ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 107–114
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-107-114

УДК 517.977, 519.7

l-ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. **С. С. ПОСТНОВ**

Аннотация. Рассматриваются многомерные динамические системы, состояние которых описывается системой линейных дифференциальных уравнений дробного порядка и при этом в каждом из уравнений системы порядок оператора дробного дифференцирования разный. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто или в смысле Римана—Лиувилля. Исследуются задачи оптимального управления и оптимального оценивания состояния для рассматриваемых систем. Показано, что при определённых условиях обе задачи сводятся к l-проблеме моментов. Для полученной проблемы проверены условия разрешимости и в ряде случаев построены точные решения.

Ключевые слова: оптимальное управление, оптимальное оценивание, динамическая система, дробная динамика, дробная производная, l-проблема моментов.

l-PROBLEM OF MOMENTS IN PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL AND STATE ESTIMATION FOR MULTIDIMENSIONAL FRACTIONAL LINEAR SYSTEMS

© 2024 **S. S. POSTNOV**

Abstract. In this paper, we consider multidimensional dynamical systems whose states are described by systems of linear fractional differential equations of different order. We examine problems of optimal control and optimal state estimation for systems with the Caputo and Riemann–Liouville fractional differentiation operators. We prove that under certain conditions both problems can be reduced to the l-problem of moments. For the resulting problem, the solvability conditions are verified and, in a number of cases, exact solutions are constructed.

***Keywords and phrases*:** optimal control, optimal estimation, dynamical system, fractional dynamics, fractional derivative, l-problem of moments.

***AMS Subject Classification*:** 49N05, 49J21, 34K35, 34A08

1. Введение. Как известно, метод моментов широко применяется для поиска управления, оптимального в смысле минимальности нормы управления или времени перехода в заданное состояние при явном ограничении на норму управления (см. [2, ч. 2]). С помощью этого метода возможно построить точное решение задач оптимального управления для линейных (по управлению) систем с сосредоточенными параметрами, а также приближённые решения для линейных (по управлению) систем с распределёнными параметрами (см. [1, гл. 3]). Данный метод применим и к исследованию задач оптимального управления системами, которые описываются дифференциальными уравнениями дробного порядка (см. [3]).

Н. Н. Красовским было рассмотрено иное применение метода моментов: задача «наблюдения в случайных обстоятельствах» или оценивания состояния некоторой системы по результатам наблюдений в условиях действия внешних возмущений (см. [2, § 46]). Аналогичная задача была исследована и для одно- и двумерных линейных систем дробного порядка (см. [4]).

Ранее задачи оптимального управления и оценивания состояния системы были рассмотрены для линейных одномерных систем дробного порядка и для некоторых двумерных и многомерных систем частного вида (см. [3, 4] и ссылки в этих работах). В настоящей работе аналогичное исследование проводится для более общего случая линейных многомерных систем произвольной конечной размерности с коэффициентами, зависящими от времени, и различным порядком операторов дробного дифференцирования в каждом из уравнений, описывающих поведение системы.

2. Предварительные сведения. Рассматриваются многомерные линейные динамические системы дробного порядка, поведение которых описывается уравнением следующего вида:

$$ {}_{t_0}D_t^{\alpha_i} q_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) q_j(t) + u_i(t) + f_i(t), \quad t \in (t_0, T], \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1} $$

где ${}_{t_0}D_t^{\alpha_i}$ — оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha_i \in (0,1)$, $q_i(t)$ — компоненты вектора состояния системы, $u_i(t)$ — компоненты вектора управления, $f_i(t)$ — компоненты вектора возмущения, $a_{ij}(t)$ — коэффициенты, в общем случае зависящие от времени. Оператор дробного дифференцирования в формуле (1) понимается либо в смысле Римана—Лиувилля, либо в смысле Капуто (см. [6, Ch. 2]). Соответственно, начальные условия для системы (1) ставятся либо в нелокальном, либо в локальном виде:

$$ \lim_{t \to t_0+} \left[{}_{t_0}I_t^{1-\alpha_i} q_i(t) \right] = q_i^0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2} $$

$$ q_i(t_0) = q_i^0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3} $$

где ${}_{t_0}I_t^{1-\alpha_i}$ — оператор дробного интегрирования Римана—Лиувилля (см. [6, Ch. 2]).

В [5, Theorems 5, 6] получены аналитические решения уравнения (1) с начальными условиями (2) или (3), которые могут быть записаны в виде

$$ q_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \left(\tilde{Z}_{ij}(t, t_0) q_j^0 + \int_{t_0}^{t} Z_{ij}(t, \tau) \left[u_j(\tau) + f_j(\tau) \right] d\tau \right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4} $$

где $\tilde{Z}_{ij}(t, t_0) = Z_{ij}(t, t_0)$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (1) понимается в смысле Римана—Лиувилля, и $\tilde{Z}_{ij}(t, t_0) = {}^{C}Z_{ij}(t, t_0)$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (1) понимается в смысле Капуто. Функции $Z_{ij}(t, t_0)$ и ${}^{C}Z_{ij}(t, t_0)$ в общем случае вычисляются как решение однородного уравнения (1) с оператором дробного дифференцирования Римана—Лиувилля и Капуто соответственно (см. [5, Sec. 4]). Для функций $Z_{ij}(t, \tau)$ справедлива следующая оценка (см. [5, Lemma 5]):

$$ |Z_{ij}(t, \tau)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(t - \tau)^{1-\alpha_i}}. \tag{5} $$

Сформулируем l-проблему моментов, к которой далее будут сведены задачи оптимального управления и оценивания состояния.

l-Проблема моментов. Пусть дана система функций $g_n(t) \in L_{p'}(t_0, T]$, $p' \geqslant 1$, и набор чисел c_n, $n = 1, \ldots, N$ (называемых моментами), хотя бы одно из которых отлично от нуля. Необходимо построить такую функцию $u(t) \in L_p(t_0, T]$, $p > 1$, $1/p + 1/p' = 1$, что выполняются соотношения:

$$ \int_{t_0}^{T} g_n(T, \tau) u(\tau) d\tau = c_n(T), \tag{6} $$

$$ \|u\|_{L_p(t_0, T]} \leqslant l. \tag{7} $$

Следует отметить, что функции $g_n(T,t)$ и $u(t)$ могут быть и вектор-функциями: $g_n(T,t) = \big(g_n^1(T,t),\ldots,g_n^N(T,t)\big)$, $u(t) = \big(u^1(t),\ldots,u^N(t)\big)$.

Проблема моментов вида (6)–(7) разрешима, если выполнено одно из эквивалентных условий (см. [1,2]):

(i) функции $g_n(\tau)$ линейно независимы или среди них можно выделить подсистему линейно независимых функций;

(ii) выполняется неравенство $\Lambda_N > 0$, где число Λ_N определяет минимальное значение нормы (7) и находится из условия

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_N}\left(\int\limits_0^T \sum_{k=1}^N \left|\sum_{i=1}^N \xi_i g_i^k(t)\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} = \frac{1}{\Lambda_N}, \tag{8}$$

где ξ_i — такие числа, что

$$\sum_{i=1}^N \xi_i c_i = 1. \tag{9}$$

Решением l-проблемы моментов, обладающим минимальной нормой, является вектор-функция, компоненты которой имеют следующий вид:

$$u^k(t) = \Lambda_N^{p'}\left|\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i^k(t)\right|^{p'-1} \operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i^k(t)\right), \quad t\in(t_0,T], \quad k=1,\ldots,N, \tag{10}$$

где ξ_i^* — числа, доставляющие минимум в задаче (8)-(9).

Решением l-проблемы моментов, обладающим минимальным носителем, является вектор-функция, компоненты которой имеют следующий вид:

$$u^k(t) = l^{p'}\left|\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i^k(t)\right|^{p'-1} \operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i^k(t)\right), \quad t\in(t_0,T^*], \quad k=1,\ldots,N, \tag{11}$$

где T^* определяется как минимальное вещественное положительное значение T, для которого выполнено неравенство $\Lambda_N \leqslant l$.

Следует отметить, что моменты c_n, вообще говоря, параметрически зависят от T, что определяет (в соответствии с (9)) и зависимость от данного параметра чисел ξ_i^*.

3. Задача оптимального управления. Будем рассматривать следующую формулировку задачи оптимального управления. Найти управление $u(t)\in L_p(t_0,T]$, чтобы система (1) перешла из начального состояния, определяемого условиями (2) или (3), в конечное состояние, определяемое условием

$$q(T) = q^T, \tag{12}$$

и при этом было выполнено одно из следующих требований:

(i) норма управления $\|u(t)\|_{L_p(t_0,T]}$ была минимальной (среди всех допустимых управлений) при заданном времени T;

(ii) время T было минимальным при заданном ограничении (7) на норму управления.

Теорема 1. *Пусть справедливы следующие выражения*:

$$c_n(T) = q_n(T) - \sum_{k=1}^N\left(\tilde Z_{nk}(T,t_0)q_k^0 - \int\limits_{t_0}^T Z_{nk}(T,\tau)f_k(\tau)d\tau\right), \tag{13}$$

$$g_n^k(T,\tau) = Z_{nk}(T,\tau), \quad n=1,\ldots,N. \tag{14}$$

Поставленная выше задача оптимального управления сводится к проблеме моментов (6)–(7), *где моменты* $c_n(T)$ *и функции* $g_n(T,\tau)$ *определяются выражениями* (13) *и* (14) *соответственно, при выполнении следующих условий:*

$$\alpha_n > \frac{1}{p}, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Доказательство. Воспользуемся формулами (4) и запишем решение системы (1) в момент времени $t = T$:

$$q_n(T) = \sum_{k=1}^{N} \left(\tilde{Z}_{nk}(T,t_0) q_k^0 + \int\limits_{t_0}^{T} Z_{nk}(T,\tau) \left[u_k(\tau) + f_k(\tau) \right] d\tau \right), \quad n = 1, \ldots, N.$$

Данное выражение с учётом обозначений (13) и (14) может быть переписано в виде проблемы моментов (6). Теперь необходимо убедиться, что функции, определяемые выражением (14), являются элементами пространства $L_{p'}(t_0, T]$, $p' > 1$. Оценим норму этих функций в пространстве $L_{p'}(t_0, T]$, воспользовавшись неравенством (5):

$$\left(\int\limits_{t_0}^{T} \left| \sum_{k=1}^{N} Z_{nk}(T,\tau) \right|^{p'} d\tau \right)^{1/p'} \leqslant N \left(\int\limits_{t_0}^{T} \left| \frac{\text{const}}{(T-\tau)^{1-\alpha_n}} \right|^{p'} d\tau \right)^{1/p'}.$$

Выражение в правой части будет ограничено при выполнении условий (15). Теорема доказана. □

Замечание 1. Условия (15) обобщают условия, полученные в [3,4] при рассмотрении частных случаев системы (1).

Следствие 1. *Пусть матрица* $Z(T,\tau)$ *имеет хотя бы один ненулевой элемент (и, следовательно, в системе функций* $g_n(T,\tau)$ *можно выделить подсистему линейно независимых функций) и условия* (15) *выполнены. Тогда проблема моментов* (6)–(7), *где моменты* $c_n(T)$ *и функции* $g_n(T,\tau)$ *определяются выражениями* (13) *и* (14) *соответственно, является разрешимой, и её решение определяется формулами* (10)–(11).

Следствие 2. *Пусть матрица* $A = \|a_{nk}\|_1^N$ *не зависит от времени. В этом случае элементы матрицы* $Z(T,\tau)$ *выражаются формулой*

$$Z_{nk}(T,\tau) = \frac{E_{\alpha_n,\alpha_n}\left[a_{nk}(T-\tau)^{\alpha_n} \right]}{(T-\tau)^{\alpha_n}}.$$

(см. [5]). *Если выполнены условия* (15), *то проблема моментов* (6)–(7), *где моменты* $c_n(T)$ *и функции* $g_n(T,\tau)$ *определяются выражениями* (13) *и* (14) *соответственно, будет разрешимой даже в случаях, когда матрица* A *является нулевой или вырожденной.*

4. Задача оценивания состояния системы. Рассмотрим теперь ситуацию, когда динамика некоторой системы описывается системой уравнений (1) при $u(t) = f(t) = 0$, но состояние $q(t)$ недоступно для непосредственного измерения, а может быть восстановлено с определённой погрешностью по результатам измерения состояния $z(t)$ другой системы, динамика которой подчиняется одномерному уравнению:

$${}_{t_0}D_t^{\beta} z(t) = F(t) z(t) + \sum_{n=1}^{N} G_n(t) q_n(t) + \Delta(t), \quad t \geqslant t_0, \tag{16}$$

где ${}_{t_0}D_t^{\beta}$ — оператор дробного дифференцирования порядка $\beta \in (0,1)$, понимаемый, как и выше, в смысле либо Капуто, либо Римана—Лиувилля; $\Delta(t)$ — внешнее возмущение; $F(t)$ и $G_n(t)$ — зависящие от времени коэффициенты, $n = 1, \ldots, N$. Будем далее называть функцию $z(t)$ наблюдением.

Примем, что возмущение $\Delta(t)$ представляет собой последовательность δ-импульсов, моменты появления которых t_i подчиняются распределению Пуассона с математическим ожиданием λ (как и в [2, § 46]):

$$\Delta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i \delta(t - t_i), \tag{17}$$

η_i — случайные величины, принимающие с одинаковой вероятностью значения $\pm\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Начальные условия для наблюдения поставим, как и выше, в локальном или нелокальном виде для случаев, когда оператор ${}_{t_0}D_t^{\beta}$ понимается в смысле Капуто или Римана—Лиувилля соответственно:

$$\lim_{t \to t_0+} \left[{}_{t_0}^{RL}I_t^{1-\beta} z(t) \right] = z^0, \tag{18}$$

$$z(t_0) = z^0. \tag{19}$$

Поставим следующую задачу оценивания состояния системы, аналогичную рассмотренной Н. Н. Красовским задаче о «наблюдении в случайных обстоятельствах» для систем целого порядка (см. [2, § 46]): найти оптимальную операцию $\varphi\,[t, z(t)]$, восстанавливающую компоненту состояния системы $q_i(t)$ по наблюдению $z(t)$ с наименьшей возможной погрешностью w,

$$q_i(t) = \varphi\,[t, z(t)] + w, \tag{20}$$

$$M\{w^2\} \to \min, \tag{21}$$

где $M\{w^2\}$ — математическое ожидание погрешности w. При этом должно выполняться условие $w = 0$ при $\Delta(t) = 0$.

Замечание 2. Можно пополнить вектор $q(t)$ компонентой $z(t)$ и в этом случае рассматривать поставленную задачу оценивания состояния системы как задачу восстановления одной из координат нового (пополненного) вектора по набору других.

Используя формулу (4) в одномерном случае и заменяя функции $q_i(t)$ и $Z_{ij}(t, \tau)$ на функции $z(t)$ и $Q(t, \tau)$, а неоднородность $u_i(t) + f_i(t)$ на неоднородность $\sum\limits_{n=1}^{N} G_n(t) q_n(t) + \Delta(t)$, запишем решение уравнения (16):

$$z(t) = \tilde{Q}(t, t_0) z^0 + \int\limits_{t_0}^{t} Q(t, \tau) \left[\sum_{n=1}^{N} G_n(\tau) q_n(\tau) + \Delta(\tau) \right] d\tau, \tag{22}$$

где $\tilde{Q}(t, t_0) = Q(t, t_0)$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (16) понимается в смысле Римана—Лиувилля, и $\tilde{Q}(t, t_0) = {}^{C}Q(t, t_0)$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (16) понимается в смысле Капуто. Функции $Q(t, t_0)$ и ${}^{C}Q(t, t_0)$ в общем случае вычисляются как решение однородного уравнения (16) с оператором дробного дифференцирования Римана—Лиувилля и Капуто соответственно (см. [5, Sec. 4]). Для функций $Q(t, \tau)$ справедлива оценка вида (5).

Первое слагаемое в формуле (22) не зависит ни от состояния $q(t)$, ни от возмущения $\Delta(t)$, поэтому можно рассматривать задачу оценивания для функции

$$\Xi(t) = z(t) - \tilde{Q}(t, t_0) z^0 = \int\limits_{t_0}^{t} Q(t, \tau) \left[\sum_{n=1}^{N} G_n(\tau) q_n(\tau) + \Delta(\tau) \right] d\tau. \tag{23}$$

Соответственно, поставленная выше задача оптимального оценивания состояния может быть переформулирована: найти оптимальную операцию $\varphi\left[\Xi(t)\right]$, такую что

$$\varphi\left[\int\limits_{t_0}^{t} Q(t,\tau)\sum_{n=1}^{N} G_n(\tau)q_n(\tau)d\tau\right] = q_i(t), \tag{24}$$

$$M\left\{\left[\varphi\left[\int\limits_{t_0}^{t} Q(t,\tau)\Delta(\tau)d\tau\right]\right]^2\right\} \to \min. \tag{25}$$

Будем искать оптимальную операцию $\varphi\left[t, z(t)\right]$ в виде

$$\varphi\left[t, z(t)\right] = \varphi\left[\Xi(t)\right] = \int\limits_{t_0}^{t} \Xi(\tau)dV(\tau), \tag{26}$$

где $V(t)$ — некоторая функция с ограниченным изменением.

Теорема 2. *Пусть* $G_n(\tau) \in C^1_{\gamma_n} = \left\{f(t) = (t-t_0)^{\gamma_n}\tilde{f}(t), \tilde{f} \in C^1(t_0,\infty)\right\}$, $G_n(\tau)$ *отлична от константы* 0 *на интервале* $(t_0,t]$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \tilde{Z}_{ij}(t,t_0)q_j^0 \neq 0$ *и выполнены следующие условия*:

$$\gamma_n + \alpha_n > \frac{1}{2}, \quad n = 1,\ldots,N. \tag{27}$$

Тогда поставленная задача оценивания (24)–(25) *при фиксированном* t *эквивалентна следующей проблеме моментов*: *найти такую функцию* $U(t,\zeta) \in L_2(0,t]$ *с минимальной нормой, что*

$$\int\limits_{t_0}^{t} g(\zeta)U(t,\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{N} \tilde{Z}_{ij}(t,t_0)q_j^0, \quad \zeta \in (t_0,t], \tag{28}$$

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{N} G_n(\zeta)\sum_{k=1}^{N} \tilde{Z}_{nk}(\zeta,t_0)q_k^0, \tag{29}$$

$$U(t,\zeta) = \int\limits_{\zeta}^{t} Q(\tau,\zeta)dV(\tau). \tag{30}$$

Доказательство. Перепишем формулу (24) с учётом (26) и поменяем в полученном выражении порядок интегрирования:

$$\int\limits_{t_0}^{t}\left[\int\limits_{t_0}^{\tau} Q(\tau,\zeta)\sum_{n=1}^{N} G_n(\zeta)q_n(\zeta)d\zeta\right]dV(\tau) = \int\limits_{t_0}^{t}\sum_{n=1}^{N} G_n(\zeta)q_n(\zeta)d\zeta\left[\int\limits_{\zeta}^{t} Q(\tau,\zeta)dV(\tau)\right] = q_i(t). \tag{31}$$

Внутренний интеграл в полученном выражении представляет собой функцию $U(t,\zeta)$ (см. (30)). Тогда будем иметь

$$\int\limits_{t_0}^{t} U(t,\zeta)\sum_{n=1}^{N} G_n(\zeta)q_n(\zeta)d\zeta = q_i(t). \tag{32}$$

Функция $q_i(t)$ является решением уравнения (1) при $u_i(t) = f_i(t) = 0$ с начальным условием (2) или (3) и может быть записана в явном виде с помощью формулы (4). Подставив получившееся выражение в уравнение (32) и выражение в правой части отличным от нуля, получим выражение (28), где функция $g(\zeta)$ определяется формулой (29).

Рассмотрим теперь величину в фигурных скобках в выражении (25). Используя выражение (26), можно, по аналогии с выражением (31), поменять порядок интегрирования и получить формулу:

$$\left[\varphi\left[\int_{t_0}^{t} Q(t,\tau)\Delta(\tau)d\tau\right]\right]^2 = \left[\int_{t_0}^{t} \Delta(\zeta)U(t,\zeta)d\zeta\right]^2.$$

Возмущение (17), как указывалось выше, представляет собой последовательность δ-импульсов, моменты появления которых подчиняются распределению Пуассона, а амплитуды с одинаковой вероятностью принимают значение $\pm\varepsilon$. В [2, § 46] было показано, что для такой модели возмущения справедливо соотношение

$$M\left\{\left[\int_{t_0}^{t} \Delta(\zeta)U(t,\zeta)d\zeta\right]^2\right\} = \varepsilon^2\lambda\int_{t_0}^{t} U^2(t,\zeta)d\zeta = \varepsilon^2\lambda\|U\|^2_{L_2(t_0,t]}. \tag{33}$$

Таким образом, требование минимизации погрешности (25) в данном случае эквивалентно требованию минимизации нормы функции $U(t,\zeta)\in L_2(t_0,t]$.

Итак, показано, что исходная задача (24)–(25) при фиксированном t эквивалентна одномерной проблеме моментов вида (28) для функции $U(t,\zeta)\in L_2(t_0,t]$, определяемой формулой (30), относительно известной функции $g(\zeta)$, определяемой формулой (29), и момента $c=\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{Z}_{ij}(t,t_0)q_j^0$, который по условию теоремы отличен от нуля.

Поскольку $\sum\limits_{j=1}^{N}\tilde{Z}_{ij}(t,t_0)q_j^0$ и $G_n(\tau)$ отлична от константы 0, то функция $g(\zeta)$ на полуинтервале $(t_0,t]$ отлична от нуля. Для нормы функции $g(\zeta)$ в пространстве $L_2(t_0,t]$ справедливо неравенство

$$\|g\|_{L_2(t_0,t]} \leqslant \sum_{n,k=1}^{N}\left|q_j^0\right|\left\|G_n(\zeta)\tilde{Z}_{nk}(\zeta,t_0)\right\|_{L_2(t_0,t]}. \tag{34}$$

По условию теоремы $G_n(\tau)\in C^1_{\gamma_n}=\left\{f(t)=(t-t_0)^{\gamma_n}\tilde{f}(t),\tilde{f}\in C^1(t_0,\infty)\right\}$, также справедлива оценка (5); следовательно, при выполнении условий (27) выражение в правой части неравенства (34) будет ограничено. Следовательно, норма функции $g(\zeta)$ в пространстве $L_2(t_0,t]$ будет определена. Теорема доказана. $\square$

Следствие 3. *Можно непосредственно убедиться, что в одномерном случае задача условной оптимизации* (8)–(9) *имеет единственное решение:*

$$\Lambda = \frac{|c|}{\|g\|_{L_2(t_0,t]}}.$$

Если теорема 2 справедлива и норма $\|g\|_{L_2(t_0,t]}$ *определена, то* $\Lambda>0$, *и проблема моментов* (28) *разрешима.*

Замечание 3. Если рассматривать более общий случай $U\in L_p(t_0,t]$, $p>1$, $g\in L_{p'}(t_0,t]$, $p'\geqslant 1$, $1/p+1/p'=1$, то условия (27) запишутся в виде

$$\gamma_n+\alpha_n>\frac{1}{p},\quad n=1,\ldots,N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

3. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование// Автомат. телемех. — 2014. — № 5. — С. 3–17.
4. *Постнов С. С.* Об использовании метода моментов для оптимального оценивания состояния систем дробного порядка с возмущением импульсного типа// Пробл. мат. анал. — 2023. — № 121. — С. 93–102.
5. *Bourdin L.* Cauchy–Lipschitz theory for fractional multi-order dynamics: State-transition matrices, Duhamel formulas and duality theorems// Differ. Integral Equations. — 2018. — *31*, № 7–8. — P. 559–594.
6. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Постнов Сергей Сергеевич
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, Москва
E-mail: `postnov.sergey@inbox.ru`