{12}$$

где

$$\widetilde{g} = T^{+}(e^{-\Omega} f) + g - G\,T^{-}(e^{-\Omega} f), \quad T^{\pm}(e^{-\Omega} f) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{D^{\pm}} \frac{e^{-\Omega(\zeta)}\, f(\zeta)}{\zeta - z}\, d_2\zeta \right\}^{\pm}.$$

Из (9) и (10) следует, что индекс $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)$.

Задача линейного сопряжения исчерпывающим образом изучена в известных монографиях [2, 3, 6] в классе H^* интегрируемых функций ϕ, принадлежащих классу $C^{\mu}_{\lambda}\big(\overline{D}, F\big)$ с некоторыми $-1 < \lambda < 0$ и $0 < \mu < 1$, а также в классах H_{ε} почти ограниченных функций $H\big(\overline{D}, F\big)$ и ограниченных функций, принадлежащих соответственно классам $C^{\mu}_{\lambda}\big(\overline{D}, F\big)$, $0 < \lambda < 1$, и $C^{\mu}_{(+0)}\big(\overline{D}, F\big)$ с некоторым $0 < \mu < 1$. Однако различные приложения требуют исследования этой задачи в пространстве $C^{\mu}_{\lambda}\big(\overline{D}, F\big)$ для всех весовых порядков.

Рассмотрим задачу (12). Тогда дополнительные условия (11) переходят в условия

$$\phi(z) = \begin{cases} O\big(e^{-\operatorname{Re}\Omega_1(z)}\big) & \text{при } z \to 0, \\ O\big((z-\tau_j)^{\varepsilon_j}\big) & \text{при } z \to \tau_j,\ j=\overline{1,m},\ \text{где } -1<\varepsilon_j, \\ O(1) & \text{при } z \to \infty. \end{cases} \tag{13}$$

Исследование задачи (12) осуществляется с помощью так называемой G-канонической функции (см. [9]). По определению под ней понимается функция $X \in C(D_0^+ \cup D^-)$, которая всюду отлична от нуля, включая ее граничные значения $X^{\pm}$, вместе с $1/X(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет соотношению

$$X^+(t) = G(t)\, X^-(t), \quad t \in \Gamma \setminus F, \tag{14}$$

которые, в силу определения кусочно аналитической функции, мы должны иметь вблизи всех узлов $\tau = \tau_j \in F$:

$$|X(z)| < \frac{\text{const}}{|z-\tau|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1, \tag{15}$$

$$\frac{1}{|X(z)|} < \frac{\text{const}}{|z-\tau|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1. \tag{16}$$

Функция $G \in C(\Gamma \setminus F)$ кусочно непрерывна на Γ, т.е. существуют односторонние пределы $G(\tau \pm 0) = \lim G(t)$ при $t \to \tau$, $t \in \Gamma_{\tau\pm 0}$ в точках $\tau \in F$. Согласно этим условиям $G(t)$ отлична от нуля, включая $G(\tau \pm 0) = \lim G(t)$ при $t \to \tau$, $t \in \Gamma_{\tau\pm 0}$ и $G(\tau\pm 0)$ в точках $\tau \in F$. Следовательно,

$$\lim_{t\to\tau\pm 0} \ln G(t) = \ln G(\tau \pm 0). \tag{17}$$

Рассмотрим функцию

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau. \tag{18}$$

На основании формул Сохоцкого—Племеля легко проверить, что в обыкновенных точках функция $e^{\gamma(z)}$ удовлетворяет однородному граничному условию (14).

Выясним ее поведение вблизи точек $\tau \in \Gamma$. Согласно [6, с. 255],

$$\gamma(z) = (\alpha_\tau + i\beta_\tau)\ln(z-\tau) + \gamma_0(z), \tag{19}$$

где $\gamma_0(z)$ — функция, аналитическая в каждом секторе S_τ, на которые окрестность точки $\tau \in \Gamma$ разбивается контуром Γ.

Множитель $\alpha_\tau + i\beta_\tau$ выражается суммой

$$\alpha_\tau + i\beta_\tau = \sum_{\tau} \frac{\mp \ln G(\tau)}{2\pi i}. \tag{20}$$

Легко видеть, что

$$\begin{cases} \alpha_\tau = \displaystyle\sum_\tau \alpha_\tau^0 = -\frac{1}{\pi}\sum_\tau \big(\arg G(\tau+0) - \arg G(\tau-0)\big), \\ \beta_\tau = \displaystyle\sum_\tau \beta_\tau^0 = -\frac{1}{2\pi}\sum_\tau \ln\left|\frac{G(\tau+0)}{G(\tau-0)}\right|. \end{cases} \tag{21}$$

Пусть существует рациональная функция, определенная формулой

$$\Pi(z) = \prod_{\tau\in F} (z-\tau)^{\lambda_\tau}, \tag{22}$$

где показатели λ_τ — целые числа, удовлетворяющие условию

$$-1 < \alpha_\tau^0 + \lambda_\tau < 1, \quad \tau = \tau_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{23}$$

Очевидно, что функция

$$X(z) = \Pi(z)\, e^{\gamma(z)} \tag{24}$$

представляет собой каноническую функцию, которая в силу неравенства (23) удовлетворяет второму условию (13).

Решение $X(z)$ не вполне определяется условиями (23); оно определяется однозначно лишь в том случае, когда α_τ^0 — целое число, и тогда $\lambda_\tau = -\alpha_\tau^0$.

По терминологии Н. И. Мусхелишвили (см. [6, с. 256]) узлы $\tau = \tau_j$, $j = \overline{1, m}$, для которых α_τ^0 — целое число, назовем *особенными*, остальные узлы — *неособенными*.

Целое число

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \tag{25}$$

мы назовем *индексом задачи*. При этом индекс $\varkappa$ не зависит от выбора значений функции $\ln G(t)$, так как

$$G(t) \in H(\Gamma_j), \;\; j = \overline{1, m}, \quad \Gamma = \sum_{j=1}^{m} \Gamma_j.$$

Из (24) следует, что $X(z)$ имеет на бесконечности порядок $-\varkappa$, т.е. нуль порядка $\varkappa$ при $\varkappa > 0$ и полюс порядка $-\varkappa$, если $\varkappa < 0$; при $\kappa = 0$ имеем $X(\infty) = 1$. Во всех случаях

$$\lim_{z \to \infty} z^{\varkappa} X(z) = 1. \tag{26}$$

Найдем граничные значения канонического решения $X(z)$. Применяя к (24) формулы Сохоцкого—Племеля, получаем

$$X^+(t) = \sqrt{G(t)}\, X(t), \quad X^-(t) = \frac{X(t)}{\sqrt{G(t)}}, \tag{27}$$

где ветвь корня $\sqrt{G(t)}$ фиксируется формулой $\sqrt{G(t)} = e^{(\ln G(t))/2}$.

Таким образом, $X(t)$ принадлежит классу $H^*(\Gamma)$, а также классу $H(\Gamma)$ в окрестностях узлов τ_j, $j = \overline{1, m}$, и обращается в нуль на них. Наконец, в окрестностях особенных узлов она принадлежит классу H_ε^*, оставаясь ограниченной.

Тогда функция

$$\phi(z) = X(z)\, p(z), \tag{28}$$

где $p(z)$ — произвольный полином, представляет собой также решение задачи из данного класса. Верно и обратное: всякое решение $\phi(z)$ из данного класса дается формулой (28) при надлежащем выборе полиномов $p(z)$. Действительно, из равенств

$$\phi^+(t) = G(t)\, \phi^-(t), \quad X^+(t) = G(t)\, X^-(t)$$

получаем

$$\frac{\phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\phi^-(t)}{X^-(t)} \quad \text{на } \Gamma$$

в обыкновенных точках Γ_j, $j = \overline{1, m}$, как предельные значения функции, голоморфной во всей плоскости, кроме (может быть) узлов и точки $z = \infty$. Вблизи узлов она может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы; следовательно, узлы — устранимые особые точки. Так как $\phi(z)$ имеет на бесконечности конечный порядок, то

$$\frac{\phi(z)}{X(z)} \text{ — полином.}$$

Утверждение доказано.

Используя каноническую функцию $X(z)$, на основе равенства $X^+(t) = G(t)\, X^-(t)$ получим

$$\frac{\phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{\tilde{g}(t)}{X^+(t)} \quad \text{на } \Gamma.$$

Так как по условию функция $\phi(z)$ остается ограниченной вблизи узлов, на которых $X(z)$ обращается в нуль в этих узлах, то вблизи узлов

$$\left|\frac{\phi(z)}{X(z)}\right| < \frac{c}{|z-\tau|^{\alpha}}, \quad 0<\alpha<1.$$

Следовательно, $\phi(z)/X(z)$ — кусочно голоморфная функция, которая имеет конечный порядок на бесконечности.

Таким образом, задача (12) приводится к задаче о скачке из теории краевых задач аналитических функций, решение которой можно выписывать явным образом (см. [6, с. 311]).

Мы остановимся на классе решений, исчезающих на бесконечности, которое часто используется в приложениях:

$$\phi(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\widetilde{g}(\tau)}{X^{+}(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-z} + X(z)\,P_{\varkappa-1}(z) & \text{при } \varkappa \geqslant 0, \\ \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\widetilde{g}(\tau)}{X^{+}(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-z} & \text{при } \varkappa < 0, \end{cases} \tag{29}$$

где $X^{\pm}(z)$ определяется как предельное значение канонической функции (24), $P_{\varkappa-1}(z)$ — полином степени не выше $\varkappa-1$ с произвольными комплексными коэффициентами, $P_{\varkappa-1}(z)=0$ при $\varkappa<0$.

При $\varkappa<0$ решение данного класса существует тогда и только тогда, когда выполняется еще следующее условие:

$$\int_{\Gamma} \frac{\tau^{k}\,\widetilde{g}(\tau)}{X^{+}(\tau)}\,d\tau = 0, \quad k=1,2,\ldots,-\varkappa-1. \tag{30}$$

Как следует из интегрального представления (4), решение исчезает в бесконечно удаленной точке. Подставляя в краевое условие (10) равенство $\phi^{\pm}(\infty)=0$, получим $g(\infty)=0$. Следовательно, чтобы задача линейного сопряжения для полуплоскости имела решение, исчезающее на бесконечности, свободный член краевого условия должен на бесконечности обращаться в нуль. Это выполнимо при $g(t)=o\big(|t|^{-\delta}\big)$ при $t\to\infty$, где $\delta>0$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теорем* 1 *и* 3 *и условия задачи линейного сопряжения. Тогда в случае* $\varkappa=\operatorname{Ind}G(t)>0$ *задача линейного сопряжения безусловно разрешима, и при этом общее решение уравнения* (1) *дается формулой*

$$u(z) = e^{\Omega_1}\cdot\left[\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\widetilde{g}(\tau)}{X^{+}(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-z} + X(z)\,P_{\varkappa-1}(z) + Tf^{0}\right], \tag{31}$$

причем это решение зависит линейно от $\varkappa$ *произвольных постоянных.*

В случае $\varkappa=\operatorname{Ind}G(t)<0$ *решение данного класса, исчезающее на бесконечности, существует тогда и только тогда, когда выполнено условие* (30)*, выражающее, что* $\phi(\infty)=0$*. При соблюдении этих условий единственное решение задачи дается формулой* (31) *с* $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$*.*

Кроме того, функция $u(z)$ *в особых точках* $z=0$ *и* $z=\infty$*, а также в узловых точках* $\tau=\tau_j\in F$ *контура* Γ *имеет следующее поведение*:

$$u(z) = \begin{cases} O\big(e^{-\operatorname{Re}\Omega_1(z)}\big) & \textit{при } z\to 0, \\ O\big((z-\tau_j)^{\varepsilon_j}\big) & \textit{при } z\to\tau_j,\ j=\overline{1,m},\ \textit{где } -1<\varepsilon_j, \\ O(1) & \textit{при } z\to\infty. \end{cases} \tag{32}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.

4. *Мещерякова Е. С., Солдатов А. П.* Задача Римана—Гильберта в семействе весовых пространств Гёльдера// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 4. — С. 518–527.
5. *Михайлов Л. Г.* Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. — Душанбе, 1963.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
7. *Раджабов Н. Р.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.
8. *Расулов А. Б., Солдатов А. П.* Краевая задача для обобщенного уравнения Коши—Римана с сингулярными коэффициентами// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 5. — С. 637–650.
9. *Солдатов А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I// Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — *63*, № 1. — С. 1–189.
10. *Солдатов А. П.* Об интеграле Помпею и некоторых его обобщениях// Вестн. ЮУрГУ. Мат. модел. програм. — 2021. — *14*, № 1. — С. 53–67.
11. *Усманов З. Д.* Обобщенные системы Коши—Римана с сингулярной точкой. — Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1993.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Расулов Абдурауф Бабаджанович
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
E-mail: rasulzoda55@gmail.com, RasulovAB@mpei.ru

Наталья Витальевна Якивчик
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
E-mail: YakivchikNV@mpei.ru